

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC DÂN LẬP HẢI PHÒNG
.....

NGUYỄN BÁ THÀNH

**TÍNH TOÁN NỘI LỰC VÀ CHUYỂN VỊ CỦA HỆ KHUNG
CÓ XÉT ĐẾN BIẾN DẠNG TRƯỢT NGANG BẰNG
PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN**

LUẬN VĂN THẠC SĨ KỸ THUẬT

**CHUYÊN NGÀNH: KỸ THUẬT XÂY DỰNG CÔNG TRÌNH DÂN DỤNG
VÀ CÔNG NGHIỆP**
MÃ SỐ: 60.58.02.08

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. ĐỖ TRỌNG QUANG

HẢI PHÒNG - 2018

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đề tài “*Tính toán nội lực và chuyển vị của hệ khung có xét đến biến dạng trượt ngang bằng phương pháp phần tử hữu hạn*” là đề tài nghiên cứu của tôi. Những số liệu sử dụng phân tích trong luận văn hoàn toàn trung thực và có nguồn gốc rõ ràng. Các kết quả nghiên cứu trong luận văn do tôi tự tìm hiểu, phân tích một cách trung thực, khách quan với thực tiễn.

Hải Phòng, ngày tháng năm 2018

Tác giả

Nguyễn Bá Thành

LỜI CẢM ƠN

Qua quá trình học tập và nghiên cứu, được sự giúp đỡ, của các thầy cô giáo trong trường Đại học Dân lập Hải Phòng, Khoa Đào tạo sau Đại học, tôi đã hoàn thành chương trình học tập và nghiên cứu luận văn với đề tài “*Tính toán nội lực và chuyển vị của hệ khung có xét đến biến dạng trượt ngang bằng phương pháp phân tử hữu hạn*”.

Tôi xin trân trọng cảm ơn TS. Đỗ Trọng Quang đã tạo điều kiện và tận tình giúp đỡ tôi trong quá trình nghiên cứu đề tài.

Bên cạnh đó, tôi xin chân thành gửi lời cảm ơn đến các bạn bè, đồng nghiệp đã giúp đỡ tôi tìm hiểu và nghiên cứu các tài liệu liên quan trong quá trình hoàn thành bài luận văn tốt nghiệp.

Mặc dù đã nỗ lực cố gắng để hoàn thành bài luận văn nhưng vì thời gian và kiến thức còn hạn chế nên luận văn không tránh khỏi những mặt tồn tại nhất định. Tôi rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến từ quý Thầy Cô để hoàn thiện tốt hơn luận văn này.

Xin trân trọng cảm ơn!

Hải Phòng, ngày tháng năm 2018

Tác giả

Nguyễn Bá Thành

MỤC LỤC

LỜI CAM ĐOAN	<i>i</i>
LỜI CẢM ƠN.....	<i>ii</i>
MỞ ĐẦU.....	1
CHƯƠNG 1. BÀI TOÁN CƠ HỌC KẾT CẤU VÀ CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI.....	3
1.1. Bài toán cơ học kết cấu.....	3
1.2. Các phương pháp giải hiện nay	3
1.2.1. Phương pháp lực	3
1.2.2. Phương pháp chuyển vị.....	4
1.2.3. Phương pháp hỗn hợp và phương pháp liên hợp.....	4
1.2.4. Phương pháp sai phân hữu hạn	4
1.2.5. Phương pháp hỗn hợp sai phân – biến phân	5
CHƯƠNG 2: PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN	6
2.1. Phương pháp phần tử hữu hạn.....	6
2.1.1 Nội dung phương pháp phần tử hữu hạn theo mô hình chuyển vị.....	7
2.1.2. Cách xây dựng ma trận độ cứng của phần tử chịu uốn	26
2.1.3. Cách xây dựng ma trận độ cứng tổng thể của kết cấu	29
CHƯƠNG 3. TÍNH TOÁN KHUNG PHẪNG CÓ XÉT ĐẾN BIẾN DẠNG TRƯỢT NGANG BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN.....	34
3.1. Lý thuyết dầm có xét biến dạng trượt ngang.....	34
3.2. Phương pháp phần tử hữu hạn đối với bài toán khung có xét đến biến dạng trượt ngang	40
3.2.1. Hàm nội suy của phần tử.....	41
3.2.1.1. Hàm nội suy chuyển vị và góc xoay tại hai nút đầu phần tử.....	41
3.2.1.2. Hàm nội suy lực cắt tại hai nút đầu phần tử.....	43
3.2.2. Ma trận độ cứng của phần tử.....	44

3.2.2.1. Trường hợp không xét biến dạng trượt ngang.....	44
3.2.2.2. Trường hợp có xét đến biến dạng trượt ngang	46
3.2.3. Ma trận độ cứng tổng thể.....	47
3.3. Các ví dụ tính toán khung có xét đến biến dạng trượt ngang	48
KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ.....	72
KẾT LUẬN.....	72
KIẾN NGHỊ.....	73
Danh mục tài liệu tham khảo.....	74

MỞ ĐẦU

Phương pháp phần tử hữu hạn là phương pháp được xây dựng dựa trên ý tưởng rời rạc hóa công trình thành những phần tử nhỏ (số phần tử là hữu hạn). Các phần tử nhỏ được nối lại với nhau thông qua các phương trình cân bằng và các phương trình liên tục. Để giải quyết bài toán cơ học kết cấu, có thể tiếp cận phương pháp này theo ba mô hình gồm: Mô hình chuyển vị, xem chuyển vị là đại lượng cần tìm và hàm nội suy biểu diễn gần đúng dạng phân bố của chuyển vị trong phần tử; Mô hình cân bằng, hàm nội suy biểu diễn gần đúng dạng phân bố của ứng suất hay nội lực trong phần tử và mô hình hỗn hợp, coi các đại lượng chuyển vị và ứng suất là hai yếu tố độc lập riêng biệt. Các hàm nội suy biểu diễn gần đúng dạng phân bố của cả chuyển vị lẫn ứng suất trong phần tử.

Bài toán cơ học kết cấu hiện nay nói chung được xây dựng theo bốn đường lối đó là: Xây dựng phương trình vi phân cân bằng phân tố; Phương pháp năng lượng; Phương pháp nguyên lý công ảo và Phương pháp sử dụng trực tiếp Phương trình Lagrange. Các phương pháp giải gồm có: Phương pháp được coi là chính xác như, phương pháp lực, phương pháp chuyển vị, phương pháp hỗn hợp, phương pháp liên hợp và các phương pháp gần đúng như: Phương pháp phần tử hữu hạn, phương pháp sai phân hữu hạn, phương pháp hỗn hợp sai phân - biến phân. Trong đó phương pháp phần tử hữu hạn được dùng rộng rãi và phổ biến nhất đối với các bài toán kỹ thuật nói chung và bài toán cơ học kết cấu nói riêng.

Đối tượng, phương pháp và phạm vi nghiên cứu của đề tài

Trong luận văn này, tác giả sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn để xây dựng và giải bài toán khung phẳng chịu uốn có xét đến biến dạng trượt ngang chịu tác dụng của tải trọng tĩnh.

Mục đích nghiên cứu của đề tài

“Tính toán khung phẳng chịu uốn có xét biến dạng trượt ngang

chịu tác dụng của tải trọng tĩnh bằng phương pháp phần tử hữu hạn”

Nhiệm vụ nghiên cứu của đề tài

1. Tìm hiểu và giới thiệu các phương pháp giải bài toán cơ học kết cấu hiện nay.
2. Trình bày lý thuyết dầm Euler - Bernoulli và lý thuyết dầm có xét đến biến dạng trượt ngang.
3. Trình bày phương pháp phần tử hữu hạn và áp dụng để giải bài toán khung phẳng, chịu tác dụng của tải trọng tĩnh tập trung.
4. Lập chương trình máy tính điện tử cho các bài toán nêu trên.

CHƯƠNG 1.

BÀI TOÁN CƠ HỌC KẾT CẤU VÀ CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Trong chương này giới thiệu bài toán cơ học kết cấu (bài toán tĩnh) và các phương pháp giải thường dùng hiện nay.

1.1. Bài toán cơ học kết cấu

Bài toán cơ học kết cấu nhằm xác định nội lực và chuyển vị của hệ thanh, tấm, vỏ dưới tác dụng của các loại tải trọng, nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức,... và được chia làm hai loại:

- Bài toán tĩnh định: là bài toán có cấu tạo hình học bất biến hình và đủ liên kết tựa với đất, các liên kết sắp xếp hợp lý, chịu các loại tải trọng. Để xác định nội lực và chuyển vị chỉ cần dùng các phương trình cân bằng tĩnh học là đủ;
- Bài toán siêu tĩnh: là bài toán có cấu tạo hình học bất biến hình và thừa liên kết (nội hoặc ngoại) chịu các loại tải trọng, nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức,... Để xác định nội lực và chuyển vị ngoài các phương trình cân bằng ta còn phải bổ sung các phương trình biến dạng.

Nếu tính đến tận ứng suất, có thể nói rằng mọi bài toán cơ học vật rắn biến dạng nói chung và bài toán cơ học kết cấu nói riêng đều là bài toán siêu tĩnh.

1.2. Các phương pháp giải hiện nay

Đã có nhiều phương pháp để giải bài toán siêu tĩnh. Hai phương pháp truyền thống cơ bản là phương pháp lực và phương pháp chuyển vị. Khi sử dụng chúng thường phải giải hệ phương trình đại số tuyến tính. Số lượng các phương trình tùy thuộc vào phương pháp phân tích. Từ phương pháp chuyển vị ta có hai cách tính gần đúng hay được sử dụng là H. Cross và G. Kani. Từ khi xuất hiện máy tính điện tử, người ta bổ sung thêm các phương pháp số khác như: Phương pháp phân tử hữu hạn; Phương pháp sai phân hữu hạn...

1.2.1. Phương pháp lực

Trong hệ siêu tĩnh ta thay các liên kết thừa bằng các lực chưa biết, còn giá trị các chuyển vị trong hệ cơ bản tương ứng với vị trí và phương của các lực ẩn số do bản thân các lực đó và do các nguyên nhân bên ngoài gây ra bằng không. Từ điều kiện này ta lập được hệ các phương trình đại số tuyến tính, giải hệ này ta tìm được các ẩn số và từ đó suy ra các đại lượng cần tìm.

1.2.2. Phương pháp chuyển vị

Khác với phương pháp lực, phương pháp chuyển vị lấy chuyển vị tại các nút làm ẩn. Những chuyển vị này phải có giá trị sao cho phản lực tại các liên kết đặt thêm vào hệ do bản thân chúng và do các nguyên nhân bên ngoài gây ra bằng không. Lập hệ phương trình đại số tuyến tính thỏa mãn điều kiện này và giải hệ đó ta tìm được các ẩn, từ đó xác định các đại lượng còn lại. Hệ cơ bản trong phương pháp chuyển vị là duy nhất và giới hạn giải các bài toán phụ thuộc vào số các phần tử mẫu có sẵn.

1.2.3. Phương pháp hỗn hợp và phương pháp liên hợp

Phương pháp hỗn hợp, phương pháp liên hợp là sự kết hợp song song giữa phương pháp lực và phương pháp chuyển vị. Trong phương pháp này ta có thể chọn hệ cơ bản theo phương pháp lực nhưng không loại bỏ hết các liên kết thừa mà chỉ loại bỏ các liên kết thuộc bộ phận thích hợp với phương pháp lực; hoặc chọn hệ cơ bản theo phương pháp chuyển vị nhưng không đặt đầy đủ các liên kết phụ nhằm ngăn cản toàn bộ các chuyển vị nút mà chỉ đặt các liên kết phụ tại các nút thuộc bộ phận thích hợp với phương pháp chuyển vị. Trường hợp đầu hệ cơ bản là siêu tĩnh, còn trường hợp sau hệ cơ bản là siêu động.

Trong cả hai cách nói trên, bài toán ban đầu được đưa về hai bài toán độc lập: Một theo phương pháp lực và một theo phương pháp chuyển vị.

1.2.4. Phương pháp sai phân hữu hạn

Phương pháp sai phân hữu hạn cũng là thay thế hệ liên tục bằng mô hình rời rạc, song hàm cần tìm (hàm mang đến cho phép hàm giá trị dừng),

nhận những giá trị gần đúng tại một số hữu hạn điểm của miền tích phân, còn giá trị các điểm trung gian sẽ được xác định nhờ một phương pháp tích phân nào đó. Phương pháp này cho lời giải số của phương trình vi phân về chuyển vị và nội lực tại các điểm nút. Thông thường ta phải thay đạo hàm bằng các sai phân của hàm tại các nút. Phương trình vi phân của chuyển vị hoặc nội lực được viết dưới dạng sai phân tại mỗi nút, biểu thị quan hệ của chuyển vị tại một nút và các nút lân cận dưới tác dụng của ngoại lực.

1.2.5. Phương pháp hỗn hợp sai phân – biến phân

Kết hợp phương pháp sai phân với phương pháp biến phân ta có một phương pháp linh động hơn: Hoặc là sai phân các đạo hàm trong phương trình biến phân hoặc là sai phân theo một phương và biến phân theo một phương khác (đối với bài toán hai chiều).

CHƯƠNG 2

PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Trong chương trình bày một số khái niệm cơ bản của phương pháp phần tử hữu hạn, để phục vụ cho việc xây dựng các bài toán xác định nội lực và chuyển vị cho các dầm liên tục chịu tải trọng tĩnh tập trung theo phương pháp phần tử hữu hạn ở chương 3.

2.1. Phương pháp phần tử hữu hạn

Phương pháp phần tử hữu hạn là một phương pháp số đặc biệt có hiệu quả để tìm dạng gần đúng của một hàm chưa biết trong miền xác định V của nó. Tuy nhiên phương pháp phần tử hữu hạn không tìm dạng xấp xỉ của hàm cần tìm trên toàn miền V mà chỉ trong từng miền con V_e (phần tử) thuộc miền xác định V . Do đó phương pháp này rất thích hợp với hàng loạt bài toán vật lý và kỹ thuật trong đó hàm cần tìm được xác định trên các miền phức tạp gồm nhiều vùng nhỏ có đặc tính hình học, vật lý khác nhau, chịu những điều kiện biên khác nhau. Phương pháp ra đời từ trực quan phân tích kết cấu, rồi được phát biểu một cách chặt chẽ và tổng quát như một phương pháp biến phân hay phương pháp dư có trọng nhưng được xấp xỉ trên mỗi phần tử.

Trong phương pháp phần tử hữu hạn chia kết cấu công trình thành một số hữu hạn các phần tử. Các phần tử này được nối với nhau tại các điểm định trước thường tại đỉnh phần tử (thậm trí tại các điểm trên biên phần tử) gọi là nút. Như vậy việc tính toán kết cấu công trình được đưa về tính toán trên các phần tử của kết cấu sau đó kết nối các phần tử này lại với nhau ta được lời giải của một kết cấu công trình hoàn chỉnh. Tương tự như phương pháp sai phân hữu hạn cũng chia công trình thành các đoạn nhỏ (phần tử) và các trạng thái chuyển vị (trường chuyển vị) v.v... được xác định tại các điểm nút sai phân. Sự khác biệt của hai phương pháp là Phương pháp sai phân hữu hạn sau

khi tìm được các chuyển vị tại các nút của sai phân còn các điểm nằm giữa hai nút được xác định bằng nội suy tuyến tính, còn phương pháp phần tử hữu hạn sau khi xác định được chuyển vị tại các nút của phần tử thì các điểm bên trong được xác định bằng hàm nội suy (hàm dạng).

Với bài toán cơ học vật rắn biến dạng, tùy theo ý nghĩa vật lý của hàm nội suy có thể phân tích bài toán theo 3 loại mô hình sau:

- Mô hình chuyển vị: Xem chuyển vị là đại lượng cần tìm và hàm nội suy biểu diễn gần đúng dạng phân bố của chuyển vị trong phần tử.

- Mô hình cân bằng: Hàm nội suy biểu diễn gần đúng dạng phân bố của ứng suất hay nội lực trong phần tử.

- Mô hình hỗn hợp: Coi các đại lượng chuyển vị và ứng suất là 2 yếu tố độc lập riêng biệt. Các hàm nội suy biểu diễn gần đúng dạng phân bố của cả chuyển vị lẫn ứng suất trong phần tử.

Hiện nay, khi áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn để giải các bài toán cơ học thường sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn theo mô hình chuyển vị. Sau đây luận văn trình bày nội dung phương pháp phần tử hữu hạn theo mô hình chuyển vị.

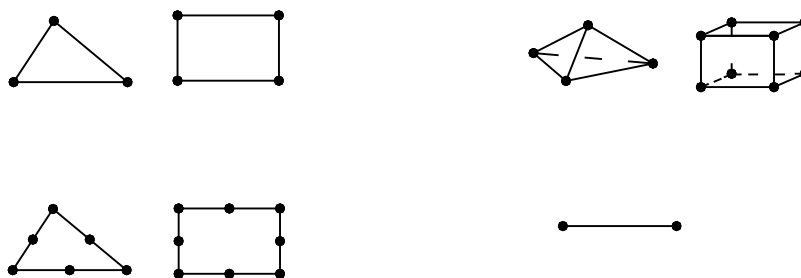
2.1.1 Nội dung phương pháp phần tử hữu hạn theo mô hình chuyển vị

Trong phương pháp phần tử hữu hạn - mô hình chuyển vị, thành phần chuyển vị được xem là đại lượng cần tìm. Chuyển vị được lấy xấp xỉ trong dạng một hàm đơn giản gọi là hàm nội suy (hay còn gọi là hàm chuyển vị). Trình tự phân tích bài toán theo phương pháp phần tử hữu hạn - mô hình chuyển vị có nội dung như sau:

2.1.1.1. Rời rạc hoá miền khảo sát

Miền khảo sát (đối tượng nghiên cứu) được chia thành các miền con hay còn gọi là các phần tử có hình dạng hình học thích hợp. Các phần tử này được coi là liên kết với nhau tại các nút nằm tại đỉnh hay biên của phần tử. Số nút của phần tử không lấy tùy tiện mà phụ thuộc vào hàm chuyển vị định chọn.

Các phần tử thường có dạng hình học đơn giản (hình 2.1)



Hình 2.1 Dạng hình học đơn giản của phần tử

2.1.1.2. Chọn hàm xấp xỉ

Một trong những tư tưởng của phương pháp phần tử hữu hạn là xấp xỉ hoá đại lượng cần tìm trong mỗi miền con. Điều này cho phép ta khả năng thay thế việc tìm nghiệm vốn phức tạp trong toàn miền V bằng việc tìm nghiệm tại các nút của phần tử, còn nghiệm trong các phần tử được tìm bằng việc dựa vào hàm xấp xỉ đơn giản.

Giả thiết hàm xấp xỉ (hàm chuyên vị) sao cho đơn giản đối với việc tính toán nhưng phải thoả mãn điều kiện hội tụ. Thường chọn dưới dạng hàm đa thức. Biểu diễn hàm xấp xỉ theo tập hợp giá trị các thành phần chuyên vị và có thể cả đạo hàm của nó tại các nút của phần tử. Hàm xấp xỉ này thường được chọn là hàm đa thức vì các lý do sau:

- Đa thức khi được xem như một tổ hợp tuyến tính của các đơn thức thì tập hợp các đơn thức thoả mãn yêu cầu độc lập tuyến tính như yêu cầu của Ritz, Galerkin.

- Hàm xấp xỉ dạng đa thức thường dễ tính toán, dễ thiết lập công thức khi xây dựng các phương trình của phần tử hữu hạn và tính toán bằng máy tính. Đặc biệt là dễ tính đạo hàm, tích phân.

- Có khả năng tăng độ chính xác bằng cách tăng số bậc của đa thức xấp xỉ (về lý thuyết đa thức bậc vô cùng sẽ cho nghiệm chính xác). Tuy nhiên, khi thực hành tính toán ta thường lấy đa thức xấp xỉ bậc thấp mà thôi.

Tập hợp các hàm xấp xỉ sẽ xây dựng nên một trường chuyển vị xác định một trạng thái chuyển vị duy nhất bên trong phần tử theo các thành phần chuyển vị nút. Từ trường chuyển vị sẽ xác định một trạng thái biến dạng, trạng thái ứng suất duy nhất bên trong phần tử theo các giá trị của các thành phần chuyển vị nút của phần tử.

Khi chọn bậc của hàm đa thức xấp xỉ cần lưu ý các yêu cầu sau:

- Các đa thức xấp xỉ cần thoả mãn điều kiện hội tụ. Đây là yêu cầu quan trọng vì phương pháp phần tử hữu hạn là một phương pháp số, do đó phải đảm bảo khi kích thước phần tử giảm thì kết quả sẽ hội tụ đến nghiệm chính xác.

- Các đa thức xấp xỉ được chọn sao cho không mất tính đẳng hướng hình học.

- Số tham số của các đa thức xấp xỉ phải bằng số bậc tự do của phần tử, tức là bằng số thành phần chuyển vị nút của phần tử. Yêu cầu này cho khả năng nội suy đa thức của hàm xấp xỉ theo giá trị đại lượng cần tìm, tức là theo giá trị các thành phần chuyển vị tại các điểm nút của phần tử.

2.1.1.3. Xây dựng phương trình cân bằng trong từng phần tử, thiết lập ma trận độ cứng $[K]_e$ và vectơ tải trọng nút $\{F\}_e$ của phần tử thứ e .

Thiết lập mối quan hệ giữa ứng suất và chuyển vị nút phần tử

Cần thiết lập biểu thức tính biến dạng và ứng suất tại một điểm bất kì trong phần tử thông qua ẩn cơ bản là chuyển vị nút phần tử $\{\delta\}_e$. Sử dụng các công thức trong Lí thuyết đàn hồi, mối quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị :

$$\{\varepsilon\} = [\nabla]\{u\} \quad (2.1)$$

Ta có:
$$\{u\} = [N]\{\delta\}_e \quad (2.2)$$

trong đó: $[N]$ - gọi là ma trận hàm dạng, chứa các toạ độ của các điểm nút của phần tử và các biến của điểm bất kì đang xét.

Thay (2.2) vào (2.1), ta được:

$$\{\varepsilon\} = [\nabla][N]\{\delta\}_e = [B]\{\delta\}_e \quad (2.3)$$

trong đó : $[B] = [\nabla][N]$ - ma trận chứa đạo hàm của hàm dạng.

Theo lý thuyết đàn hồi quan hệ giữa ứng suất và biến dạng :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (2.4)$$

Thay (2.3) vào (2.4), ta được :

$$\{\sigma\} = [D][B]\{\delta\}_e \quad (2.5)$$

Thế năng toàn phần Π_e của phần tử

Xét trường hợp phần tử chịu tải trọng tập trung tại nút $\{P_n\}_e$ (ứng với chuyển vị nút $\{\delta\}_e$) và chịu tải trọng phân bố trên bề mặt phần tử có cường độ tại điểm M bất kì là $\{q\} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix}$.

Thiết lập biểu thức tính thế năng toàn phần Π_e của phần tử theo công của ngoại lực W_e và thế năng biến dạng U_e của phần tử đó.

$$\Pi_e = U_e - W_e \quad (2.6)$$

Công ngoại lực W_e (không xét lực thể tích) được tính:

$$W_e = \{\delta\}_e^T \{P_n\}_e + \int_s \{u\}^T \{q\} dS$$

Từ (2.2), ta có: $\{u\} = [N]\{\delta\}_e \Rightarrow \{u\}^T = ([N]\{\delta\}_e)^T = \{\delta\}_e^T [N]^T$

Thay vào biểu thức tính công ngoại lực W_e trên, thu được:

$$W_e = \{\delta\}_e^T \{P_n\}_e + \{\delta\}_e^T \int_s [N]^T \{q\} dS \quad (2.7)$$

Thế năng biến dạng U_e của PT được tính:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_v \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV$$

Thay (2.3) và (2.5) vào biểu thức tính thế năng biến dạng U_e của phần tử, ta có:

$$U_e = \frac{1}{2} \{\delta\}_e^T \left(\int_v [B]^T [D][B] dV \right) \{\delta\}_e \quad (2.8)$$

Thay (2.7) và (2.8) vào (2.6) thu được thế năng toàn phần của phần tử :

$$\Pi_e = U_e - W_e = \frac{1}{2} \{\delta\}_e^T \left(\int_v [B]^T [D][B] dV \right) \{\delta\}_e - \left(\{\delta\}_e^T \{P_n\}_e + \{\delta\}_e^T \int_s [N]^T \{q\} dS \right) \quad (2.9)$$

$$\text{Đặt: } [K]_e = \int_v [B]^T [D][B] dV \quad (2.10)$$

$[K]_e$ - gọi là ma trận độ cứng phần tử. Vì $[D]$ là ma trận đối xứng nên tích $([B]^T [D] [B])$ cũng đối xứng và do đó $[K]_e$ là ma trận đối xứng.

$$\text{Đặt: } \{F\}_e = \{P_n\}_e + \int_S [N]^T \{q\} dS = \{P_n\}_e + \{P_q\}_e \quad (2.11)$$

$\{F\}_e$ - là vectơ tải trọng nút của phần tử; được xây dựng bởi ngoại lực đặt tại nút phần tử $\{P_n\}_e$ và ngoại lực đặt trong phần tử quy về nút $\{P_q\}_e$

$$\text{trong đó: } \{P_q\}_e = \int_S [N]^T \{q\} dS \quad (2.12)$$

Thay (2.11) và (2.12) vào (2.9), ta được :

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \{\delta\}_e^T [K]_e \{\delta\}_e - \{\delta\}_e^T \{F\}_e \quad (2.13)$$

Thiết lập phương trình cân bằng

Theo nguyên lí dừng thế năng toàn phần, điều kiện cân bằng của phần tử tại các điểm nút :

$$\partial \Pi_e = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Pi_e}{\partial \{\delta\}_e} = 0 \quad (2.14)$$

Tiến hành lấy đạo hàm riêng lần lượt với từng chuyển vị nút và cho bằng 0, thu được m phương trình (cho phần tử có m chuyển vị nút):

$$\frac{\partial \Pi_e}{\partial \{\delta\}_e} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \Pi_e}{\partial \delta_1} \\ \frac{\partial \Pi_e}{\partial \delta_2} \\ \dots \\ \frac{\partial \Pi_e}{\partial \delta_m} \end{array} \right\} = 0 \quad (2.15)$$

Thay Π_e theo (2.13) vào (2.15) và áp dụng phép lấy đạo hàm riêng đối với ma trận $\left(\frac{\partial (\{X\}^T [A] \{X\})}{\partial \{X\}} = 2[A] \{X\}; \frac{\partial (\{X\}^T \{B\})}{\partial \{X\}} = \{B\} \right)$, thu được:

$$[K]_e \{\delta\}_e - \{F\}_e = 0 \quad (2.16)$$

$$\text{Suy ra: } [K]_e \{\delta\}_e = \{F\}_e \quad (2.17)$$

trong đó:

$\{F\}_e$ - vectơ tải trọng nút của phần tử thứ e xét trong hệ tọa độ địa phương;

$\{\delta\}_e$ - vectơ chuyển vị nút của phần tử thứ e xét trong hệ tọa độ địa phương;

$[K]_e$ - ma trận độ cứng của phần tử thứ e xét trong hệ tọa độ địa phương.

Phương trình (2.17) chính là phương trình cân bằng của phần tử thứ e .

2.1.1.4. Ghép nối các phần tử xây dựng phương trình cân bằng của toàn hệ.

Giả sử hệ kết cấu được rời rạc hoá thành m phần tử. Theo (2.17) ta viết được m phương trình cân bằng cho tất cả m phần tử trong hệ tọa độ riêng của từng phần tử. Sau khi chuyển về hệ tọa độ chung của toàn kết cấu, tiến tới gộp các phương trình cân bằng của từng phần tử trong cả hệ, thu được phương trình cân bằng cho toàn hệ kết cấu trong hệ tọa độ chung:

$$[K']\{\delta'\} = \{F'\} \quad (2.18)$$

Do thứ tự các thành phần trong vectơ chuyển vị nút $\{\delta'\}_e$ của từng phần tử khác với thứ tự trong vectơ chuyển vị nút $\{\delta'\}$ của toàn hệ kết cấu, nên cần lưu ý xếp đúng vị trí của từng thành phần trong $[K']_e$ và $\{F'\}_e$ vào $[K']$ và $\{F'\}$. Việc sắp xếp này thường được áp dụng phương pháp số mã, hay sử dụng ma trận định vị phần tử $[H]_e$ để thiết lập các ma trận tổng thể và vectơ tải trọng nút tổng thể của toàn hệ kết cấu.

Áp dụng ma trận định vị phần tử $[H]_e$

Giả sử hệ kết cấu được rời rạc hoá thành m phần tử. Số bậc tự do của toàn hệ là n . Vectơ chuyển vị nút tổng thể có dạng:

$$\{\delta'\} = \{\delta'_1 \quad \delta'_2 \quad \dots \quad \delta'_n\}^T \quad (2.19)$$

Với phần tử thứ e , số bậc tự do là n_e , có vectơ chuyển vị nút trong hệ tọa độ chung là $\{\delta'\}_e$. Các thành phần của $\{\delta'\}_e$ nằm trong số các thành phần của $\{\delta'\}$. Do đó có sự biểu diễn quan hệ giữa 2 vectơ này như sau:

$$\{\delta'\}_e = [H]_e \{\delta'\} \quad (2.20)$$

$(n_e \times 1) \quad (n_e \times n) \quad (n \times 1)$

trong đó: $[H]_e$ - là ma trận định vị của phần tử e , nó cho thấy hình ảnh sắp xếp các thành phần của vector $\{\delta'\}_e$ trong $\{\delta'\}$.

Dựa vào (2.13) ta xác định được thế năng toàn phần cho từng phần tử. Thay (2.20) vào (2.13), sau đó cộng gộp của m phần tử, xác định được thế năng toàn phần của hệ:

$$\Pi = \sum_{e=1}^m \left[\frac{1}{2} \{\delta'\}^T [H]_e^T [K']_e [H]_e \{\delta'\} - \{\delta'\}^T [H]_e^T \{F'\}_e \right] \quad (2.21)$$

Biểu thức (2.21) biểu diễn thế năng toàn phần của hệ theo vector chuyển vị nút tổng thể $\{\delta'\}$. áp dụng nguyên lí thế năng dừng toàn phần sẽ có điều kiện cân bằng của toàn hệ tại điểm nút:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{\delta'\}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial \delta'_1} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \delta'_2} \\ \dots \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \delta'_n} \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.22)$$

Áp dụng phép lấy đạo hàm riêng đối với ma trận thu được:

$$\left(\sum_{e=1}^m [H]_e^T [K']_e [H]_e \right) \{\delta'\} - \sum_{e=1}^m [H]_e^T \{F'\}_e = \{0\} \quad (2.23)$$

Nhận thấy đây chính là phương trình cân bằng cho toàn hệ. So sánh với (2.18), thu được:

$$\text{Ma trận độ cứng tổng thể: } [K'] = \sum_{e=1}^m [H]_e^T [K']_e [H]_e \quad (2.24)$$

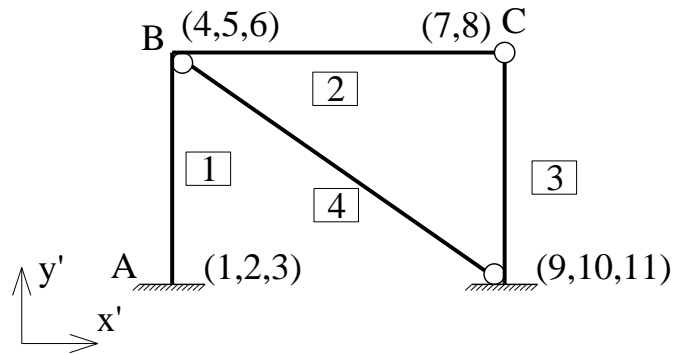
$$\text{Vector tải trọng nút tổng thể: } \{F'\} = \sum_{e=1}^m [H]_e^T \{F'\}_e \quad (2.25)$$

Ví dụ 2.1: Xác định các ma trận định vị $[H]_e$ của dầm với 4 điểm nút, có các thành phần chuyển vị nút như trên hình 2.2.

Lời giải

Vectơ chuyển vị nút tổng thể của kết cấu trong hệ tọa độ chung:

$$\{\delta'\} = \{\delta_1 \ \delta_2 \ \delta_3 \ \delta_4 \ \delta_5 \ \delta_6 \ \delta_7 \ \delta_8 \ \delta_9 \ \delta_{10} \ \delta_{11}\}^T$$



Hình 2.2 Hình ví dụ 2.1

Vectơ chuyển vị nút của từng phần tử biểu diễn theo vectơ chuyển vị nút tổng thể:

$$\{\delta'\}_1 = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} = [H]_1 \{\delta'\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_9 \\ \delta_{10} \\ \delta_{11} \end{Bmatrix}$$

$$\{\delta'\}_2 = \begin{Bmatrix} \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \end{Bmatrix} = [H]_2 \{\delta'\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{10} \\ \delta_{11} \end{Bmatrix}$$

$$\{\delta'\}_3 = \begin{Bmatrix} \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \\ \delta_{10} \\ \delta_{11} \end{Bmatrix} = [\mathbf{H}]_3 \{\delta'\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{10} \\ \delta_{11} \end{Bmatrix}$$

$$\{\delta'\}_4 = \begin{Bmatrix} \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_9 \\ \delta_{10} \end{Bmatrix} = [\mathbf{H}]_4 \{\delta'\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{11} \end{Bmatrix}$$

Ma trận độ cứng, véc tơ tải tác dụng tại nút của từng phần tử:

$$[\mathbf{K}']_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} & \mathbf{a}_{14} & \mathbf{a}_{15} & \mathbf{a}_{16} \\ & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} & \mathbf{a}_{24} & \mathbf{a}_{25} & \mathbf{a}_{26} \\ & & \mathbf{a}_{33} & \mathbf{a}_{34} & \mathbf{a}_{35} & \mathbf{a}_{36} \\ & & & \mathbf{a}_{44} & \mathbf{a}_{45} & \mathbf{a}_{46} \\ & & & & \mathbf{a}_{55} & \mathbf{a}_{56} \\ & & & & & \mathbf{a}_{66} \end{bmatrix} ; \{\mathbf{F}'\}_1 = \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{e}_5 \\ \mathbf{e}_6 \end{Bmatrix}$$

$$[\mathbf{K}']_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{11} & \mathbf{b}_{12} & \mathbf{b}_{13} & \mathbf{b}_{14} & \mathbf{b}_{15} \\ & \mathbf{b}_{22} & \mathbf{b}_{23} & \mathbf{b}_{24} & \mathbf{b}_{25} \\ & & \mathbf{b}_{33} & \mathbf{b}_{34} & \mathbf{b}_{35} \\ & & & \mathbf{b}_{44} & \mathbf{b}_{45} \\ & & & & \mathbf{b}_{55} \end{bmatrix} ; \{\mathbf{F}'\}_2 = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_4 \\ \mathbf{f}_5 \end{Bmatrix}$$

$$[\mathbf{K}']_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{11} & \mathbf{c}_{12} & \mathbf{c}_{13} & \mathbf{c}_{14} & \mathbf{c}_{15} \\ & \mathbf{c}_{22} & \mathbf{c}_{23} & \mathbf{c}_{24} & \mathbf{c}_{25} \\ & & \mathbf{c}_{33} & \mathbf{c}_{34} & \mathbf{c}_{35} \\ & & & \mathbf{c}_{44} & \mathbf{c}_{45} \\ & & & & \mathbf{c}_{55} \end{bmatrix} ; \{\mathbf{F}'\}_3 = \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 \end{Bmatrix}$$

$$[\mathbf{K}']_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{11} & \mathbf{d}_{12} & \mathbf{d}_{13} & \mathbf{d}_{14} \\ & \mathbf{d}_{22} & \mathbf{d}_{23} & \mathbf{d}_{24} \\ & & \mathbf{d}_{33} & \mathbf{d}_{34} \\ & & & \mathbf{d}_{44} \end{bmatrix} ; \{\mathbf{F}'\}_4 = \begin{Bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 \\ \mathbf{h}_3 \\ \mathbf{h}_4 \end{Bmatrix}$$

Ma trận độ cứng tổng thể: $[K'] = \sum_{e=1}^4 [H]_e^T [K']_e [H]_e$

$$[K'] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & a_{44} + b_{11} + d_{11} & a_{45} + b_{12} + d_{12} & a_{46} + b_{13} & b_{14} & b_{15} & d_{13} & d_{14} & 0 & 0 \\ & & & & a_{55} + b_{22} + d_{22} & a_{56} + b_{23} & b_{24} & b_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & a_{66} + b_{33} & b_{34} & b_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & b_{44} + c_{11} & b_{45} + c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & 0 \\ & & & & & & & b_{55} + c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & 0 \\ & & & & & & & & c_{33} + e_{33} & c_{34} + e_{34} & c_{35} & 0 \\ & & & & & & & & & c_{44} + e_{44} & c_{45} & 0 \\ & & & & & & & & & & c_{55} & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{matrix}$$

(đx)

Vector tải trọng nút tổng thể: $[F'] = \sum_{e=1}^4 [H]_e^T \{F'\}_e$

$$[F'] = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 + f_1 + h_1 \\ e_5 + f_2 + h_2 \\ e_6 + f_3 \\ f_4 + g_1 \\ f_5 + g_2 \\ g_3 + h_3 \\ g_4 + h_4 \\ g_5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{matrix}$$

Việc sử dụng ma trận định vị $[H]_e$ trong (2.24) và (2.25) để tính ma trận độ cứng $[K']$ và vector tải trọng nút $\{F'\}$ thực chất là sắp xếp các thành phần của ma trận độ cứng phần tử $[K']_e$ và vector tải trọng nút phần tử $\{F'\}_e$ vào vị trí của nó trong ma trận độ cứng tổng thể $[K']$ và vector tải trọng nút tổng thể $\{F'\}$. Tuy nhiên trong thực tế người ta hay sử dụng phương pháp số mã.

Phương pháp đánh số mã

Khi tiến hành ghép nối ma trận độ cứng của kết cấu và véc tơ tải trọng tác dụng tại nút, ta làm theo các bước sau:

- Tiến hành đánh số mã của các thành phần véc tơ chuyển vị nút tại các nút của kết cấu và đánh số mã cho phần tử.
- Lập bảng xác định mã cục bộ của các phần tử theo mã tổng thể của kết cấu.

- Tính toán xác định các ma trận độ cứng, véc tơ tải trọng tác dụng tại các nút của phần tử theo mã cục bộ và tương ứng với mã tổng thể trong hệ tọa độ chung.

- Tiến hành ghép nối ma trận độ cứng và véc tơ tải trọng tác dụng nút của các phần tử thành ma trận độ cứng và véc tơ tải trọng tác dụng nút của toàn bộ hệ kết cấu trong hệ tọa độ chung theo công thức.

$$k'_{ij} = \sum (k'_{ij})_e \quad (2.26)$$

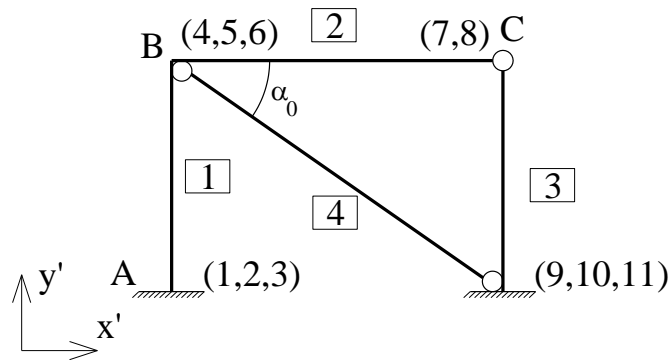
trong đó:

+ i, j : là số hiệu mã tổng thể của toàn bộ kết cấu trong hệ tọa độ chung;

+ k'_{ij} : là hệ số của trong ma trận độ cứng của toàn bộ kết cấu tương ứng với hàng có số hiệu mã tổng thể i và cột có số hiệu mã tổng thể j trong hệ tọa độ chung;

+ $(k'_{ij})_e$: là hệ số của ma ma trận độ cứng của phần tử tương ứng với hàng có số hiệu mã tổng thể i và cột có số hiệu mã tổng thể j trong hệ tọa độ chung

Ví dụ 2.2: Thiết lập ma trận độ cứng tổng thể $[K']$ và véc tơ tải trọng nút $\{F'\}$ của toàn hệ kết cấu của hệ trên hình 2.3.



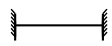
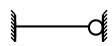
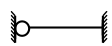
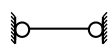
Hình 2.3 Hình ví dụ 2.2

Lời giải

- Đánh số mã của các thành phần véc tơ chuyển vị nút tại các nút của kết cấu và đánh số mã cho các phần tử như hình.

- Lập bảng xác định mã cục bộ của các phần tử theo mã tổng thể của kết cấu.

Phần tử			Mã cục bộ					
TT	Loại	α	1	2	3	4	5	6
			Số mã toàn thể					

1		90	1	2	3	4	5	6
2		0	4	5	6	7	8	
3		-90	7	8	9	10	11	
4		α_0	4	5	9	10		

- Tính toán xác định các ma trận độ cứng $[K']_e$, véc tơ tải trọng tác dụng tại các nút $\{F'\}_e$ của phần tử theo mã cục bộ và tương ứng với mã tổng thể trong hệ tọa độ chung.

$$[K']_1 = \begin{matrix} & \text{CB} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ & & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ & & & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ & & & & a_{55} & a_{56} \\ & & & & & a_{66} \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \\ \text{1} & \text{2} & \text{3} & \text{4} & \text{5} & \text{6} & \text{TT} \end{matrix} ; \{F'\}_1 = \begin{matrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$[K']_2 = \begin{matrix} & \text{CB} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ & & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ & & & b_{44} & b_{45} \\ & & & & b_{55} \end{bmatrix} & \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \\ \text{4} & \text{5} & \text{6} & \text{7} & \text{8} & \text{TT} \end{matrix} ; \{F'\}_2 = \begin{matrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$[K']_3 = \begin{matrix} & \text{CB} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ & & & c_{44} & c_{45} \\ & & & & c_{55} \end{bmatrix} & \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{matrix} \\ \text{7} & \text{8} & \text{9} & \text{10} & \text{11} & \text{TT} \end{matrix} ; \{F'\}_3 = \begin{matrix} \begin{matrix} g_1 \\ g_2 \\ g_2 \\ g_2 \\ g_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$\begin{array}{cccc}
\text{CB} & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ & (\text{đx}) & d_{33} & d_{34} \\ & & & d_{44} \end{array} \right] & \begin{array}{l} 4 \\ 5 \\ 9 \\ 10 \end{array} & ; \{F'\}_4 = \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{array} \right\} & \begin{array}{l} 4 \\ 5 \\ 9 \\ 10 \end{array} \\
\begin{array}{l} 4 \\ 5 \\ 9 \\ 10 \end{array} & \text{TT} & & &
\end{array}$$

- Tiến hành ghép nối ma trận độ cứng và vectơ tải trọng tác dụng nút của các phần tử thành ma trận độ cứng $[K']$ và vectơ tải trọng tác dụng nút $\{F'\}$ của toàn bộ hệ kết cấu trong hệ tọa độ chung theo công thức.

$$\begin{array}{l}
[K'] = \begin{array}{cccccccccccc}
a_{11} & a_{13} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& & & a_{44} + b_{11} + d_{11} & a_{45} + b_{12} + d_{12} & a_{46} + b_{13} & b_{14} & b_{15} & d_{13} & d_{14} & 0 & 0 \\
& & & & a_{55} + b_{22} + d_{22} & a_{56} + b_{23} & b_{24} & b_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& & & & & a_{66} + b_{33} & b_{34} & b_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& & & & & & b_{44} + c_{11} & b_{45} + c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & 0 \\
& & & & & & & b_{55} + c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & 0 \\
& & & & & & & & c_{33} + e_{33} & c_{34} + e_{34} & c_{35} & 0 \\
& & & & & & & & & c_{44} + e_{44} & c_{45} & 0 \\
& & & & & & & & & & c_{55} & 0
\end{array} \\
(\text{đx}) \\
[F'] = \begin{array}{l}
\begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 + f_1 + h_1 \\ e_5 + f_2 + h_2 \\ e_6 + f_3 \\ f_4 + g_1 \\ f_5 + g_2 \\ g_3 + h_3 \\ g_4 + h_4 \\ g_5 \end{array} \\
\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{array}
\end{array}
\end{array}$$

2.1.1.5: Sử lý điều kiện biên của bài toán

Phương pháp phần tử hữu hạn là cuối cùng đưa về giải phương trình toán học:

$$[K']\{\delta'\} = \{F'\} \quad (2.27)$$

Để phương trình này không có nghiệm tầm thường thì điều kiện định thức của ma trận $[K']$ khác 0 ($\det [K']$ khác 0), khi đó phương trình không suy biến. Với bài toán kết cấu, điều này chỉ đạt được khi điều kiện biên được thoả mãn (kết cấu phải bất biến hình). Đó là điều kiện cho trước một số chuyển vị nút nào đó bằng 0 hay bằng một giá trị xác định hoặc một số chuyển vị nút phải liên hệ với nhau. Sau khi áp đặt điều kiện biên vào, phương trình cân bằng của toàn hệ kết cấu trong hệ tọa độ chung có dạng:

$$[K^*]\{\delta^*\} = \{F^*\} \quad (2.28)$$

Trong thực tế khi phân tích kết cấu thường gặp 2 điều kiện biên sau:

- Biên làm một hoặc nhiều thành phần chuyển vị bằng 0.
- Biên làm một hoặc nhiều thành phần chuyển vị có một giá trị xác định

Khi biên có thành phần chuyển vị nào đó bằng 0

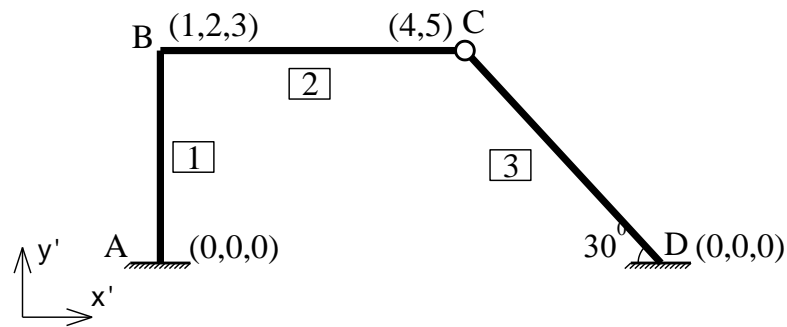
Thành phần chuyển vị tại một nút của phần tử bằng 0 do tương ứng với các thành phần chuyển vị này là các liên kết với đất, ta xử lý bằng cách:

- Khi đánh mã chuyển vị cho toàn bộ hệ, những thành phần chuyển vị tại nút nào đó bằng 0 thì ghi mã của chuyển vị đó là 0. Việc đánh số mã toàn thể của chuyển vị nút theo thứ tự và vector chuyển vị nút của toàn hệ chỉ bao gồm các chuyển vị nút còn lại.

- Khi lập ma trận $[K']_e$ và vector $\{F'\}_e$ của từng PT, các hàng và cột tương ứng với số mã chuyển vị nút bằng không thì không cần tính. Và khi thiết lập

ma trận độ cứng tổng thể $[K']$ và vector tải trọng nút tổng thể $\{F'\}$ thì những hàng và cột nào có mã bằng 0 thì ta loại bỏ hàng, cột.

Ví dụ 2.3: Thiết lập ma trận độ cứng tổng thể $[K']$ và vector tải trọng nút $\{F'\}$ của toàn hệ kết cấu như hình 2.4 (có xét tới điều kiện biên).



Hình 2.4 Hình ví dụ 2.3

Lời giải:

Lập bảng số mã khi xét tới điều kiện biên:

Phần tử			Mã cục bộ					
TT	Loại	α	1	2	3	4	5	6
			Số mã toàn thể					
1		90	0	0	0	1	2	3
2		0	1	2	3	4	5	
3		-30	4	5	0	0	0	

Ma trận độ cứng $[K']_e$ và vector tải trọng nút $\{F'\}_e$ của từng phần tử trong hệ trục tọa độ chung:

$$\begin{array}{cccccc}
\text{CB} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
1 & \begin{bmatrix} x & x & x & x & x & x \end{bmatrix} & & & & & 0 \\
2 & & \begin{bmatrix} x & x & x & x & x \end{bmatrix} & & & & 0 \\
3 & & & \begin{bmatrix} x & x & x & x \end{bmatrix} & & & 0 \\
4 & & & & \begin{bmatrix} a_{44} & a_{45} & a_{46} \end{bmatrix} & & 1 \\
5 & & (\text{đx}) & & & \begin{bmatrix} a_{55} & a_{56} \end{bmatrix} & 2 \\
6 & & & & & & \begin{bmatrix} a_{66} \end{bmatrix} & 3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & \text{TT}
\end{array}
; \{F'\}_1 = \begin{cases} \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccccc}
\text{CB} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
1 & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \end{bmatrix} & & & & 1 \\
2 & & \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \end{bmatrix} & & & 2 \\
3 & & & \begin{bmatrix} b_{33} & b_{34} & b_{35} \end{bmatrix} & & 3 \\
4 & & (\text{đx}) & & \begin{bmatrix} b_{44} & b_{45} \end{bmatrix} & 4 \\
5 & & & & & \begin{bmatrix} b_{55} \end{bmatrix} & 5 \\
1 & 2 & 3 & 0 & 0 & \text{TT}
\end{array}
; \{F'\}_2 = \begin{cases} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{bmatrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccccc}
\text{CB} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
1 & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & x & x & x \end{bmatrix} & & & & 4 \\
2 & & \begin{bmatrix} c_{22} & x & x & x \end{bmatrix} & & & 5 \\
3 & & & \begin{bmatrix} x & x & x \end{bmatrix} & & 0 \\
4 & & (\text{đx}) & & \begin{bmatrix} x & x \end{bmatrix} & 0 \\
5 & & & & & \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} & 0 \\
4 & 5 & 0 & 0 & 0 & \text{TT}
\end{array}
; \{F'\}_3 = \begin{cases} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ x \\ x \\ x \end{bmatrix} \\ 4 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

Căn cứ vào bảng số mã, thu được ma trận độ cứng và vectơ tải trọng nút tổng thể (có xét tới điều kiện biên) như sau:

$$[K^*] = \begin{bmatrix} (a_{44} + b_{11}) & (a_{45} + b_{12}) & (a_{46} + b_{13}) & b_{14} & b_{15} & 1 \\ & (a_{55} + b_{22}) & (a_{56} + b_{23}) & b_{24} & b_{25} & 2 \\ & & (a_{66} + b_{33}) & b_{34} & b_{35} & 3 \\ & & & (dx) & (b_{44} + c_{11}) & (b_{45} + c_{12}) & 4 \\ & & & & & (b_{55} + c_{22}) & 5 \end{bmatrix}$$

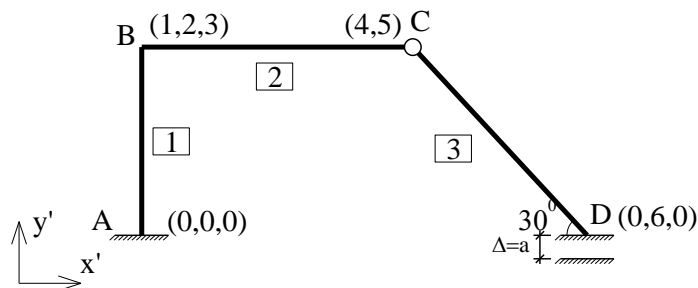
$$\{F^*\} = \{(d_4 + e_1) \quad (d_5 + e_2) \quad (d_6 + e_3) \quad (e_4 + f_1) \quad (e_5 + f_2)\}^T$$

Khi biên có thành phần chuyển vị cho trước một giá trị

Khi thành phần chuyển vị tại một nút nào đó cho trước một giá trị xác định, thí dụ $\Delta m = a$ (hay liên kết tương ứng với các thành phần chuyển vị nút δm chịu chuyển vị cưỡng bức có giá trị bằng a). Lúc này ta có thể giải quyết bài toán này theo 2 cách:

Cách 1: Khi đánh số mã của bậc tự do (các thành phần chuyển vị) tổng thể kết cấu thì thành phần chuyển vị tại nút có chuyển vị bằng a ta vẫn đánh mã bình thường chẳng hạn mã là m . Sau khi lập được ma trận độ cứng tổng thể $[K']$ và vector tải trọng nút tổng thể $\{F'\}$ thay thế số hạng k_{mm} trong ma trận thể $[K']$ bằng $(k_{mm} + A)$ và thay số hạng tại hàng m trong ma trận $\{F'\}$ là f_m bằng $(k_{mm} + A)a$.

Ví dụ 2.4: Thiết lập ma trận độ cứng tổng thể $[K']$ và vector tải trọng nút $\{F'\}$ của toàn hệ kết cấu như hình 2.5 (có xét tới điều kiện biên).






Hình 2.5 Hình ví dụ 2.4

Lời giải

Hệ được đánh số phần tử và số mã chuyển vị tổng thể của kết cấu như hình 2.5.

Bảng số mã khi xét tới điều kiện biên:

Phần tử			Mã cục bộ					
TT	Loại	α	1	2	3	4	5	6
			Số mã toàn thể					
1		90	0	0	0	1	2	3
2		0	1	2	3	4	5	
3		-30	4	5	0	6	0	

Ma trận độ cứng $[K']_e$ và vectơ tải trọng nút $\{F'\}_e$ của từng phần tử trong hệ trục tọa độ chung:

$$[K']_1 = \begin{matrix} & \text{CB} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} x & x & x & x & x & x \\ & x & x & x & x & x \\ & & x & x & x & x \\ & & & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ & & & & a_{55} & a_{56} \\ & & & & & a_{66} \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} & \text{1} & \text{2} & \text{3} & \text{TT} \end{matrix} ; \{F'\}_1 = \begin{matrix} \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$[K']_2 = \begin{matrix} & \text{CB} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} b_{11} & & & & \\ & b_{22} & & & \\ & & b_{33} & & \\ & & & b_{44} & \\ & & & & b_{55} \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \\ \text{1} & \text{2} & \text{3} & \text{0} & \text{0} & \text{TT} \end{matrix} ; \{F'\}_2 = \begin{matrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$\begin{array}{c}
\text{CB} \\
\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & & & & \\ 3 & & & & \\ 4 & & & & \\ 5 & & & & \end{matrix} \\
\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \left[\begin{matrix} c_{11} & c_{12} & x & c_{14} & x \\ & c_{22} & x & c_{25} & x \\ & & x & x & x \\ & (\text{đx}) & & c_{44} & x \\ & & & & x \end{matrix} \right] \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 4 & 5 & 0 & 6 & 0 \\ & & & & \text{TT} \end{matrix}
\end{array}
; \{F'\}_3 = \begin{matrix} \left. \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ x \\ f_4 \\ x \end{matrix} \right\} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{matrix} \end{matrix}$$

Căn cứ vào bảng số mã, thu được ma trận độ cứng và vectơ tải trọng nút tổng thể (có xét tới điều kiện biên) như sau:

$$[K^*] = \begin{bmatrix} (a_{44} + b_{11}) & (a_{45} + b_{12}) & (a_{46} + b_{13}) & b_{14} & b_{15} & 0 & 1 \\ & (a_{55} + b_{22}) & (a_{56} + b_{23}) & b_{24} & b_{25} & 0 & 2 \\ & & (a_{66} + b_{33}) & b_{34} & b_{35} & 0 & 3 \\ & & & (b_{44} + c_{11}) & (b_{45} + c_{12}) & c_{14} & 4 \\ & (\text{đx}) & & & (b_{55} + c_{22}) & c_{25} & 5 \\ & & & & & (c_{44} + A) & 6 \end{bmatrix}$$

$$\{F^*\} = \{(d_4 + e_1) \quad (d_5 + e_2) \quad (d_6 + e_3) \quad (e_4 + f_1) \quad (e_5 + f_2) \quad (c_{44} + A)a\}^T$$

Giải hệ phương trình $[K^*]\{\delta^*\} = \{F^*\}$ thoả mãn điều kiện biên vì phương trình thứ 6 thu được:

$$K_{61}\delta_1 + K_{62}\delta_2 + K_{63}\delta_3 + K_{64}\delta_4 + K_{65}\delta_5 + (c_{44} + A)\delta_6 = (c_{44} + A)a$$

$$\text{Chia cả 2 vế cho } (c_{44} + A), \text{ thu được: } \delta_6 = a$$

Cách 2: Theo cách thứ 2 này thì khi đánh mã chuyển vị tổng thể cho kết cấu thì những thành phần nào chuyển vị bằng không hoặc có chuyển vị cưỡng bức ta đánh mã 0, còn các thành phần chuyển vị còn lại ta đánh mã theo thứ tự từ 1 đến hết. Sau đó ta lập ma trận độ cứng và vectơ tải trọng tác dụng nút cho toàn bộ hệ như bài toán không có chuyển vị cưỡng bức. Lúc này ta coi chuyển vị cưỡng bức như là một dạng tải trọng tác dụng lên kết cấu, vì vậy khi tính vectơ tải trọng tác dụng nút lên toàn bộ hệ phải kể thêm phần tải trọng tác

dụng nút do chuyển vị cưỡng bức gây ra. Vector tải trọng nút lúc này là do chuyển vị cưỡng bức các liên kết tựa, được tổng hợp từ các vector tải trọng nút $\{P'_\Delta\}_e$ của mỗi phần tử có liên kết tựa chuyển vị cưỡng bức: $\{P'_\Delta\}_e = [T]_e^T \{P_\Delta\}_e$; trong đó: $\{P_\Delta\}_e$ nhận được bằng phản lực liên kết nút do chuyển vị cưỡng bức gối tựa với dấu ngược lại.

2.1.1.6. Giải hệ phương trình cân bằng

Với bài toán tuyến tính, việc giải hệ phương trình đại số là không khó. Kết quả tìm được là chuyển vị của các nút:

$$\{\delta^*\} = [K^*]^{-1} \{F^*\} \quad (2.29)$$

2.1.1.7. Xác định nội lực

Từ kết quả thu được, kết hợp với các điều kiện biên xác định được vector chuyển vị nút của từng phần tử trong hệ tọa độ địa phương. Từ đó xác định được nội lực trong phần tử.

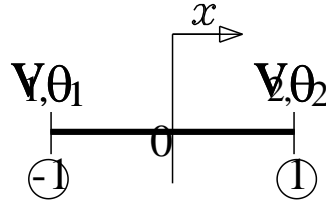
Phương pháp phần tử có ưu điểm là việc chia kết cấu ra thành các phần tử nhỏ thì dễ dàng mô tả được hình dạng phức tạp của công trình, đặc biệt vì các phần tử nhỏ nên mô tả trạng thái chuyển vị của phần tử chỉ cần các đa thức bậc thấp. Thông thường đối với phần tử dầm chịu uốn thì ta thường dùng đa thức bậc 3 để mô tả chuyển vị của phần tử:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (2.30)$$

Trong phương trình mô tả chuyển vị ta thấy có bốn thông số cần xác định. Để thuận tiện ta thay bốn thông số a_0, a_1, a_2, a_3 bằng các chuyển vị và góc xoay tại các nút của phần tử $v_1, \theta_1, v_2, \theta_2$. Vì hàm chuyển vị bậc 3 nên ta các lực tác dụng trên phần tử ta phải quy về nút của phần tử.

2.1.2. Cách xây dựng ma trận độ cứng của phần tử chịu uốn

Xét phần tử dầm có hai nút, mỗi nút có hai bậc tự do là chuyển vị và góc xoay và dầm có diện tích mặt cắt ngang là A ; mô men quán tính của mặt cắt ngang là I ; mô đun đàn hồi của vật liệu E (hình 2.6)



Hình 2.6 Phần tử hai nút

Để tính toán được tổng quát, chiều dài phần tử lấy bằng hai đơn vị, góc tọa độ nằm ở giữa phần tử. Như vậy, nếu biết được các bậc tự do tại các nút phần tử là $v_1, \theta_1, v_2, \theta_2$ thì chuyển vị tại điểm bất kỳ trong phần tử tại tọa độ x được xác định như sau:

$$v = N_1 \cdot v_1 + N_2 \cdot \theta_1 + N_3 \cdot v_2 + N_4 \cdot \theta_2 \quad (2.31)$$

Trong đó : N_1, N_2, N_3, N_4 : là các hàm dạng và được xác định như sau:

$$N_1 = \frac{1}{4}(2 - 3x + x^3); \quad N_2 = \frac{1}{4}(1 - x - x^2 + x^3);$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(2 + 3x - x^3); \quad N_4 = \frac{1}{4}(-1 - x + x^2 + x^3).$$

Theo công thức trên ta thấy:

$$v|_{x=-1} = v_1; \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=-1} = \theta_1; \quad v|_{x=1} = v_2; \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=1} = \theta_2. \quad (2.32)$$

Như vậy, mỗi phần tử có 4 bậc tự do $X = \{v_1, \theta_1, v_2, \theta_2\}$ cần xác định. Nếu biết được X thì ta có biết được chuyển vị trong phần tử cũng như biến dạng uốn và mô men theo công thức sau:

$$\chi = -\frac{d^2v}{dx^2} = -\left[\frac{d^2N_1}{dx^2} \quad \frac{d^2N_2}{dx^2} \quad \frac{d^2N_3}{dx^2} \quad \frac{d^2N_4}{dx^2} \right] \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\}^T; \quad (2.33a)$$

$$M = EI.\chi = -EI \left[\frac{d^2N_1}{dx^2} \quad \frac{d^2N_2}{dx^2} \quad \frac{d^2N_3}{dx^2} \quad \frac{d^2N_4}{dx^2} \right] \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\}^T \quad (2.34a)$$

Công thức trên là tính toán cho phần tử có chiều dài bằng 2, nếu phần tử có chiều dài là Δx thì biến dạng uốn và mô men được tính như sau:

$$\chi = -\frac{d^2v}{dx^2} \left(\frac{2}{\Delta x} \right)^2 = -\left(\frac{2}{\Delta x} \right)^2 \left[\frac{d^2N_1}{dx^2} \quad \frac{d^2N_2}{dx^2} \quad \frac{d^2N_3}{dx^2} \quad \frac{d^2N_4}{dx^2} \right] \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\}^T \quad (2.33b)$$

$$M = EI.\chi = -EI \left(\frac{2}{\Delta x} \right)^2 \left[\frac{d^2N_1}{dx^2} \quad \frac{d^2N_2}{dx^2} \quad \frac{d^2N_3}{dx^2} \quad \frac{d^2N_4}{dx^2} \right] \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\}^T \quad (2.34b)$$

Xét phần tử có các tải trọng tập trung $F = \{P_1, P_2, M_1, M_2\}^T$ tác dụng tại các nút của phần tử. Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, lượng ràng buộc đối với bài toán tĩnh viết cho phần tử như sau:

$$Z = \frac{\Delta x}{2} \int_{-1}^1 M[\chi] dx - \sum_{i=1}^4 F_i X_i \rightarrow \min \quad (2.35)$$

Điều kiện dừng của (3.25) được viết lại như sau:

$$\delta Z = \frac{\Delta x}{2} \int_{-1}^1 M\delta[\chi] dx - \sum_{i=1}^4 F_i \delta X_i = 0 \quad (2.36)$$

hay:

$$\left(\frac{2}{\Delta x} \right)^3 .EI. \begin{bmatrix} \int_{-1}^1 \frac{d^2N_1}{dx^2} \frac{d^2N_1}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2N_2}{dx^2} \frac{d^2N_1}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2N_3}{dx^2} \frac{d^2N_1}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2N_4}{dx^2} \frac{d^2N_1}{dx^2} dx \\ \int_{-1}^1 \frac{d^2N_1}{dx^2} \frac{d^2N_2}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2N_2}{dx^2} \frac{d^2N_2}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2N_3}{dx^2} \frac{d^2N_2}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2N_4}{dx^2} \frac{d^2N_2}{dx^2} dx \\ \int_{-1}^1 \frac{d^2N_1}{dx^2} \frac{d^2N_3}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2N_2}{dx^2} \frac{d^2N_3}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2N_3}{dx^2} \frac{d^2N_3}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2N_4}{dx^2} \frac{d^2N_3}{dx^2} dx \\ \int_{-1}^1 \frac{d^2N_1}{dx^2} \frac{d^2N_4}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2N_2}{dx^2} \frac{d^2N_4}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2N_3}{dx^2} \frac{d^2N_4}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2N_4}{dx^2} \frac{d^2N_4}{dx^2} dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$[K]\{X\} = \{F\} \quad (2.38)$$

trong đó: $[K]$: ma trận độ cứng của phần tử; $\{F\}$: véc tơ tải trọng tác dụng nút; $\{X\}$: véc tơ chuyển vị nút của phần tử.

Tính tích phân các hệ số trong $[K]$ ta có thể tính bằng phương pháp chính xác (bằng hàm $\text{int}(fx,a,b)$ có sẵn trong matlab) hoặc tính bằng phương pháp tích phân số của Gauss và kết quả độ cứng của phần tử chịu uốn ngang phẳng như sau:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{\Delta x^3} & \frac{6EI}{\Delta x^2} & -\frac{12EI}{\Delta x^3} & \frac{6EI}{\Delta x^2} \\ \frac{6EI}{\Delta x^2} & \frac{4EI}{\Delta x} & -\frac{6EI}{\Delta x^2} & \frac{2EI}{\Delta x} \\ -\frac{12EI}{\Delta x^3} & -\frac{6EI}{\Delta x^2} & \frac{12EI}{\Delta x^3} & -\frac{6EI}{\Delta x^2} \\ \frac{6EI}{\Delta x^2} & \frac{2EI}{\Delta x} & -\frac{6EI}{\Delta x^2} & \frac{4EI}{\Delta x} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Biết được ma trận độ cứng phần tử thì ta dễ dàng xây dựng được ma trận độ cứng của toàn thanh. Nếu thanh chỉ có một phần tử thì ma trận của phần tử cũng chính là ma trận độ cứng của thanh. Trong phần tử nếu bậc tự do nào không có thì trong ma trận độ cứng của phần tử đó ta bỏ đi hàng và cột tương ứng với bậc tự do đó.

2.1.3. Cách xây dựng ma trận độ cứng tổng thể của kết cấu

Để trình bày cách xây dựng ma trận độ cứng tổng thể của kết cấu trong phương pháp phần tử hữu hạn, luận văn xin được trình bày thông qua ví dụ giải bài toán dầm chịu uốn dưới tác dụng của tải trọng tĩnh cụ thể sau (còn các bài toán khác thì cách xây dựng ma trận độ cứng tổng thể cũng làm tương tự):

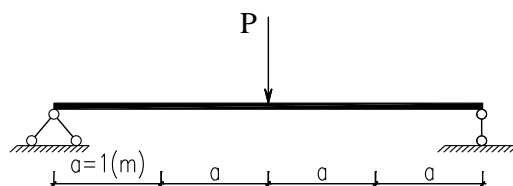
Ví dụ 2.5: Tính toán kết cấu dầm

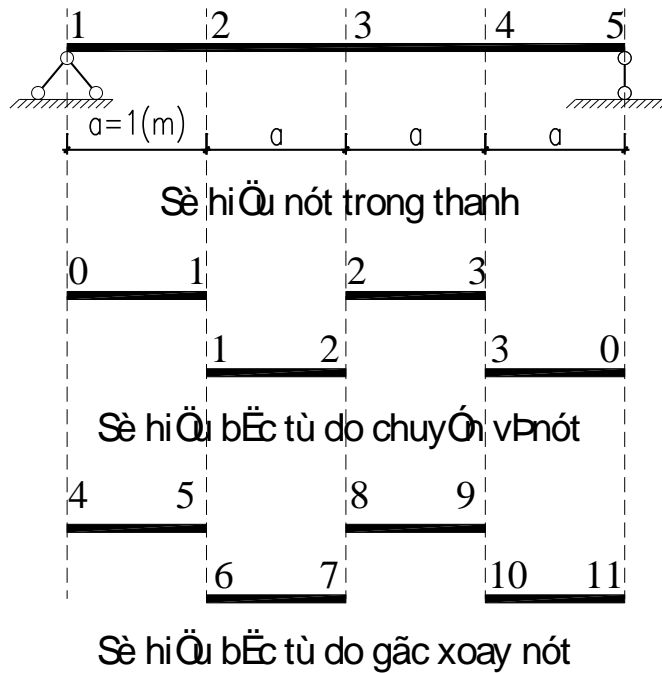
chịu lực như (hình 2.7). Biết dầm

có độ cứng $EI = 10^8 \text{ (kN.cm}^2\text{)}$

không đổi và $P = 10 \text{ (kN)}$. Xác định

chuyển vị tại giữa dầm.





Hình 2.8 Rời rạc hóa thanh thành các phần tử

Chia thanh ra thành n_{pt} phần tử. Các nút của phần tử phải trùng với vị trí đặt lực tập trung, chiều dài các phần tử có thể khác nhau. Mỗi phần tử có 4 bậc tự do, như vậy nếu n_{pt} phần tử rời rạc thì tổng cộng có $4 n_{pt}$ bậc tự do. Nhưng vì cần đảm bảo liên tục giữa các chuyển vị là chuyển vị của nút cuối phần tử thứ e bằng chuyển vị của nút đầu phần tử thứ $(e + 1)$ nên số bậc tự do của thanh sẽ nhỏ hơn $4 n_{pt}$. Khi giải ta chỉ cần đảm bảo điều kiện liên tục của chuyển vị còn điều kiện liên tục về góc xoay được xét bằng cách đưa vào các điều kiện ràng buộc. Ví dụ dầm trong (ví dụ 2.5) ta chia thành 4 phần tử (hình 2.8)

Như vậy, tổng cộng số ẩn là 11 ẩn $< 4 \times 4 = 16$ ẩn. Gọi ma trận n_w là ma trận chuyển vị có kích thước $n_w(n_{pt}, 2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ẩn số là chuyển vị tại nút của các phần tử (hình 2.8)

$$n_w(1,:) = [0 \quad 1]; n_w(2,:) = [1 \quad 2]; n_w(3,:) = [2 \quad 3]; n_w(4,:) = [3 \quad 0]$$

$$\mathbf{n}_w = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Gọi ma trận \mathbf{n}_0 là ma trận chuyển vị có kích thước $n_0(n_{pt}, 2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ẩn số là góc xoay tại nút của các phần tử (hình 2.8)

$$\mathbf{n}_0(1,:) = [4 \quad 5]; \mathbf{n}_0(2,:) = [6 \quad 7]; \mathbf{n}_0(3,:) = [8 \quad 9]; \mathbf{n}_0(4,:) = [10 \quad 11]$$

$$\mathbf{n}_w = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 & 10 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \end{bmatrix}^T$$

Sau khi biết ẩn số thực của các thanh ta có thể xây dựng độ cứng tổng thể của thanh (có rất nhiều cách ghép nối phần tử khác nhau, tùy vào trình độ lập trình của mỗi người nên tác giả không trình bày chi tiết cách ghép nối các phần tử lại để được ma trận độ cứng của toàn thanh và có thể xem trong code mô đun chương trình của tác giả)

Nếu bài toán có n_{cv} ẩn số chuyển vị và n_{gx} ẩn số góc xoay thì ma trận độ cứng của thanh là \mathbf{K} có kích thước $(n \times n)$, $\mathbf{K}(n, n)$ với $n = (n_{cv} + n_{gx})$. Như ở ví dụ 2.5, $n = 11$. Bây giờ xét điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử.

Điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử được viết như sau:

$$\left(\frac{dy_i}{dx} \Big|_{nut2} \right) - \left(\frac{dy_{i+1}}{dx} \Big|_{nut1} \right) = 0 \quad (2.40)$$

hay:
$$\delta\lambda_1 \left[\left(\frac{dy_1}{dx} \Big|_{nut2} \right) - \left(\frac{dy_2}{dx} \Big|_{nut1} \right) \right] = 0$$

(2.41a)

$$\delta\lambda_2 \left[\left(\frac{dy_2}{dx} \Big|_{nut2} \right) - \left(\frac{dy_3}{dx} \Big|_{nut1} \right) \right] = 0 \quad (2.41b)$$

$$\delta\lambda_3 \left[\left(\frac{dy_3}{dx} \Big|_{nut2} \right) - \left(\frac{dy_4}{dx} \Big|_{nut1} \right) \right] = 0 \quad (2.41c)$$

Trong đó λ_i cũng là ẩn số của bài toán (có k ẩn số), do đó tổng số ẩn số của bài toán lúc là $(n+k)$ do đó ma trận độ cứng của phần tử lúc này cũng phải thêm k dòng và k cột như vậy kích thước của ma trận độ cứng là $K(n+k, n+k)$. Gọi k_1 là góc xoay tại nút 2 của phần tử trước, k_2 là góc xoay tại nút 1 của phần tử sau thì ta có các hệ số trong ma trận độ cứng K :

$$k(n+i, k_1) = \frac{2}{\Delta x}; k(n+i, k_2) = -\frac{2}{\Delta x} \quad (i=1 \div k) \quad (2.42a)$$

$$k(k_1, n+i) = \frac{2}{\Delta x}; k(k_2, n+i) = -\frac{2}{\Delta x} \quad (i=1 \div k) \quad (2.42b)$$

Nếu có hai phần tử thì có một điều kiện về góc xoay, có n_{pt} phần tử thì có $(2n_{pt} - 1)$ điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử. Như vậy cuối cùng ta sẽ thiết lập được phương trình:

$$[K]\{X\} = \{F\}$$

trong đó: $\{F\} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ } so - hang = n ; $\{X\} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix}$ } so - hang = k là ẩn số của bài toán

Trong ví dụ 2.5 khi chia thanh ra thành 4 phần tử. Kết quả ma trận độ cứng của thanh:

$$[K] = 10^3 \begin{bmatrix} 2.4 & -1.2 & 0 & -1.2 & -1.2 & 1.2 & 1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.2 & 2.4 & -1.2 & 0 & 0 & -1.2 & -1.2 & 1.2 & 1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.2 & 2.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.2 & -1.2 & 1.2 & 1.2 & 0 & 0 & 0 \\ -1.2 & 0 & 0 & 1.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.2 & 0 & 0 & 0.8 & 1.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.10^{-5} & 0 & 0 \\ 1.2 & -1.2 & 0 & 0 & 0 & 1.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.10^{-5} & 0 & 0 \\ 1.2 & -1.2 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 1.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.10^{-5} & 0 \\ 0 & 1.2 & -1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & -2.10^{-5} & 0 \\ 0 & 1.2 & -1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 1.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.10^{-5} \\ 0 & 0 & 1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.6 & 0.8 & 0 & 0 & -2.10^{-5} \\ 0 & 0 & 1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 1.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.10^{-5} & -2.10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.10^{-5} & -2.10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.10^{-5} & -2.10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kết quả chuyển vị, góc xoay tại các nút:

$$\begin{bmatrix} w_2; w_3; w_4; \\ \varphi_1; \varphi_2; \varphi_3; \varphi_4; \varphi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.09166667(\text{cm}); 0.13333333(\text{cm}); 0.09166667(\text{cm}); \\ 0.05(\text{rad}); 0.0375(\text{rad}); 0; -0.0375(\text{rad}); -0.05(\text{rad}) \end{bmatrix}$$

Ta thấy kết quả trên so với kết quả giải chính xác theo phương pháp giải tích rất đúng ví dụ như chuyển vị tại nút 3 tính theo phương pháp giải tích:

$$w_3 = \frac{Pl^3}{48EI} = 0,13333333(\text{cm})$$

CHƯƠNG 3.

TÍNH TOÁN KHUNG PHẪNG CÓ XÉT ĐẾN BIẾN DẠNG TRƯỢT NGANG BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

3.1. Lý thuyết dầm có xét biến dạng trượt ngang

Lý thuyết xét biến dạng trượt trong dầm do Timoshenko đưa ra và thường được gọi là lý thuyết dầm Timoshenko. Khi xây dựng lý thuyết này vẫn sử dụng giả thiết tiết diện phẳng của lý thuyết dầm thông thường, tuy nhiên do có biến dạng trượt, trục dầm sẽ xoay đi một góc và không còn thẳng góc với tiết diện dầm nữa.

Lý thuyết xét biến dạng trượt được dùng phổ biến trong phương pháp phần tử hữu hạn hiện nay là dùng hàm độ võng y và hàm góc xoay θ do momen uốn gây ra là hai hàm chưa biết. Trong trường hợp này biến dạng trượt tại trục trung hòa được xác định như sau, ví dụ như [28].

$$\gamma = \frac{dy}{dx} - \theta \quad (3.1)$$

Từ đó ta có các công thức xác định M và Q

$$\begin{aligned} M &= -EJ \left(\frac{d\theta}{dx} \right) \\ Q &= \frac{GF}{\alpha} \left[-\frac{dy}{dx} + \theta \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

Trong các công thức trên EJ là độ cứng uốn, GF là độ cứng cắt của tiết diện, G là môđun trượt của vật liệu, F là diện tích tiết diện, α là hệ số xét sự phân bố không đều của ứng suất tiếp trên chiều cao tiết diện.

Các tác giả [28] cho rằng khi môđun trượt $G \rightarrow \infty$ thì từ (3.2) suy ra

$$\theta = \frac{dy}{dx} \quad (3.3)$$

nghĩa là trở về lý thuyết dầm không xét biến dạng trượt: Góc xoay của đường độ võng là do mômen gây ra. Theo tác giả, lập luận trên không đúng bởi vì

khi thỏa mãn phương trình (3.3) thì từ phương trình (3.2) suy ra lực cắt $Q = 0$, dẫn về trường hợp uốn thuần túy của dầm. Vì lý do đó nên lý thuyết xét biến dạng trượt dùng y và θ làm ẩn không hội tụ về lý thuyết dầm thông thường và khi áp dụng vào bài toán tấm, nó cũng không hội tụ về lý thuyết tấm thông thường (lý thuyết tấm Kierchhoff, [28], [25]). Phương hướng chung để khắc phục thiếu sót vừa nêu là bổ sung thêm các nút xét lực cắt Q trong các phần tử dầm hoặc phần tử tấm [25, 26, 28] hoặc dùng phần tử có hàm dạng là đa thức bậc thấp (bậc nhất) [31]. Vấn đề tìm phần tử có hàm dạng không bị hiện tượng biến dạng trượt bị khóa, shear locking, vẫn đang được tiếp tục nghiên cứu, [32]. Tình hình chung hiện nay về lý thuyết xét biến dạng trượt trong dầm và tấm là như trên.

Khác với các tác giả khác, trong [19, 20] lý thuyết xét biến dạng trượt được xây dựng trên cơ sở hai hàm chưa biết là hàm độ võng y và hàm lực cắt Q . Trong trường hợp này biến dạng trượt xác định theo

$$\gamma = \frac{\alpha Q}{GF} \quad (3.4)$$

α là hệ số xét sự phân bố không đều của ứng suất cắt tại trục dầm.

Góc xoay do momen uốn sinh ra bằng hiệu giữa góc xoay đường độ võng với góc xoay do lực cắt gây ra.

$$\theta = \frac{dy}{dx} - \gamma = \frac{dy}{dx} - \frac{\alpha Q}{GF} \quad (3.5)$$

Momen uốn sẽ bằng

$$M = -EJ \frac{d\theta}{dx} = EJ \left(-\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right) \quad (3.6)$$

Biến dạng uốn χ

$$\chi = -\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \quad (3.7)$$

Dựa trên lý thuyết này ta sẽ xây dựng phương trình cân bằng và các điều kiện biên của dầm như sau. Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss ta viết phiếm hàm lượng cưỡng bức (chuyển động) như sau: (giả sử dầm có lực phân bố đều q).

$$Z = \int_0^l M\chi dx + \int_0^l Q\gamma dx - \int_0^l qy dx \rightarrow \text{Min}$$

(3.8)

Các hàm độ võng y , hàm biến dạng trượt γ và hàm biến dạng uốn χ là các đại lượng biến phân, nghĩa là điều kiện cần và đủ để hệ ở trạng thái cân bằng là

$$\delta Z = \int_0^l M\delta\chi dx + \int_0^l Q\delta\gamma dx - \int_0^l q\delta y dx = 0$$

$$\text{Hay } \delta Z = \int_0^l M\delta \left[-\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right] dx + \int_0^l Q\delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] dx - \int_0^l q\delta[y] dx = 0$$

(3.9)

Trong phương trình tích phân (2.9) hai đại lượng cần tìm là $y(x)$ và $Q(x)$ do đó có thể tách ra thành hai phương trình sau:

$$\int_0^l M\delta \left[-\frac{d^2y}{dx^2} \right] dx - \int_0^l q\delta[y] dx = 0$$

(3.10)

$$\int_0^l M\delta \left[\frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right] dx + \int_0^l Q\delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] dx = 0$$

(3.11)

Lấy tích phân từng phần phương trình (3.10)

$$\begin{aligned}\int_0^l M \delta \left[-\frac{d^2 y}{dx^2} \right] dx &= - \int_0^l M d \left(\delta \left[\frac{dy}{dx} \right] \right) dx \\ &= -M \delta \left[\frac{dy}{dx} \right] \Big|_0^l + \int_0^l \frac{dM}{dx} \delta \left[\frac{dy}{dx} \right] dx\end{aligned}$$

Tích phân từng phần thành phần cuối của biểu thức trên ta có

$$\int_0^l M \delta \left[-\frac{d^2 y}{dx^2} \right] dx = -M \delta \left[\frac{dy}{dx} \right] \Big|_0^l + \frac{dM}{dx} \delta[y] \Big|_0^l - \int_0^l \frac{d^2 M}{dx^2} \delta[y] dx$$

Phương trình (2.10) sau khi lấy tích phân từng phần có dạng

$$\begin{aligned}-M \delta \left[\frac{dy}{dx} \right] \Big|_0^l + \frac{dM}{dx} \delta[y] \Big|_0^l \\ - \int_0^l \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) \delta[y] dx = 0\end{aligned}\tag{3.12}$$

Bởi vì các đại lượng $\delta[y]$ và $\delta \left[\frac{dy}{dx} \right]$ là nhỏ và bất kỳ nên từ (3.31) ta có

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + q = 0\tag{3.12a}$$

$$-M \delta \left[\frac{dy}{dx} \right] \Big|_0^l = 0\tag{3.12b}$$

$$\frac{dM}{dx} \delta[y] \Big|_0^l = 0\tag{3.12c}$$

Tích phân từng phần phương trình (3.11):

$$\begin{aligned}\int_0^l M \delta \left[\frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right] dx &= \int_0^l M d \left(\delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] \right) dx \\ &= M \left(\delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] \right) \Big|_0^l - \int_0^l \frac{dM}{dx} \delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] dx\end{aligned}$$

Sau khi lấy tích phân từng phần

$$\begin{aligned} M \left(\delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] \right) \Big|_0^l + \int_0^l \left(-\frac{dM}{dx} + Q \right) \delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] dx \\ = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Bởi vì biến phân $\delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right]$ là nhỏ và bất kỳ nên từ (3.13) ta có

$$-\frac{dM}{dx} + Q = 0 \quad (3.13a)$$

$$M \delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] \Big|_0^l = 0 \quad (3.13b)$$

Sử dụng công thức (3.6), hai phương trình vi phân cân bằng của dầm (3.12a) và (3.13a) có dạng.

$$EJ \left[\frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{\alpha}{GF} \frac{d^3 Q}{dx^3} \right] = q \quad (3.14a)$$

$$EJ \left[\frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{\alpha}{GF} \frac{d^2 Q}{dx^2} \right] = Q \quad (3.15a)$$

Phương trình (3.14a) và (3.15a) có thể viết lại dưới dạng

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{\alpha h^2}{6} \frac{d^3 Q}{dx^3} = q \quad (3.14b)$$

$$EJ \frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{\alpha h^2}{6} \frac{d^2 Q}{dx^2} = Q \quad (3.14b)$$

Để nhận được các điều kiện biên của dầm thì kết hợp (3.12b) và (3.13b) ta có

$$M \delta \left[-\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha Q}{GF} \right] \Big|_0^l = 0 \quad (3.16)$$

Chú ý tới phương trình (3.13a), phương trình (3.12c) viết lại như sau

$$Q \delta [y] \Big|_0^l = 0 \quad (3.17)$$

Tóm lại, lý thuyết xét biến dạng trượt cho ta hai phương trình vi phân (3.14) và (3.15) đối với hai hàm y và Q : phương trình (3.14) là phương trình vi phân cân bằng giữa nội lực và ngoại lực, phương trình (3.15) là phương

trình liên hệ giữa mômen uốn và lực cắt. Các phương trình (3.16) và (3.17) là các điều kiện biên ở hai đầu thanh.

Ta xét điều kiện biên (3.16)

Nếu như tại $x=0$ hoặc $x=l$, góc xoay θ do mômen uốn gây ra có biến phân

$$\delta\theta = \delta \left[-\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha Q}{GF} \right] \Big|_0^l \neq 0 \text{ thì } M|_0^l = 0 \rightarrow \text{liên kết khớp} \quad (3.18a)$$

Nếu như góc xoay θ không có biến phân

$$\delta\theta = \delta \left[-\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha Q}{GF} \right] \Big|_0^l = 0 \text{ thì } M|_0^l \text{ bất kỳ} \rightarrow \text{liên kết ngàm} \quad (3.18b)$$

Đối với điều kiện (2.17), nếu như chuyển vị y tại $x=0$ hoặc $x=l$ có biến phân.

$$\delta[y]|_0^l \neq 0 \text{ thì } Q|_0^l = 0, \rightarrow \text{không có gối tựa} \quad (3.18c)$$

$$\text{Nếu như } \delta[y]|_0^l = 0 \text{ thì } Q|_0^l \text{ bất kỳ,} \rightarrow \text{liên kết gối tựa} \quad (3.18d)$$

Khi không xét biến dạng trượt, $G \rightarrow \infty$ hoặc $h \rightarrow 0$ thì các phương trình (3.14) và (3.15) cũng như các phương trình về điều kiện biên (3.16) và (3.17) hoặc (3.18) đều dẫn về lý thuyết dầm Euler- Bernoulli. Cho nên có thể nói lý thuyết xét biến dạng trượt nêu trên (xem hàm y và hàm Q là hai hàm chưa biết) là lý thuyết đầy đủ về dầm.

Cuối cùng cần lưu ý rằng khi xét tính liên tục về góc xoay giữa hai đoạn dầm là nói đến tính liên tục của góc xoay do mômen gây ra xác định theo công thức (3.5), không phải liên tục của góc xoay $\frac{dy}{dx}$.

Hệ số α

Hệ số α là hệ số tập trung ứng suất cắt tại trục dầm.

Đối với tiết diện chữ nhật $\alpha=1.5$, đối với tiết diện tròn $\alpha=4/3$. Tuy nhiên khi xét biến dạng trượt các trị trên thay đổi tương ứng bằng 1.2 và 1.11 [23,]. Trong tính toán sau này tác giả dùng hệ số $\alpha=1.2$ đối với tiết diện chữ nhật. Phương pháp chung để xác định hệ số α là cân bằng tổng theo chiều cao dầm công của ứng suất cắt thực hiện trên biến dạng trượt tương ứng với công

lực cắt thực hiện trên biến dạng trượt tại trục dầm, vấn đề này đã được nhiều tác giả nghiên cứu [23] [25].

3.2. Phương pháp phần tử hữu hạn đối với bài toán khung có xét đến biến dạng trượt ngang

Phương pháp phần tử hữu hạn chia công trình thành những phần nhỏ được gọi là các phần tử, tính toán công trình được dẫn về tính toán những phần tử nhỏ sau đó kết nối các phần tử đó lại với nhau ta lại được lời giải của một công trình hoàn chỉnh. Tương tự, phương pháp sai phân hữu hạn cũng chia công trình thành những đoạn nhỏ và trạng thái chuyển vị...được xác định tại mỗi điểm sai phân. Sự khác nhau giữa hai phương pháp nằm ở chỗ đối với sai phân hữu hạn trạng thái chuyển vị của các điểm thuộc đoạn nằm giữa hai nút thường được tính theo phương pháp nội suy tuyến tính còn phương pháp phần tử hữu hạn các trạng thái chuyển vị giữa hai điểm được xác định bằng các hàm dạng đã cho. Ưu điểm chủ yếu của phương pháp phần tử hữu hạn là nhờ chia công trình thành các đoạn nhỏ thì dễ dàng mô tả được các hình dạng phức tạp của công trình, đặc biệt là vì các đoạn nhỏ cho nên mô tả trạng thái chuyển vị bằng các đa thức bậc thấp. Ví dụ nếu chọn hàm xấp xỉ là đa thức thì phải chọn đa thức bậc 9 để mô tả đường độ võng của dầm nhưng khi dùng phần tử hữu hạn thì ta có thể dùng các đa thức bậc thấp 2, 3 hoặc 4 để mô tả chuyển vị của mỗi phần tử. Sở dĩ như vậy là do trạng thái ứng suất trong mỗi phần tử nhỏ thì khác nhau rất ít. Thông thường đối với phần tử dầm chịu uốn thì dùng đa thức bậc 3 để mô tả chuyển vị.

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

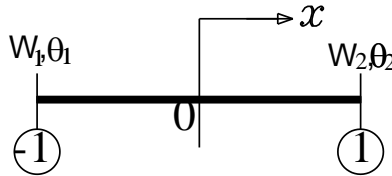
Ta thấy có 4 thông số cần xác định. Tuy nhiên để tiện dùng ta thay 4 thông số a_0 , a_1 , a_2 , a_3 bằng chuyển vị, góc xoay của phần tử hai nút như hình 3.1.

Do dùng hàm bậc 3 cho nên các lực tác dụng lên phần tử đều phải quy về nút kể cả lực quán tính trong bài toán động.

3.2.1. Hàm nội suy của phần tử

3.2.1.1. Hàm nội suy chuyển vị và góc xoay tại hai nút đầu phần tử

Trong khi tính dầm ta có thể sử dụng phần tử chịu uốn hai nút, như hình 3.1.



Hình 3.1. Phần tử dầm

Tại mỗi nút có các thông số là chuyển vị $W_1, \theta_1, W_2, \theta_2$, do đó chuyển vị trong mỗi phần tử được viết theo công thức sau:

$$W = [fw_1 \ fw_2 \ fx_1 \ fx_2]X \quad (3.20)$$

Trong đó: $X = [W_1 \ W_2 \ \theta_1 \ \theta_2]'$

$$\theta_1 = \left. \frac{dW}{dx} \right|_{x=-1}; \quad \theta_2 = \left. \frac{dW}{dx} \right|_{x=1}$$

Các hàm fw_1, fw_2, fx_1, fx_2 , là các hàm nội suy cần được xác định. Ta viết hàm nội suy dạng đa thức bậc 3, $= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, dưới dạng ma trận hàm độ võng W được viết như sau:

$$W = [1 \ x \ x^2 \ x^3]X_a \quad (3.21a)$$

Trong đó: $X_a = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3]'$

Bây giờ ta tìm mối liên hệ giữa X và X_a

Thay $x=-1$ vào (3.21a) ta có

$$W_1 = [1 \ -1 \ 1 \ -1]X_a \quad (a)$$

Thay $x=1$ vào (3.21a) ta có

$$W_2 = [1 \ 1 \ 1 \ 1]X_a \quad (b)$$

Lấy đạo hàm (3.21) theo x ta có

$$\frac{dW}{dx} = [0 \ 1 \ 2x \ 3x^2]X_a \quad (3.21b)$$

Thay $x=-1$ vào (2.21b) ta có

$$\theta_1 = [0 \quad 1 \quad -2 \quad 3]X_a \quad (c)$$

Thay $x=1$ vào (2.21b) ta có

$$\theta_2 = [0 \quad 1 \quad 2 \quad 3]X_a \quad (d)$$

Từ a, b, c và d ta nhận được

$$X = [W_1 \quad W_2 \quad \theta_1 \quad \theta_2]' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} X_a = aX_a \rightarrow X_a = a^{-1}X$$

Trong đó:
$$a = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Từ đó ta tìm được các hàm nội suy fw_1, fw_2, fx_1, fx_2 , như sau:

$$\left. \begin{aligned} fw_1 &= \frac{1}{4}(x-1)^2(x+2), \\ fw_2 &= \frac{1}{4}(x+1)^2(2-x) \\ fx_1 &= \frac{1}{4}(x-1)^2(x+1) \\ fx_2 &= \frac{1}{4}(x-1)^2(x+1) \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

Các hàm nội suy (3.22) thường được dùng để tính phần tử chịu uốn và cho kết quả hội tụ.

$$W = [fw_1 \quad fw_2 \quad fx_1 \quad fx_2]X = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(x-1)^2(x+2) & \frac{1}{4}(x+1)^2(2-x) \\ \frac{1}{4}(x-1)^2(x+1) & \frac{1}{4}(x-1)^2(x+1) \end{bmatrix} X$$

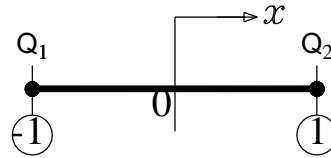
(3.20a)

Như vậy, nếu biết được các thông số $W_1, \theta_1, W_2, \theta_2$ tại hai đầu phần tử thì chuyển vị tại mỗi điểm bất kỳ trong phần tử đó được xác định theo đa thức bậc 3 sau đây

$$W = fw_1W_1 + fw_2W_2 + fx_1\theta_1 + fx_2\theta_2 \quad (3.23)$$

3.2.1.2. Hàm nội suy lực cắt tại hai nút đầu phần tử

Trong trường hợp xét biến dạng trượt ngang ta viết thêm các hàm nội suy lực cắt tại hai đầu phần tử hai nút như hình 3.2.



Hình 3.2. Phần tử hai nút

Tại nút đầu phần tử có thông số là lực cắt Q_1 , và tại nút cuối phần tử có thông số lực cắt là Q_2 , do đó lực cắt trong mỗi phần tử được viết theo công thức sau:

$$V = [fq_1 \quad fq_2]X \quad (3.24)$$

Trong đó: $X = [Q_1 \quad Q_2]'$

Các hàm fq_1 , fq_2 , là các hàm nội suy cần được xác định

Ta viết hàm nội suy dạng đa thức bậc 1, $V = a_0 + a_1x$, dưới dạng ma trận hàm lực cắt V được viết như sau:

$$V = [1 \quad x]X_a \quad (3.25)$$

Trong đó: $X_a = [a_0 \quad a_1]'$

Bây giờ ta tìm mối liên hệ giữa θ và θ_a

Thay $x=-1$ vào (3.25) ta có

$$V_1 = [1 \quad -1]X_a \quad (a)$$

Thay $x=1$ vào (3.25) ta có

$$V_2 = [1 \quad 1]X_a \quad (b)$$

Từ a và b ta nhận được

$$X = [fq_1 \quad fq_2]' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X_a = aX_a \rightarrow X_a = a^{-1}X$$

Trong đó: $a = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Từ đó ta tìm được các hàm nội suy fq_1 , fq_2 , như sau:

$$\left. \begin{aligned} fq_1 &= \frac{1}{2}(1-x) \\ fq_2 &= \frac{1}{2}(1+x) \end{aligned} \right\}$$

(3.26)

$$V = [fq_1 \quad fq_2]X = \left[\frac{1}{2}(1-x) \quad \frac{1}{2}(1+x) \right] X$$

Trong đó: $X = [Q_1 \quad Q_2]'$

Như vậy, nếu biết được các thông số Q_1, Q_2 , tại hai đầu phần tử thì lực cắt tại mỗi điểm bất kỳ trong phần tử đó được xác định theo đa thức bậc nhất sau đây

$$V = fq_1 Q_1 + fq_2 Q_2 \quad (3.27)$$

Do vậy, trong trường hợp phần tử có xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang, chuyển vị tại một điểm bất kỳ trong phần tử được xác định như sau:

$$W = fw_1 W_1 + fw_2 W_2 + fx_1 \theta_1 + fx_2 \theta_2 + fq_1 Q_1 + fq_2 Q_2 \quad (3.28)$$

3.2.2. Ma trận độ cứng của phần tử

3.2.2.1. Trường hợp không xét biến dạng trượt ngang

Trong trường hợp không xét ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang, mỗi phần tử có hai chuyển vị nút W_1, W_2 , và hai góc xoay θ_1, θ_2 , tổng cộng có bốn thông số (4 ẩn) cần xác định.

Gọi X là véc tơ cột chứa bốn ẩn của phần tử theo thứ tự sau

$$X = [W_1 \quad W_2 \quad \theta_1 \quad \theta_2] \quad (3.29)$$

Thì có thể viết lại biểu thức (3.23) dưới dạng ma trận như sau

$$W = [fw_1 + fw_2 + fx_1 + fx_2]X \quad (3.30)$$

Sau khi đã biết các hàm chuyển vị thì dễ dàng tính được biến dạng uốn χ_x , nội lực mômen uốn M_x , của phần tử như sau:

$$\chi_x = \left[-\frac{d^2 W}{dx^2} \beta^2 \right] \quad (3.31)$$

$$M_x = EJ \chi_x \quad (3.32)$$

Trong các công thức trên $\beta = 2/\Delta x$ là hệ số đưa chiều dài hai đơn vị của phần tử về chiều dài thực Δx của nó.

Biết được hàm độ võng của phần tử thì dễ dàng tính được ma trận độ cứng phần tử. Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss ta viết lượng cưỡng bức đối với bài toán tĩnh như sau:

$$Z = \int_{-1}^1 M_x[\chi_x] dx \rightarrow \min \quad (3.33)$$

Trong đó χ_x là các biểu thức chứa các ẩn $X(i)$ cho nên điều kiện dừng của (3.33) được viết lại như sau:

$$\begin{aligned} \delta Z &= \int_{-1}^1 M_x \delta[\chi_x] dx = 0 \\ \text{hay} \quad \delta Z &= \frac{1}{\beta} \left(\int_{-1}^1 M_x \left[\frac{\partial \chi_x}{\partial X_i} \right] dx \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

hệ số $1/\beta = \Delta x/2$ là hệ số để đưa tích phân từ (-1) đến (1) về tích phân theo chiều dài phần tử. Có bốn ẩn ta có được bốn phương trình và có dạng (3.19), viết lại như sau:

$$[K]_e \{\Delta\}_e = \{F\}_e \quad (3.35)$$

Trong đó: $[K]_e$ là ma trận độ cứng phần tử e, $\{\Delta\}_e$ là véc tơ chuyển vị nút tại hai đầu phần tử e, $\{F\}_e$ là véc tơ tải trọng tương ứng với chuyển vị nút $\{\Delta\}_e$.

Các tích phân trong (3.34) có thể tính chính xác hoặc có thể tính theo các tích phân gần đúng (tích phân số) của Gauss. Sau khi tính (3.16), nhận được ma trận độ cứng phần tử $[K]_e(4 \times 4)$.

$$[K]_e = \begin{bmatrix} 768 & -768 & 96 & 96 \\ -768 & 768 & -96 & -96 \\ 96 & -96 & 16 & 8 \\ 96 & -96 & 8 & 16 \end{bmatrix}$$

3.2.2.2. Trường hợp có xét đến biến dạng trượt ngang

Trong trường hợp có xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang, mỗi phần tử có hai chuyển vị nút W_1, W_2 , và hai góc xoay θ_1, θ_2 , tại hai đầu phần tử, giống như trường hợp trên, ngoài ra tại nút đầu phần tử còn có thêm ảnh lực cắt Q_1 và tại nút cuối phần tử có thêm lực cắt Q_2 , tổng cộng có sáu thông số (6 ẩn) cần xác định.

Gọi X là véc tơ cột chứa sáu ẩn của phần tử theo thứ tự sau

$$X = [W_1 \quad W_2 \quad \theta_1 \quad \theta_2 \quad Q_1 \quad Q_2] \quad (3.36)$$

Thì có thể viết lại biểu thức (3.29) dưới dạng ma trận như sau

$$W = [fw_1 + fw_2 + fx_1 + fx_2 + fq_1 + fq_2]X \quad (3.37)$$

Sau khi đã biết các hàm chuyển vị thì dễ dàng tính được biến dạng uốn χ_x , nội lực mômen uốn M_x , biến dạng trượt γ_x , góc xoay φ (do mômen gây ra) của phần tử như sau:

$$\chi_x = \left[-\frac{d^2W}{dx^2} \beta^2 + \frac{\alpha}{GF} \frac{dV}{dx} \beta \right] \quad (3.38)$$

$$M_x = EJ \chi_x \quad (3.39)$$

$$\gamma_x = -\frac{\alpha}{GF} [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad fq_1 \quad fq_2] \quad (3.40)$$

$$\varphi = \left[-\frac{dW}{dx} \beta + \frac{\alpha}{GF} V \right] \quad (3.41)$$

Trong các công thức trên $\beta = 2/\Delta x$ là hệ số đưa chiều dài hai đơn vị của phần tử về chiều dài thực Δx của nó.

Biết được hàm độ võng của phần tử thì dễ dàng tính được ma trận độ cứng phần tử. Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss ta viết lượng cưỡng bức đối với bài toán tĩnh có xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang như sau:

$$Z = \int_{-1}^1 M_x [\chi_x] dx + \int_{-1}^1 V \delta [\gamma_x] dx \rightarrow \min \quad (3.42)$$

Trong đó χ_x, γ_x là các biểu thức chứa các ẩn $X(i)$ cho nên điều kiện dừng của (3.42) được viết lại như sau:

$$\delta Z = \int_{-1}^1 M_x \delta [\chi_x] dx + \int_{-1}^1 V \delta [\gamma_x] dx = 0$$

$$\text{hay} \quad \delta Z = \frac{1}{\beta} \left(\int_{-1}^1 M_x \left[\frac{\partial \chi_x}{\partial X_i} \right] dx + \int_{-1}^1 V \left[\frac{\partial \gamma_x}{\partial X_i} \right] dx \right) = 0 \quad (3.43)$$

hệ số $1/\beta = \Delta x/2$ là hệ số để đưa tích phân từ (-1) đến (1) về tích phân theo chiều dài phần tử. Có sáu ẩn ta có được sáu phương trình và có dạng (3.19), viết lại như sau:

$$[K]_e \{\Delta\}_e = \{F\}_e \quad (3.44)$$

Trong đó: $[K]_e$ là ma trận độ cứng phần tử e, $\{\Delta\}_e$ là véc tơ chuyển vị nút và lực cắt tại hai đầu phần tử e, $\{F\}_e$ là véc tơ tải trọng tương ứng với chuyển vị nút $\{\Delta\}_e$.

Các tích phân trong (3.43) có thể tính chính xác hoặc có thể tính theo các tích phân gần đúng (tích phân số) của Gauss. Sau khi tính (3.25), nhận được ma trận độ cứng phần tử $[K]_e(6 \times 6)$. Với trường hợp chia dầm thành 4 phần tử ta nhận được $[K]_e(6 \times 6)$ như sau:

$$[A]_e = \begin{bmatrix} 768 & -768 & 96 & 96 & 0 & 0 \\ -768 & 768 & -96 & -96 & 0 & 0 \\ 96 & -96 & 16 & 8 & -0.0001 & 0.0001 \\ 96 & -96 & 8 & 16 & 0.0001 & -0.0001 \\ 0 & 0 & -0.0001 & 0.0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0001 & -0.0001 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.2.3. Ma trận độ cứng tổng thể

Biết được ma trận độ cứng phần tử $[K]_e$ thì dễ dàng xây dựng được ma trận độ cứng toàn hệ $[K]$. Giả sử thanh chỉ có một phần tử thì ma trận $[K]_e$ chính là ma trận độ cứng tổng thể của thanh. Giả sử chuyển vị tại nút (1) bằng không thì ta bỏ dòng 1, cột 1 của ma trận $[K]_e$.

Chú ý ngoài các ẩn chuyển vị, góc xoay, lực cắt của hệ còn phải xét thêm các ẩn là các thừa số Lagrange λ của các điều kiện liên kết tại đầu hoặc cuối các phần tử. Ngoài ra còn cần đưa thêm các điều kiện liên tục về góc xoay tại điểm tiếp giáp giữa hai phần tử.

Việc thành lập ma trận độ cứng tổng thể $[K]$ của toàn kết cấu từ các ma trận độ cứng phần tử $[K]_e$ có thể trình bày như sau:

Hệ phương trình cơ bản để giải bài toán kết cấu theo phương pháp phần tử hữu hạn có dạng sau:

$$[K]\{\Delta\} = \{F\}$$

Trong đó: véc tơ ẩn chuyển vị nút $\{\Delta\}$ gồm các thành phần xếp theo thứ tự chuyển vị nút của toàn bộ kết cấu, véc tơ lực nút $\{F\}$ và ma trận độ cứng toàn hệ $[K]$ cũng là các thành phần xếp theo thứ tự tương ứng với chuyển vị nút. $[K]$ và $\{F\}$ ở đây được lập từ các ma trận độ cứng $[K]_e$ và lực nút $\{F\}_e$ của từng phần tử trong kết cấu ở hệ tọa độ chung.

Đối với mỗi phần tử e có một hệ phương trình cân bằng dạng (3.35) hoặc (3.34) ở hệ tọa độ chung là:

$$[K]_e\{\Delta\}_e = \{F\}_e$$

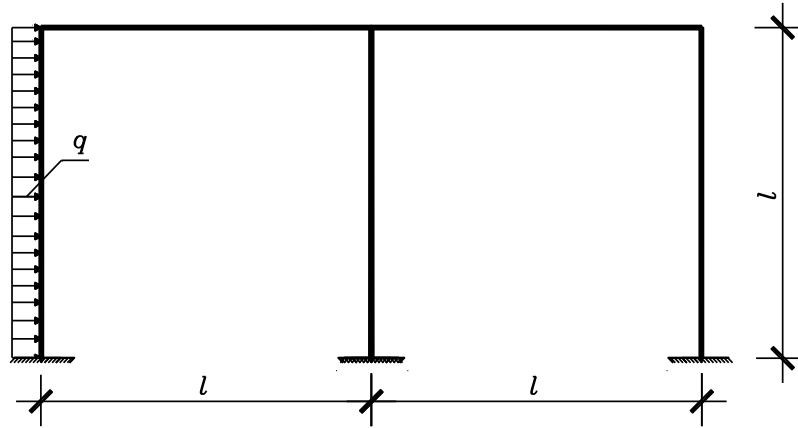
Trong đó: $\{\Delta\}_e$ là véc tơ chuyển vị nút có các thành phần được xếp theo thứ tự đã được quy định sẵn cho từng phần tử. Cấu trúc của ma trận độ cứng phần tử $[K]_e$ và véc tơ lực nút $\{F\}_e$ cũng tương ứng với chuyển vị nút $\{\Delta\}_e$.

Do thứ tự các thành phần trong véc tơ chuyển vị nút $\{\Delta\}_e$ của từng phần tử nói chung khác với thứ tự trong véc tơ chuyển vị nút $\{\Delta\}$ của toàn kết cấu, nên cần lưu ý xếp đúng vị trí của từng phần tử trong $[K]_e$ và $\{F\}_e$ vào $[K]$ và $\{F\}$. Việc sắp xếp này thường được áp dụng phương pháp số mã.

3.3. Các ví dụ tính toán khung có xét đến biến dạng trượt ngang

Ví dụ 3.1: Khung siêu tĩnh bậc 6, hình 3.3.

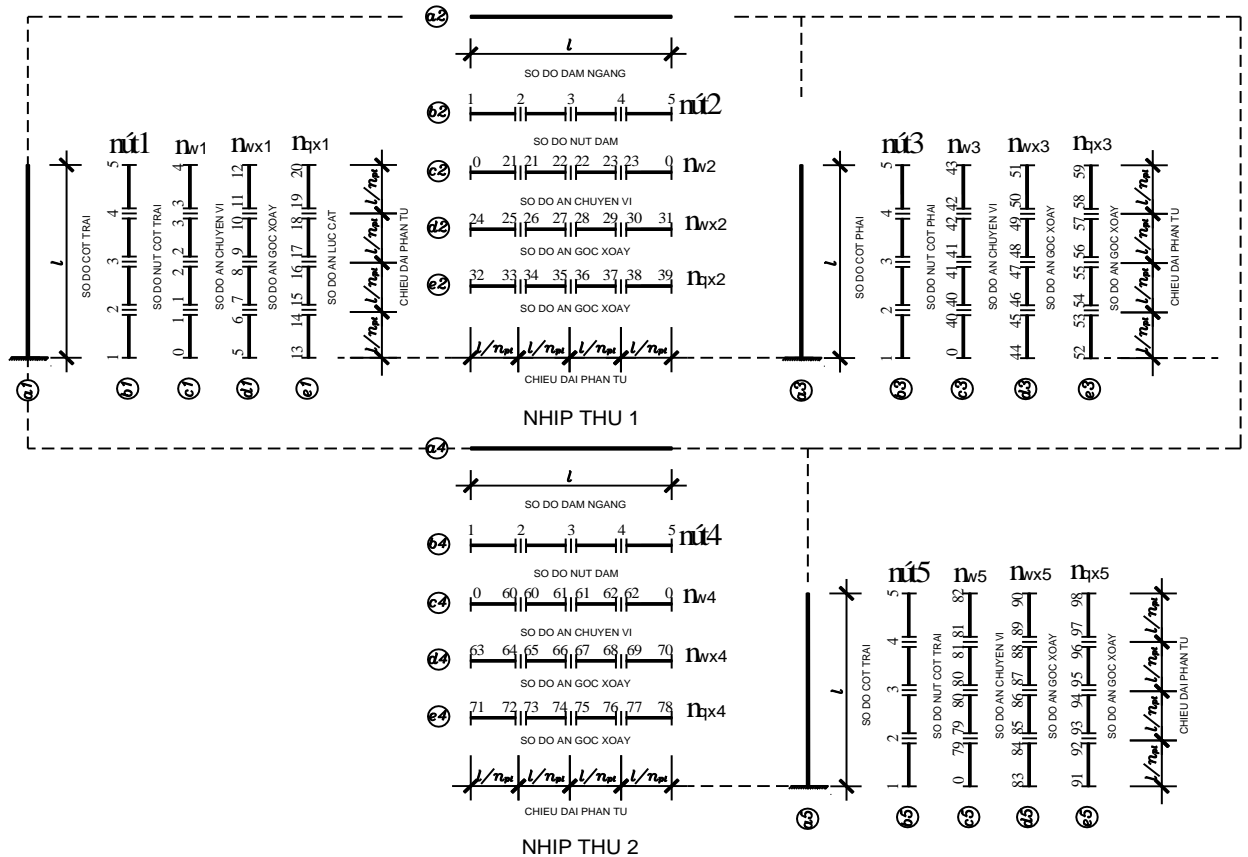
Xác định nội lực và chuyển vị của khung chịu lực như hình 3.3, độ cứng uốn $EJ = \text{const}$.



Hình 3.3. Khung siêu tĩnh bậc 6

Rời rạc hóa kết cấu dầm ra thành n_{pt} phần tử, hình 3.4. Các nút của phần tử phải trùng với vị trí đặt lực tập trung, hay vị trí thay đổi tiết diện, chiều dài các phần tử có thể khác nhau.

Mỗi phần tử có 6 ẩn $w_1, \theta_1, w_2, \theta_2, Q_1, Q_2$ vậy nếu n_{pt} phần tử rời rạc thì tổng cộng có $6 \times n_{pt}$ ẩn.



Hình 3.11. Sơ đồ rời rạc kết cấu

Khi chia mỗi thanh của khung thành 4 phần tử thì: ta có các ẩn chuyển vị nw_i , góc xoay nmx_i , lực cắt nqx_i như sau:

$$\begin{aligned}nw1 &=[0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 4] \\nwx1 &=[5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12] \\nqx1 &=[13 \quad 14 \quad 15 \quad 16 \quad 17 \quad 18 \quad 19 \quad 20] \\nw2 &=[0 \quad 21 \quad 21 \quad 22 \quad 22 \quad 23 \quad 23 \quad 0] \\nwx2 &=[24 \quad 25 \quad 26 \quad 27 \quad 28 \quad 29 \quad 30 \quad 31] \\nqx2 &=[32 \quad 33 \quad 34 \quad 35 \quad 36 \quad 37 \quad 38 \quad 39] \\nw3 &=[0 \quad 40 \quad 40 \quad 41 \quad 41 \quad 42 \quad 42 \quad 43] \\nwx3 &=[44 \quad 45 \quad 46 \quad 47 \quad 48 \quad 49 \quad 50 \quad 51] \\nqx3 &=[52 \quad 53 \quad 54 \quad 55 \quad 56 \quad 57 \quad 58 \quad 59] \\nw4 &=[0 \quad 60 \quad 60 \quad 61 \quad 61 \quad 62 \quad 62 \quad 0] \\nwx4 &=[63 \quad 64 \quad 65 \quad 66 \quad 67 \quad 68 \quad 69 \quad 70] \\nqx4 &=[71 \quad 72 \quad 73 \quad 74 \quad 75 \quad 76 \quad 77 \quad 78] \\nw5 &=[0 \quad 79 \quad 79 \quad 80 \quad 80 \quad 81 \quad 81 \quad 82] \\nwx5 &=[83 \quad 84 \quad 85 \quad 86 \quad 87 \quad 88 \quad 89 \quad 90] \\nqx5 &=[91 \quad 92 \quad 93 \quad 94 \quad 95 \quad 96 \quad 97 \quad 98]\end{aligned}$$

Sau khi biết ẩn số thực của dầm và cột ta có thể xây dựng ma trận độ cứng tổng thể của khung có kích thước $K(n \times n)$, ở ví dụ này là $K(98 \times 98)$.

Bây giờ xét điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử.

Điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử được viết như sau:

$$\delta\lambda_i \left(\left[\frac{dy}{dx} - \frac{\alpha Q}{GF} \right]_{\text{nut2 phan tu truoc}} - \left[\frac{dy}{dx} - \frac{\alpha Q}{GF} \right]_{\text{nut1 phan tu sau}} = 0 \right) \quad i = 5(npt - 1) \quad (a)$$

Trong bài toán này ta chia thanh thành 4 phần tử nên $i=5(4-1)=15$ điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử

Điều kiện biên được viết như sau:

- Tại đầu ngàm chân cột trái, cột giữa và cột phải có góc xoay bằng không:

$$\begin{aligned}\delta\lambda_{16}\left(\left[\frac{dy_1}{dx}-\frac{\alpha Q_1}{GF}\right]_{nut1\ phantu1}\right) &= 0 \\ \delta\lambda_{17}\left(\left[\frac{dy_3}{dx}-\frac{\alpha Q_3}{GF}\right]_{nut1\ phantu1}\right) &= 0 \\ \delta\lambda_{18}\left(\left[\frac{dy_5}{dx}-\frac{\alpha Q_5}{GF}\right]_{nut1\ phantu1}\right) &= 0\end{aligned}\tag{b}$$

Điều kiện hai góc xoay tại nút cứng giao giữa cột 3 và dầm 2 được viết như sau:

Góc xoay tại nút cuối của phần tử đầu cột 1 phải bằng góc xoay tại nút đầu của phần tử 1 của dầm 2. Góc xoay tại nút cuối của phần tử đầu cột 5 phải bằng góc xoay tại nút cuối của phần tử cuối cùng của dầm 4. Góc xoay tại nút 2 của phần tử cuối cùng của dầm 2 phải bằng góc xoay tại nút 2 của phần tử đầu cột 3 và Góc xoay tại nút 2 của phần tử cuối cùng của cột 3 phải bằng góc xoay tại nút 1 của phần đầu tiên của dầm 4.

$$\begin{aligned}\delta\lambda_{19}\left(\left[\frac{dy_1}{dx}-\frac{\alpha Q_1}{GF}\right]_{nut2}-\left[\frac{dy_1}{dx}-\frac{\alpha Q_1}{GF}\right]_{nut1}\right) &= 0 \\ \delta\lambda_{20}\left(\left[\frac{dy_4}{dx}-\frac{\alpha Q_4}{GF}\right]_{nut2}-\left[\frac{dy_5}{dx}-\frac{\alpha Q_5}{GF}\right]_{nut2}\right) &= 0 \\ \delta\lambda_{21}\left(\left[\frac{dy_2}{dx}-\frac{\alpha Q_2}{GF}\right]_{nut2}-\left[\frac{dy_3}{dx}-\frac{\alpha Q_3}{GF}\right]_{nut2}\right) &= 0 \\ \delta\lambda_{22}\left(\left[\frac{dy_3}{dx}-\frac{\alpha Q_3}{GF}\right]_{nut2}-\left[\frac{dy_4}{dx}-\frac{\alpha Q_4}{GF}\right]_{nut1}\right) &= 0\end{aligned}\tag{c}$$

Điều kiện chuyển vị ngang tại đầu cột trái 1, cột giữa 2 và cột phải 3 bằng nhau:

$$\begin{aligned}\delta\lambda_{23}(y_1|_{nut2}-y_3|_{nut2}) &= 0 \\ \delta\lambda_{24}(y_3|_{nut2}-y_5|_{nut2}) &= 0\end{aligned}\tag{d}$$

Trong đó $\lambda_k(k=1\div 24)$ cũng là ẩn số của bài toán (có k ẩn số λ), do đó tổng số ẩn số của bài toán lúc đó là $(n+k)$, do đó ma trận độ cứng của phần tử lúc này cũng phải thêm k dòng và k cột như vậy kích thước của ma trận độ cứng tổng thể là $K(n+k, n+k)$. Chẳng hạn trong ví dụ này, ta có $n=98, k=24$ và tổng số ẩn của bài toán là $n+k=98+24=122$ ẩn. Trong trường hợp này ta xác định được kích thước của ma trận độ cứng tổng thể là: $K[122 \times 122]$.

Như vậy cuối cùng ta sẽ thiết lập được phương trình:

$$[K]\{\Delta\} = \{F\} \quad (e)$$

trong đó: $\{F\} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$; $\{\Delta\} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix}$ là ẩn số của bài toán

} so – hang = n
} so – hang = k

Trong ví dụ 3.1 khi chia thành ra thành 4 phần tử, và $h/l=1/100$ (không xét biến dạng trượt ngang) ta có:

- Ma trận độ cứng phần tử $[K_e(6 \times 6)]$, như sau:

$$[K]_e = \begin{bmatrix} 768 & -768 & 96 & 96 & 0 & 0 \\ -768 & 768 & -96 & -96 & 0 & 0 \\ 96 & -96 & 16 & 8 & -0.0001 & 0.0001 \\ 96 & -96 & 8 & 16 & 0.0001 & -0.0001 \\ 0 & 0 & -0.0001 & 0.0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0001 & -0.0001 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Ma trận độ cứng toàn dầm $[K]$:

Ghép nối các ma trận độ cứng phần tử $[K_e]$ vào hệ tọa độ chung, ta được ma trận độ cứng tổng thể của toàn kết cấu $[K(122 \times 122)]$, ở đây không trình bày vì kích thước ma trận quá lớn.

- **Véc tơ lực nút {F}**: Trong ví dụ này là véc tơ 1 cột 122 dòng, như sau:

Sau khi có [K] và {F}: ta thành lập được hệ phương trình cơ bản của phương pháp phần tử hữu hạn, như sau:

$$[K]\{\Delta\} = \{F\}$$

Giải phương trình (e) ta nhận được:

$$\{\Delta\} = [K]^{-1}\{F\}$$

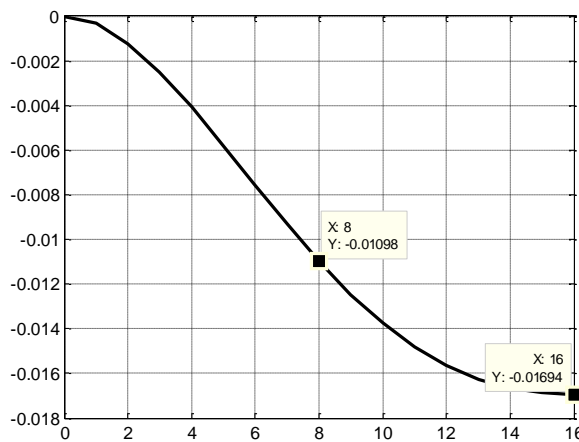
Theo ngôn ngữ lập trình Matlab ta có thể viết:

$$\{\Delta\} = [K] \setminus \{F\}$$

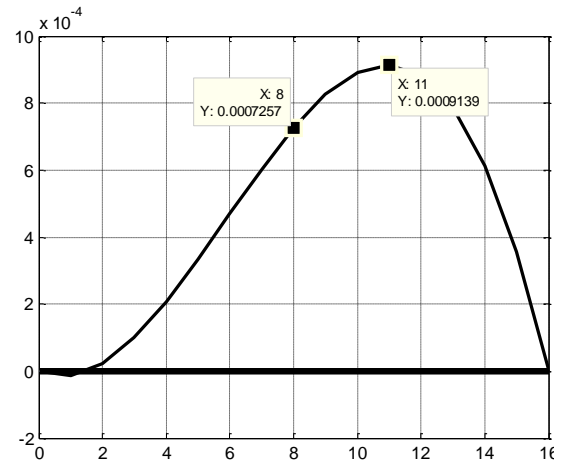
Kết quả chuyển vị, góc xoay tại các nút và Mômen uốn của dầm:
Khi không xét đến biến dạng trượt ngang, h/l=1/100

Dưới đây lần lượt là đường độ võng và biểu đồ mômen uốn của cột và

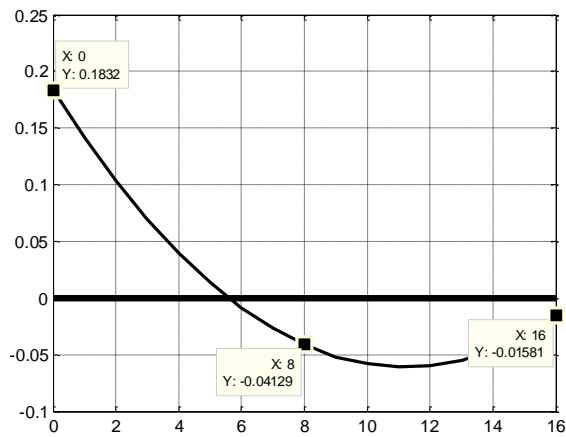
dầm



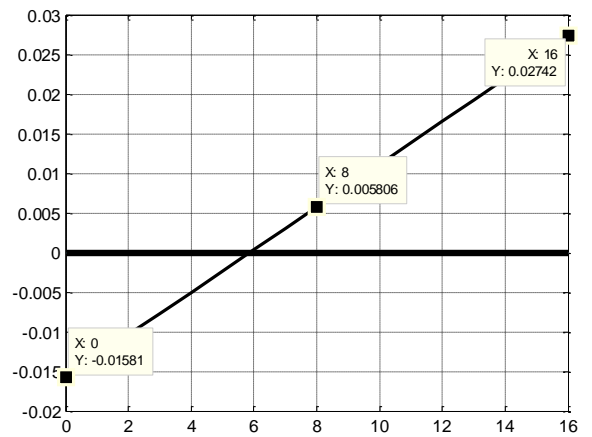
Hình 3.12a. Đường độ võng của cột trái 1



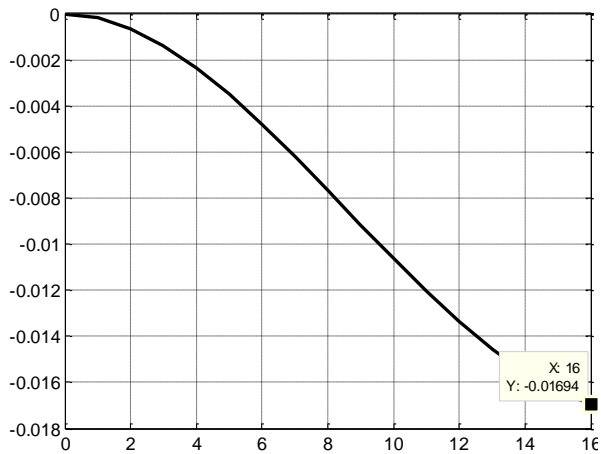
Hình 3.12b. Đường độ võng của dầm 2



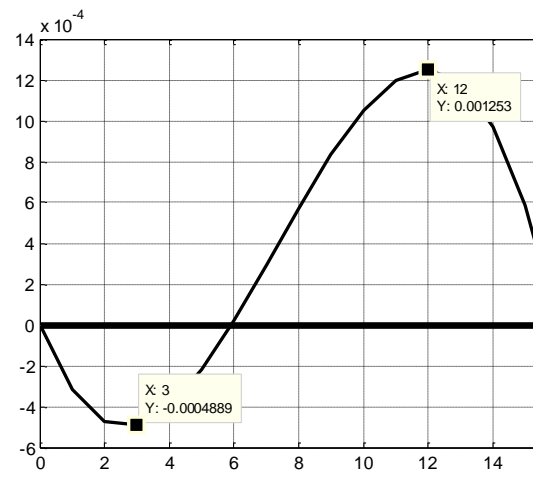
Hình 3.13a. Biểu đồ mômen của cột trái 1



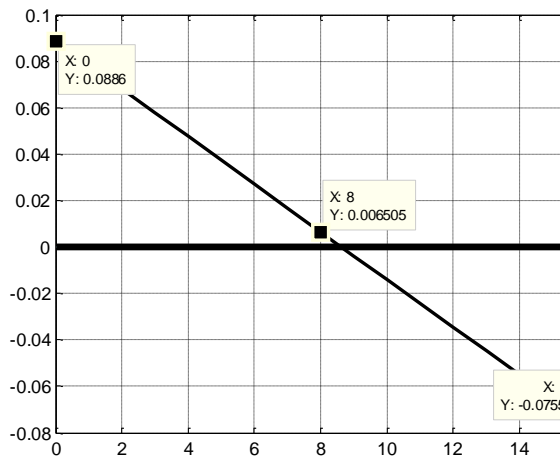
Hình 3.13b. Biểu đồ mômen của dầm 2



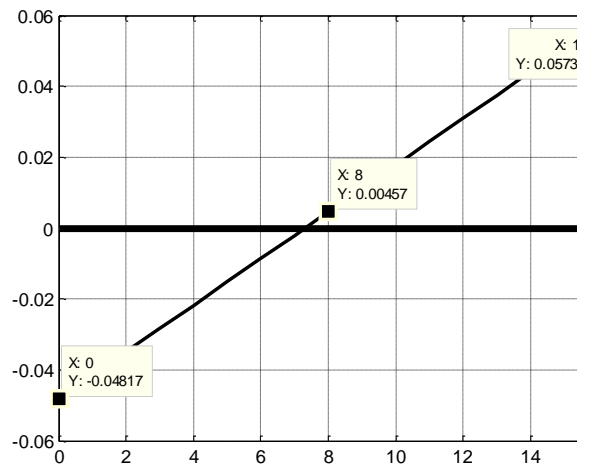
Hình 3.12c. Đường độ võng của cột giữa 3



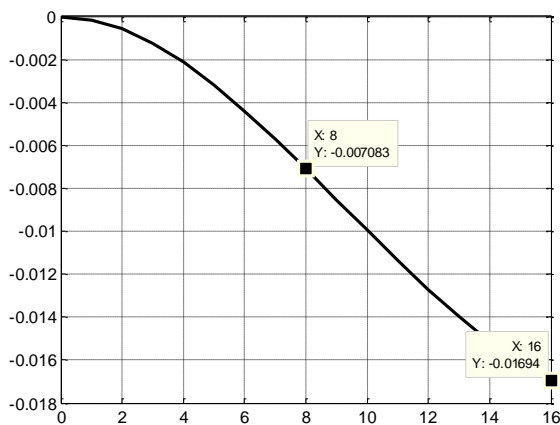
Hình 3.12d. Đường độ võng của dầm 4



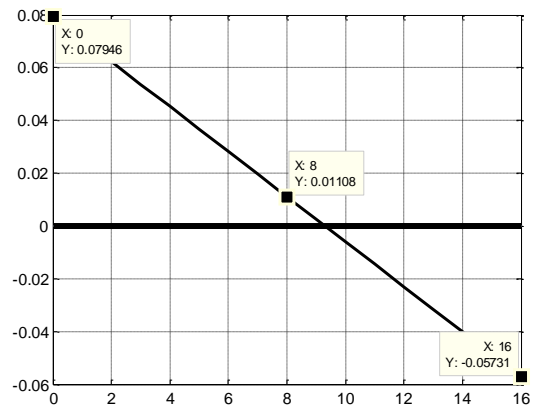
Hình 3.13c. Biểu đồ mômen của cột giữa 3



Hình 3.13d. Biểu đồ mômen của dầm 4



Hình 3.12e. Đường độ võng của cột phải 5



Hình 3.13e. Biểu đồ mômen của cột phải 5

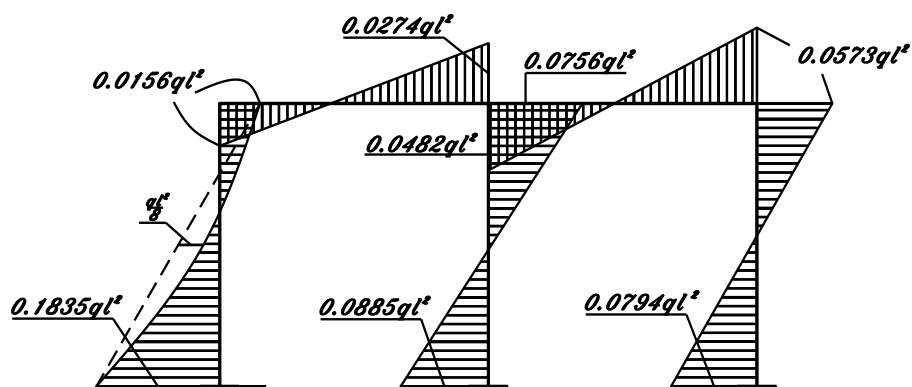
Nhận xét kết quả trên:

Khi chia cột và dầm thành 16 phần tử ta nhận được kết quả như trên, so sánh với kết quả chính xác theo lời giải giải tích ta nhận được sai số theo bảng sau:

BẢNG SO SÁNH MÔMEN UỐN TẠI CÁC TIẾT DIỆN CỘT VÀ DẦM

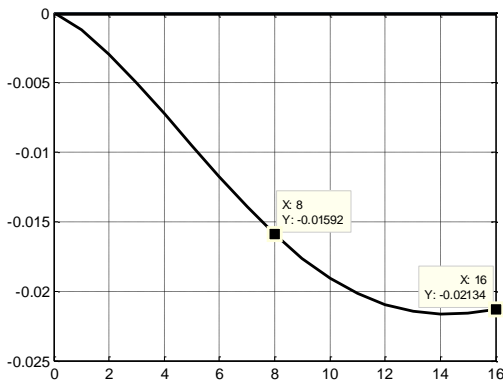
Các tiết diện của cột 1,3 và dầm 2	Lời giải số theo phương pháp PTHH	Lời giải chính xác	Sai số %
Chân cột 1	-0,1832	-0,1835	0,16
Đầu cột 1	0,0158	0,0156	1,28
Đầu phải dầm 2	-0,0274	-0,0274	0
Đầu cột 3	0,0756	0,0756	0
Chân cột 3	-0,0886	-0,0885	0,11
Đầu dầm 4	0,0482	0,0482	0
Đầu phải dầm 4	-0,0573	-0,0573	0
Chân cột 5	0,0795	0,0794	0,12

Ta thấy kết quả nhận được gần như trùng khớp với lời giải chính xác.

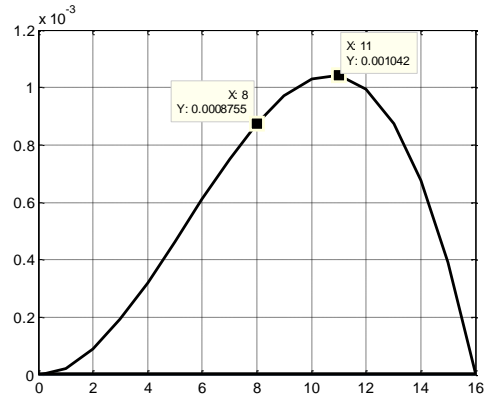


Hình 3.14. Biểu đồ M theo giải tích

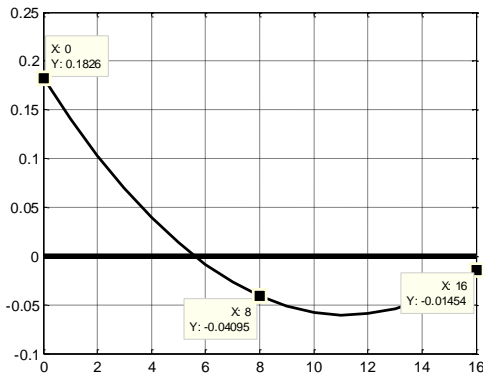
Khi xét đến biến dạng trượt ngang, $h/l=1/3$ ta nhận được kết quả như sau:



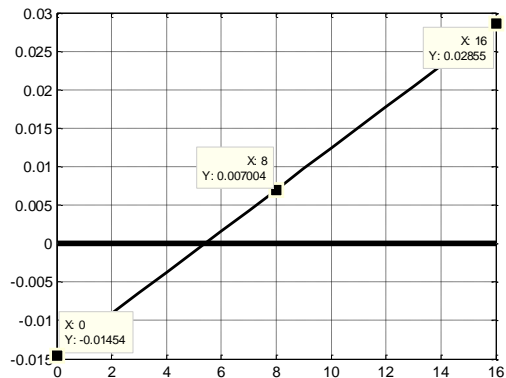
Hình 3.5a. Đường độ võng của cột trái 1



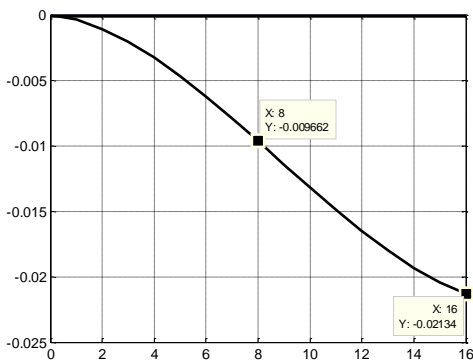
Hình 3.5b. Đường độ võng của dầm 2



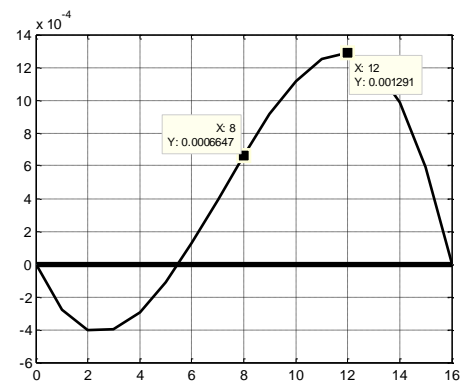
Hình 3.6a. Biểu đồ mômen của cột trái 1



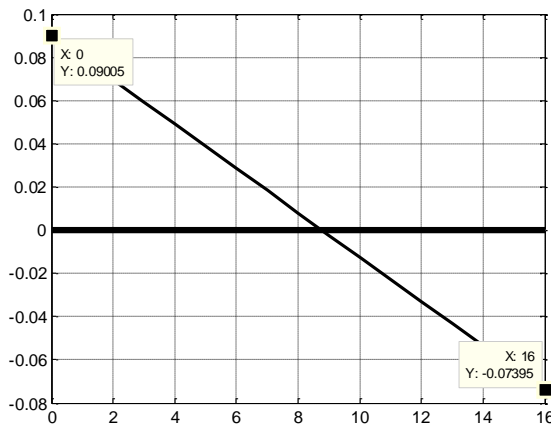
Hình 3.6b. Biểu đồ mômen của dầm 2



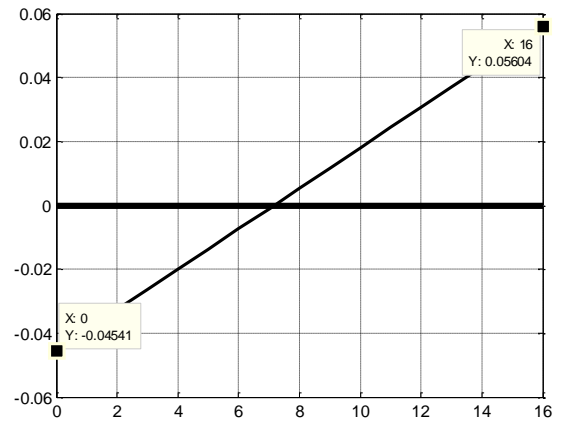
Hình 3.6c. Đường độ võng của cột giữa 3



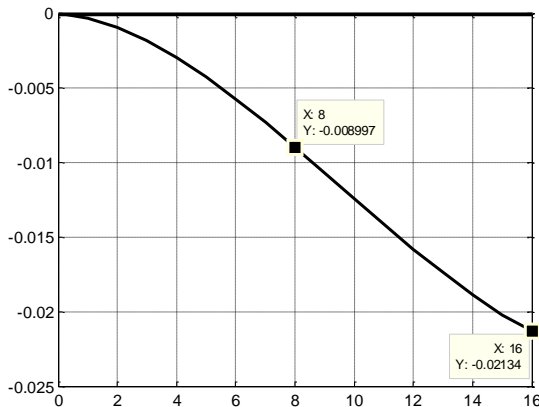
Hình 3.6d. Đường độ võng của dầm 4



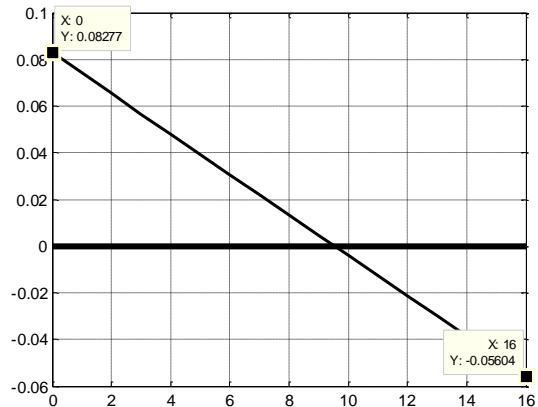
Hình 3.6c. Biểu đồ mômen của cột giữa 3



Hình 3.6d. Biểu đồ mômen của dầm 4



Hình 3.5e. Đường độ võng của cột phải 5



Hình 3.6e. Biểu đồ mômen của cột phải 5

Nhận xét kết quả trên:

Khi chia cột và dầm thành 16 phần tử và xét tới biến dạng trượt ngang ($h/l=1/3$) ta nhận được kết quả như trên, so sánh với kết quả chính xác theo lời giải giải tích ta nhận được sai số theo bảng sau:

BẢNG SO SÁNH MÔMEN UỐN TẠI CÁC TIẾT DIỆN CỘT VÀ DẦM

Các tiết diện của cột 1,3 và dầm 2	Lời giải số theo phương pháp PTHH($h/l=1/100$)	Lời giải số theo phương pháp PTHH($h/l=1/3$)	Chênh lệch khi không xét và có xét BDTN (%)
Chân cột 1	-0,1832	-0,1826	0,32
Đầu cột 1	0,0158	0,0145	-8,22

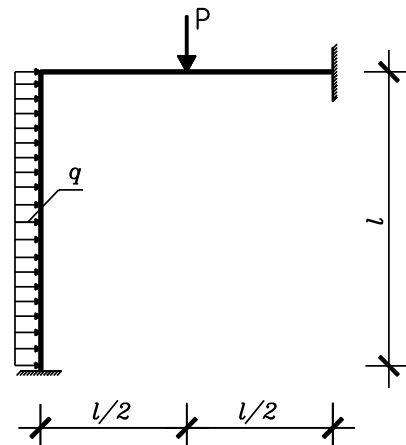
Đầu phải dầm 2	-0,0274	-0,0285	47,08
Đầu cột 3	0,0756	0,0901	19,17
Chân cột 3	-0,0886	-0,0740	-16,47
Đầu dầm 4	0,0482	0,0454	-5,80
Đầu phải dầm 4	-0,0573	-0,0560	-2,26
Chân cột 5	0,0795	0,0827	4,02

Ta thấy kết quả nhận được trong hai trường hợp không xét và có xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang ($h/l=1/3$) mômen uốn thay đổi tương đối lớn, hầu hết đều tăng ở đa số tiết diện, tăng lớn nhất là tại đầu phải dầm 2, tăng (47,08%).

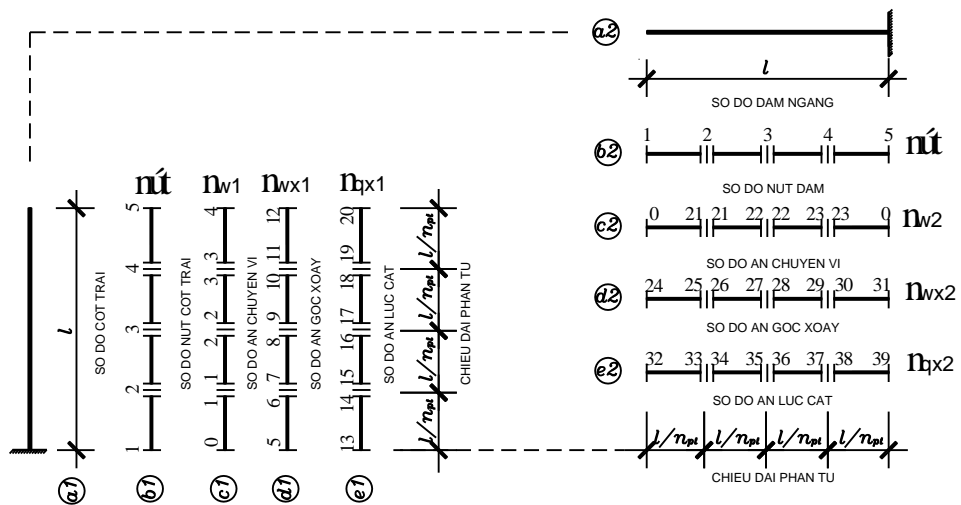
Ví dụ 3.2. Khung siêu tĩnh bậc 3, hình 3.7.

Xác định nội lực và chuyển vị của khung chịu lực như hình 3.7, độ cứng uốn $EJ=const$.

Rời rạc hóa kết cấu dầm ra thành npt phần tử. Các nút của phần tử phải trùng với vị trí đặt lực tập trung, hay vị trí thay đổi tiết diện, chiều dài các phần tử có thể khác nhau.



Hình 3.7. Khung siêu tĩnh bậc 3



Hình 3.8. Sơ đồ rời rạc kết cấu

Rời rạc hóa kết cấu dầm ra thành n_{pt} phần tử, hình 3.8. Các nút của phần tử phải trùng với vị trí đặt lực tập trung, hay vị trí thay đổi tiết diện, chiều dài các phần tử có thể khác nhau.

Mỗi phần tử có 6 ẩn $w_1, \theta_1, w_2, \theta_2, Q_1, Q_2$ vậy nếu n_{pt} phần tử rời rạc thì tổng cộng có $6 \times n_{pt}$ ẩn.

Khi chia mỗi thanh của khung thành 4 phần tử thì: ta có các ẩn chuyên vị nw_i , góc xoay nmx_i , lực cắt nqx_i như sau:

$$nw1 = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 4]$$

$$nwx1 = [5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12]$$

$$nqx1 = [13 \quad 14 \quad 15 \quad 16 \quad 17 \quad 18 \quad 19 \quad 20]$$

$$nw2 = [0 \quad 21 \quad 21 \quad 22 \quad 22 \quad 23 \quad 23 \quad 0]$$

$$nwx2 = [24 \quad 25 \quad 26 \quad 27 \quad 28 \quad 29 \quad 30 \quad 31]$$

$$nqx2 = [32 \quad 33 \quad 34 \quad 35 \quad 36 \quad 37 \quad 38 \quad 39]$$

Sau khi biết ẩn số thực của dầm và cột ta có thể xây dựng ma trận độ cứng tổng thể của khung có kích thước $K(n \times n)$, ở ví dụ này là $K(39 \times 39)$.

Bây giờ xét điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử.

Điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử được viết như sau:

$$\delta \lambda_i \left(\left[\frac{dy}{dx} - \frac{\alpha Q}{GF} \right]_{nut2 \text{ phan tu truoc}} - \left[\frac{dy}{dx} - \frac{\alpha Q}{GF} \right]_{nut1 \text{ phan tu sau}} = 0 \right) \quad i = 5(n_{pt} - 1) \quad (a)$$

Trong bài toán này ta chia thanh thành 4 phần tử nên $i=2(4-1)=6$ điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử

Điều kiện biên được viết như sau:

- Tại đầu ngàm chân cột trái 1, và đầu bên phải dầm 2 có góc xoay bằng không:

$$\delta \lambda_7 \left(\left[\frac{dy_1}{dx} - \frac{\alpha Q_1}{GF} \right]_{nut1 \text{ phan tu 1}} \right) = 0$$

$$\delta \lambda_8 \left(\left[\frac{dy_2}{dx} - \frac{\alpha Q_2}{GF} \right]_{nut2 \text{ phan tu npt}} \right) = 0 \quad (b)$$

Điều kiện hai góc xoay tại nút cứng giao giữa cột 1 và dầm 2 được viết như sau:

Góc xoay tại nút cuối của phần tử đầu cột 1 phải bằng góc xoay tại nút đầu của phần tử 1 của dầm 2.

$$\delta\lambda_9 \left(\left[\frac{dy_1}{dx} - \frac{\alpha Q_1}{GF} \right]_{\text{nút2}} - \left[\frac{dy_2}{dx} - \frac{\alpha Q_2}{GF} \right]_{\text{nút1}} \right) = 0$$

Điều kiện chuyển vị ngang tại đầu cột trái 1 bằng không:

$$\delta\lambda_{10} (y_1|_{\text{nút2}}) = 0$$

Trong đó $\lambda_k (k=1 \div 10)$ cũng là ẩn số của bài toán (có k ẩn số λ), do đó tổng số ẩn số của bài toán lúc đó là $(n+k)$, do đó ma trận độ cứng của phần tử lúc này cũng phải thêm k dòng và k cột như vậy kích thước của ma trận độ cứng tổng thể là $K(n+k, n+k)$. Chẳng hạn trong ví dụ này, ta có $n=39, k=10$ và tổng số ẩn của bài toán là $n+k=39+10=49$ ẩn. Trong trường hợp này ta xác định được kích thước của ma trận độ cứng tổng thể là: $K[49 \times 49]$.

Như vậy cuối cùng ta sẽ thiết lập được phương trình:

$$[K]\{\Delta\} = \{F\} \tag{e}$$

$$\text{trong đó: } \{F\} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \{\Delta\} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix}$$

là ẩn số của bài toán

Trong ví dụ 3.2 khi chia thành ra thành 4 phần tử, và $h/l=1/100$ (không xét biến dạng trượt ngang) ta có:

- Ma trận độ cứng phần tử $[K_e(6 \times 6)]$, như sau:

$$[K]_e = \begin{bmatrix} 768 & -768 & 96 & 96 & 0 & 0 \\ -768 & 768 & -96 & -96 & 0 & 0 \\ 96 & -96 & 16 & 8 & -0.0001 & 0.0001 \\ 96 & -96 & 8 & 16 & 0.0001 & -0.0001 \\ 0 & 0 & -0.0001 & 0.0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0001 & -0.0001 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Ma trận độ cứng toàn dầm [K]:

Ghép nối các ma trận độ cứng phần tử $[K]_e$ vào hệ tọa độ chung, ta được ma trận độ cứng tổng thể của toàn kết cấu $[K(49 \times 49)]$, ở đây không trình bày vì kích thước ma trận quá lớn.

- Véc tơ lực nút {F}: Trong ví dụ này là véc tơ 1 cột 49 dòng, như sau:

Sau khi có $[K]$ và $\{F\}$: ta thành lập được hệ phương trình cơ bản của phương pháp phần tử hữu hạn, như sau:

$$[K]\{\Delta\} = \{F\}$$

Giải phương trình (e) ta nhận được:

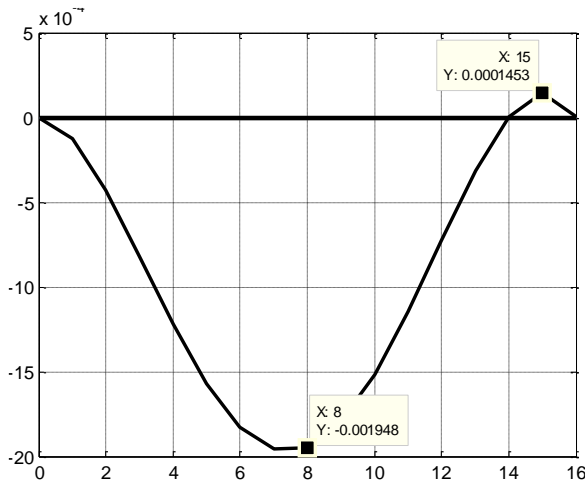
$$\{\Delta\} = [K]^{-1}\{F\}$$

Theo ngôn ngữ lập trình Matlab ta có thể viết:

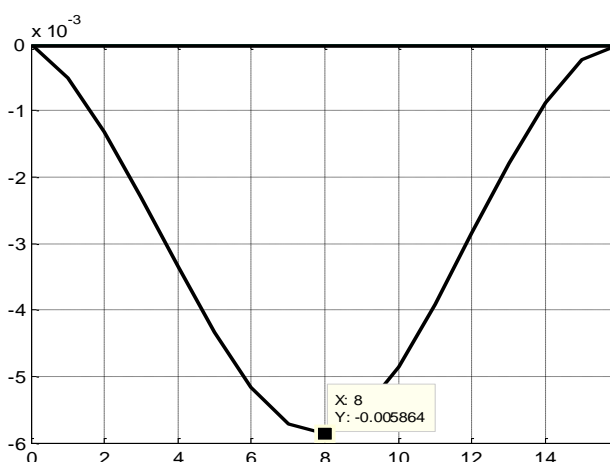
$$\{\Delta\} = [K] \setminus \{F\}$$

Kết quả chuyển vị, góc xoay tại các nút và Mômen uốn của dầm:

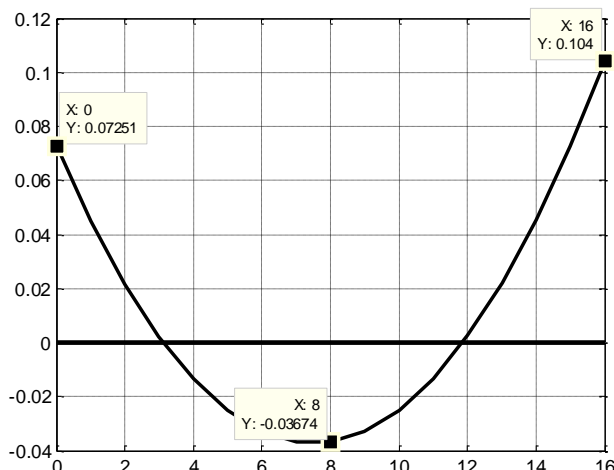
Khi không xét đến biến dạng trượt ngang, $h/l=1/100$ (npt=16) ta có



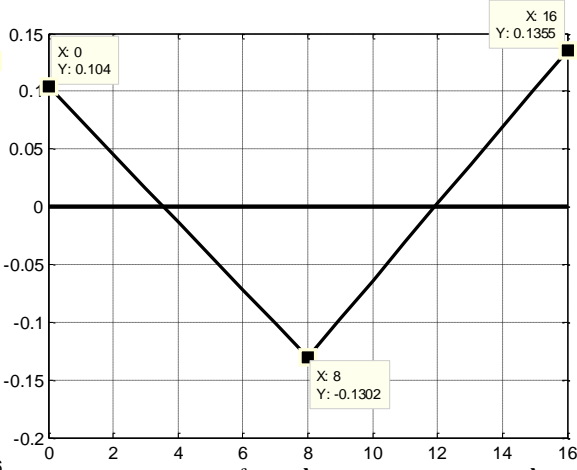
Hình 3.9a. Đường độ võng của cột



Hình 3.9b. Đường độ võng của dầm



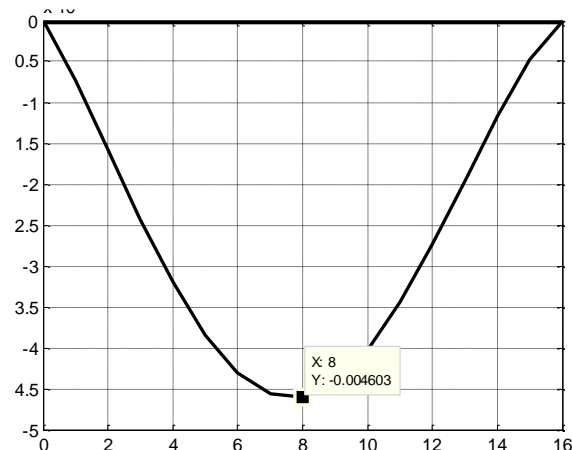
Hình 3.10a. Biểu đồ mômen của cột



Hình 3.10b. Biểu đồ mômen của dầm

Khi xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang, trường hợp ($h/l=1/3$)

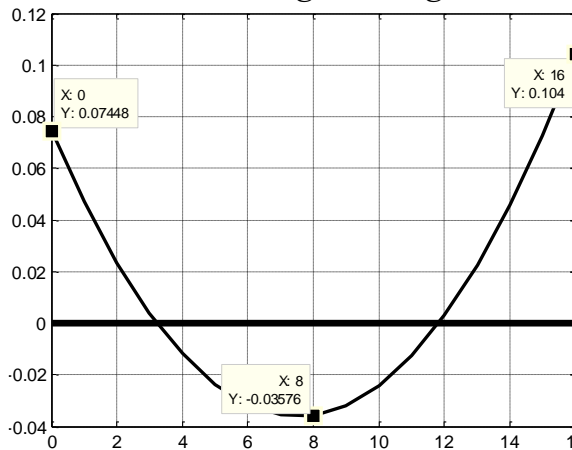
ta nhận được kết quả như sau:



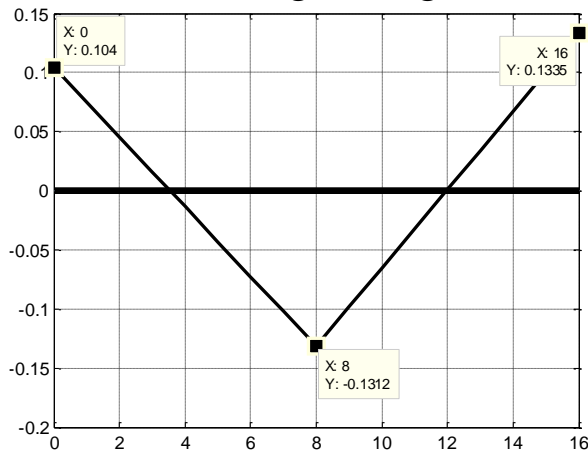
Hình 3.11a. Đường độ võng của cột



Hình 3.11b. Đường độ võng của dầm



Hình 3.12a. Biểu đồ mômen của cột



Hình 3.12b. Biểu đồ mômen của dầm

Nhận xét kết quả trên:

Khi chia cột và dầm thành 16 phần ta nhận được kết quả như trên, so sánh với kết quả theo lời giải giải tích đã có ta nhận được sai số theo bảng sau:

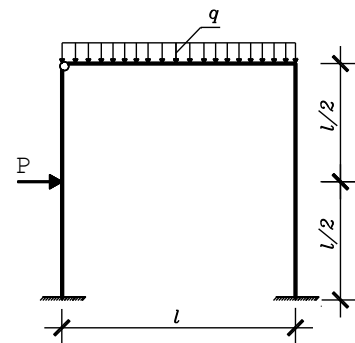
BẢNG SO SÁNH MÔMEN UỐN TẠI CÁC TIẾT DIỆN CỘT VÀ DÀM

Các tiết diện của cột 1 và dầm 2	Lời giải số theo phương pháp PTHH ($h/l=1/100$)	Lời giải số theo phương pháp PTHH ($h/l=1/3$)	Chênh lệch giữa không và có xét BDTN (%)
Chân cột	-0,0725	-0,0745	2,75
Giữa cột	0,0367	0,0367	0
Đầu cột	-1,0400	-1,0400	0
Giữa dầm	0,1302	0,1312	0,76
Đầu phải dầm	-0,1355	-0,1336	1,40

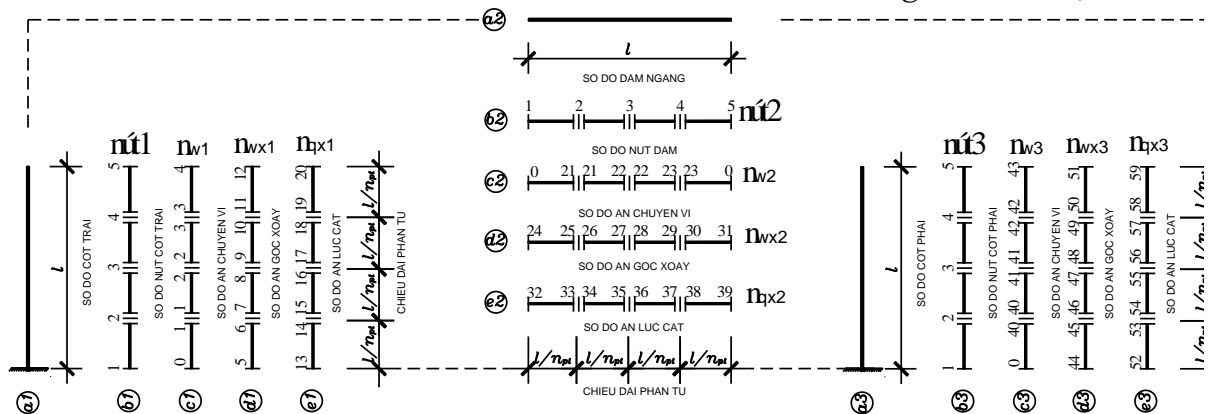
Ta thấy chênh lệch giữa hai trường hợp không và có xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang là không đáng kể.

Ví dụ 3.3: Khung siêu tĩnh bậc 2, hình 3.13.

Xác định nội lực và chuyển vị của khung chịu lực như hình 2, độ cứng uốn $EJ=const$.



Hình 3.13. Khung siêu tĩnh bậc 2



Hình 3.14. Sơ đồ rời rạc kết cấu

Rời rạc hóa kết cấu dầm ra thành n_{pt} phần tử, hình 3.14. Các nút của phần tử phải trùng với vị trí đặt lực tập trung, hay vị trí thay đổi tiết diện, chiều dài các phần tử có thể khác nhau.

Mỗi phần tử có 6 ẩn $w_1, \theta_1, w_2, \theta_2, Q_1, Q_2$ vậy nếu n_{pt} phần tử rời rạc thì tổng cộng có $6 \times n_{pt}$ ẩn.

Khi chia mỗi thanh của khung thành 4 phần tử thì: ta có các ẩn chuyển vị nw_i , góc xoay nmx_i , lực cắt nqx_i như sau:

$$nw1 = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 4]$$

$$nwx1 = [5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12]$$

$$nqx1 = [13 \quad 14 \quad 15 \quad 16 \quad 17 \quad 18 \quad 19 \quad 20]$$

$$nw2 = [0 \quad 21 \quad 21 \quad 22 \quad 22 \quad 23 \quad 23 \quad 0]$$

$$nwx2 = [24 \quad 25 \quad 26 \quad 27 \quad 28 \quad 29 \quad 30 \quad 31]$$

$$nqx2 = [32 \quad 33 \quad 34 \quad 35 \quad 36 \quad 37 \quad 38 \quad 39]$$

$$nw3 = [0 \quad 40 \quad 40 \quad 41 \quad 41 \quad 42 \quad 42 \quad 43]$$

$$nwx3 = [44 \quad 45 \quad 46 \quad 47 \quad 48 \quad 49 \quad 50 \quad 51]$$

$$nqx3 = [52 \quad 53 \quad 54 \quad 55 \quad 56 \quad 57 \quad 58 \quad 59]$$

Sau khi biết ẩn số thực của dầm và cột ta có thể xây dựng ma trận độ cứng tổng thể của khung có kích thước $K(n \times n)$, ở ví dụ này là $K(59 \times 59)$.

Bây giờ xét điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử.

Điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử được viết như sau:

$$\delta \lambda_i \left(\left[\frac{dy}{dx} - \frac{\alpha Q}{GF} \right]_{nut2 \text{ phan tu truoc}} - \left[\frac{dy}{dx} - \frac{\alpha Q}{GF} \right]_{nut1 \text{ phan tu sau}} = 0 \right) \quad i = 5(n_{pt} - 1) \quad (a)$$

Trong bài toán này ta chia thành thành 4 phần tử nên $i=3(4-1)=9$ điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử

Điều kiện biên được viết như sau:

- Tại đầu ngàm chân cột trái 1, cột phải 3 có góc xoay bằng không:

$$\delta \lambda_{10} \left(\left[\frac{dy_1}{dx} - \frac{\alpha Q_1}{GF} \right]_{nut1 \text{ phan tu 1}} \right) = 0$$

$$\delta \lambda_{11} \left(\left[\frac{dy_3}{dx} - \frac{\alpha Q_3}{GF} \right]_{nut1 \text{ phan tu 1}} \right) = 0 \quad (b)$$

Điều kiện mômen tại nút khớp bên trái và góc xoay tại nút cứng giao giữa cột 3 và dầm 2 được viết như sau:

Mômen tại nút cuối của phần tử đầu cột và momen tại nút đầu của phần tử 1 của dầm 2 bằng không. Góc xoay tại nút cuối của phần tử đầu cột 3 phải bằng góc xoay tại nút cuối của phần tử cuối cùng của dầm 2.

$$\delta\lambda_{12} \left(\left[\frac{d^2 y_1}{dx^2} - \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_1}{dx} \right]_{nút2} - \left[\frac{d^2 y_2}{dx^2} - \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_2}{dx} \right]_{nút1} \right) = 0$$

$$\delta\lambda_{13} \left(\left[\frac{dy_3}{dx} - \frac{\alpha Q_3}{GF} \right]_{nút2} - \left[\frac{dy_2}{dx} - \frac{\alpha Q_2}{GF} \right]_{nút2} \right) = 0$$

(c)

Điều kiện chuyển vị ngang tại đầu cột trái 1, cột giữa 2 và cột phải 3 bằng nhau:

$$\delta\lambda_{14} (y_1|_{nút2} - y_3|_{nút2}) = 0$$

Trong đó $\lambda_k (k=1 \div 14)$ cũng là ẩn số của bài toán (có k ẩn số λ), do đó tổng số ẩn số của bài toán lúc đó là $(n+k)$, do đó ma trận độ cứng của phần tử lúc này cũng phải thêm k dòng và k cột như vậy kích thước của ma trận độ cứng tổng thể là $K(n+k, n+k)$. Chẳng hạn trong ví dụ này, ta có $n=98, k=24$ và tổng số ẩn của bài toán là $n+k=59+14=73$ ẩn. Trong trường hợp này ta xác định được kích thước của ma trận độ cứng tổng thể là: $K[73 \times 73]$.

Như vậy cuối cùng ta sẽ thiết lập được phương trình:

$$[K]\{\Delta\} = \{F\} \quad (d)$$

trong đó: $\{F\} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$; $\{\Delta\} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix}$ là ẩn số của bài toán

$\left. \begin{array}{l} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{array} \right\} \text{so - hang} = n$
 $\left. \begin{array}{l} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\} \text{so - hang} = k$

Trong ví dụ 3.1 khi chia thành ra thành 4 phần tử, và $h/l=1/100$ (không xét biến dạng trượt ngang) ta có:

- **Ma trận độ cứng phần tử $[K_e(6 \times 6)]$, như sau:**

$$[K]_e = \begin{bmatrix} 768 & -768 & 96 & 96 & 0 & 0 \\ -768 & 768 & -96 & -96 & 0 & 0 \\ 96 & -96 & 16 & 8 & -0.0001 & 0.0001 \\ 96 & -96 & 8 & 16 & 0.0001 & -0.0001 \\ 0 & 0 & -0.0001 & 0.0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0001 & -0.0001 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Ma trận độ cứng toàn dầm $[K]$:**

Ghép nối các ma trận độ cứng phần tử $[K_e]$ vào hệ tọa độ chung, ta được ma trận độ cứng tổng thể của toàn kết cấu $[K(122 \times 122)]$, ở đây không trình bày vì kích thước ma trận quá lớn.

- **Véc tơ lực nút $\{F\}$:** Trong ví dụ này là véc tơ 1 cột 122 dòng, như sau:

Sau khi có $[K]$ và $\{F\}$: **ta thành lập được hệ phương trình cơ bản của phương pháp phần tử hữu hạn, như sau:**

$$[K]\{\Delta\} = \{F\}$$

Giải phương trình (e) ta nhận được:

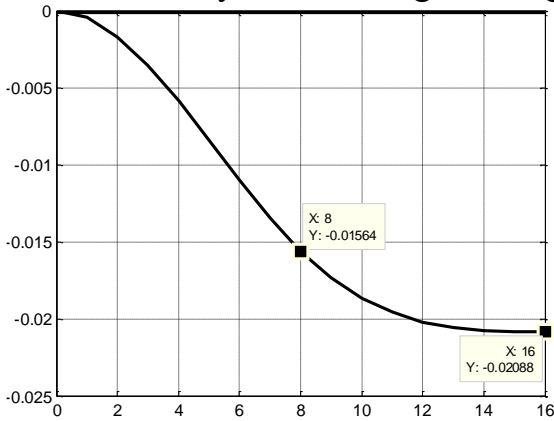
$$\{\Delta\} = [K]^{-1}\{F\}$$

Theo ngôn ngữ lập trình Matlab ta có thể viết:

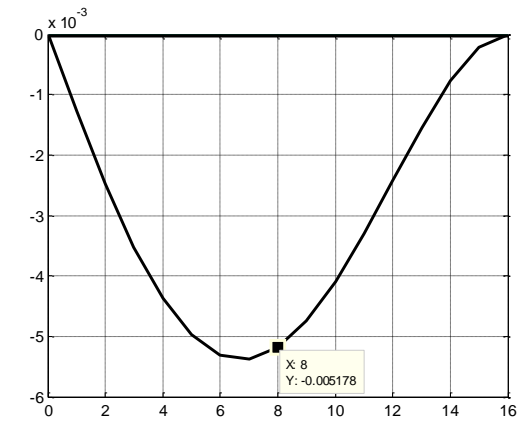
$$\{\Delta\} = [K] \setminus \{F\}$$

Kết quả chuyển vị, góc xoay tại các nút và Mômen uốn của dầm:
- Khi không xét đến biến dạng trượt ngang, $h/l=1/100$

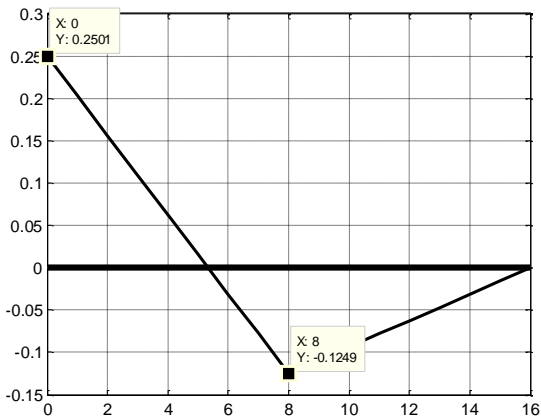
Dưới đây lần là đường độ võng và biểu đồ mômen uốn của cột và dầm



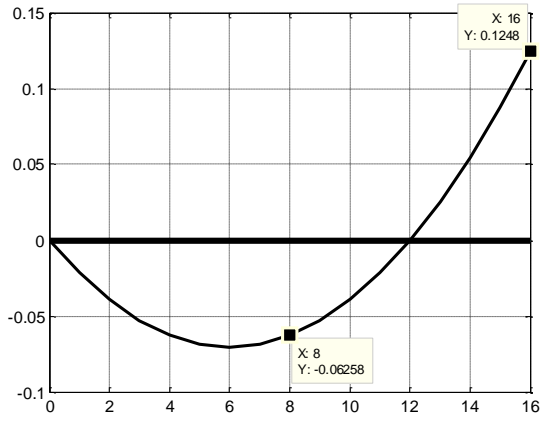
Hình 3.15a. Đường độ võng của cột trái



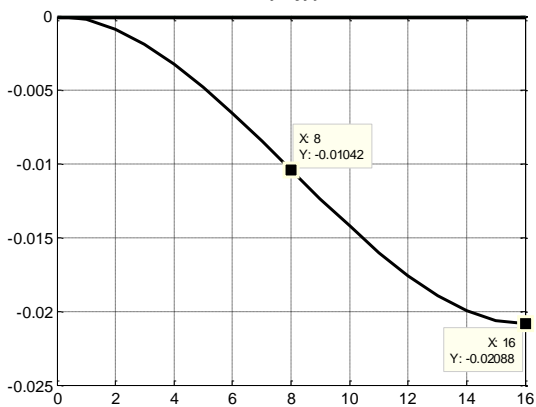
Hình 3.15b. Đường độ võng của dầm



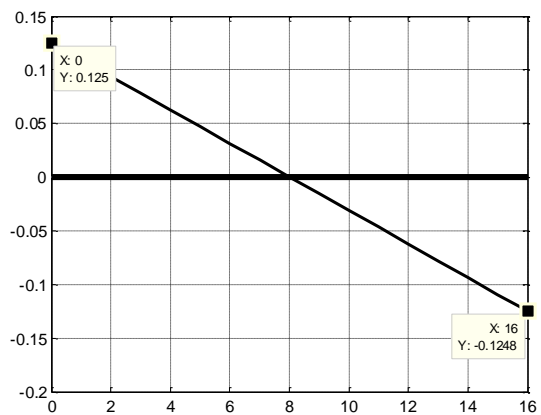
Hình 3.16a. Biểu đồ mômen của cột trái



Hình 3.16b. Biểu đồ mômen của dầm



Hình 3.15c. Đường độ võng của cột phải



Hình 3.16c. Biểu đồ mômen của cột phải

Nhận xét kết quả trên:

- Khi không xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang (trường hợp $h/l=1/100$).

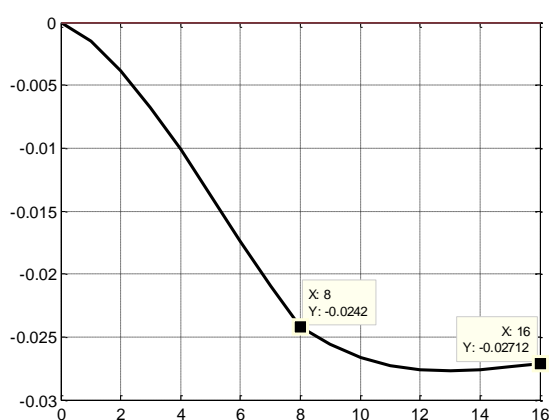
Khi chia cột và dầm thành 16 phần ta nhận được kết quả như trên, so sánh với kết quả chính xác theo lời giải giải tích ta nhận được sai số theo bảng sau:

BẢNG SO SÁNH MÔMEN UỐN TẠI CÁC TIẾT DIỆN CỘT VÀ DẦM

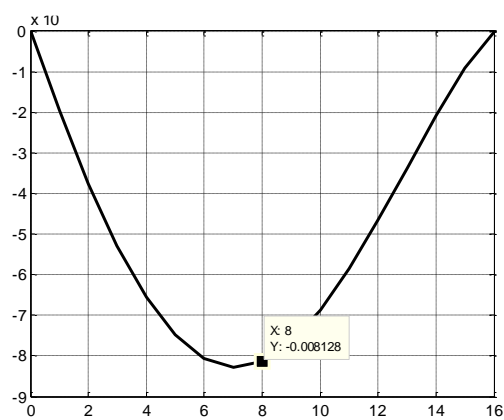
Các tiết diện của cột 1,3 và dầm 2	Lời giải số theo phương pháp PTHH ($h/l=1/100$)	Lời giải chính xác	Sai số %
Chân cột 1	-0,2501	-0,2500	0,04
Giữa cột 1	0,1249	0,1250	0,08
Giữa dầm 2	0,0625	0,0625	0
Đầu phải dầm 2	-0,1248	-0,1250	0,16
Đầu cột 3	-0,1248	-0,1250	0,16
Chân cột 3	0,1250	0,1250	0

Ta thấy kết quả nhận được gần như trùng khớp với lời giải chính xác.

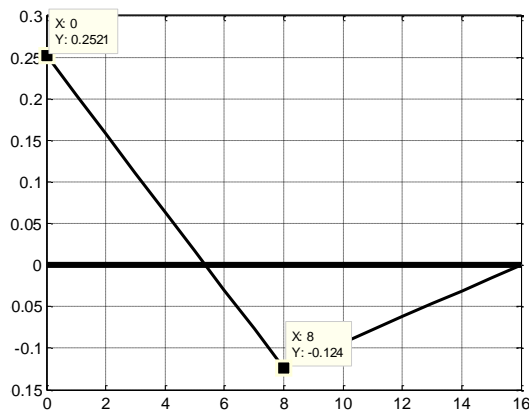
- Khi xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang (trường hợp $h/l=1/3$), ta nhận được kết quả như sau:



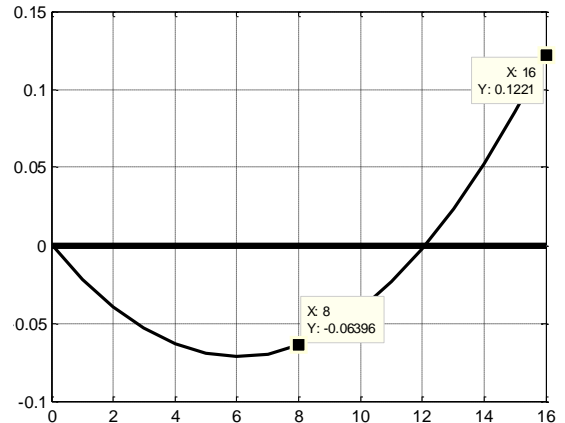
Hình 3.17a. Đường độ võng của cột trái



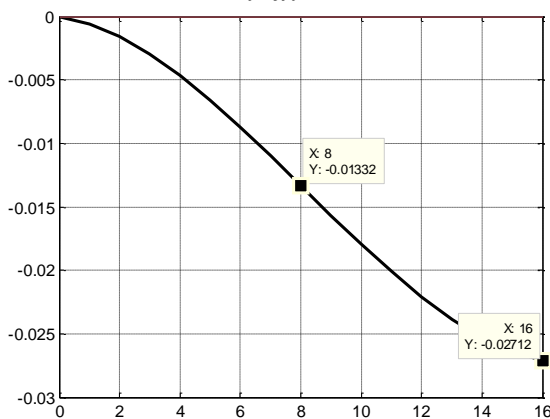
Hình 3.17b. Đường độ võng của dầm



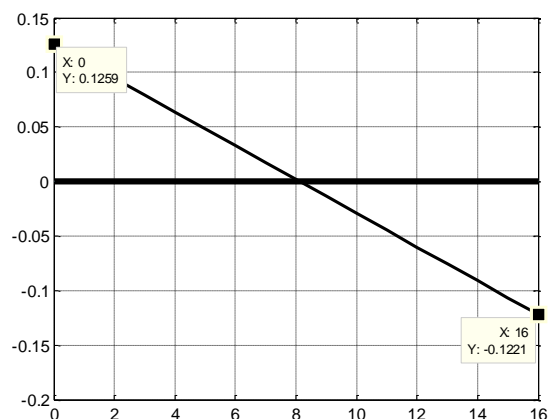
Hình 3.18a. Biểu đồ mômen của cột trái



Hình 3.18b. Biểu đồ mômen của dầm



Hình 3.17c. Đường độ võng của cột phải



Hình 3.18c. Biểu đồ mômen của cột phải

BẢNG SO SÁNH MÔMEN UỐN TẠI CÁC TIẾT DIỆN CỘT VÀ DẦM

Các tiết diện của cột 1,3 và dầm 2	Lời giải số theo phương pháp PTHH ($h/l=1/100$)	Lời giải số theo phương pháp PTHH ($h/l=1/100$)	Chênh lệch giữa không và có xét BDTN (%)
Chân cột 1	-0,2501	-0,2521	0,80
Giữa cột 1	0,1249	0,1240	0,72
Giữa dầm 2	0,0625	0,0639	2,24
Đầu phải dầm 2	-0,1248	-0,1221	2,16
Đầu cột 3	-0,1248	-0,1221	2,16
Chân cột 3	0,1250	0,1259	0,72

Mômen thay đổi không đáng kể giữa hai trường hợp không xét và có xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang, bảng 3.3.

BẢNG SO SÁNH ĐỘ VĨNG TẠI CÁC TIẾT DIỆN CỘT VÀ DẦM

Các tiết diện của cột 1,3 và dầm 2	Lời giải số theo phương pháp PTHH (h/l=1/100)	Lời giải số theo phương pháp PTHH (h/l=1/3)	Chênh lệch giữa không và có xét BDTN (%)
Đầu cột 1	0,0208	0,0271	30,28
Giữa cột 1	0,0156	0,0242	55,12
Giữa dầm 2	0,0052	0,0081	55,76
Đầu cột 3	0,0208	0,0271	30,28
Giữa cột 3	0,0104	0,0133	27,88

Khi xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt độ võng tăng lên rất lớn, lớn nhất tại giữa dầm 2 (55,76%), nhỏ nhất tại giữa cột 3 (27,88%).

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

KẾT LUẬN

Qua kết quả nghiên cứu từ các chương, chương 1 đến chương 3 đối với bài toán khung phẳng có xét đến biến dạng trượt ngang chịu tác dụng của tải trọng tĩnh. Tác giả rút ra các kết luận sau:

1. Bằng phương pháp phần tử hữu hạn, tác giả đã xác định được nội lực và chuyển vị của các khung siêu tĩnh chịu tác dụng của tải trọng tĩnh có các điều kiện biên khác nhau. Kết quả về nội lực và chuyển vị đều trùng khớp với kết quả nhận được khi giải bằng các phương pháp hiện có nếu tăng số lượng phần tử lên lớn hơn 16 phần tử.
2. Ảnh hưởng của việc xét biến dạng trượt ngang đến kết quả nhận được, phụ thuộc vào từng bài toán, do cách đặt tải, loại tải trọng và điều kiện liên kết là bất kỳ hay đối xứng..., chẳng hạn ở ví dụ 3.1 ta thấy kết quả nhận được trong hai trường hợp không xét và có xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang ($h/l=1/3$) mômen uốn thay đổi tương đối lớn, hầu hết đều tăng ở đa số tiết diện, tăng lớn nhất là tại đầu phải dầm 2, tăng (47,08%). Nhưng trong ví dụ 3.2 và 3.3 ta thấy mômen thay đổi không đáng kể trong hai trường hợp, có và không xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang. Khi không xét đến biến dạng trượt ngang ($h/l=1/100$) hay ($h \rightarrow 0$) thì kết quả hội tụ về đúng theo lý thuyết dầm truyền thống (lý thuyết dầm Euler Bernoulli).
3. Khi rời rạc hóa kết cấu với số phần tử càng nhiều thì kết quả càng tiệm cận tới kết quả chính xác nhận được từ phương pháp giải tích. Đối với bài toán khung chịu tải trọng tập trung thì để đạt được nội lực chính xác cần chia dầm thành 4 phần tử.
4. Trong ví dụ 3.3 cho thấy mặc dù nội lực M trong khung trong hai trường hợp có và không xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt, thay đổi không đáng kể, nhưng chuyển vị tại các tiết diện trong khung thay đổi tương đối lớn, lớn nhất tại tiết diện giữa dầm 2 (55,76 %). Điều này cho thấy kết quả bài toán không ảnh hưởng đáng kể đến bài toán bền, nhưng lại ảnh hưởng rất lớn đến bài toán cứng.

KIẾN NGHỊ

Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn để giải các bài toán khác như:
Dầm, khung, dàn, tấm, vỏ....

Nội dung nghiên cứu có thể làm tài liệu tham khảo, nghiên cứu, học tập và ứng dụng trong thực tế thiết kế kết cấu công trình.

DANH MỤC TÀI LIỆU THAM KHẢO

I. Tiếng Việt

- [1] Lều Thọ Trình, Đỗ Văn Bình (2010), *Cơ học công trình*, Nhà xuất bản xây dựng.
- [2] Lều Thọ Trình (2000), *Cơ học kết cấu*, Nhà xuất bản khoa học kỹ thuật.
- [3] Nguyễn Văn Liên, Nguyễn Phương Thành, Đinh Trọng Bằng (2003), *Giáo trình Sức bền vật liệu*, Nhà xuất bản xây dựng, tái bản lần thứ 3, 330 trang.
- [4] Nguyễn Văn Đạo (2001), *Cơ học giải tích*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà nội, 337 trang.
- [5] Nguyễn Trâm (2007), *Phương pháp phần tử hữu hạn*, Nhà xuất bản xây dựng
- [6] Đinh Văn Phong (2006), *Phương pháp số trong cơ học*, Nhà xuất bản khoa học kỹ thuật.
- [7] Đoàn Văn Duẩn (2015), Bài toán cơ học kết cấu dưới dạng tổng quát, Tạp chí Xây dựng số 02 (Tr59-Tr61).
- [8] Đoàn Văn Duẩn (2015), Phương pháp so sánh nghiên cứu nội lực và chuyển vị của hệ dầm, Tạp chí Xây dựng số 11 (Tr56-Tr58).
- [9] Đoàn Văn Duẩn (2015), Tính toán kết cấu khung chịu uốn bằng phương pháp so sánh, Tạp chí Xây dựng số 12 (Tr62-Tr64).
- [10] Timoshenko C.P, Voinópki- Krige X, (1971), *Tám và Vô*. Người dịch, Phạm Hồng Giang, Vũ Thành Hải, Đoàn Hữu Quang, Nxb Khoa học và kỹ thuật, Hà Nội.

III. Tiếng Anh

- [11] Stephen P.Timoshenko-Jame M.Gere (1961), *Theory of elastic stability*, McGraw-Hill Book Company, Inc, New york – Toronto – London, 541 Tr.

- [12] William T.Thomson (1998), *Theory of Vibration with Applications* (Tái bản lần thứ 5). Stanley Thornes (Publishers) Ltd, 546 trang.
- [13] Klaus – Jurgen Bathe (1996), *Finite Element procedures*. Part one, Prentice – Hall International, Inc, 484 trang.
- [14] Klaus – Jurgen Bathe (1996), *Finite Element procedures*. Part two, Prentice – Hall International, Inc, 553 trang.
- [15] Ray W.Clough, Joseph Penzien(1993), *Dynamics of Structures* (Tái bản lần thứ 2), McGraw-Hill Book Company, Inc, 738 trang.
- [16] O.C. Zienkiewicz-R.L. Taylor (1991), *The finite element method* (four edition) Volume 2, McGraw-Hill Book Company, Inc, 807 trang.
- [17] G.Korn-T.Korn (1961), *Mathematical Handbook for sientists and Engineers*, McGraw-Hill, New york (Bản dịch tiếng Nga, I.Bramovich chủ biên, Nhà xuất bản Nauka-Moscow, 1964).
- [18] Stephen P.Timoshenko-J. Goodier (1970), *Theory of elasticity*, McGraw-Hill, New york (Bản dịch tiếng Nga, G. Shapiro chủ biên, Nhà xuất bản Nauka-Moscow, 1979), 560 trang.
- [19] D.R.J. Owen, E.Hinton (1986), *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*, Pineridge Press Lt.
- [20] Lars Olovsson, Kjell Simonsson, Mattias Unosson (2006), *Shear locking reduction in eight-node tri-linear solid finite elements*, J. ‘Computers @ Structures’,84, trg 476-484.
- [21] C.A.Brebbia, J.C.F.Telles, L.C.Wrobel(1984), *Boundary Element Techniques. Theory and Applications in Engineering*. Nxb Springer – Verlag.(Bản dịch tiếng Nga, 1987).
- [22] Chopra Anil K (1995). *Dynamics of structures*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New – Jersey 07632.
- [23] Wilson Edward L. Professor Emeritus of structural Engineering University of California at Berkeley (2002). *Three – Dimensional Static and*

Dynamic Analysis of structures, Inc. Berkeley, California, USA. Third edition, Reprint January.

[24] Wilson, E. L., R. L. Taylor, W. P. Doherty and J. Ghaboussi (1971). “*Incompatible Displacement Models*”, Proceedings, ORN Symposium on “Numerical and Computer Method in Structural Mechanics”. University of Illinois, Urbana. September. Academic Press.

[25] Strang, G (1972). “*Variational Crimes in the Finite Element Method*” in “The Mathematical Foundations of the Finite Element Method”. P.689 -710 (ed. A.K. Aziz). Academic Press.

[26] Irons, B. M. and O. C. Zienkiewicz (1968). “*The isoparametric Finite Element System – A New Concept in Finite Element Analysis*”, Proc. Conf. “Recent Advances in Stress Analysis”. Royal Aeronautical Society. London.

[27] Kolousek Vladimir, DSC Professor, Technical University, Pargue (1973). *Dynamics in engineering structures*. Butter worths London.

[28] Felippa Carlos A (2004). *Introduction of finite element methods*. Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures University of Colorado Boulder, Colorado 80309-0429, USA, Last updated Fall.