BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC DÂN LẬP HẢI PHÒNG

NGUYỄN ĐỨC BÌNH

TÍNH TOÁN ỔN ĐỊNH UỐN DỌC CỦA HỆ THANH BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

LUẬN VĂN THẠC SĨ KỸ THUẬT

CHUYÊN NGÀNH: KỸ THUẬT XÂY DỰNG CÔNG TRÌNH DÂN DỤNG & CÔNG NGHIỆP; MÃ SỐ: 60.58.02.08

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

PGS. TS. ĐOÀN VĂN DUẨN

HẢI PHÒNG, 11 NĂM 2018

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các số liệu, kết quả trong luận văn là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Tác giả luận văn

Nguyễn Đức Bình

LỜI CẢM ƠN

Tác giả luận văn xin trân trọng bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất đối với PGS. TS. Đoàn Văn Duẩn đã tận tình giúp đỡ và cho nhiều chỉ dẫn khoa học có giá trị cũng như thường xuyên động viên, tạo mọi điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu hoàn thành luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn các nhà khoa học, các chuyên gia trong và ngoài trường Đại học Dân lập Hải phòng đã tạo điều kiện giúp đỡ, quan tâm góp ý cho bản luận văn được hoàn thiện hơn. Tôi xin trân trọng cảm ơn các cán bộ, giáo viên của Khoa xây dựng, Phòng đào tạo Đại học và Sau đại học - trường Đại học Dân lập Hải phòng, và các đồng nghiệp đã tạo điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tác giả trong quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Cuối cùng tôi xin chân thành cảm ơn đồng nghiệp, đơn vị công tác đã giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và thực hiện Luận văn."

Xin trân trọng cảm ơn!

Hải Phòng, ngày tháng năm 2018

Tác giả

Nguyễn Đức Bình

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU 68
CHƯƠNG1: LÝ THUYẾT ỔN ĐỊNH CÔNG TRÌNH 70
1.1. Khái niệm về ổn định và ổn định công trình 70
1.2. Tầm quan trọng và lịch sử phát triển của lý thuyết ổn định công trình 71
1.3. Các phương pháp xây dựng bài toán ổn định công trình 72
1.3.1 Phương pháp tĩnh học 72
1.3.2 Phương pháp động lực học 73
1.3.3 Phương pháp năng lượng 73
1.4. Các định lí về ổn định và tiêu chuẩn ổn định 74
1.5 Bài toán ổn định uốn dọc của thanh và phương pháp giải 78
1.6 Thuật toán đơn giản để giải phương trình đa thức 83
CHƯƠNG 2: PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN 88
2.1. Các phương trình cơ bản của lý thuyết đàn hồi tuyến tính 88
2.1.1. Khái niệm 88
2.1.2. Các phương trình biến dạng - chuyển vị 88
2.1.3. Phương trình ứng suất - biến dạng 90
2.1.4. Các phương trình cân bằng 97
2.1.5. Các phương trình liên tục 100
2.2. Công thức ma trận của các định lý năng lượng 101
2.2.1. Khái niệm: 101
2.2.2. Công cơ học khả dĩ 101
2.2.3. Năng lượng biến dạng khả dĩ 103
2.2.4. Nguyên lý công khả dĩ 104
2.3. Phương pháp phần tử hữu hạn 105
2.3.1. Hàm nội suy của phần tử 107
2.3.1.1. Hàm nội suy chuyển vị và góc xoay tại hai nút đầu phần tử 107

2.3.1.2. Hàm nội suy lực cắt tại hai nút đầu phần tử 109
2.3.1.2. Ma trận độ cứng của phần tử 110
2.3.2.3. Ma trận độ cứng tổng thể 113
2.3.2.4. Xét điều kiện ngoại lực 114
2.3.2.5. Xác định nội lực 114
CHƯƠNG 3: TÍNH TOÁN ỔN ĐỊNH ĐÀN HỒI CỦA HỆ THANH BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN 115
3.1. Bài toán ổn định của thanh chịu nén 115
3.2. Phương pháp chuyển vị cưỡng bức 117
3.5.2. Tính toán ổn định của hệ thanh bằng phương pháp phần tử hữu hạn 118
KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ 134
TÀI LIỆU THAM KHẢO 68

MỞ ĐẦU

*** Lý do chọn đề tài:**

Trong những công trình xây dựng hiện nay người ta thường dùng các thanh có chiều dài lớn, tấm - vỏ chịu nén và do đó điều kiện ổn định trong miền đàn hồi có tầm quan trọng đặc biệt, đòi hỏi phải nghiên cứu đầy đủ cả về mặt lý thuyết và thực nghiệm. Bài toán ổn định của kết cấu đã được giải quyết theo nhiều hướng khác nhau, phần lớn xuất phát từ nguyên lý năng lượng mà theo đó kết quả phụ thuộc rất nhiều vào cách chọn dạng của hệ ở trạng thái lệch khỏi dạng cân bằng ban đầu.

Phương pháp phần tử hữu hạn là phương pháp được xây dựng dựa trên ý tưởng rời rạc hóa công trình thành những phần tử nhỏ (số phần tử là hữu hạn). Các phần tử nhỏ được nối lại với nhau thông qua các phương trình cân bằng và các phương trình liên tục. Để giải quyết bài toán cơ học kết cấu, có thể tiếp cận phương pháp này theo ba mô hình gồm: Mô hình chuyển vị, xem chuyển vị là đại lượng cần tìm và hàm nội suy biểu diễn gần đúng dạng phân bố của chuyển vị trong phần tử; Mô hình cân bằng, hàm nội suy biểu diễn gần đúng dạng phân bố của ứng suất hay nội lực trong phần tử và mô hình hỗn hợp, coi các đại lượng chuyển vị và ứng suất là hai yếu tố độc lập riêng biệt. Các hàm nội suy biểu diễn gần đúng dạng phân bố của cả chuyển vị lẫn ứng suất trong phần tử.

*** Đối tượng, phương pháp và phạm vi nghiên cứu của luận văn**

Trong luận văn này, tác giả sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn, phương pháp chuyển vị cưỡng bức để xây dựng và giải bài toán ổn định của hệ thanh thẳng chịu tác dụng của tải trọng tĩnh

*** Mục đích nghiên cứu của luận văn:**

Nghiên cứu ổn định đàn hồi của hệ thanh bằng phương pháp phần tử hữu hạn

*** Nhiệm vụ nghiên cứu của luận văn:**

- Trình bày lý thuyết về ổn định và ổn định công trình
- Trình bày phương pháp phần tử hữu hạn, phương pháp chuyển vị cưỡng bức để xây dựng và giải bài toán ổn định của hệ thanh thẳng đàn hồi chịu uốn dọc.

*** Cấu trúc của luận văn:**

Luận văn gồm 3 Chương, Chương 1: Tổng quan về lý thuyết ổn định công trình, Chương 2: Phương pháp phần tử hữu hạn, Chương 3: Tính toán ổn định đàn hồi của hệ thanh bằng phương pháp phần tử hữu hạn.

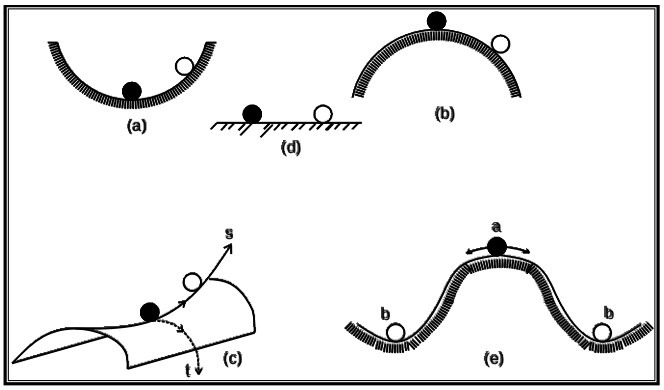
CHƯƠNG1

LÝ THUYẾT ỔN ĐỊNH CÔNG TRÌNH

Trong chương này bàn về lý thuyết ổn định công trình và các phương pháp chung để xây dựng các bài toán ổn định công trình, tiêu chuẩn về ổn định và các phương pháp giải bài toán ổn định công trình.

1.1. Khái niệm về ổn định và ổn định công trình

Một cách hình dung tốt nhất về khái niệm ổn định là ta xét các trường hợp viên bi cứng trên các mặt cầu cứng lõm và lồi, Hình 1.1.



Hình 1.1. Các trường hợp mất ổn định

Rõ ràng là trong trường hợp (a), mặt cầu lõm, sự cân bằng của viên bi là ổn định bởi vì kích nó ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu (đáy cầu) rồi thả ra thì nó sẽ trở về vị trí đáy cầu hoặc lân cận với vị trí đó (nếu có ma sát).

Trong trường hợp (b), mặt cầu lồi, sự cân bằng là không ổn định, bởi vì kích viên bi ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu rồi thả bi ra thì viên bi sẽ không trở lại vị trí ban đầu nữa.Trong trường hợp (c), hình yên ngựa, sự cân bằng là ổn định khi kích viên bi ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu theo phương s và là không ổn định theo phương t.Trong trường hợp (d), kích viên bi ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu thì nó lăn trên mặt phẳng ngang đến khi ngừng chuyển động, nó có vị trí cân bằng mới khác với trạng thái cân bằng ban đầu. Trong trường hợp này ta nói rằng trạng thái cân bằng ban đầu là phiếm định (không phân biệt).

Ở trên ta đã nói đến trạng thái cân bằng của viên bi. Suy rộng rata cũng có thể nói như vậy đối với các trạng thái cân bằng của cơ hệ phức tạp, ví dụ như trạng thái ứng suất và biến dạng, trạng thái nội lực và chuyển vị hoặc là trạng thái năng lượng.

Trở lại hình 1.2a. Khi lệch ra khỏi vị trí cân bằng, trọng tâm của viên bi lên cao, thế năng của nó tăng. Trạng thái cân bằng ổn định là trạng thái có thế năng tối thiểu. Ở hình 1.2b, khi lệch với trị số nhỏ, trọng tâm của viên bi giảm, thế năng của nó giảm. Trạng thái cân bằng không ổn định ứng với thế năng lớn. Hình 1.2d, khi lệch ra khỏi vị trí cân bằng, trọng tâm của viên bi không thay đổi, trạng thái cân bằng là phiếm định hoặc không phân biệt.

Như hình 1.2, để biết được trạng thái cân bằng của cơ hệ có ổn định hay không thì ta phải kích nó ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu. Phương pháp chung để đánh giá sự mất ổn định của cơ hệ là: Đưa hệ ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu của nó và kiểm tra xem nó có tồn tại trạng thái cân bằng mới không. Nếu như tìm được trạng thái cân bằng mới khác với trạng thái cân bằng ban đầu thì hệ là mất ổn định và lực giữ cho hệ ở trạng thái cân bằng mới này gọi là lực tới hạn, trường hợp ngược lại hệ là ổn định.

1.2. Tầm quan trọng và lịch sử phát triển của lý thuyết ổn định công trình

Ngoài việc biết được trạng thái cân bằng của hệ thì còn cần xét xem trạng thái cân bằng đó có phải là trạng thái cân bằng ổn định hay không.Thực tế, có nhiều công trình bị phá hoại do mất ổn định. Lịch sử về công nghệ xây dựng cho thấy không ít tai nạn lớn xảy ra ở các nước khác nhau do khi thiết kế các công trình đó người kỹ sư không xét đến đầy đủ các hiện tượng động cũng như sự mất ổn định. Việc sử dụng thép và các hợp kim có cường độ cao trong những kết cấu hiện đại như kết cấu nhà cao tầng; silo; bể chứa; cầu; tàu thủy và máy bay tất yếu dẫn đến phải sử dụng các cấu kiện thanh, thanh thành mỏng, tấm và vỏ mỏng chịu nén, làm cho hiện tượng mất ổn định đàn hồi trở thành một vấn đề có tầm quan trọng đặc biệt. Thực tế cho thấy nhiều công trình bị sập đổ do mất ổn định, chiếc cầu đường sắt đầu tiên ở Kevđa – Nga là cầu dàn hở đã bị phá hủy năm 1875 do hệ thanh biên trên bị mất ổn định, Cầu dàn Quebéc ở Canada, bị phá hủy vì mất ổn định của thanh chịu nén trong khi xây dựng vào năm 1907[10, trg 5], Cầu Tacoma ở Mỹ xây dựng hoàn thành ngày 1/7/1940 và bị phá hủy 7/11/1940 do bị mất ổn định vì tác dụng của gió [32, trg 277] v.v…

Vấn đề ổn định kết cấu được bắt đầu từ công trình nghiên cứu bằng thực nghiệm do Piter Musschenbroek công bố năm 1729, đã đi đến kết luận

rằng lực tới hạn tỷ lệ nghịch với bình phương chiều dài thanh. Ba mươi năm sau bằng phân tích toán học Leonhard Euler cũng nhận được kết quả như vậy. Đầu tiên các kỹ sư không chấp nhận kết quả thí nghiệm của Piter Musschenbroek và kết quả của lý thuyết Euler ngay cả Culông [31, trg 185] cũng tiếp tục cho rằng độ cứng của cột tỷ lệ thuận với diện tích mặt cắt ngang và không phụ thuộc vào chiều dài thanh. Những quan điểm đó dựa trên các kết quả thí nghiệm của cột gỗ và cột sắt lắp ghép có chiều dài tương đối ngắn, những thanh loại này thường bị phá hoại với tải trọng nhỏ thua tải trọng Euler do vật liệu bị phá hoại mà không phải do mất ổn định ngang gây ra. E.Lamac là người đầu tiên giải thích một cách thỏa đáng sự không phù hợp giữa kết quả lý thuyết và kết quả thực nghiệm, ông ấy chỉ ra rằng lý thuyết Euler là hoàn toàn phù hợp với thực nghiệm khi bảo đảm rằng những giả thiết cơ bản của Euler về xem vật liệu là đàn hồi và điều kiện lý tưởng của các đầu cuối cần phải được bảo đảm. Những thí nghiệm sau này khi người ta rất chú ý bảo đảm của đầu cuối của thanh và bảo đảm cho lực đặt đúng tâm của thanh đã khẳng định tính đúng đắn của công thức Euler.

1.3. Các phương pháp xây dựng bài toán ổn định công trình

1.3.1 Phương pháp tĩnh học

- Tạo cho hệ nghiên cứu một dạng cân bằng lệch khỏi dạng cân bằng ban đầu.

- Xác định trị số lực tới hạn (trị số lực cần thiết giữ cho hệ ở dạng cân bằng mới, lệch khỏi dạng cân bằng đầu). Lực tới hạn xác định từ phương trình đặc trưng (hay còn gọi là phương trình ổn định).

Người nghiên cứu có thể vận dụng nội dung nói trên khi áp dụng: Phương pháp thiết lập và giải phương trình vi phân; Phương pháp thông số ban đầu; Phương pháp lực; Phương pháp chuyển vị; Phương pháp hỗn hợp; Phương pháp sai phân hữu hạn; Phương pháp dây xích; Phương pháp nghiệm đúng tại từng điểm; Phương pháp Bubnov-Galerkin; Phương pháp giải đúng dần.

Trong thực tế, áp dụng các phương pháp tĩnh học để tìm nghiệm chính xác của bài toán ổn định thường gặp nhiều khó khăn và đôi khi không thể thực hiện được.

1.3.2 Phương pháp động lực học

- Lập và giải phương trình dao động riêng của hệ.

- Xác định lực tới hạn bằng cách biện luận tính chất nghiệm của chuyển động: nếu dao động của hệ có biên độ tăng không ngừng theo thời gian thì dạng cân bằng ban đầu là không ổn định; ngược lại, nếu hệ luôn dao động bé quanh vị trí cân bằng ban đầu hoặc tắt dần thì là dạng đó là ổn định.

1.3.3 Phương pháp năng lượng

- Giả thiết trước dạng biến dạng của hệ ở trạng thái lệch khỏi dạng cân bằng ban đầu.

- Xuất phát từ dạng biến dạng đã giả thiết, lập biểu thức thế năng biến dạng và công của ngoại lực để viết điều kiện tới hạn của hệ.

- Từ điều kiện tới hạn, xác định giá trị của lực tới hạn.

Có thể vận dụng các phương pháp năng lượng bằng cách áp dụng: Trực tiếp nguyên lý Lejeune-Dirichlet; Phương pháp Rayleigh-Ritz; Phương pháp Timoshenko.

Do giả thiết trước biến dạng của hệ nên kết quả lực tới hạn tìm được thường là gần đúng và cho kết quả lớn hơn giá trị của lực tới hạn chính xác. Như vậy mức độ chính xác của kết quả theo các phương pháp năng lượng phụ thuộc vào khả năng phán đoán biến dạng của hệ ở trạng thái lệch: hàm chuyển vị được chọn càng gần với đường đàn hồi thực của thanh thì kết quả càng chính xác. Theo cách làm này thì hàm chuyển vị chọn trước thỏa mãn càng nhiều điều kiện biên hình học và tĩnh học càng tốt nhưng ít nhất phải thỏa mãn điều kiện biên tĩnh học.

Đường lối của ba loại phương pháp (phương pháp tĩnh; phương pháp động; phương pháp năng lượng) tuy khác nhau nhưng cho cùng một kết quả đối với hệ bảo toàn.Đối với hệ không bảo toàn, các phương pháp tĩnh và các phương pháp năng lượng dẫn đến kết quả không chính xác, người ta phải sử dụng các phương pháp động lực học.

Hệ bảo toàn tức là những hệ chịu lực bảo toàn. Lực bảo toàn có tính chất sau đây :

- Độ biến thiên công của lực bằng vi phân toàn phần của thế năng.

- Công sinh ra bởi các lực trên các chuyển vị hữu hạn không phụ thuộc vào đường di chuyển của lực mà chỉ phụ thuộc vào vị trí điểm đặt đầu và điểm đặt cuối của lực.

- Tuân theo nguyên lý bảo toàn năng lượng.

Sự xuất hiện của ma sát nội do quan hệ phi đàn hồi hay ma sát ngoại sẽ dẫn đến hệ lực không bảo toàn.

1.4. Các định lí về ổn định và tiêu chuẩn ổn định

Nói đến ổn định của cơ hệ là nói đến ổn định của trạng thái cân bằng,mà trạng thái cân bằng lại là nghiệm của phương trình vi phân, cho nên nói đến ổn định của cơ hệ là nói đến ổn định của nghiệm của phương trình vi phân.

Các phương trình chuyển động cơ học thường là phi tuyến và ta chỉ nghiên cứu các phương trình tuyến tính hoá của chúng. Ví dụ, khitính độ cong của đường độ võng y(x) của dầm chịu uốn ta xem độ võng của dầm là nhỏ so với chiều dài dầm để có thể tính độ cong $\frac{1}{\rho} = -\frac{d^2y}{dx^2}$. Vấn đề đặt ra là kết quả của bài toán tuyến tính hoá có liên quan gì đến bài toán gốc, bài toán phi tuyến. Một cách cụ thể hơn, liệu tải trọng tới hạn P_e của thanh chịu uốn dọc có lớn hơn tải trọng tới hạn khi xét tính phi tuyến của thanh.ổn định cơ hệ là ổn định cân bằng cũng có nghĩa là ổn định của nghiệm của các phương trình tuyến tính hóa.

Đường lối chung để xây dựng bài toán ổn định là đưa hệ ra khỏi vị trí cân bằng và xem có tồn tại trạng thái cân bằng mới không. Trong trường hợp không cần giải bài toán ổn định đến cùng nhưng ta vẫn có thể biết được hệ có ổn định hay không ổn định thông qua các tiêu chuẩn ổn định.

Bài toán ổn định là bài toán phức tạp. Dưới đây trình bày định nghĩa và một số định lý về ổn định và không ổn định (không chứng minh) để hiểu bản chất của ổn định công trình hơn là sử dụng chúng trong tính toán.

Định nghĩa về ổn định

Xét cơ hệ mà vị trí cân bằng của nó được biểu thị qua chuyển vị (hoặc tọa độ) q và vận tốc $\dot{q}$ và được viết như sau: $q_j^0 (j = 1,...,n)$

Vị trí cân bằng $q_j^0 (j = 1,...,n)$ *được gọi là ổn định nếu như đối với mỗi số dương* $\varepsilon > 0$

tìm được số dương $\delta > 0$ *phụ thuộc vào* ε *sao cho ở thời điểm ban đầu t=0 mà có độ lệch:* $\left|q_j(0) - q_j^0\right| < \delta$, $\left|\dot{q}_j(0)\right| < \delta$, *(j=1,…,n)*

thì chuyển vị và vận tốc của hệ ở thời điểm t>0 bất kỳ đều nằm trong lân cận ε *của chúng, nghĩa là:* $\left|q_j(t) - q_j^0\right| < \varepsilon$, $\left|\dot{q}_j(t)\right| < \varepsilon$ *,(j=1,…,n)*

Vị trí cân bằng được gọi là không ổn định nếu như khi vị trí cân bằng ban đầu có độ lệch δ *với* $\delta > 0$ *nhỏ tùy ý:* $\left|q_j(0) - q_j^0\right| < \delta$, $\left|\dot{q}_j(0)\right| < \delta$, *(j=1,…,n)*

mà tại thời diểm $t = t^*$ *tìm được* $\varepsilon > 0$ *thỏa mãn bất đẳng thức*

$\left|q_j(t^\circ) - q_j^0\right| \geq \varepsilon$ *hoặc* $\left[\dot{q}_j(t^*)\right[\geq \varepsilon$

Từ định nghĩa trên cho thấy để nghiên cứu ổn định cân bằng thì đưa hệ ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu của nó và nếu như tìm được vị trí cân bằng mới khác với vị trí cân bằng ban đầu đại lượng ε thì vị trí cân bằng ban đầu là không ổn định.Không được quên rằng trạng thái cân bằng ban đầu phải được xác định trước tiên.

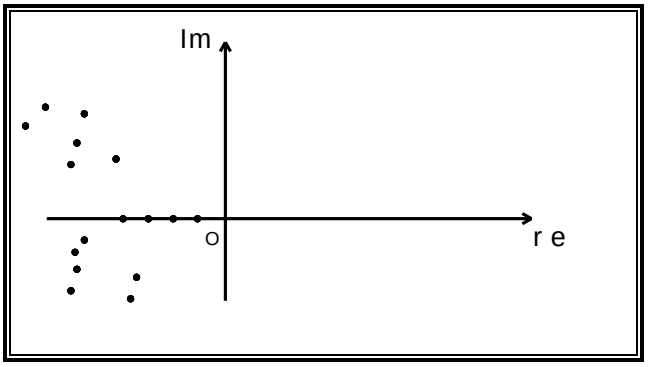
Định lý ổn định Liapunov:

Định lý sau của Liapunov cho biết hệ gốc là ổn định hay không ổn định dựa trên tiêu chuẩn ổn định của hệ phương trình tuyến tính hoá.

Nếu như tất cả các nghiệm của phương trình đặc tính của hệ tuyến tính hóa có các phần thực âm thì vị trí cân bằng của hệ phi tuyến tương ứng là ổn định. Nếu như dù chỉ có một nghiệm nào đó của phương trình

đặc tính có phần thực là dương thì vị trí cân bằng của hệ phi tuyến là không ổn định.

Trên hình 1.6, trình bày nghiệm của phương trình đặc tính trong hệ tọa độ phức. Trục hoành biểu thị phần thực, trục tung biểu thị phần ảo của nghiệm của phương trình đặc tính.



Hình 1.2. Trục tọa độ thực, Re -ảo, Im

Theo định lý trên thì các nghiệm của phương trình đặc tính phải nằm về phía bên trái của trục tung thì hệ ổn định. Nếu như dù chỉ có một nghiệm nằm ở phía bên phải của trục tung thì hệ là không ổn định. Trường hợp có nghiệm nằm ngay trên trục tung nghĩa là phần thực bằng không (nghiệm ảo) thì không kết luận được là hệ ổn định hay không ổn định. Những trường hợp như vậy gọi là trường hợp đặc biệt. ở các trường hợp đặc biệt thì vị trí cân bằng có thể ổn định hoặc không ổn định và vấn đề nghiên cứu trong trường hợp này là bài toán khó khi chỉ xét hệ phương trình tuyến tính hoá mà cần phải xét thêm những thành phần phi tuyến bậc cao hơn.

Định lý Lagrange- Đirichlet:

cơ học giải tích Lagrange cũng như cơ học kết cấu được xây dựng dựa trên hai khái niệm, động năng và thế năng. Cho nên khi giải quyết các bài toán ổn định của kết cấu thường dùng định lý của Lagrange - Đirichlet. Định lý Lagrange- Đirichlet được phát biểu như sau.

Nếu như tại một vị trí nào đó của hệ bảo toàn mà thế năng toàn phần của nó là một hàm liên tục của chuyển vị q có cực tiểu riêng biệt (tại một điểm) thì vị trí đó là vị trí cân bằng ổn định của hệ[46, trg226].

Định lý trên chỉ cho được điều kiện đủ của hệ cân bằng của hệ bảo toàn, bởi vì có trường hợp thế năng toàn phần không có điểm cực tiểu riêng

biệt nhưng hệ vẫn ổn định. Do đó, trong trường hợp này cần phải xét phương trình cân bằng với bậc phi tuyến cao hơn. Từ hai định lý nói trên thấy rằng có những vị trí cân bằng ổn định mà không bảo đảm hai định lý trên cho nên trong những trường hợp như vậy cần chú ý tới hai định lý về không ổn định sau:

Hai định lý về không ổn định của Liapunov

Định lý 1: Nếu như thế năng của hệ bảo toàn ở trạng thái cân bằng không có cực tiểu và nếu như kết luận đó được xác định khi sử dụng các bậc đạo hàm cao hơn trong khai triển thế năng biến dạng theo chuỗi chuyển vị thì vị trí cân bằng đó là không ổn định [46, trg 228].

Định lý 2: Nếu như ở trạng thái cân bằng của hệ bảo toàn mà thế năng biến dạng có điểm cực đại riêng biệt và điều đó được xét khi sử dụng các bậc đạo hàm cao hơn hoặc bằng 2 trong khai triển thế năng biến dạng theo chuỗi chuyển vị thì vị trí cân bằng đó là không ổn định [46].

Hai định lý của Liapunov chỉ ra cho ta thấy, nếu như lời giải tìm được của hệ tuyến tính là không ổn định thì ta chưa vội kết luận là hệ không ổn định mà còn phải xét thêm bậc phi tuyến cao hơn của cơ hệ.

Các định lý nêu trên chỉ xét hệ bảo toàn. Để nghiên cứu ổn định của hệ bảo toàn hoặc không bảo toàn và bài toán ổn định động lực học thì có thể dùng định lý tổng quát sau của Liapunov:

Định lý tổng quát về ổn định của Liapunov

Tìm nghiệm ổn định của hệ phương trình vi phân trạng thái sau:

$\dot{x}_i = X_i(x)$ $(i = 1,...,n)$

(1.1)

Nếu như có thể tìm được một hàm V(x) nào đó mà:

a) Hàm đó có giá trị dương ở lân cận gốc tọa độ và chỉ bằng không ở gốc tọa độ.

b) Đạo hàm toàn phần của hàm ấy theo thời gian tính như sau:

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial x_i} x^{\bullet}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i(x) \qquad (1.2)$$

không dương trong tất cả các điểm lân cận gốc tọa độ thì vị trí cân bằng đó là ổn định. Nếu như còn biết thêm đạo hàm đó mà âm trong tất cả các điểm lân cận gốc tọa độ và chỉ bằng không ở gốc tọa độ thì vị trí cân bằng đó là vị trí cân bằng tiệm cận(tức là khi $t \to \infty$ thì vị trí ấy trở về vị trí cân bằng ban đầu)[23]. Định lý này dùng cho cả hệ bảo toàn và không bảo toàn. Hàm V(x) được gọi là hàm Liapunov.

ý nghĩa của định lý này không chỉ nằm ở chỗ cho người nghiên cứu phương tiện để giải quyết sáng tạo bài toán mà còn nằm ở chỗ dựa trên định lý đó có thể chứng minh về sự ổn định của hệ tuyến tính hoá đã nêu trên.

1.5 Bài toán ổn định uốn dọc của thanh và phương pháp giải

Phương trình cân bằng của thanh thẳng có tiết diện không đổi chịu tác dụng của lực P đặt ở đầu thanh có thể được viết như sau (cách xây dựng phương trình trình bày chi tiết ở chương 2):

$$EJ\frac{d^4y}{dx^4} + P\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \qquad (1.3)$$

Phương trình trên là phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất (không có vế phải).Phương trình dao động tự do của thanh được trình bày ở chương 3 cũng thuộc loại phương trình này. Vì vậy, để tổng quát ở đây trình bày phương pháp chung tìm

nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính bậc n thuần nhất có các hệ số là hằng số [29]:

$$a_0\frac{d^ny}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_ny = 0 \quad (a_0 \neq 0) \qquad (1.4)$$

Để giải phương trình vi phân trên thì giải phương trình đặc tính của nó là:

$$a_0r^n + a_1r^{n-1} + ... + a_{n-1}r + a_n = 0 \qquad (1.5)$$

a) Trường hợp phương trình đặc tính có n nghiệm phân biệt thì nghiệm của phương trình vi phân (a) viết dưới dạng sau:

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + ... + c_n e^{r_n x} \qquad (1.6)$$

Các hệ số c_i được xác định từ điều kiện biên của bài toán

b) Nếu như một nghiệm r_k nào đó có nghiệm lặp lại m_k lần thì thành phần tương ứng trong nghiệm trên được thay bằng

$$(c_k + c_{k1}x + c_{k2}x^2 + ... + c_{k(m_k-1)}x^{m_k-1})e^{r_k x} \qquad (1.7)$$

Trong trường hợp có hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\varphi_{j1}(\frac{d}{dx})y_1 + \varphi_{j2}(\frac{d}{dx})y_2 + ... + \varphi_{jn}(\frac{d}{dx})y_n = 0 \quad (j = 1,\ \ 2,\ \ 3,...n) \qquad (1.8)$$

ở đây $\varphi_{jk}(\frac{d}{dx})$ là đa thức của $(\frac{d}{dx})$. Mỗi hàm $y_k = y_k(x)$ (k=1...n) đều có dạng (1.6) và (1.7), còn các số mũ r_l sẽ là nghiệm của hệ các phương trình đặc tính

$$D(r) \equiv \det\left[\varphi_{jk}(r)\right] = 0 \qquad (1.9)$$

Đây là hệ phương trình đặc trưng của hệ phương trình vi phân. Từ phương trình (1.49) tìm được r_{jk}, đưa các nghiệm y dạng (1.6) và (1.7) vào hệ phương trình (1.48) sẽ xác định được các tương quan của các hệ số, các hệ số tự do được xác định từ các điều kiện biên.Đó là phương pháp chung để giải phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất có hệ số là hằng số.

Trở lại phương trình uốn dọc của thanh. Phương trình (1.3) hoàn toàn giải được bằng cách giải phương trình đặc tính (1.5),tìm nghiệm theo (1.6) và (1.7), các hệ số c của (1.6) và (1.7) xác định từ các điều kiện biên của thanh. Tuy nhiên, một cách giải ngắn gọn hơn khi viết hàm độ võng y của thanh dưới dạng sau

$$y = a\sin(kx) + b\cos(kx) + cx + d \qquad (1.10)$$

$$k = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$$

Thật vậy, đưa hàm (1.10) vào phương tình (1.3) ta thấy phương trình (1.3) được thỏa mãn. Vấn đề còn lại là xác dịnh các hệ số a,b,c,d . Bốn hệ số a,b,c,d của hàm y được xác định tùy theo 4 điều kiện biên y, y', y'', y''' tại hai đầu cuối thanh. Dưới đây trình bày các lời giải thanh có các điều kiện biên khác nhau.

Thanh khớp-khớp

Các điều kiên biên tại liên kết khớp là chuyển vị và momen uốn bằng không. Ta có

$$y(x=0)=0; \frac{d^2y}{dx^2}(x=0)=0 \ ; y(x=l)=0; \frac{d^2y}{dx^2}(x=l)=0$$

Đưa 4 điều kiện trên vào (1.10), nhận được 4 phương trình sau

$$b+d=0; b=0; a\sin(kl)+cl=0; ak^2\sin(kl)=0$$

Ta có $b=c=d=0$, $a\sin(kl)=0$

Nếu $a=0$ thì $y=0$, đó là nghiệm tầm thường của (1.3). Để có được nghiệm không tầm thường ($y\neq 0$), ta cho

$\sin(kl)=0$ hay $kl=n\pi,....(n=1,2,3,...)$

Thay k vào phương trình (1.10) ta có

$$P=\frac{n^2\pi^2EJ}{l^2} \qquad (1.51)$$

Với các giá trị P xác định trên, thanh có trạng thái cân bằng mới, trạng thái uốn dọc với $y=a\sin(\frac{n\pi}{l}x)$ (1.12)

khác với trạng thái ban đầu là trạng thái nén, thanh thẳng. Ta nói thanh mất ổn định và lực P là lực tới hạn Euler. Chú ý rằng với P tới hạn xác định theo (1.11), độ võng (1.12) của thanh vẫn hữu hạn. Tuy nhiên, theo lí thuyết dầm-

cột trình bày ở trên,độ võng của thanh với lực P xác định theo (1.11) sẽ tăng lên vô cùng, nên (1.12)là biểu thức xác định lực tới hạn của thanh. Kixelov cho rằng lực P tới hạn (1.12) vẫn nằm trong miền ổn định.

Để thỏa mãn 4 điều kiện biên y, y', y'', y''' của phương trình (1.3) ta có thể dùng 4 thông số chuyển vị, góc xoay,momen uốn và lực cắt chưa biết tại hai đầu thanh làm ẩn thay cho các hệ số a,b,c,d của phương trình (1.10).Ta có phương pháp thông số ban đầu được giáo sư Kixelov sử dụng trong giáo trình động lực học và ổn định công trình của mình.

Thanh ngàm-ngàm :

Cả hai đầu thanh là ngàm do đó các điều kiên biên tại liên kết ngàm là chuyển vị và góc xoay bằng không. Ta có

$$y(x=0)=0;\ \frac{dy}{dx}(x=0)=0;\ y(x=l)=0;\ \frac{dy}{dx}(x=l)=0$$

Đưa 4 điều kiện trên vào (1.10), nhận được 4 phương trình sau

$$\left.\begin{aligned} b+d=0;\ ak+c=0 \\ a\sin(kl)+b\cos(kl)+cl+d=0 \\ ak\cos(kl)-bk\sin(kl)+c=0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.13)$$

Để tìm các hệ số a, b, c, d ta cho định thức các hệ số của hệ bốn phương trình trên bằng không. Từ đó rút ra :

$$2(\cos kl-1)+kl\sin(kl)=0 \qquad (1.14)$$

Với chú ý rằng : $\sin(kl)=2\sin(kl/2)\cos(kl/2)$; $\cos(kl)=1-2\sin^2(kl/2)$

Ta có thể viết phương trình (1.54) dưới dạng : $\sin\left(\frac{kl}{2}\right)\left(\frac{kl}{2}\cos\frac{kl}{2}-\sin\frac{kl}{2}\right)=0$

Một lời giải của phương trình này là: $\sin(\frac{kl}{2})=0\Rightarrow kl=2n\pi\Rightarrow P_{th}=\frac{4n^2\pi^2EJ}{l^2}$

Chú ý rằng $\sin(kl)=0$ và $\cos(kl)=0$ khi $\sin(\frac{kl}{2})=0$, từ phương trình (1.13) ta xác định được các hằng số : $a=c=0; b=-d$

Thay vào (i) ta có phương trình đường độ võng là: $y=b\left(\cos\frac{2n\pi x}{l}-1\right)$

Với n=1 ta nhận được lực tới hạn nhỏ nhất: $P_{th}=\frac{4\pi^2 EJ}{l^2}$

Thanh ngàm-khớp :

Trong trường hợp này, đầu dưới của thanh là ngàm, đầu trên của thanh là khớp do đó các điều kiên biên tại liên kết ngàm là chuyển vị và góc xoay bằng không, tại đầu liên kết khớp là chuyển vị và mômen uốn bằng không.

$$y(x=0)=0; \frac{dy}{dx}(x=0)=0; y(x=l)=0; \frac{d^2y}{dx^2}(x=l)=0$$

Đưa 4 điều kiện trên vào (i), nhận được 4 phương trình sau

$$b+d=0; ak+c=0; cl+d=0; a\sin(kl)+b\cos(kl)=0 \qquad (1.15)$$

Cả 4 phương trình sẽ được xác định bằng cách lấy a = b = c = d= 0, thay giá trị của a, b, c và d vào y ta nhận đường độ võng của thanh là dạng cân bằng thẳng ban đầu (đây là các nghiệm tầm thường vì thanh chưa bị mất ổn định). Trường hợp thứ hai ta tìm a và b từ 3 phương trình đầu của (1.15) và thay vào phương trình cuối cùng ta nhận được

$$-b\frac{\sin kl}{kl}+b\cos kl=0 \quad \Leftrightarrow \quad tgkl=kl \qquad (1.16)$$

Giải phương trình (1.16) ta nhận được : $kl=4.493 \Rightarrow P_{th}=\frac{\pi^2 EJ}{(0.7l)^2}$

Thanh đầu ngàm-đầu tự do :

Trong trường hợp này, đầu dưới của thanh là ngàm, đầu trên của thanh tự do. Do đó các điều kiên biên tại liên kết ngàm là chuyển vị và góc xoay bằng không, tại đầu tự do là mômen uốn và lực cắt bằng không. Ta có

$$y(x=0)=0;\frac{dy}{dx}(x=0)=0;\frac{d^2y}{dx^2}(x=l)=0;\frac{d^3y}{dx^3}+k^2\frac{dy}{dx}=0$$

Đưa 4 điều kiện trên vào (i), nhận được 4 phương trình sau

$$b+d=0;ak+c=0;a\sin(kl)+b\cos(kl)=0;c=0 \qquad (1.17)$$

Từ phường trình thứ 2 và phương trình thứ 4 ta rút ra được c = a = 0 và

$$\cos kl=0 \quad \Leftrightarrow \quad kl=\frac{(2n-1)\pi}{2} \qquad (1.18)$$

Giải phương trình (1.58) ta nhận được lực tới hạn nhỏ nhất ứng với (n=1) là

$$P_{th}=\frac{\pi^2 EJ}{4l^2}$$

1.6 Thuật toán đơn giản để giải phương trình đa thức

Bài toán trị riêng và véc tơ riêng phải dẫn về giải phương trình (1.48). ở đây trình bày cách giải phương trình đó.

Trước tiên xét ta xét trường hợp giải phương trình đa thức đặc trưng.

$$f(z) = b_0+b_1z+...+b_nz^{n-1}+(-1)^nz^n=0 \qquad (1.19)$$

khi n ≤4 thì lời giải của phương trình có thể biểu diễn dưới dạng các công thức. Với các trường hợp khác thì phải dùng các phương pháp lặp để giải:

a) Phương pháp lặp Newton

Cho một nghiệm ban đầu Z_0. Nghiệm gần đúng của bước sau (j+1) theo phương pháp Lặp Newton được xác định theo công thức sau:

$$z^{[j+1]}=z^{[j]}-\frac{f(z^{[j]})}{f'(z^{[j]})}$$

(1.20)

Nếu như $z^{[j+1]}-z^{[j]}$ đủ nhỏ thì có thể xem $z^{[j+1]}$ chính là nghiệm của phương trình.

b) Phương pháp Cát tuyến

Để tìm nghiệm thực của các phương trình có hệ số thực, đầu tiên chọn hai giá trị ban dầu và xây dựng các chuỗi gần đúng sau:

$$z^{[j+1]} = \frac{z^{[j]} - z^{[k]}}{f(z^{[j]}) - f(z^{[k]})} f(z^{[j]}) \qquad (j=0, 1, 2, \ldots k<j) \qquad (1.21)$$

các $z^{[j]}$, $z^{[k]}$ thường được chọn sao cho $f(z^{[j]})$ và $f(z^{[k]})$ có dấu ngược nhau để cho nghiệm nằm giữa $z^{[j]}$ và $z^{[k]}$.

Ví dụ: Tìm trị riêng của ma trận sau:

$$p(\lambda) = \det\begin{bmatrix} 5-2\lambda & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6-2\lambda & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6-\lambda & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Trước tiên ta cần biến đổi ma trận

$$p(\lambda) = (5-2\lambda)\det\begin{bmatrix} 6-2\lambda & -4 & 1 \\ -4 & 6-\lambda & -4 \\ 1 & -4 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$
$$+ (4)\det\begin{bmatrix} -4 & -4 & 1 \\ 1 & 6-\lambda & -4 \\ 0 & -4 & 5-\lambda \end{bmatrix} + (1)\det\begin{bmatrix} -4 & 6-2\lambda & 1 \\ 1 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

Hay:

$$p(\lambda) = (5-2\lambda)\{(6-2\lambda)[(6-\lambda)(5-\lambda)-16] + 4[-4(5-\lambda)+4] + 16 - (6-\lambda)\}$$
$$+ 4\{-4[(6-\lambda)(5-\lambda)-16] + 4(5-\lambda) - 4\} + \{-4[(-4)(5-\lambda)+4] - (6-2\lambda)(5-\lambda)+1\}$$

Rút gọn biểu thức ta có: $p(\lambda) = 4\lambda^4 - 66\lambda^3 + 276\lambda^2 - 285\lambda + 25$ (f(z)= p(λ); z=λ)

Bây giờ ta dùng phương pháp lặp Newton để giải bài toán này. Các bước thực hiện như sau:

Bước 1: Cho λ một giá trị bất kỳ nào đó.

Bước 2: Tính λ bước (j+1) theo phương pháp lặp Newton:

$$z^{[j+1]} = z^{[j]} - \frac{f(z^{[j]})}{f'(z^{[j]})}$$

Bước 3: Tính: $r = \left| \frac{\lambda^{[j+1]} - \lambda^{[j]}}{\lambda^{[j]}} \right|$

Bước 4: Nếu r>eps (eps là một số nhỏ bất kỳ tuỳ ý cho trước. Nếu r>eps thì gán $\lambda^{[j+1]}$ *cho* $\lambda^{[j]}$ ($\lambda^{[j]} \leftarrow \lambda^{[j+1]}$) và quay lại bước 2. Nếu r<eps thì thực hiện bước 5

Bước 5: $\lambda^{[j+1]}$ là nghiệm của bài toán và gán nó cho (c) ($c \leftarrow \lambda^{[j+1]}$)

Bước 6: Để tìm các nghiệm khác thì ta chia hàm P(λ) đã có cho (λ-c) thì ta sẽ được một đa thức bậc thấp hơn và quay lại bước 1.

Nếu đa thức bậc n ta làm lần lượt n lần như vậy ta sẽ nhận được n nghiệm.

Sau đây giới thiệu đoạn chương trình sử dụng phương pháp lặp Newton để giải bài toán trên. (ngôn ngữ lập trình MATLAB)

```
syms x;
y=4*x^4-66*x^3+276*x^2-285*x+25;
y2=y;
        for n=1:4
                y1=y2;
                y1x=diff(y1,x);
                z1=0.1;
                eps=1;
                while eps >= 0.000001
                        s1=subs(y1,x,z1);
                        s2=subs(y1x,x,z1);
                        z2=z1-s1/s2;
                        s3=z2-z1;
                        r=abs(s3/z1);
                        z1=z2;
                        eps=r;
                end
                c(n)=z1;
                z1
```

```
        f(n)=subs(y,x,z1);
        y2=y1/(x-z1);
    end
    r1=[c' f'];
    digits(7)
    vpa(r1)
    ezplot(y,[-2 12]);
    grid
```

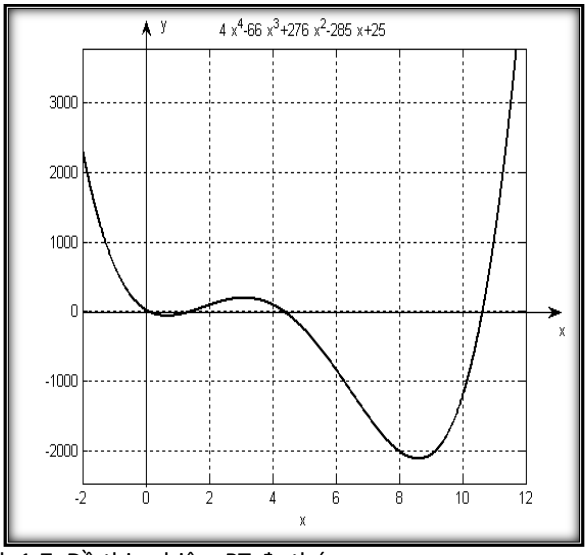
Kết quả

```
[  .9653733e-1,          0.]
[     1.391465, -.2052047e-10]
[     4.373550,   .5732090e-9]
[     10.63845,  .1136868e-10]
```

Trong Matlab phương pháp giải phương trình đại số dựa trên phương pháp lặp Newton và phương pháp cát tuyến với thuật toán hoàn thiện hơn cho nên trong luận án sau này khi giải các

phương trình đại số sẽ dùng các hàm có sẵn của

Matlab.



Hình 1.7. Đồ thị nghiệm PT đa thức

Qua kết quả nghiên cứu của các mục từ 1.1 đến 1.6, tác giả rút ra những nhận xét sau:

1. ở trên đã trình bày các phương pháp chung để xây dựng bài toán cơ học trong đó có bài toán ổn định công trình.

2. Đã giới thiệu các định nghĩa, các tiêu chuẩn và các định lý về ổn định và không ổn định nhằm mục đích hiểu rõbản chất của bài toán ổn định công trình. Cần chú ý rằng bài toán ổn định của cơ học là bài toán ổn định cân bằng, nghĩa là bài toán ổn định nghiệm của các phương trình vi phân tuyến tính hóa. Định lý về ổn định của Liapunov cho ta đánh giá được sự tương quan giữa ổn định của nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính hóa và phương trình phi tuyến gốc của nó. Qua các định lý ổn định và không ổn định trình bày ở trên chúng ta có thể thấy rõ tính phức tạp của bài toán ổn định, do

vậy phải rất cẩn thận khi đưa ra các kết luận về ổn định của trạng thái cân bằng. Cách nghiên cứu ổn định là đưa hệ lệch ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu của nó. Như vậy, vị trí cân bằng ban đầu cần phải xác định trước.

3. Đã trình bày phương pháp chung để giải các phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất và áp dụng để nghiên cứu ổn định của thanh thẳng chịu lực nén P tác dụng ở đầu thanh. Có thể nói đây là phương pháp toán duy nhất và do đó phổ biến nhất trong nghiên cứu ổn định công trình hiện nay.

CHƯƠNG 2
PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Trong chương này lần lượt trình bày về các phương trình cơ bản của lý thuyết đàn hồi tuyến tính, công thức ma trận của các định lý năng lượng và cuối cùng giới thiệu nội dung cơ bản của phương pháp phân tử hữu hạn.

2.1. Các phương trình cơ bản của lý thuyết đàn hồi tuyến tính

2.1.1. Khái niệm

Lý thuyết đàn hồi tuyến tính được xây dựng trên cơ sở giả thiết biến dạng nhỏ, còn lý thuyết đàn hồi phi tuyến dựa trên giả thiết các biến dạng lớn. Trong lý thuyết đàn hồi tuyến tính nguyên lý cộng tác dụng hoàn toàn đúng. Với một vật thể đàn hồi ta cần xét mối quan hệ giữa các đại lượng: chuyển vị - biến dạng, biến dạng - ứng suất, ứng suất - tải trọng. Các quan hệ này được mô tả bởi phương trình vi phân đạo hàm riêng với bài toán không gian và 8 phương trình với bài toán phẳng, cụ thể như sau:

a. Bài toán không gian:

- Sáu phương trình biểu thị sự liên hệ biến dạng - chuyển vị;
- Sáu phương trình biểu thị liên hệ ứng suất - biến dạng;
- Ba phương trình cân bằng biểu thị quan hệ ứng suất - tải trọng.

b. Bài toán phẳng

- Ba phương trình biểu thị sự liên hệ biến dạng - chuyển vị;
- Ba phương trình biểu thị liên hệ ứng suất - biến dạng;
- Hai phương trình cân bằng biểu thị quan hệ ứng suất - tải trọng.

2.1.2. Các phương trình biến dạng - chuyển vị

Biến dạng của kết cấu hoặc môi trường liên tục dưới tác động của một hệ tải trọng cho trước, hoàn toàn có thể xác định nếu biết được chuyển vị của một điểm bất kỳ thuộc kết cấu hay môi trường liên tục đó, dưới dạng hàm số liên tục tại điểm đang xét.

a. Bài toán không gian:

Trong hệ toạ độ x, y, z chuyển vị tại một điểm được xác định bằng ba thành phần và thường được ký hiệu như sau:

$u_x = u_x(x, y, z); u_y = u_y(x, y, z); u_z = u_z(x, y, z);$ (2.1)

Biến dạng dọc trục được xác định theo các công thức:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (2.2)$$

Biểu diễn dưới dạng ma trận ta có:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{cc} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

Các biến dạng trượt được xác định theo các công thức sau:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \qquad \varepsilon_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \qquad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \quad (2.4)$$

Trong đó:

$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}; \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}; \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz}$

Biểu diễn dưới dạng ma trận ta có:

$$\begin{Bmatrix} e_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

Nếu gộp thành một phương trình dưới dạng ma trận ta có:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{zz}\\ \varepsilon_{xy}\\ \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}.\begin{Bmatrix}u_x\\ u_y\\ u_z\end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

Hay:

$$\{\varepsilon\}=[\nabla].\{u \quad (2.7)$$

Trong đó: $\{\nabla$ là ma trận các toán tử vi phân.

2. Bài toán phẳng

Chuyển vị của một điểm bất kỳ gồm hai thành phần và được ký hiệu như sau: $u_x = u_x(x, y)$; $u_y = u_y(x, y)$

Biến dạng được xác định theo chuyển vị như sau:

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u_x}{\partial x} \;;\; \varepsilon_{yy}=\frac{\partial u_y}{\partial y} \;;\; \varepsilon_{xy}=\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (2.8)$$

Viết dưới dạng ma trận:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}.\begin{Bmatrix}u_x\\ u_y\end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

Hay: $\{\varepsilon\}=[\nabla].\{u\}$ (2.10)

2.1.3. Phương trình ứng suất - biến dạng

Khi thừa nhận giả thuyết đàn hồi tuyến tính, đồng nhất và đẳng hướng, sự liên hệ giữa ứng suất và biến dạng được biểu thị bằng định luật Hooke tổng quát.

Nếu kể đến ảnh hưởng của sự thay đổi nhiệt độ với giả thiết chỉ xét đến ảnh hưởng biến dạng dọc trục vì nhiệt độ mà bỏ qua ảnh hưởng đến biến dạng trượt vì nhiệt thì các phương trình ứng suất - biến dạng được thiết lập như sau:

a. Bài toán không gian

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{xx} - \mu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})\right] + \alpha T$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{yy} - \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})\right] + \alpha T \qquad (2.11)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{zz} - \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\right] + \alpha T$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}.\sigma_{xy} = \frac{1}{G}.\sigma_{xy}$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{2(1+\mu)}{E}.\sigma_{yz} = \frac{1}{G}.\sigma_{yz}$$

$$\varepsilon_{zx} = \frac{2(1+\mu)}{E}.\sigma_{zx} = \frac{1}{G}.\sigma_{zx}$$

Trong đó:

E - modul đàn hồi dọc trục;

G - modul đàn hồi trượt

μ - hệ số Poisson;

α - hệ số giãn nở vì nhiệt;

T - độ biến thiên nhiệt độ

Nếu biểu diễn dưới dạng ma trận ta có:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E}.\begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix}.\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} + \alpha T.\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (2.12)$$

Trong trường hợp T = 0 thì phương trình trên có dạng:

$$\{\varepsilon\} = [D]^{-1}.\{\sigma\} \tag{2.13}$$

Trong đó:

$$[D]^{-1} = \frac{1}{E}.\begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

Từ quan hệ của biến dạng - ứng suất ta có thể xác định được ứng suất theo biến dạng thường được gọi là định luật Hooke tổng quát:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}.[(1-\mu).\varepsilon_{xx} + \mu(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})] - \frac{E}{1-2\mu}.\alpha T$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}.[(1-\mu).\varepsilon_{yy} + \mu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz})] - \frac{E}{1-2\mu}.\alpha T \tag{2.15}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}.[(1-\mu).\varepsilon_{zz} + \mu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})] - \frac{E}{1-2\mu}.\alpha T$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}.\varepsilon_{xy} = G.\varepsilon_{xy}$$

$$\sigma_{yz} = \frac{E}{2(1+\mu)}.\varepsilon_{yz} = G.\varepsilon_{yz}$$

$$\sigma_{zx} = \frac{E}{2(1+\mu)}.\varepsilon_{zx} = G.\varepsilon_{zx}$$

Viết dưới dạng ma trận:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{2(1+\mu)(1-2\mu)}.\begin{bmatrix} 2(1-\mu) & 2\mu & 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 2\mu & 2(1-\mu) & 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 2\mu & 2\mu & 2(1-\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1-\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1-\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1-\mu) \end{bmatrix}.\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix}$$

$$+\frac{E\alpha T}{1-2\mu}.\begin{Bmatrix}-1\\-1\\-1\\0\\0\\0\end{Bmatrix}$$

Trong trường hợp T = 0 ta có phương trình:

$$\{\sigma\}=[D].\{\varepsilon\} \tag{2.16}$$

Biểu thức này biểu thị định luật Hooke.

Ma trận vuông $[D]$ được gọi là ma trận đàn hồi. Ma trận này chứa tất cả các đặc trưng đàn hồi của kết cấu hoặc môi trường liên tục mà ta đang nghiên cứu.

$$[D]=\frac{E}{2(1+\mu).(1-2\mu)}.\begin{bmatrix}2(1-\mu) & 2\mu & 2\mu & 0 & 0 & 0\\ 2\mu & 2(1-\mu) & 2\mu & 0 & 0 & 0\\ 2\mu & 2\mu & 2(1-\mu) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & (1-2\mu) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\mu) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\mu)\end{bmatrix}$$

Khi chấp nhận giả thiết vật liệu đàn hồi tuyến tính, đồng nhất và đẳng hướng thì ma trận $[D]$ có tính đối xứng và không suy biến.

b. Bài toán phẳng

- Bài toán phẳng của lý thuyết đàn hồi được chia thành hai loại:
- Trạng thái phẳng về ứng suất;
- Trạng thái phẳng về biến dạng;

Hai trạng thái này được phân biệt theo các tính chất đặc biệt của hình dạng và cách chịu tải của vật thể đàn hồi nghiên cứu:

c. Trạng thái phẳng về ứng suất:

Vật thể đàn hồi được nghiên cứu có dạng tấm với chiều dày nhỏ so với kích thước của hai chiều còn lại và chịu tải trọng trong mặt phẳng của tấm.

Kí hiệu xOy là hệ trục nằm trong mặt phẳng của tấm và Oz là trục vuông góc với mặt phẳng đó. Người ta thừa nhận các giả thiết dưới đây với ứng suất:

$$\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = \sigma_{zz} = 0$$

Với các giả thiết trên ta có mối quan hệ biến dạng ứng suất:

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{E}.\left[\sigma_{xx} - \mu.\sigma_{yy}\right] + \alpha.T$$

$$\sigma_{yy} = \frac{1}{E}.\left[\sigma_{yy} - \mu.\sigma_{yy}\right] + \alpha.T \qquad (2.17)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}.\sigma_{xy} = \frac{1}{G}.\sigma_{xy}$$

Dạng ma trận:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{zz}\end{Bmatrix} = \frac{1}{E}.\begin{bmatrix}1 & -\mu & 0\\ -\mu & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2(1+\mu)\end{bmatrix}.\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\end{Bmatrix} + \alpha.T.\begin{Bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{Bmatrix} \qquad (2.18)$$

Các biến dạng còn lại được xác định như sau:

$$\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{1}{E}.\mu.(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \alpha.T \qquad (2.19)$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\mu}{1-\mu}.(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + \frac{1+\mu}{1-\mu}.\alpha.T$$

Rõ ràng $\varepsilon_{zz} \neq 0$ và có quan hệ tuyến tính với ε_{xx} và ε_{yy}. Tuy nhiên với phần tử có bề dày mỏng có thể cho $\varepsilon_{zz} = 0$ mà vẫn bảo đảm chính xác so với nhu cầu thực tế. Nghịch đảo ma trận đàn hồi có dạng:

$$[D]^{-1} = \frac{1}{E}.\begin{bmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Biểu thức quan hệ giữa ứng suất - biến dạng thể hiện như sau:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\mu^2}.[\varepsilon_{xx} + \mu.\varepsilon_{yy}] - \frac{E}{1-\mu}.\alpha T$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\mu^2}.[\varepsilon_{yy} + \mu.\varepsilon_{xx}] - \frac{E}{1-\mu}.\alpha T \quad (2.21)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \frac{E}{2(1+\mu)}.\varepsilon_{xy} = G.\varepsilon_{xy}$$

Dạng ma trận:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{2(1-\mu^2)}.\begin{bmatrix} 2 & 2\mu & 0 \\ 2\mu & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 1-\mu \end{bmatrix}.\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \end{Bmatrix} - \frac{E}{1-\mu}\alpha T.\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

Nếu T = 0 thì $\{\sigma\} = [D].\{\varepsilon\}$

Trong đó:

$[D]$ - ma trận đàn hồi của vật liệu trong bài toán ứng suất phẳng.

$$[D] = \frac{E}{2(1-\mu^2)}.\begin{bmatrix} 2 & 2\mu & 0 \\ 2\mu & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 1-\mu \end{bmatrix}$$

d. Bài toán phẳng về biến dạng

Các vật thể đàn hồi được nghiên cứu có tiết diện ngang không đổi và chiều dày lớn hơn với kích thước của hai chiều còn lại, tải trọng tác dụng vuông góc với trục dài của vật thể. Gọi xOy là hệ trục song song với mặt phẳng của tiết diện ngang. Thừa nhận các giả thiết sau:

$u_z = 0$

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0 \quad (2.23)$$

$\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = \varepsilon_{zz} = 0$

Ta có quan hệ giữa biến dạng và ứng suất:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1+\mu}{E}.\left[(1-\mu).\sigma_{xx} - \mu.\sigma_{yy}\right] + (1+\mu).\alpha T$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1+\mu}{E}.\left[(1-\mu).\sigma_{yy} - \mu.\sigma_{xx}\right] + (1+\mu).\alpha T \qquad (2.24)$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{2(1+\mu)}{E}.\sigma_{xy} = \frac{1}{G}.\sigma_{xy}$$

Dưới dạng ma trận ta có biểu thức:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{zz}\end{Bmatrix} = \frac{1+\mu}{E}.\begin{bmatrix}1-\mu & -\mu & 0\\ -\mu & 1-\mu & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}.\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix} + (1+\mu).\alpha T.\begin{Bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{Bmatrix} \qquad (2.25)$$

Nếu T = 0 ta có biểu thức rút gọn:

$$\{\varepsilon\} = [D]^{-1}.\{\sigma\}$$

Trong đó:

$$[D]^{-1} = \frac{1+\mu}{E}.\begin{bmatrix}1-\mu & -\mu & 0\\ -\mu & 1-\mu & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}.\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\end{Bmatrix}$$

Từ quan hệ trên ta có mối quan hệ ứng suất biến dạng theo định luật Hooke:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\mu).(1-2\mu)}.\left[(1-\mu).\varepsilon_{xx} + \mu.\varepsilon_{yy}\right] - \frac{E}{1-2\mu}.\sigma T$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\mu).(1-2\mu)}.\left[(1-\mu).\varepsilon_{yy} + \mu.\varepsilon_{xx}\right] - \frac{E}{1-2\mu}.\sigma T \qquad (2.26)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \frac{E}{2(1+\mu)}.\varepsilon_{xy} = G.\varepsilon_{xy}$$

$$\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\mu.E}{(1+\mu).(1-2\mu)}.[\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}] - \frac{E}{1-2\mu}.\alpha T$$

$$\sigma_{zz} = \mu.(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - E.\alpha T$$

Ta thấy $\sigma_{zz} \neq 0$ và có liên hệ tuyến tính với σ_{xx} và σ_{yy}. Tuy nhiên trong thực tế có thể bỏ qua σ_{zz} mà vẫn đảm bảo sai số. Dưới dạng ma trận ta có:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{2(1+\mu).(1-2\mu)}.\begin{bmatrix} 2(1-\mu) & 2\mu & 0 \\ 2\mu & 2(1-\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\mu \end{bmatrix}.\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} - \frac{E}{1-2\mu}.\alpha T.\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

Nếu T = 0 ta có thể viết gọn: $\{\sigma\} = [D].\{\varepsilon\}$

Trong đó:

$[D]$ - ma trận đàn hồi của bài toán biến dạng phẳng

$$[D] = \frac{E}{2(1+\mu).(1-2\mu)}.\begin{bmatrix} 2(1-\mu) & 2\mu & 0 \\ 2\mu & 2(1-\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\mu \end{bmatrix}$$

3. Bài toán một chiều:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}.\sigma_{xx} + \alpha T$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0 \quad (2.28)$$

$$\sigma_{xx} = E.\varepsilon_{xx} - E.\alpha T$$

2.1.4. Các phương trình cân bằng

a. Bài toán không gian

Nếu tách ra khỏi vật thể đàn hồi một phân tố có kích thước dx, dy, dz và thiết lập phương trình cân bằng theo 3 trục x, y, z ta có:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + g_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + g_y = 0 \qquad (2.29)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + g_z = 0$$

Trong đó:

σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz} - ứng suất pháp;

σ_{xy}, σ_{yz}, σ_{zx} - ứng suất tiếp;

g_x, g_y, g_z - các thành phần lực thể tích tác dụng theo các phương x, y, z trên một đơn vị thể tích của vật thể.

Viết dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (2.30)$$

hay:

$$[\nabla]^T . \{\sigma\} + \{g\} = 0 \qquad (2.31)$$

Các phương trình cân bằng phải được thoả mãn ở bất kỳ mọi điểm của vật thể đàn hồi, ở bên trong cũng như trên bề mặt của vật thể. Do đó, những điểm nằm trên bề mặt của vật thể sẽ cân bằng với ngoại lực tác dụng lên bề mặt. Sự cân bằng này được xây dựng trên cơ sở nghiên cứu ứng suất trên mặt cắt xiên và được biểu thị bằng các điều kiện bề mặt.

$$l.\sigma_{xx} + m\sigma_{xy} + n.\sigma_{xz} = p_x$$

$$l.\ \sigma_{yx} + m\sigma_{yy} + n\sigma_{yz} = p_y \qquad (2.32)$$

$$l.\sigma_{zx} + m\sigma_{zy} + n\sigma_{zz} = p_z$$

Trong đó:

l, m, n - các cosin chỉ phương của pháp tuyến ngoài của mặt vật thể đàn hồi tại điểm đang xét;

p_x, p_y, p_z - các thành phần ngoại lực theo 3 trục x, y, z tác dụng trên một đơn vị diện tích mặt ngoài của vật thể đàn hồi.

$$\begin{bmatrix} l & 0 & 0 & m & 0 & n \\ 0 & m & 0 & l & n & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 & m & l \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ P_z \end{Bmatrix} \tag{2.33}$$

hay:

$[L].\{\sigma\} = \{p$

$[L]$ - ma trận cosin chỉ phương của pháp tuyến ngoài của mặt vật thể đàn hồi.

b. Bài toán phẳng

Trong bài toán hai chiều, bài toán phẳng về ứng suất và biến dạng phương trình cân bằng có dạng:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + g_x = 0 \tag{2.34}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + g_y = 0$$

Dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} g_x \\ g_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.35}$$

hay:

$$\{\nabla\}.\{\sigma\} + \{g\} = 0 \tag{2.36}$$

Trên chu vi thoả mãn phương trình sau:

$$\begin{aligned} l.\sigma_{xx} + m.\sigma_{xy} &= p_x \\ l.\sigma_{yx} + m.\sigma_{yy} &= p_y \end{aligned} \tag{2.37}$$

Dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} l & 0 & m \\ 0 & m & l \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} \tag{2.38}$$

hay:

$$[L]\{\sigma\} = \{p \tag{2.39}$$

2.1.5. Các phương trình liên tục

Các biến dạng và các chuyển vị cần phải có sự thay đổi liên tục từ điểm này sang điểm khác trong cùng một vật thể đàn hồi. Điều kiện để có sự liên tục này tồn tại là các phương trình liên tục hay còn gọi là các phương trình tương thích.

a. Đối với bài toán không gian

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x.\partial y} \\ &\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y.\partial z} \\ &\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial x.\partial z} \\ &\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y.\partial z} = \frac{1}{2}.\frac{\partial}{\partial x}.\left[\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} \right] \\ &\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x.\partial z} = \frac{1}{2}.\frac{\partial}{\partial y}.\left[\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right] \\ &\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x.\partial y} = \frac{1}{2}.\frac{\partial}{\partial z}.\left[\frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right] \end{aligned} \tag{2.40}$$

b. Bài toán phẳng phương trình

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x . \partial y} \tag{2.41}$$

2.2. Công thức ma trận của các định lý năng lượng

2.2.1. Khái niệm:

Các thành tựu nổi tiếng đầu tiên về sử dụng khái niệm năng lượng trong phân tích kết cấu và các môi trường đàn hồi là của Csstigliano, người đưa ra các ký hiệu về năng lượng biến dạng để đặt cơ sở cho các phương pháp năng lượng.

Dùng phương pháp năng lượng để phân tích kết cấu và các môi trường liên tục thường dẫn đến một hệ phương trình đại số chứa nhiều ẩn số. Việc giải hệ này trên thực tế là không thể thực hiện được nếu chỉ dựa trên các công cụ tính toán thô sơ. Chính vì lý do đó mà các phương pháp năng lượng còn ít được quan tâm trong một thời gian dài. Khi trong tay con người đã có máy tính điện tử thì các phương pháp năng lượng đã nhanh chóng phát huy được tác dụng và là cơ sở lý luận của các phương pháp tính toán hiện đại để phân tích các kết cấu phức tạp.

Để phục vụ trực tiếp cho các phương pháp phân tích kết cấu theo phương pháp số hiện đại, các định lý năng lượng cần được biểu diễn bằng ngôn ngữ phù hợp, lý tưởng hơn cả đó là ngôn ngữ ma trận.

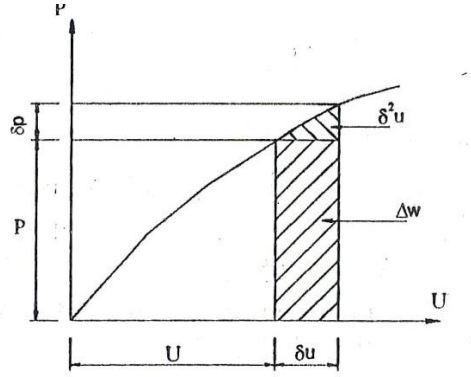
Tất cả các định lý năng lượng đều được xây dựng trực tiếp từ hai nguyên lý biến phân:

- Nguyên lý công khả dĩ hay còn gọi là nguyên lý chuyển vị khả dĩ;
- Nguyên lý công bù khả dĩ hay còn gọi là nguyên lý lực khả dĩ.

Ở đây cho xét nguyên lý chuyển vị khả dĩ.

2.2.2. Công cơ học khả dĩ

Nếu cho một lực tác dụng vào kết cấu khi đó tại vị trí lực sẽ có chuyển vị tương ứng, hình bên là mối quan hệ giữa lực và chuyển vị. Phần nằm dưới đường cong là công do lực gây ra:



$$W = \int_0^u p.du \quad (2.1)$$

nếu hệ là tuyến tính (quan hệ tuyến tính) ta có:

$$W = \frac{1}{2}.p.u \quad (2.42)$$

Giả thiết chuyển vị tăng thêm một lượng là δu khi công sẽ tăng thêm một lượng tương ứng:

$$\Delta W = p.\delta u + \frac{1}{2}\delta p.\delta u \quad (2.43)$$

Đặt $\delta W = p.\delta u$; $\delta^2 W = \frac{1}{2}\delta p.\delta u$

Bỏ qua đại lượng bậc cao ta có:

$\Delta W = \delta W = p.\delta u$

δW - công khả dĩ còn là chuyển vị khả dĩ.

Trong thực tế, tuỳ theo tính chất bài toán mà p có thể là lực thể tích hoặc là phân bố hoặc là lực tập trung.

- Lực tập trung:

$\delta W = \{p\}^T.\{\delta u\}$

$\{p\}^T = [p_1,...,p_n]$

$$\{\delta u\} = \begin{Bmatrix} \delta u_1 \\ .... \\ \delta u_n \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$

- Trường hợp hệ chịu tác dụng của lực thể tích và bề mặt thì:

$$\delta W = \int_V \{g\}^T.\{\delta u\}dv + \int_S \{p\}^T.\{\delta u\}ds \qquad (2.45)$$

Trong đó:

- Đối với bài toán không gian:

$$\{g\}^T = [g_x.g_y.g_z]$$

$$\{p\}^T = [p_x.p_y.p_z] \qquad (2.46)$$

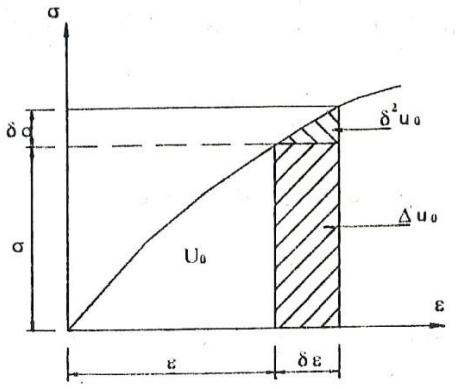
$$\{\delta u\}^T = [\delta u_x, \delta u_y, \delta u_z]$$

- Đối với bài toán phẳng (trong mặt phẳng xoy)

$$\{g\}^T = [g_x.g_y]\ ;\ \ \{p\}^T = [p_x.p_y]\ ;\ \{\delta u\}^T = [\delta u_x\ \delta u_y] \qquad (2.47)$$

2.2.3. Năng lượng biến dạng khả dĩ

Khi một vật bị biến dạng thì bên trong sẽ xuất hiện ứng suất, mối quan hệ giữa biến dạng và ứng suất tương ứng thể hiện theo đồ thị trên.



Phần diện tích U_0 nằm dưới đường cong được gọi là mật độ năng lượng đàn hồi có thứ nguyên: $\frac{luc.dai}{dai^3}$ khi đó năng lượng biến dạng của cả vật thể được các định như sau:

$$U = \int_V U_0.dv \qquad (2.48)$$

Nếu ta cho một biến dạng khả dĩ δε khi đó ta có:

$$\Delta U_0 = \sigma.\delta\varepsilon + \frac{1}{2}\delta\sigma.\delta\varepsilon \quad (2.49)$$

Bỏ qua thành phần bước bậc cao ta có: $\Delta U_0 = \delta U_0 = \sigma.\delta\varepsilon$

Nếu có nhiều thành phần ứng suất ta có: $\sigma U_0 = \{\sigma\}^T.\{\delta\varepsilon$

δU_0: mật độ năng lượng đàn hồi khả dĩ.

Năng lượng biến dạng đàn hồi khả dĩ của cả vật thể sẽ là:

$$\delta U = \int_V \delta U_0.dv = \int_V \{\sigma\}^T.\{\delta\varepsilon\}.dv \quad (2.50)$$

Trong đó:

$$\{\sigma\}^T = \left[\sigma_{xx}\ \sigma_{yy}\ \sigma_{zz}\ \sigma_{xy}\ \sigma_{yz}\ \sigma_{zx}\right]$$

$$\{\delta\varepsilon\}^T = \left[\delta\varepsilon_{xx}\ \delta\varepsilon_{yy}\ \delta\varepsilon_{zz}\ \delta\varepsilon_{xy}\ \delta\varepsilon_{yz}\ \delta\varepsilon_{zx}\right]$$

2.2.4. Nguyên lý công khả dĩ

Đại lượng khả dĩ là đại lượng rất nhỏ được lấy bất kỳ và ký hiệu là δ kèm theo tên của đại lượng khả dĩ. Xét vật thể biến dạng dưới tác dụng của hệ ngoại lực, trong vật thể sẽ xuất hiện nội lực và biến dạng sao cho:

- Ngoại lực tác dụng và nội lực ở trạng thái cân bằng.
- Các biến dạng thoả mãn điều kiện liên tục, còn chuyển vị thoả mãn các điều kiện tại gốc (điều kiện biên).

Trường hợp ứng suất σ trong vật thể đó thoả mãn điều kiện cân bằng tĩnh, còn trường biến dạng ε thoả mãn điều kiện hình học theo nguyên lý Langrange: "Điều kiện cần và đủ để một vật biến dạng ở trạng thái cân bằng là công khả dĩ của ngoại lực bằng công khả dĩ của nội lực đối với một trường bất kỳ các biến dạng khả dĩ thoả mãn điều kiện tương thích".

$\delta W = \delta U$

Từ biểu thức trên ta có:

$$\int_V \{\delta\}^T.\{\delta\varepsilon\}dv = \int_V \{g\}^T.\{\delta u\}dv + \int_S \{p\}^T.\{\delta u\}ds \quad (2.51)$$

Công thức trên là công thức cơ bản để xây dựng lên phương pháp phần tử hữu hạn. Nếu áp dụng công thức này cho một miền rời rạc (phần tử). Khi đó ta sẽ tạo được ma trận độ cứng của phần tử và các vectơ lực nút (tải trọng trên phần tử quy về nút). Ghép nối các ma trận độ cứng của các phần tử và các vectơ lực nút ta xác định được phương trình cân bằng của hệ. Giải hệ phương trình này xác định được chuyển vị nút từ đó xác định nội lực.

2.3. Phương pháp phần tử hữu hạn

Phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH) chia công trình thành những phần nhỏ được gọi là phần tử. Việc tính toán được thực hiện đối với mỗi phần tử, sau đó kết nối chúng lại với nhau có được toàn bộ công trình.

Khi dùng phương pháp sai phân hữu hạn, trạng thái của công trình (ví dụ chuyển vị của dầm, tấm v.v…) được tính tại mỗi điểm của lưới sai phân, trạng thái công trình tại các điểm nằm giữa các nút của lưới sai phân được tính bằng cách nội suy tuyến tính. Từ cách nhìn này thấy rõ ưu điểm của phương pháp PTHH so với phương pháp sai phân hữu hạn là trạng thái các điểm trong mỗi phần tử được xác định theo các hàm nội suy (còn gọi là hàm dạng) chọn trước. Do vậy, để có kết quả có độ chính xác tương đương nhau, phương pháp PTHH thường dùng ít ẩn hơn so với phương pháp sai phân hữu hạn. Theo E.Wilson [30], thuật ngữ PTHH được giáo sư Ray Clough [22] đưa ra vào năm 1960 và ông xem phương pháp PTHH là khả năng nữa (alternative) của phương pháp sai phân hữu hạn.

Các hàm nội suy được viết theo tọa độ tự nhiên (xem phần sau) được dùng vừa để mô tả trạng thái (ví dụ chuyển vị của dầm, tấm v.v…) và có thể vừa để mô tả dạng hình học (ví dụ dầm cong, vỏ…) của công trình cho phép dễ dàng lập trình và tạo điều kiện tự động hóa quá trình tính toán (phần tử hữu hạn dùng hàm nội suy như vậy được gọi là phần tử đẳng thông số, (Isoparametric finite element). Các hàm nội suy viết theo tọa độ tự nhiên do B.Irons và O.Zienkiewicz đưa ra năm 1968 [20].

Do kích thước phần tử nhỏ, trạng thái (ví dụ chuyển vị của dầm, tấm…) của các điểm trong mỗi phần tử khác nhau ít cho nên các hàm nội suy được dùng là các đa thức bậc thấp, ví dụ đối với độ võng của dầm hàm nội suy thường dùng là các đa thức bậc ba theo tọa độ *x*, đối với độ võng của tấm là các đa thức bậc ba theo tọa độ *x* và bậc ba theo tọa độ *y* v.v.. Vì dùng các đa thức bậc thấp cho nên các lực tác dụng trong mỗi phần tử cũng như lực quán tính (bài toán động lực học) đều phải qui về các nút. Vì phương pháp PTHH xét cân bằng tại nút nên lực tác dụng trong phần tử cũng như lực quán tính đều phải quy về các lực tập trung tác dụng tại nút.

Hàm nội suy được chọn sao cho kết quả tính là ổn định: kết quả là duy nhất, thay đổi bé của điều kiện biên hoặc điều kiện ban đầu không làm thay đổi kết quả tính.

Lý thuyết dầm xét ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang được trình bày ở chương 3, xem độ võng *y* lực cắt *Q* của dầm là hai hàm cần xác định cho nên cần xác định hai hàm nội suy cho hai hàm ẩn nói trên.

Dựa vào hàm nội suy có thể tính được trường ứng suất và trường chuyển vị của mỗi phần tử và do đó ta thiết lập được ma trận độ cứng phần tử. Dựa trên ma trận độ cứng phần tử xây dựng được ma trận độ cứng tổng thể của công trình.

Phương trình cơ bản để giải bài toán cơ học kết cấu theo phương pháp phần tử hữu hạn, có dạng như sau:

$$[K]\{\Delta\} = \{F\} \tag{2.52}$$

Trong đó: $[K]$ là ma trận độ cứng tổng thể của toàn kết cấu, là ma trận vuông có kích thước là số ẩn của toàn bộ kết cấu, nghĩa là số ẩn của phương pháp, $\{\Delta\}$ là véc tơ chuyển vị nút của toàn kết cấu (đối với bài toán không xét biến dạng trượt ngang), là véc tơ chuyển vị nút và lực cắt (đối với bài toán có xét đến biến dạng trượt ngang), $\{F\}$ là véc tơ lực nút.

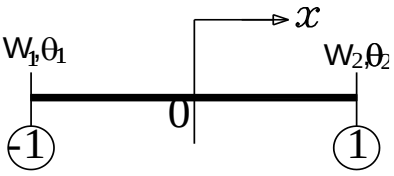
Giải hệ phương trình (2.52) ta có thể dùng các chương trình có sẵn trong Matlab để giải. Nếu như gọi r là nghiệm của bài toán thì $r = [K]\backslash\{F\}$.

Trong đề tài này tác giả dùng chương trình Matlab nói trên để giải các bài toán.

2.3.1. Hàm nội suy của phần tử

2.3.1.1. Hàm nội suy chuyển vị và góc xoay tại hai nút đầu phần tử

Trong khi tính dầm ta có thể sử dụng phần tử chịu uốn hai nút, như hình 2.52.



Hình 2.1. Phần tử dầm

Tại mỗi nút có các thông số là chuyển vị W_1, θ_1, W_2, θ_2, do đó chuyển vị trong mỗi phần tử được viết theo công thức sau:

$$W = [fw_1 \;\; fw_2 \;\; fx_1 \;\; fx_2]\mathrm{X} \tag{2.53}$$

Trong đó: $\mathrm{X} = [W_1 \;\; W_2 \;\; \theta_1 \;\; \theta_2]'$

$$\theta_1 = \left.\frac{dW}{dx}\right|_{x=-1}; \theta_2 = \left.\frac{dW}{dx}\right|_{x=1}$$

Các hàm $fw_1,\ fw_2,\ fx_1,\ fx_2$, là các hàm nội suy cần được xác định. Ta viết hàm nội suy dạng đa thức bậc 3, $W = a_0 + a_1x + a_1x^2 + a_3x^3$, dưới dạng ma trận hàm độ võng W được viết như sau:

$$W = [1 \;\; x \;\; x^2 \;\; x^3]\mathrm{X}_a \tag{2.54a}$$

Trong đó: $X_a = [a_0 \;\; a_1 \;\; a_2 \;\; a_3]'$

Bây giờ ta tìm mối liên hệ giữa X và X_a

Thay x=-1 vào (2.54a) ta có

$$W_1 = [1 \;\; -1 \;\;\; 1 \;\; -1\;]\mathrm{X}_a \tag{a}$$

Thay x=1 vào (2.3a) ta có

$$W_2 = [1 \;\;\; 1 \;\;\; 1 \;\;\; 1\;]\mathrm{X}_a \tag{b}$$

Lấy đạo hàm (2.54) theo x ta có

$$\frac{dW}{dx} = [0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2]\mathrm{X}_a$$

(2.54b)

Thay x=-1 vào (2.54b) ta có

$$\theta_1 = [0 \quad 1 \quad -2 \quad 3\ ]\mathrm{X}_a \qquad \text{(c)}$$

Thay x=1 vào (2.54b) ta có

$$\theta_2 = [0 \quad 1 \quad 2 \quad 3\ ]\mathrm{X}_a \qquad \text{(d)}$$

Từ a, b, c và d ta nhận được

$$X = [W_1 \ \ W_2 \ \ \theta_1 \ \ \theta_2]' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\mathrm{X}_a = a\mathrm{X}_a \rightarrow \mathrm{X}_a = a^{-1}\mathrm{X}$$

Trong đó: $$a = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Từ đó ta tìm được các hàm nội suy $fw_1,\ fw_2,\ fx_1,\ fx_2$, như sau:

$$\left.\begin{aligned} fw_1 &= \tfrac{1}{4}(x-1)^2(x+2), \\ fw_2 &= \tfrac{1}{4}(x+1)^2(2-x) \\ fx_1 &= \tfrac{1}{4}(x-1)^2(x+1) \\ fx_1 &= \tfrac{1}{4}(x-1)^2(x+1) \end{aligned}\right\} \qquad (2.55)$$

Các hàm nội suy (2.55) thường được dùng để tính phần tử chịu uốn và cho kết quả hội tụ.

$$W = [fw_1 \ \ fw_2 \ \ fx_1 \ \ fx_2]\mathrm{X} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(x-1)^2(x+2) & \frac{1}{4}(x+1)^2(2-x) \\ \frac{1}{4}(x-1)^2(x+1) & \frac{1}{4}(x-1)^2(x+1) \end{bmatrix}\mathrm{X}$$

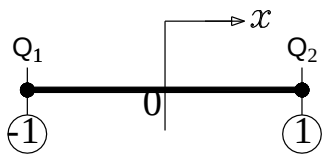
(2.53a)

Như vậy, nếu biết được các thông số W_1, θ_1, W_2, θ_2 tại hai đầu phần tử thì chuyển vị tại mỗi điểm bất kỳ trong phần tử đó được xác định theo đa thức bậc 3 sau đây

$$W = fw_1W_1 + fw_2W_2 + fx_1\theta_1 + fx_2\theta_2 \qquad (2.56)$$

2.3.1.2. Hàm nội suy lực cắt tại hai nút đầu phần tử

Trong trường hợp xét biến dạng trượt ngang ta viết thêm các hàm nội suy lực cắt tại hai đầu phần tử hai nút như hình 3.2.



Hình 2.2. Phần tử hai nút

Tại nút đầu phần tử có thông số là lực cắt Q_1, và tại nút cuối phần tử có thông số lực cắt là Q_2, do đó lực cắt trong mỗi phần tử được viết theo công thức sau:

$$V = [fq_1 \;\; fq_2]X \tag{2.57}$$

Trong đó: $X = [Q_1 \quad Q_2]'$

Các hàm $fq_1,\ fq_2,$ là các hàm nội suy cần được xác định

Ta viết hàm nội suy dạng đa thức bậc 1, $V = a_0 + a_1 x$, dưới dạng ma trận hàm lực cắt V được viết như sau:

$$V = [1 \quad x\,]X_a \tag{2.58}$$

Trong đó: $X_a = [a_0 \quad a_1]'$

Bây giờ ta tìm mối liên hệ giữa θ và θ_a

Thay x=-1 vào (2.58) ta có

$$V_1 = [1 \;\; -1\,]X_a \tag{a}$$

Thay x=1 vào (2.58) ta có

$$V_2 = [1 \quad 1\,]X_a \tag{b}$$

Từ a và b ta nhận được

$$X = [fq_1 \;\; fq_2]' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X_a = aX_a \rightarrow X_a = a^{-1}X$$

Trong đó: $a = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Từ đó ta tìm được các hàm nội suy $fq_1,\ fq_2,$ như sau:

$$\left.\begin{aligned} fq_1 &= \tfrac{1}{2}(1-x) \\ fq_2 &= \tfrac{1}{2}(1+x) \end{aligned}\right\} \tag{2.59}$$

$$V = [fq_1 \quad fq_2]X = \left[\frac{1}{2}(1-x) \quad \frac{1}{2}(1+x)\right]X$$

Trong đó: $X = [Q_1 \quad Q_2]'$

Như vậy, nếu biết được các thông số Q_1, Q_2, tại hai đầu phần tử thì lực cắt tại mỗi điểm bất kỳ trong phần tử đó được xác định theo đa thức bậc nhất sau đây

$$V = fq_1Q_1 + fq_2Q_2 \tag{2.60}$$

Do vậy, trong trường hợp phần tử có xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang, chuyển vị tại một điểm bất kỳ trong phần tử được xác định như sau:

$$W = fw_1W_1 + fw_2W_2 + fx_1\theta_1 + fx_2\theta_2 + fq_1Q_1 + fq_2Q_2 \tag{2.61}$$

2.3.1.2. Ma trận độ cứng của phần tử

a. Trường hợp không xét biến dạng trượt ngang

Trong trường hợp không xét ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang, mỗi phần tử có hai chuyển vị nút W_1, W_2, và hai góc xoay θ_1, θ_2, tổng cộng có bốn thông số (4 ẩn) cần xác định.

Gọi X là véc tơ cột chứa bốn ẩn của phần tử theo thứ tự sau

$$X = [W_1 \quad W_2 \quad \theta_1 \quad \theta_2] \tag{2.62}$$

Thì có thể viết lại biểu thức (3.5) dưới dạng ma trận như sau

$$W = [fw_1 + fw_2 + fx_1 + fx_2]X \tag{2.63}$$

Sau khi đã biết các hàm chuyển vị thì dễ dàng tính được biến dạng uốn χ_x, nội lực mômen uốn M_x, của phần tử như sau:

$$\chi_x = \left[-\frac{d^2W}{dx^2}\beta^2\right] \tag{2.64}$$

$$M_x = EJ\chi_x \tag{2.65}$$

Trong các công thức trên $\beta = {}^{2}/_{\Delta x}$ là hệ số đưa chiều dài hai đơn vị của phần tử về chiều dài thực Δx của nó.

Biết được hàm độ võng của phần tử thì dễ dàng tính được ma trận độ cứng phần tử. Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss ta viết lượng cưỡng bức đối với bài toán tĩnh như sau:

$$\mathrm{Z} = \int_{-1}^{1} M_x[\chi_x]dx \rightarrow min \tag{2.66}$$

Trong đó χ_x là các biểu thức chứa các ẩn X(i) cho nên điều kiện dừng của (2.66) được viết lại như sau:

$$\delta\mathrm{Z} = \int_{-1}^{1} M_x \delta[\chi_x]dx = 0$$

hay

$$\delta\mathrm{Z} = \frac{1}{\beta}\left(\int_{-1}^{1} M_x \left[\frac{\partial \chi_x}{\partial X_i}\right] dx\right) = 0 \tag{2.67}$$

hệ số ${}^{1}/_{\beta} = {}^{\Delta x}/_{2}$ là hệ số để đưa tích phân từ (-1) đến (1) về tích phân theo chiều dài phần tử. Có bốn ẩn ta có được bốn phương trình và có dạng (3.1), viết lại như sau:

$$[\mathrm{K}]_e\{\Delta\}_e = \{F\}_e \tag{2.68}$$

Trong đó: $[\mathrm{K}]_e$ là ma trận độ cứng phần tử e, $\{\Delta\}_e$ là véc tơ chuyển vị nút tại hai đầu phần tử e, $\{F\}_e$ là véc tơ tải trọng tương ứng với chuyển vị nút $\{\Delta\}_e$.

Các tích phân trong (2.67) có thể tính chính xác hoặc có thể tính theo các tích phân gần đúng (tích phân số) của Gauss. Sau khi tính (2.67), nhận được ma trận độ cứng phần tử $[\mathrm{K}]_e(4x4)$.

b. Trường hợp có xét đến biến dạng trượt ngang

Trong trường hợp có xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang, mỗi phần tử có hai chuyển vị nút W_1, W_2, và hai góc xoay θ_1, θ_2, tại hai đầu phần tử, giống như trường hợp trên, ngoài ra tại nút đầu phần tử còn có thêm ẩn lực cắt Q_1 và tại nút cuối phần tử có thêm lực cắt Q_2, tổng cộng có sáu thông số (6 ẩn) cần xác định.

Gọi X là véc tơ cột chứa sáu ẩn của phần tử theo thứ tự sau

$$X = [W_1 \quad W_2 \quad \theta_1 \quad \theta_2 \quad Q_1 \quad Q_2] \tag{2.69}$$

Thì có thể viết lại biểu thức (3.10) dưới dạng ma trận như sau

$$W = [fw_1 + fw_2 + fx_1 + fx_2 + fq_1 + fq_2]X \quad (2.70)$$

Sau khi đã biết các hàm chuyển vị thì dễ dàng tính được biến dạng uốn χ_x, nội lực mômen uốn M_x, biến dạng trượt γ_x , góc xoay φ (do mômen gây ra) của phần tử như sau:

$$\chi_x = \left[-\frac{d^2W}{dx^2}\beta^2 + \frac{\alpha}{GF}\frac{dV}{dx}\beta\right] \quad (2.71)$$

$$M_x = EJ\chi_x \quad (2.72)$$

$$\gamma_x = -\frac{\alpha}{GF}[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad fq_1 \quad fq_2] \quad (2.73)$$

$$\varphi = \left[-\frac{dW}{dx}\beta + \frac{\alpha}{GF}V\right] \quad (2.74)$$

Trong các công thức trên $\beta = {}^{2}/_{\Delta x}$ là hệ số đưa chiều dài hai đơn vị của phần tử về chiều dài thực Δx của nó.

Biết được hàm độ võng của phần tử thì dễ dàng tính được ma trận độ cứng phần tử. Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss ta viết lượng cưỡng bức đối với bài toán tĩnh có xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang như sau:

$$\mathrm{Z} = \int_{-1}^{1} M_x[\chi_x]dx + \int_{-1}^{1} V\delta[\gamma_x]dx \rightarrow min \quad (2.75)$$

Trong đó χ_x, γ_x là các biểu thức chứa các ẩn X(i) cho nên điều kiện dừng của (2.75) được viết lại như sau:

$$\delta\mathrm{Z} = \int_{-1}^{1} M_x\delta[\chi_x]dx + \int_{-1}^{1} V\delta[\gamma_x]dx = 0$$

hay

$$\delta\mathrm{Z} = \frac{1}{\beta}\left(\int_{-1}^{1} M_x\left[\frac{\partial\chi_x}{\partial X_i}\right]dx + \int_{-1}^{1} V\left[\frac{\partial\gamma_x}{\partial X_i}\right]dx\right) = 0 \quad (2.76)$$

hệ số ${}^{1}/_{\beta} = {}^{\Delta x}/_{2}$ là hệ số để đưa tích phân từ (-1) đến (1) về tích phân theo chiều dài phần tử. Có sáu ẩn ta có được sáu phương trình và có dạng (2.52), viết lại như sau:

$$[\mathrm{K}]_e\{\Delta\}_e = \{F\}_e \quad (2.77)$$

Trong đó: $[K]_e$ là ma trận độ cứng phần tử e, $\{\Delta\}_e$ là véc tơ chuyển vị nút và lực cắt tại hai đầu phần tử e, $\{F\}_e$ là véc tơ tải trọng tương ứng với chuyển vị nút $\{\Delta\}_e$.

Các tích phân trong (2.76) có thể tính chính xác hoặc có thể tính theo các tích phân gần đúng (tích phân số) của Gauss. Sau khi tính (2.76), nhận được ma trận độ cứng phần tử $[K]_e(6x6)$.

2.3.2.3. Ma trận độ cứng tổng thể

Biết được ma trận độ cứng phần tử $[K]_e$ thì dễ dàng xây dựng được ma trận độ cứng toàn hệ [K]. Giả sử thanh chỉ có một phần tử thì ma trận $[K]_e$ chính là ma trận độ cứng tổng thể của thanh. Giả sử chuyển vị tại nút (1) bằng không thì ta bỏ dòng 1, cột 1 của ma trận $[K]_e$.

Chú ý ngoài các ẩn chuyển vị, góc xoay, lực cắt của hệ còn phải xét thêm các ẩn là các thừa số Lagrange λ của các điều kiện liên kết tại đầu hoặc cuối các phần tử. Ngoài ra còn cần đưa thêm các điều kiện liên tục về góc xoay tại điểm tiếp giáp giữa hai phần tử.

Việc thành lập ma trận độ cứng tổng thể [K] của toàn kết cấu từ các ma trận độ cứng phần tử $[K]_e$ có thể trình bày như sau:

Hệ phương trình cơ bản để giải bài toán kết cấu theo phương pháp chuyển vị có dạng (2.52), viết lại dưới đây.

$$[K]\{\Delta\} = \{F\}$$

Trong đó: véc tơ ẩn chuyển vị nút {Δ} gồm các thành phần xếp theo thứ tự chuyển vị nút của toàn bộ kết cấu, véc tơ lực nút {F} và ma trận độ cứng toàn hệ [K] cũng là các thành phần xếp theo thứ tự tương ứng với chuyển vị nút. [K] và {F} ở đây được lập từ các ma trận độ cứng $[K]_e$ và lực nút $\{F\}_e$ của từng phần tử trong kết cấu ở hệ tọa độ chung.

Đối với mỗi phần tử e có một hệ phương trình cân bằng dạng (2.68) hoặc (2.77) ở hệ tọa độ chung là:

$$[K]_e\{\Delta\}_e = \{F\}_e$$

Trong đó: $\{\Delta\}_e$ là véc tơ chuyển vị nút có các thành phần được xếp theo thứ tự đã được quy định sẵn cho từng phần tử. Cấu trúc của ma trận độ cứng phần tử $[K]_e$ và véc tơ lực nút $\{F\}_e$ cũng tương ứng với chuyển vị nút $\{\Delta\}_e$.

Do thứ tự các thành phần trong véc tơ chuyển vị nút $\{\Delta\}_e$ của từng phần tử nói chung khác với thứ tự trong véc tơ chuyển vị nút $\{\Delta\}$ của toàn kết cấu, nên cần lưu ý xếp đúng vị trí của từng phần tử trong $[K]_e$và $\{F\}_e$ vào $[K]$ và $\{F\}$. Việc sắp xếp này thường được áp dụng phương pháp số mã có nội dung như sau:

Mỗi chuyển vị nút và lực nút tương ứng được dùng hai số mã để đặt tên:

- ***Số mã cục bộ:*** là số mã từ 1 đến m (m là tổng số chuyển vị nút của mỗi phần tử). Đó là thứ tự sắp xếp trong véc tơ chuyển vị nút $\{\Delta\}_e$ và véc tơ lực nút $\{F\}_e$ của một phần tử. Nếu các phần tử có các chuyển vị nút (m) như nhau thì số mã cục bộ của chuyển vị nút giống nhau.
- ***Số mã toàn thể:*** là số mã từ 1 đến n (n là tổng số chuyển vị nút của toàn kết cấu). Đó là thứ tự sắp xếp trong véc tơ chuyển vị nút $\{\Delta\}$ và lực nút $\{F\}$ của toàn kết cấu.

Mỗi thành phần của $[K]_e$ và $\{F\}_e$ tương ứng với một số mã cục bộ của chuyển vị nút cụ thể. Căn cứ vào số mã toàn thể của chuyển vị nút cụ thể này mà sắp xếp trị của thành phần $[K]_e$và $\{F\}_e$ vào đúng vị trí trong ma trận $[K]$ và véc tơ lực $\{F\}$ của toàn kết cấu. Các thành phần trong ma trận độ cứng của từng phần tử được xếp vào cùng một vị trí của ma trận toàn hệ thì được cộng lại với nhau.

Phần ví dụ minh họa được trình bày thông qua các ví dụ ở phần sau.

2.3.2.4. Xét điều kiện ngoại lực

Do dùng hàm độ võng của phần tử là đa thức bậc ba cho nên các lực tác dụng lên phần tử đều phải quy về nút kể cả lực quán tính trong bài toán động.

2.3.2.5. Xác định nội lực

Giải hệ phương trình $[K]\{\Delta\} = \{F\}$ ta sẽ nhận được véc tơ chuyển vị của toàn kết cấu, từ đó xác định được nội lực cần tìm của toàn cơ hệ.

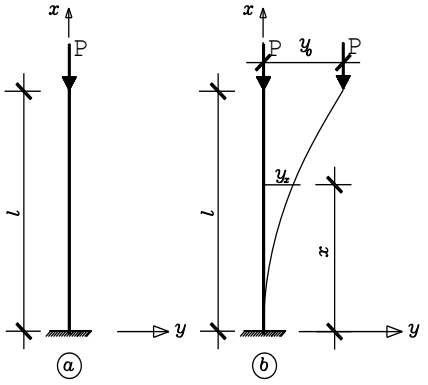
CHƯƠNG 3
TÍNH TOÁN ỔN ĐỊNH ĐÀN HỒI CỦA HỆ THANH BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Trong chương trình bày bài toán ổn định của hệ thanh thẳng đàn hồi chịu uốn dọc. Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn và phương pháp chuyển vị cưỡng bức để nghiên cứu bài toán ổn định của hệ thanh với các điều kiện biên khác nhau.

3.1. Bài toán ổn định của thanh chịu nén

Phương pháp chung để đánh giá sự mất ổn định của cơ hệ là đưa hệ ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu của nó và kiểm tra xem nó có tồn tại trạng thái cân bằng mới không. Nếu như tìm được trạng thái cân bằng mới khác với trạng thái cân bằng ban đầu thì có thể xem hệ là mất ổn định và lực giữ cho hệ ở trạng thái cân bằng mới này gọi là lực tới hạn, trường hợp ngược lại hệ là ổn định.

Để đơn giản trình bày mà không mất đi tính tổng quát của phương pháp, ta xét thanh chịu nén một đầu ngàm một đầu tự do, chịu lực như (hình 3.1a). Thanh có trạng thái cân bằng ban đầu là trạng thái chịu nén thẳng đứng.Ởtrạng thái cân bằng này thanh bị co ngắn lại mộtđoạn là $\Delta = Pl/EF$, EF làđộ cứng kéo nén của thanh, E là mô đun đàn hồi của vật liệu, l là chiều dài ban đầu của thanh,P là lực tác dụng.



Hình 3.1. *Thanh ngàm – Tự do*

Để xét trạng thái cân bằng này của thanh có ổn định hay không ta cho một điểm bất kỳ trên thanh lệch ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu một đoạn y_0 nào đó. Khi đó thanh sẽ bị chuyển vị theo đường đàn hồi y(x) và lực P ngoài tác dụng nén còn gây ra mômen uốn $M_p = P(y-y_0)$. Bây giờ trong thanh có

nội lực mômen uốn M và lực cắt Q khác với trạng thái ban đầu chỉ chịu nén (hình 3.1b) và momen ngoại lực M_p. Độ co ngắn Δ của thanh thường là nhỏ so với chiều dài thanh cho nên để đơn giản ta xem chiều dài thanh sau biến dạng vẫn bằng l.

Lượng cưỡng bức theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss của bài toán này được viết như sau:

$$Z = \int_l (M - M_p)\chi dx \to \min \tag{3.3}$$

Biến dạng uốn $\chi = -\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $M = EJ\chi$ (3.4)

Chú ý: momen nội lực và momen ngoại lực luôn khác dấu nhau. Trong (3.3), χ đại lượng biến phân, do đó điều kiện cần và đủ để thanh ở trạng thái cân bằng là

$$\delta Z = \int_l (M - M_p)\delta\chi dx = 0 \tag{3.5}$$

Hay $$\delta Z = \int_l (M - M_p)\delta\left(-\frac{d^2y}{dx^2}\right)dx = 0 \tag{3.5a}$$

Sử dụng phép tính biến phân đối với phương trình (3.5a) nhận được hai phương trình cân bằng sau

$$-\frac{d^2(M - M_p)}{dx^2} = 0 \tag{3.6a}$$

$$\left(-\frac{d(M - M_p)}{dx}\right) = 0 \tag{3.6b}$$

Thay M xác định theo (3.4) vào hai phương trình (3.6) ta có

$$EJ\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) + P\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \tag{3.7a}$$

$$EJ\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + P\frac{dy}{dx} = 0 \tag{3.7b}$$

Hai phương trình (3.7) là hai phương trình vi phân cân bằng của thanh chịu uốn dọc bởi lực P đặt ở đầu thanh. Đó là hai phương trình vi phân tuyến tính

thuần nhất (không có vế phải) mà phương pháp giải chúng cùng với các điều kiện biên ở hai đầu thanh đã được trình bày ở chương 1.

Dưới đây trình bày phương pháp chuyển vị cưỡng bức giải hệ phương trình (3.7).

3.2. Phương pháp chuyển vị cưỡng bức

Phương pháp chuyển vị cưỡng bức nhằm đưa phương trỡnh ổn định uốn dọc của thanh (3.7) là phương trỡnh cõn bằng giữa nội lực và ngoại lực về phương trỡnh cú vế phải bằng cỏch cho một điểm nào đó trong thanh, ví dụ điểm $x=x_1$, một chuyển vị y_0:

$$g = y_{x=x1} - y_0 = 0 \tag{3.8}$$

Đưa bài toán tỡm cực trị của (3.3) với điều kiện ràng buộc (3.8) về bài toán cực trị không ràng buộc bằng cách xây dựng phiếm hàm mở rộng Lagrange F như sau:

$$F = Z + \lambda g \rightarrow \min$$

$$F = \int_l (M - M_p)\chi dx + \lambda(y_{x=x1} - y_0) \rightarrow \min \tag{3.9}$$

Trong đó λ là thừa số Lagrange và cũng là ẩn của bài toán.Từ điều kiện

$$\delta F = \int_l (M - M_p)\delta\chi dx + \delta(\lambda g) = 0$$

nhận được hai phương trình sau:

$$EJ\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) + P\frac{d^2y}{dx^2} = \begin{cases} -\lambda & khi \quad x = x_1 \\ 0 & khi \quad x \neq x_1 \end{cases} \tag{3.10a}$$

$$EJ\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + P\frac{dy}{dx} = 0 \tag{3.10b}$$

cùng với phương trỡnh (3.8). Phương trình (3.10a) là phương trình có vế phải. Để nó trở thành phương trình uốn dọc (3.7a) của thanh thì

$$\lambda=0 \tag{3.11}$$

Về mặt toán học, phương trình (3.11) là phương trình đa thức xác định các trị riêng của hệ (3.7) bởi vì nghiệm của nó cũng là nghiệm của (3.7). Về cơ học, λ có thứ nguyên là lực. Đó là lực giữ để cho thanh có chuyển vị y_0 tại điểm

$x=x_1$. Lực giữ phải bằng không, suy ra phương trỡnh (3.11). Trị riờng của (3.7) phụ thuộc vào thụng số P, suy ra λ cũng là hàm của P. Cho nên giải phương trình (3.11) theo P, sẽ nhận được các lực tới hạn của thanh bị uốn dọc.

3.5.2. Tính toán ổn định của hệ thanh bằng phương pháp phần tử hữu hạn

Bài toán ổn định của hệ thanh thẳng là bài toán phức tạp và khá lý thú. Trong [ ] tác giả đã xây dựng phương pháp mới để giải bài toán ổn định của thanh thẳng chịu tác dụng của tải trọng tĩnh có xét biến dạng trượt ngang và đưa ra kết quả tính lực tới hạn đối với các thanh có điều kiện biên khác nhau, với việc dùng hàm xấp xỉ độ võng và lực cắt là các đa thức. Trong mục này, tác giả cũng dùng phương pháp phần tử hữu hạn để xây dựng và giải các bài toán ổn định của hệ thanh thẳng chịu tác dụng của tải trọng tĩnh có xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang. Khi nghiên cứu ổn định của hệ thanh ta chấp nhận các giả thiết dưới đây nhằm đơn giản hóa việc xác định tải trọng tới hạn:

1. Vật liệu của hệ thanh làm việc trong giới hạn đàn hồi

2. Các nút của hệ xem như tuyệt đối cứng. Do đó, chuyển vị tại các đầu thanh quy tụ vào một nút sẽ như nhau.

3. Các thanh của hệ xem như không co dãn. Trước và sau biến dạng, khoảng cách theo phương ban đầu giữa các nút của hệ không thay đổi.

4. Khi xác định chuyển vị trong hệ, không những xét đến ảnh hưởng của biến dạng uốn do mômen uốn gây ra mà còn xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt do lực cắt gây ra.

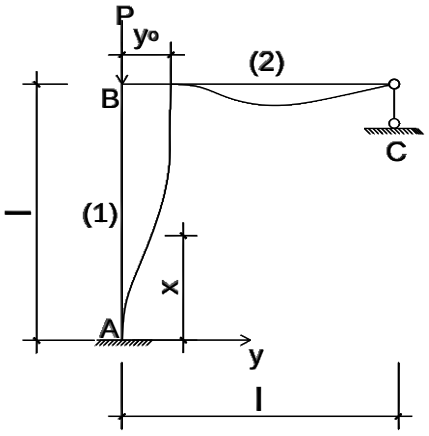
5. Tải trọng tác dụng trên hệ chỉ đặt ở các nút. Những tải trọng này chỉ gây ra kéo hoặc nén mà không gây ra uốn ngang trong các thanh khi hệ chưa mất ổn định.

Để thấy rõ được nội dung của phương pháp đối với các bài toán ổn định của hệ thanh thẳng đàn hồi tuyến tính, có xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang tác giả trình bày qua các bài toán cụ thể sau đây.

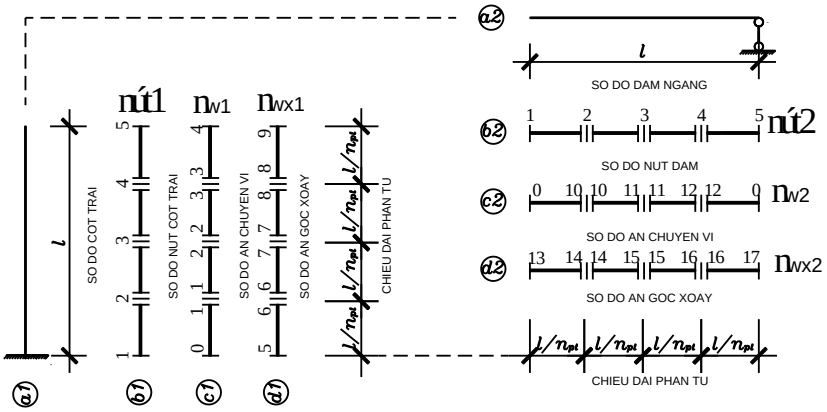
Ví dụ. 3.1: Khung siêu tĩnh bậc một

Xác định lực tới hạn P_{th} cho khung chịu lực như (hình 3.2). Biết độ cứng uốn của các thanh EJ=const.

Chia thanh 1 và 2 thành n đoạn, hình 3.3, ta nói các thanh có npt phần tử. Các nút của các phần tử nên trùng với các điểm đặt lực tập trung, thanh có tiết diện ngang không thay đổi... Chiều dài các phần tử bằng nhau.



Hình 3.2. *Khung siêu tĩnh bậc một*



Hình 3.3. *Đánh số nút, số ẩn*

Theo sơ đồ tính ở trên, mỗi phần tử có bốn ẩn. Vì cần phải bảo đảm điều kiện liên tục của chuyển vị giữa các phần tử và tại các liên kết nên tổng ẩn nhỏ hơn hoặc bằng (4 x n_{pt}). Nói chung, ở bài toán này bảo đảm cả điều kiện liên tục về chuyển vị giữa các phần tử và điều kiện liên tục về góc xoay. Lấy ví dụ, khi các thanh có 4 phần tử thì ta có các ẩn sau, hình 3.3.

Tổng cộng ta có 17 ẩn ≤ 4×8 = 32 ẩn.

Các ẩn được đưa vào các ma trận ẩn chuyển vị nw1, nw2 và ma trận góc xoay nwx1, nwx2 đều có kích thước[1x2npt].

nw1 = [0 1 1 2 2 3 3 4]

nwx1 = [5 6 6 7 7 8 8 9]

nw2 = [0 10 10 11 11 12 12 0]

nwx2 = [13 14 14 15 15 16 16 17]

a) Ma trận độ cứng phần tử:

Đối với chuyển vị tác giả dùng các hàm nội suy là đa thức bậc ba sau:

$f_1 = 1/4(x-1)^2(x+2)$;

$f_2 = 1/4(x-1)^2(x+1)$;

$f_3 = 1/4(x+1)^2(-x+2)$;

$f_4 = 1/4(x+1)^2(x-1)$;

fw=[f1 f2 f3 f4];

Chuyển vị mỗi điểm trong phần tử xác định như sau:

$$W = [f_1\ f_2\ f_3\ f_4]\ [W_1\ \theta_1\ W_2\ \theta_2]^T$$

Góc xoay do mômen: fwx=diff(fw,x).*2/dx;

Biến dạng uốn:

bdx = –diff(fwx,x)*2/dx;

mx = bdx.*ej;

mp = fw.*p;

Ma trận độ cứng phần tử đối với thanh 1 được viết như sau

$$ae_1(m,:) = \frac{dx}{2}\int_{-1}^{1}(mx - mp)bdx(m)dx; \quad m = (1 \div 4)$$

Vì vật liệu và kích thước hình học của thanh 1 và 2 giống nhau, trong thanh 2 không có lực dọc trục nên ma trận độ cứng phần tử của thanh 2 được viết như sau:

$$ae_2(m,:) = \frac{dx}{2}\int_{-1}^{1}(mx)bdx(m)dx; \quad m = (1 \div 4)$$

ở đây không cần xét momen bằng không tại điểm C

Dùng tích phân trực tiếp, cũng có thể dùng tích phân số của Gauss ta có:

Ma trận độ cứng của phần tử dùng để tính thanh 1 (thanh đứng chịu nén)

$$[a]_{e1} = \begin{bmatrix} -4.8P+768 & 4.8P-768 & -0.1P+96 & -0.1P+96 \\ 4.8P-768 & -4.8P+768 & 0.1P-96 & 0.1P-96 \\ -1.1P+96 & 0.1P-96 & -0.03P+16 & 0.0083P+8 \\ -0.1P+96 & 1.1P-96 & 0.0083P+8 & -0.03P+16 \end{bmatrix}$$

Ma trận độ cứng của phần tử dùng để tính thanh 2 (thanh ngang)

$$[a]_{e2} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 768 & -768 & 96l, & 96l \\ -768 & 768 & -96l & -96l \\ 96l & -96l & 16l^2 & 8l^2 \\ 96l & -96l & 8l^2 & 16l^2 \end{bmatrix}$$

a) Ma trận độ cứng tổng thể

Biết được ma trận $[a]_{e1}$ của thanh đứng và $[a]_{e2}$ của thanh ngang thì xây dựng được ma trận tổng thể [A] của khung có kích thước (17x17) bằng cách đưa ma trận phần tử $[a]_{e1}$ vào mỗi phần tử của thanh đứng và ma trận phần tử $[a]_{e2}$ vào mỗi phần tử của thanh nằm ngang (thuật toán cụ thể tác giả không giới thiệu ở đây vì nó không có tính tổng quát mà nó phụ thuộc vào khả năng lập trình của từng người).

b) Các điều kiện liên tục

Thanh 1, 2 đều đã thỏa mãn điều kiện liên tục theo hình 3.3.

c) Các điều kiện biên

Góc xoay do momen tại chân thanh đứng bằng không, góc xoay cuối thanh đứng và đầu thanh ngang phải bằng nhau.

d) Điều kiện chuyển vị cưỡng bức

Chuyển vị cưỡng bức tại cuối thanh đứng bằng y0, ta có

$$W(npt,2) - y_0 = 0$$

Như vậy, ngoài các ẩn theo sơ đồ hình 3.3, ta có thêm tổng cộng 3 ràng buộc và do đó có thêm 3 thừa số Lagrange λ. Ma trận A bây giờ có kích thước là (20x20) và ma trận B là véc tơ cột cũng có kích thước là (20x1). Véc tơ B đều bằng không trừ B(20,1) = y0. Giải hệ phương trình AX = B thì ta nhận được phương trình λ(ẩn số 20) có dạng sau:

λ = 3.*(577.*p^8*l^16-1452416.*ej*p^7*l^14+1364881408.*ej^2*p^6*l^12-606858117120.*ej^3*p^5*l^10+134832763961344.*ej^4*p^4*l^8-

14677610499932160.*ej^5*p^3*l^6+721899821098598400.*ej^6*p^2*l^4-1329969264957849600 0.*ej^7*p*l^2+569986827839078400 00.*ej^8)/l^3*y0

Ta thấy λ là hàm bậc 8 đối với P. Giải phương trình λ=0 ta nhận được 8 lực tới hạn như sau:

Bảng 3.1. Lực tới hạn khi thanh chia thành 4 phần tử

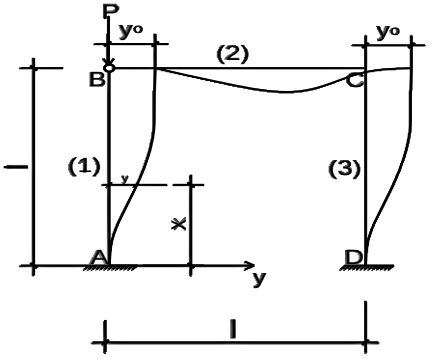
PP	Dãy các lực tới hạn $P_{th}xEJ/l^2$				
	P_{1th}	P_{2th}	P_{3th}	P_{4th}	P_{5th}
PTHH	6,030	27,467	68,512	132,591	248,386
GT	6,030	27,382	67,322	131,367	246,301
Sai số%	0	0,31	1,77	0,93	0,85

Như vậy, khi chia thanh thành bốn phần từ ta nhận được một lực tới hạn đầu tiên hoàn toàn chính xác, còn các lực tiếp theo có sai số không đáng kể. Muốn tìm được nhiều nghiệm chính xác ta chỉ cần chia thanh thành nhiều phần tử hơn.

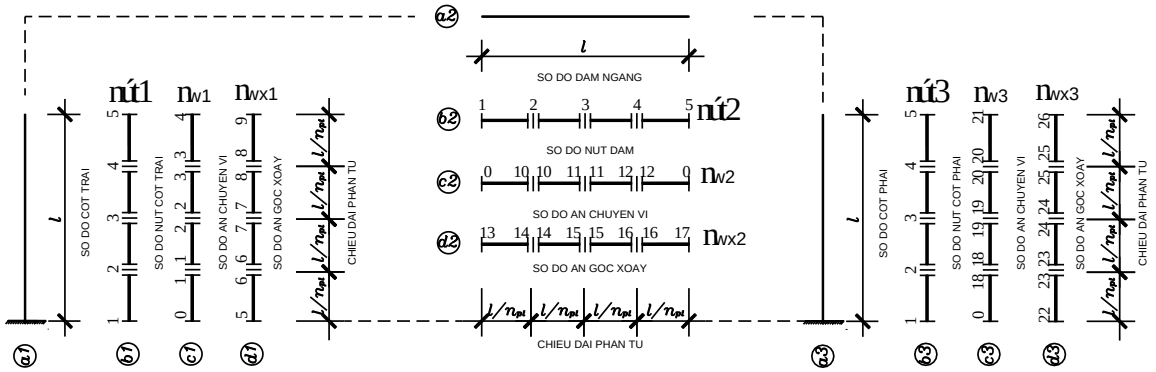
Ví dụ. 3.2: Khung siêu tĩnh bậc hai

Xác định lực tới hạn P_{th} cho khung chịu lực như (hình 3.2). Biết độ cứng uốn của các thanh EJ=const.

Chia thanh 1 và 2 thành n đoạn, hình 3.5, ta nói các thanh có npt phần tử. Các nút của các phần tử nên trùng với các điểm đặt lực tập trung, thanh có tiết diện ngang không thay đổi... Chiều dài các phần tử bằng nhau.



Hình 3.4. *Khung siêu tĩnh bậc hai*



Hình 3.5. *Đánh số nút, số ẩn*

Theo sơ đồ tính ở trên, mỗi phần tử có bốn ẩn. Vì cần phải bảo đảm điều kiện liên tục của chuyển vị giữa các phần tử và tại các liên kết nên tổng ẩn nhỏ hơn hoặc bằng (4 x npt). Nói chung, ở bài toán này bảo đảm cả điều kiện liên tục về chuyển vị giữa các phần tử và điều kiện liên tục về góc xoay. Lấy ví dụ, khi các thanh có 4 phần tử thì ta có các ẩn sau, hình 3.5.

Tổng cộng ta có 26 ẩn ≤ 4×12 = 48 ẩn.

Các ẩn được đưa vào các ma trận ẩn chuyển vị nw1, nw2, nw3 và ma trận góc xoay nwx1, nwx2, nwx3 đều có kích thước[1x2npt].

nw1 = [0 1 1 2 2 3 3 4]

nwx1 = [5 6 6 7 7 8 8 9]

nw2 = [0 10 10 11 11 12 12 0]

nwx2 = [13 14 14 15 15 16 16 17]

nw3 = [0 18 18 19 19 20 20 21]

nwx3 = [22 23 23 24 24 25 25 26]

a) Ma trận độ cứng phần tử:

Đối với chuyển vị dùng các hàm nội suy là đa thức bậc ba sau:

$f_1 = 1/4(x-1)^2(x+2);$

$f_2 = 1/4(x-1)^2(x+1);$

$f_3 = 1/4(x+1)^2(-x+2);$

$f_4 = 1/4(x+1)^2(x-1);$

fw=[f1 f2 f3 f4];

Chuyển vị mỗi điểm trong phần tử xác định như sau:

$$W = [f_1\ f_2\ f_3\ f_4]\ [W_1\ \theta_1\ W_2\ \theta_2]^T$$

Góc xoay do mômen: fwx=diff(fw,x).*2/dx;

Biến dạng uốn:

bdx = –diff(fwx,x)*2/dx;

mx = bdx.*ej;

mp = fw.*p;

Ma trận độ cứng phần tử đối với thanh 1 được viết như sau

$$ae_1(m,:) = \frac{dx}{2}\int_{-1}^{1}(mx - mp)bdx(m)dx; \quad m = (1 \div 4)$$

Vì vật liệu và kích thước hình học của thanh 2 và 3 giống nhau, trong thanh 2 và 3 không có lực dọc trục nên ma trận độ cứng phần tử của thanh 2 và 3 được viết như sau:

$$ae_{2,3}(m,:) = \frac{dx}{2}\int_{-1}^{1}(mx)bdx(m)dx; \quad m = (1 \div 4)$$

Dùng tích phân trực tiếp, cũng có thể dùng tích phân số của Gauss ta có:

Ma trận độ cứng của phần tử dùng để tính thanh 1 (thanh đứng chịu nén)

$$[a]_{e1} = \begin{bmatrix} -4.8P+768 & 4.8P-768 & -0.1P+96 & -0.1P+96 \\ 4.8P-768 & -4.8P+768 & 0.1P-96 & 0.1P-96 \\ -1.1P+96 & 0.1P-96 & -0.03P+16 & 0.0083P+8 \\ -0.1P+96 & 1.1P-96 & 0.0083P+8 & -0.03P+16 \end{bmatrix}$$

Ma trận độ cứng của phần tử dùng để tính thanh 2 và 3

$$[a]_{e2,3} = \frac{EJ}{l^3}\begin{bmatrix} 768 & -768 & 96l, & 96l \\ -768 & 768 & -96l & -96l \\ 96l & -96l & 16l^2 & 8l^2 \\ 96l & -96l & 8l^2 & 16l^2 \end{bmatrix}$$

a) Ma trận độ cứng tổng thể

Biết được ma trận $[a]_{e1}$ của thanh đứng và $[a]_{e2,3}$ của thanh 2 và 3 thì xây dựng được ma trận tổng thể [A] của khung có kích thước (26x26) bằng cách đưa ma trận phần tử $[a]_{e1}$ vào mỗi phần tử của thanh đứng và ma trận phần tử $[a]_{e2,3}$ vào mỗi phần tử của thanh 2 và 3 (thuật toán cụ thể tác giả không giới thiệu ở đây vì nó không có tính tổng quát mà nó phụ thuộc vào khả năng lập trình của từng người).

b) Các điều kiện liên tục

Thanh 1, 2 và 3 đều đã thỏa mãn điều kiện liên tục theo hình 3.5.

c) Các điều kiện biên

Góc xoay do momen tại chân thanh đứng 1, 3 bằng không, momen cuối thanh đứng 1 và đầu thanh ngang 2 phải bằng không, góc xoay cuối thanh đứng 3 và cuối thanh ngang 2 phải bằng nhau, chuyển vị ngang tại đầu thanh 1 và 3 bằng nhau.

d) Điều kiện chuyển vị cưỡng bức

Chuyển vị cưỡng bức tại cuối thanh đứng 1 bằng y0, ta có

$$W(npt,2) - y_0 = 0$$

Như vậy, ngoài các ẩn theo sơ đồ hình 3.3, ta có thêm tổng cộng 6 ràng buộc và do đó có thêm 6 thừa số Lagrange λ. Ma trận A bây giờ có kích thước là (32x32) và ma trận B là véc tơ cột cũng có kích thước là (32x1). Véc tơ B đều bằng không trừ B(32,1) = y0. Giải hệ phương trình AX = B thì ta nhận được phương trình λ(ẩn số 32) có dạng sau:

λ = 3.*(4039.*p^8*l^16-12352256.*p^7*ej*l^14+13158835200.*p^6*ej^2*l^12-6300429713408.*p^5*ej^3*l^10+1446010136035328.*p^4*ej^4*l^8-156974086084362240.*p^3*ej^5*l^6+7489368549752832000.*p^2*ej^6*l^4-133739096844533760000.*p*ej^7*l^2+655484852014940160000.*ej^8)/l^3*y0

Ta thấy λ là hàm bậc 8 đối với P. Giải phương trình λ=0 ta nhận được 8 lực tới hạn, ở đây đưa ra ba lực tới hạn đầu tiên như sau:

Bảng 3.2. Lực tới hạn khi thanh chia thành 4 phần tử

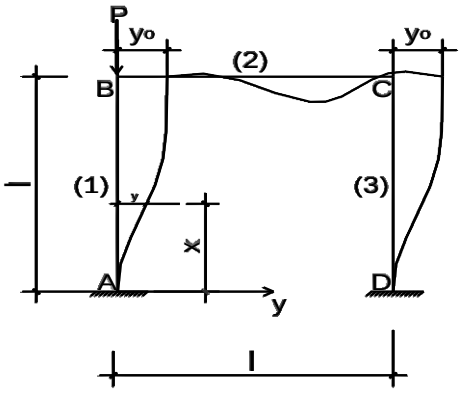
PP	**Dãy các lực tới hạn $P_{th}xEJ/l^2$**		
	P_{1th}	**P_{2th}**	**P_{3th}**
PTHH	7,768	23,106	63,154
GT	7,77	23,041	61,990
Sai số%	0,025	0,28	1,88

Như vậy, khi chia thanh thành bốn phần tử ta nhận được lực tới hạn đầu tiên chỉ sai số 0,025%, còn các lực tiếp theo có sai số không đáng kể. Muốn tìm được nhiều nghiệm chính xác ta chỉ cần chia thanh thành nhiều phần tử hơn.

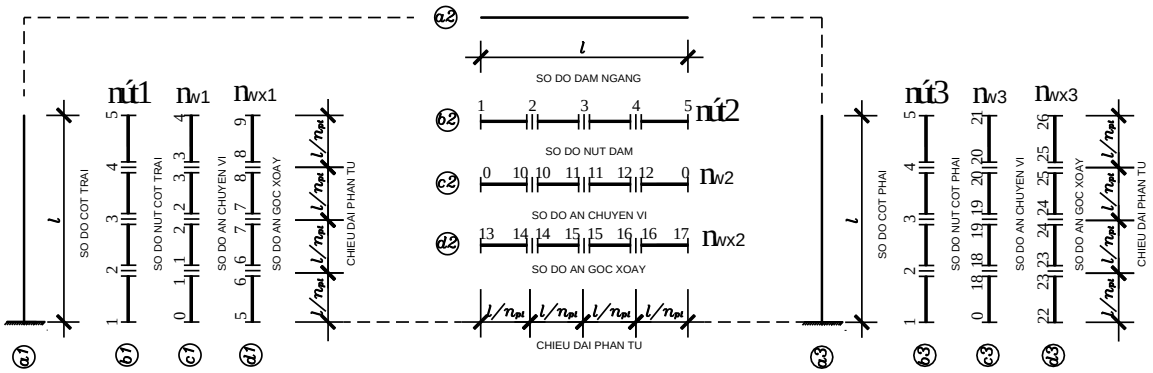
Ví dụ. 3.3: Khung siêu tĩnh bậc ba

Xác định lực tới hạn P_{th} cho khung chịu lực như (hình 3.5). Biết độ cứng uốn của các thanh EJ=const.

Chia thanh 1 và 2 thành n đoạn, hình 3.6, ta nói các thanh có npt phần tử. Các nút của các phần tử nên trùng với các điểm đặt lực tập trung, thanh có tiết diện ngang không thay đổi... Chiều dài các phần tử bằng nhau.



Hình 3.5. *Khung siêu tĩnh bậc ba*



Hình 3.6. *Đánh số nút, số ẩn*

Theo sơ đồ tính ở trên, mỗi phần tử có bốn ẩn. Vì cần phải bảo đảm điều kiện liên tục của chuyển vị giữa các phần tử và tại các liên kết nên tổng ẩn nhỏ hơn hoặc bằng (4 x npt). Nói chung, ở bài toán này bảo đảm cả điều kiện liên tục về chuyển vị giữa các phần tử và điều kiện liên tục về góc xoay. Lấy ví dụ, khi các thanh có 4 phần tử thì ta có các ẩn sau, hình 3.6.

Tổng cộng ta có 26 ẩn ≤ 4×12 = 48 ẩn.

Các ẩn được đưa vào các ma trận ẩn chuyển vị nw1, nw2, nw3 và ma trận góc xoay nwx1, nwx2, nwx3 đều có kích thước[1x2npt].

nw1 = [0 1 1 2 2 3 3 4]

nwx1 = [5 6 6 7 7 8 8 9]

nw2 = [0 10 10 11 11 12 12 0]

nwx2 = [13 14 14 15 15 16 16 17]

nw3 = [0 18 18 19 19 20 20 21]

nwx3 = [22 23 23 24 24 25 25 26]

a) Ma trận độ cứng phần tử:

Đối với chuyển vị dùng các hàm nội suy là đa thức bậc ba sau:

$f_1 = 1/4(x-1)^2(x+2)$;

$f_2 = 1/4(x-1)^2(x+1)$;

$f_3 = 1/4(x+1)^2(-x+2)$;

$f_4 = 1/4(x+1)^2(x-1)$;

fw=[f1 f2 f3 f4];

Chuyển vị mỗi điểm trong phần tử xác định như sau:

$$W = [f_1\ f_2\ f_3\ f_4]\ [W_1\ \theta_1\ W_2\ \theta_2]^T$$

Góc xoay do mômen: fwx=diff(fw,x).*2/dx;

Biến dạng uốn:

bdx = –diff(fwx,x)*2/dx;

mx = bdx.*ej;

mp = fw.*p;

Ma trận độ cứng phần tử đối với thanh 1 được viết như sau

$$ae_1(m,:) = \frac{dx}{2}\int_{-1}^{1}(mx - mp)bdx(m)dx; \quad m = (1 \div 4)$$

Vì vật liệu và kích thước hình học của thanh 2 và 3 giống nhau, trong thanh 2 và 3 không có lực dọc trục nên ma trận độ cứng phần tử của thanh 2 và 3 được viết như sau:

$$ae_{2,3}(m,:) = \frac{dx}{2}\int_{-1}^{1}(mx)bdx(m)dx; \quad m = (1 \div 4)$$

Dùng tích phân trực tiếp, cũng có thể dùng tích phân số của Gauss ta có:

Ma trận độ cứng của phần tử dùng để tính thanh 1 (thanh đứng chịu nén)

$$[a]_{e1} = \begin{bmatrix} -4.8P+768 & 4.8P-768 & -0.1P+96 & -0.1P+96 \\ 4.8P-768 & -4.8P+768 & 0.1P-96 & 0.1P-96 \\ -1.1P+96 & 0.1P-96 & -0.03P+16 & 0.0083P+8 \\ -0.1P+96 & 1.1P-96 & 0.0083P+8 & -0.03P+16 \end{bmatrix}$$

Ma trận độ cứng của phần tử dùng để tính thanh 2 và 3

$$[a]_{e2,3} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 768 & -768 & 96l, & 96l \\ -768 & 768 & -96l & -96l \\ 96l & -96l & 16l^2 & 8l^2 \\ 96l & -96l & 8l^2 & 16l^2 \end{bmatrix}$$

a) Ma trận độ cứng tổng thể

Biết được ma trận $[a]_{e1}$ của thanh đứng và $[a]_{e2,3}$ của thanh 2 và 3 thì xây dựng được ma trận tổng thể [A] của khung có kích thước (26x26) bằng cách đưa ma trận phần tử $[a]_{e1}$ vào mỗi phần tử của thanh đứng và ma trận phần tử $[a]_{e2,3}$ vào mỗi phần tử của thanh 2 và 3 (thuật toán cụ thể tác giả không giới thiệu ở đây vì nó không có tính tổng quát mà nó phụ thuộc vào khả năng lập trình của từng người).

b) Các điều kiện liên tục

Thanh 1, 2 và 3 đều đã thỏa mãn điều kiện liên tục theo hình 3.6.

c) Các điều kiện biên

Góc xoay do momen tại chân thanh đứng 1, 3 bằng không, góc xoay cuối thanh đứng 1 và đầu thanh ngang 2 phải bằng nhau, góc xoay cuối thanh đứng 3 và cuối thanh ngang 2 phải bằng nhau, chuyển vị ngang tại đầu thanh 1 và 3 bằng nhau.

d) Điều kiện chuyển vị cưỡng bức

Chuyển vị cưỡng bức tại cuối thanh đứng 1 bằng y0, ta có

$$W(npt,2) - y_0 = 0$$

Như vậy, ngoài các ẩn theo sơ đồ hình 3.6, ta có thêm tổng cộng 6 ràng buộc và do đó có thêm 6 thừa số Lagrange λ. Ma trận A bây giờ có kích thước là (32x32) và ma trận B là véc tơ cột cũng có kích thước là (32x1). Véc tơ B đều bằng không trừ B(32,1) = y0. Giải hệ phương trình AX = B thì ta nhận được phương trình λ(ẩn số 32) có dạng sau:

λ = 24.*(577.*p^8*l^16-1468136.*ej*p^7*l^14+1398383616.*ej^2*p^6*l^12-633429229568.*ej^3*p^5*l^10+144803329212416.*ej^4*p^4*l^8-16547602350735360.*ej^5*p^3*l^6+893283189601075200.*ej^6*p^2*l^4-20187033485967360000.*ej^7*p*l^2+149621542307758080000.*ej^8)/l^3*y0

Ta thấy λ là hàm bậc 8 đối với P. Giải phương trình λ=0 ta nhận được 8 lực tới hạn, ở đây đưa ra ba lực tới hạn đầu tiên như sau:

Bảng 3.1. Lực tới hạn khi thanh chia thành 4 phần tử

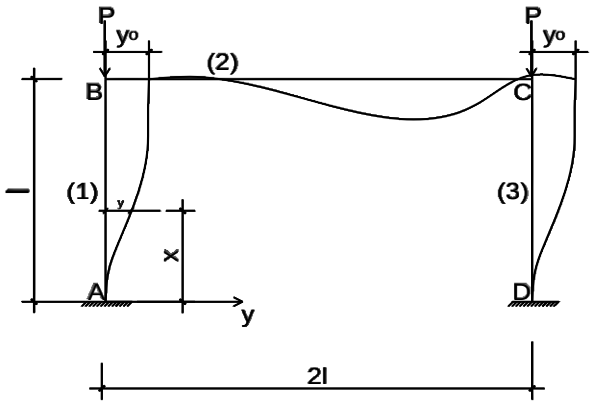
PP	Dãy các lực tới hạn $P_{th}xEJ/l^2$		
	P_{1th}	P_{2th}	P_{3th}
PTHH	14,592	27,877	70,934
GT	14,587	27,780	61,990
Sai số%	0,034	0,35	14,43

Như vậy, khi chia thanh thành bốn phần tử ta nhận được lực tới hạn đầu tiên hoàn chỉ sai số 0,034%, còn các lực tiếp theo có sai số không đáng kể. Muốn tìm được nhiều nghiệm chính xác ta chỉ cần chia thanh thành nhiều phần tử hơn.

Ví dụ. 3.4: Khung siêu tĩnh bậc ba

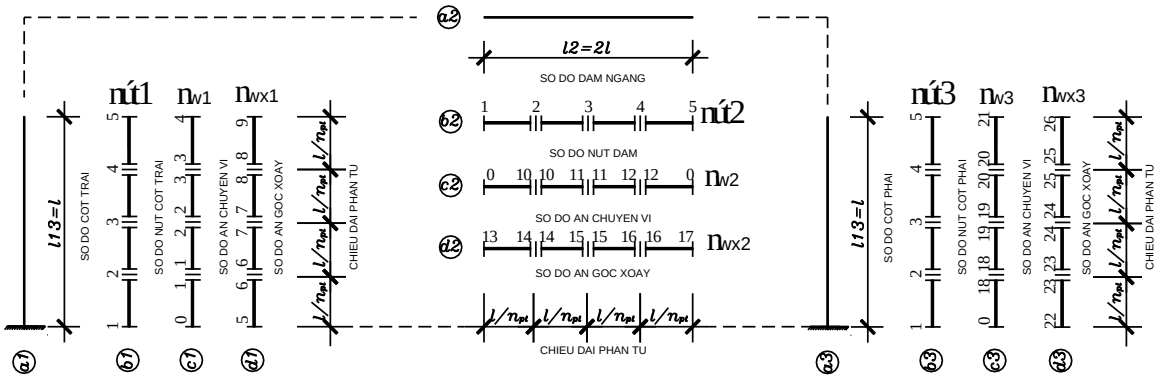
Xác định lực tới hạn P_{th} cho khung chịu lực như (hình 3.7). Biết độ cứng uốn của các thanh đứng 1, 3 là EJ, độ cứng thanh ngang là 2EJ.

Chia thanh 1 và 3 thành n đoạn, mỗi đoạn có chiều dài dx=l13/npt hình 3.8, ta nói các thanh 1, 3 có npt phần tử, riêng thanh 2 cũng chia thành npt phần tử nhưng mỗi phần tử có chiều dài là



Hình 3.7. *Khung siêu tĩnh bậc ba*

dx=l2/2/npt, trong đó l13=l; l2=2l.



Hình 3.8. *Đánh số nút, số ẩn*

Các nút của các phần tử nên trùng với các điểm đặt lực tập trung, thanh có tiết diện ngang không thay đổi... Chiều dài các phần tử bằng nhau.

Theo sơ đồ tính ở trên, mỗi phần tử có bốn ẩn. Vì cần phải bảo đảm điều kiện liên tục của chuyển vị giữa các phần tử và tại các liên kết nên tổng ẩn nhỏ hơn hoặc bằng (4 x npt). Nói chung, ở bài toán này bảo đảm cả điều kiện liên tục về chuyển vị giữa các phần tử và điều kiện liên tục về góc xoay. Lấy ví dụ, khi các thanh có 4 phần tử thì ta có các ẩn sau, hình 3.8.

Tổng cộng ta có 26 ẩn ≤ 4×12 = 48 ẩn.

Các ẩn được đưa vào các ma trận ẩn chuyển vị nw1, nw2, nw3 và ma trận góc xoay nwx1, nwx2, nwx3 đều có kích thước[1x2npt].

nw1 = [0 1 1 2 2 3 3 4]

nwx1 = [5 6 6 7 7 8 8 9]

nw2 = [0 10 10 11 11 12 12 0]

nwx2 = [13 14 14 15 15 16 16 17]

nw3 = [0 18 18 19 19 20 20 21]

nwx3 = [22 23 23 24 24 25 25 26]

a) Ma trận độ cứng phần tử:

Đối với chuyển vị dùng các hàm nội suy là đa thức bậc ba sau:

l13=l; l2=2*l; dx13=l13/npt; dx2=l2/2/npt;

f1=(x-1)^2*(x+2)/4;

f2=(x+1)^2*(-x+2)/4;

f3=(x-1)^2*(x+1)/4*dx13/2;

f4=(x+1)^2*(x-1)/4*dx13/2;

fw=[f1 f2 f3 f4];

Chuyển vị mỗi điểm trong phần tử xác định như sau:

$$W = [f_1\ f_2\ f_3\ f_4]\ [W_1\ \theta_1\ W_2\ \theta_2]^T$$

Góc xoay do mômen: fwx=diff(fw,x).*2/dx13;

Biến dạng uốn:

bdx=-diff(fwx,x).*2/dx13;

mx13=bdx.*ej;

mp = fw.*p;

Ma trận độ cứng phần tử đối với thanh 1 được viết như sau

z1=int((mx13-fw.*p).*s1,x,-1,1).*dx13/2;

$$ae_1(m,:) = \frac{dx13}{2}\int_{-1}^{1}(mx - mp)bdx(m)dx; \quad m = (1 \div 4)$$

Vì vật liệu và kích thước hình học của thanh 2 và 3 giống nhau, trong thanh 2 và 3 không có lực dọc trục nên ma trận độ cứng phần tử của thanh 2 và 3 được viết như sau:

$$ae_{2,3}(m,:) = \frac{dx13}{2}\int_{-1}^{1}(mx13)bdx(m)dx; \quad m = (1 \div 4)$$

Dùng tích phân trực tiếp, cũng có thể dùng tích phân số của Gauss ta có:

Ma trận độ cứng của phần tử dùng để tính thanh 1 (thanh đứng chịu nén)

$$[a]_{e1} = \begin{bmatrix} -4.8P+768 & 4.8P-768 & -0.1P+96 & -0.1P+96 \\ 4.8P-768 & -4.8P+768 & 0.1P-96 & 0.1P-96 \\ -1.1P+96 & 0.1P-96 & -0.03P+16 & 0.0083P+8 \\ -0.1P+96 & 1.1P-96 & 0.0083P+8 & -0.03P+16 \end{bmatrix}$$

Ma trận độ cứng của phần tử dùng để tính thanh 2 và 3

$$[a]_{e2,3} = \frac{EJ}{l^3}\begin{bmatrix} 768 & -768 & 96l, & 96l \\ -768 & 768 & -96l & -96l \\ 96l & -96l & 16l^2 & 8l^2 \\ 96l & -96l & 8l^2 & 16l^2 \end{bmatrix}$$

a) Ma trận độ cứng tổng thể

Biết được ma trận $[a]_{e1}$ của thanh đứng và $[a]_{e2,3}$ của thanh 2 và 3 thì xây dựng được ma trận tổng thể [A] của khung có kích thước (26x26) bằng cách đưa ma trận phần tử $[a]_{e1}$ vào mỗi phần tử của thanh đứng và ma trận phần tử $[a]_{e2,3}$ vào mỗi phần tử của thanh 2 và 3 (thuật toán cụ thể tác giả không giới thiệu ở đây vì nó không có tính tổng quát mà nó phụ thuộc vào khả năng lập trình của từng người).

b) Các điều kiện liên tục

Thanh 1, 2 và 3 đều đã thỏa mãn điều kiện liên tục theo hình 3.8.

c) Các điều kiện biên

Góc xoay do momen tại chân thanh đứng 1, 3 bằng không, góc xoay cuối thanh đứng 1 và đầu thanh ngang 2 phải bằng nhau, góc xoay cuối thanh đứng 3 và cuối thanh ngang 2 phải bằng nhau, chuyển vị ngang tại đầu thanh 1 và 3 bằng nhau.

d) Điều kiện chuyển vị cưỡng bức

Chuyển vị cưỡng bức tại cuối thanh đứng 1 bằng y0, ta có

$$W(npt,2) - y_0 = 0$$

Như vậy, ngoài các ẩn theo sơ đồ hình 3.8, ta có thêm tổng cộng 6 ràng buộc và do đó có thêm 6 thừa số Lagrange λ. Ma trận A bây giờ có kích thước là (32x32) và ma trận B là véc tơ cột cũng có kích thước là (32x1). Véc tơ B đều bằng không trừ B(32,1) = y0. Giải hệ phương trình AX = B thì ta nhận được phương trình λ(ẩn số 32) có dạng sau:

λ = 384.*(60585.*l^30*p^15-308083328.*ej*l^28*p^14+

683462074368.*ej^2*l^26*p^13-872375424385024.*ej^3*l^24*p^12+

712067951531917312.*ej^4*l^22*p^11-

9110760195670042214.*ej^5*l^20*p^10

+14827858395311452769484 8.*ej^6*l^18*p^9-
92135379136802131164528 64.*ej^7*l^16*p^8+
72337863276986396430670 23360.*ej^8*l^14*p^7-
92253448537586042054639 6160000.*ej^9*l^12*p^6+79873527641331406750139547648000.*ej^10*l^10*p^5-
.4557e34*ej^11*l^8*p^4+.16349e36*ej^12*l^6*p^3-
.34136e37*ej^13*l^4*p^2+.35957322437961838469120734003200e38*ej^14*l^2*p-.1332e39*ej^15)*y0

Ta thấy λ là hàm bậc 14 đối với P. Giải phương trình λ=0 ta nhận được 14 lực tới hạn, ở đây đưa ra ba lực tới hạn đầu tiên như sau:

Bảng 3.1. Lực tới hạn khi thanh chia thành 4 phần tử

PP	Dãy các lực tới hạn $P_{th}xEJ/l^2$		
	P_{1th}	P_{2th}	P_{3th}
PTHH	7.380	25.247	63.618
GT	7,379	30,672	71,709
Sai số%	0,013	17,69	11,28

Như vậy, khi chia thanh thành bốn phần tử ta nhận được lực tới hạn đầu tiên hoàn chỉ sai số 0,013%, còn các lực tiếp theo có sai số đáng kể. Muốn tìm được nhiều nghiệm chính xác ta chỉ cần chia thanh thành nhiều phần tử hơn.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Kết luận:

- Đã sử dụng được phương pháp phần tử hữu hạn và phương pháp chuyển vị cưỡng bức để xây dựng bài toán ổn định uốn dọc của hệ thanh thẳng đàn hồi chịu tác dụng của tải trọng tĩnh.

- Phương pháp chuyển vị cưỡng bức cho bài toán ổn định đàn hồi của hệ thanh chịu uốn dọc có xét đến biến dạng trượt ngang. Bằng phép tính biến phân đưa phương trình vi phân không có vế phải về phương trình vi phân có vế phải bằng cách cho một điểm nào đó trong thanh, ví dụ điểm $x=x_1$, một chuyển vị y_0:

từ đó chứng minh được rằng phương trình $\lambda=0$ (phương trình vế phải) là phương trình xác định trị riêng. Đối với bài toán ổn định tĩnh thì các trị riêng tìm được là các lực tới hạn P_{th}. Dùng phương pháp chuyển vị cưỡng bức để giải bài toán ổn định của thanh cho ta ngay phương trình đa thức xác định lực tới hạn của thanh mà không phải thông qua các phép biến đổi phức tạp để đưa ma trận về ma trận đường chéo.

- Dùng phương pháp phần tử hữu hạn để xác định lực tới hạn của các thanh chịu nén có các điều kiện biên khác nhau. Kết quả nhận được hoàn toàn trùng khớp với kết quả nhận được bằng các phương pháp khác (Dùng phần mềm Matlab 7.0 hỗ trợ tính toán).

Kiến nghị:

Có thể sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn trong giảng dạy, học tập và nghiên cứu khi phân tích ổn định cho kết cấu.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

[1] Hà Huy Cương (2005), *Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss,* Tạp chí Khoa học và kỹ thuật, IV/ Tr. 112 ÷118.

[2] Đoàn Văn Duẩn (2011), *Nghiên cứu ổn định đàn hồi của kết cấu hệ thanh có xét đến biến dạng trượt,* Luận ánTiến sĩ kỹ thuật, Đại học Kiến trúc Hà Nội.

[3] Hà Huy Cương (2005), *Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss,* Tạp chí Khoa học và kỹ thuật, IV/ Tr. 112 ÷118.

[4] Nguyễn Văn Liên, Nguyễn Phương Thành, Đinh Trọng Bằng (2003), *Giáo trình Sức bền vật liệu,* Nhà xuất bản xây dựng, tái bản lần thứ 3, 330 trang.

[5] Nguyễn Phương Thành (2002), *Nghiên cứu trạng thái ứng suất – biến dạng tấm nhiều lớp chịu tải trọng động có xét lực ma sát ở các mặt tiếp xúc,* Luận án tiến sỹ kỹ thuật.

[6] Vương Ngọc Lưu (2002), *Nghiên cứu trạng thái ứng suất – biến dạng của tấm sàn Sandwich chịu tải trọng tĩnh và động,* Luận án tiến sỹ kỹ thuật.

[7] Trần Hữu Hà (2006), *Nghiên cứu bài toán tương tác giữa cọc và nền dưới tác dụng của tải trọng*, Luận án tiến sỹ kỹ thuật.

[8] Phạm Văn Trung (2006), *Phương pháp mới Tính toán hệ dây và mái treo,* Luận án Tiến sỹ kỹ thuật.

[9] Vũ Hoàng Hiệp (2007), *Nghiên cứu trạng thái ứng suất - biến dạng của dầm nhiều lớp chịu tải tĩnh và động,* Luận án tiến sỹ kỹ thuật, Hà nội.

[10] Nguyễn Văn Đạo (2001), *Cơ học giải tích,* Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà nội, 337 trang.

[11] Nguyễn Văn Đạo, Trần Kim Chi, Nguyễn Dũng (2005), *Nhập môn Động lực học phi tuyến và chuyển động hỗn độn.* Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà nội.

[12] Lều Thọ Trình, Đỗ Văn Bình(2006), *Giáo trình ổn định công trình,* Nhà xuất bản Khoa học kỹ thuật.

[13] Vũ Hoàng Hiệp (2008), *Tính kết cấu có xét biến dạng trượt,* Tạp chí xây dựng số 7.

[14] Đoàn Văn Duẩn, Nguyễn Phương Thành (2007), *Phương pháp mới tính toán ổn định của thanh,* Tạp chí Xây dựng số 12 (Tr41-Tr44).

[15] Đoàn Văn Duẩn (2008), *Phương pháp mới tính toán ổn định của khung,* Tạp chí Xây dựng số 01 (Tr35-Tr37).

[16] Đoàn Văn Duẩn (2008), *Nghiên cứu ổn định uốn dọc của thanh có xét biến dạng trượt,* Tạp chí Xây dựng số 12 (Tr33-Tr37).

[17] Đoàn Văn Duẩn (2009), *Phương pháp nghiên cứu ổn định tổng thể của dàn,* Tạp chí Xây dựng số 03 (Tr86-Tr89).

[18] Đoàn Văn Duẩn (2007), *Phương pháp nguyên lý Cực trị Gauss đối với các bài toán ổn định công trình,* Luận văn thạc sỹ kỹ thuật.

[19] Phạm Văn Đạt (2015), *Phân tích kết cấu dàn chịu tải trọng tĩnh theo sơ đồ biến dạng*, Luận án Tiến sĩ kỹ thuật, Học viện Kỹ thuật Quân sự.

[20] Trần Thị Kim Huế (2005), *Phương pháp nguyên lý Cực trị Gauss đối với các bài toán cơ học kết cấu,* Luận văn thạc sỹ kỹ thuật.

[21] Nguyễn Thị Liên (2006), *Phương pháp nguyên lý Cực trị Gauss đối với các bài toán động lực học công trình,* Luận văn thạc sỹ kỹ thuật.

[22] Vũ Thanh Thủy (2009), *Xây dựng bài toán dầm khi xét đầy đủ hai thành phần nội lực momen và lực cắt.* Tạp chí Xây dựng số 4.

[23] Vũ Thanh Thủy (2009), *Dao động tự do của dầm khi xét ảnh hưởng của lực cắt.* Tạp chí Xây dựng, số 7.

[24] Timoshenko C.P, Voinópk2. Krige X, (1971), *Tấm và Vỏ.* Người dịch, Phạm Hồng Giang, Vũ Thành Hải, Đoàn Hữu Quang, Nxb Khoa học và kỹ thuật, Hà Nội.

[25] Klaus – Jurgen Bathe (1996), *Finite Element procedures.* Part one, Prentice – Hall International, Inc, 484 trang.

[26] Klaus – Jurgen Bathe (1996), *Finite Element procedures.* Part two, Prentice – Hall International, Inc, 553 trang.

[27] Ray W.Clough, Joseph Penzien(1993), *Dynamics of Structures* (Tái bản lần thứ 2), McGraw-Hill Book Company, Inc, 738 trang.

[28] O.C. Zienkiewicz-R.L. Taylor (1991), *The finite element method* (four edition) Volume 2, McGraw-Hill Book Company, Inc, 807 trang.

[29] G.Korn-T.Korn (1961), *Mathematical Handbook for sientists and Engineers*, McGraw-Hill, New york (Bản dịch tiếng Nga, I.Bramovich chủ biên, Nhà xuất bản Nauka-Moscow, 1964).

[30] Stephen P.Timoshenko-J. Goodier (1970), *Theory of elasticity,* McGraw-Hill, New york (Bản dịch tiếng Nga, G. Shapiro chủ biên, Nhà xuất bản Nauka-Moscow, 1979), 560 trang.