

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC DÂN LẬP HẢI PHÒNG**  
.....

**LẠI MINH QUYẾT**

**PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ CƯỜNG BỨC ĐỐI VỚI BÀI  
TOÁN ỔN ĐỊNH ĐÀN HỒI CỦA THANH**

**LUẬN VĂN THẠC SĨ KỸ THUẬT**

**CHUYÊN NGÀNH: KỸ THUẬT XÂY DỰNG CÔNG TRÌNH DÂN DỤNG  
VÀ CÔNG NGHIỆP; MÃ SỐ: 60.58.02.08**

**NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:**

**PGS. TS. ĐOÀN VĂN DUẤN**

**HẢI PHÒNG, 11 NĂM 2018**

## **LỜI CAM ĐOAN**

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các số liệu, kết quả trong luận văn là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

**Tác giả luận văn**

**Lại Minh Quyết**

## LỜI CẢM ƠN

Để hoàn thành quá trình nghiên cứu và hoàn thiện luận văn này, lời đầu tiên tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất đối với PGS. TS. Đoàn Văn Duẩn đã tận tình giúp đỡ và cho nhiều chỉ dẫn khoa học có giá trị cũng như thường xuyên động viên, tạo mọi điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu hoàn thành luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn các nhà khoa học, các chuyên gia trong và ngoài trường Đại học Dân lập Hải Phòng đã tạo điều kiện giúp đỡ, quan tâm góp ý cho bản luận văn được hoàn thiện hơn. Xin trân trọng cảm ơn các cán bộ, giáo viên của Khoa xây dựng, Phòng đào tạo Đại học và Sau đại học - trường Đại học Dân lập Hải Phòng, và các đồng nghiệp đã tạo điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tác giả trong quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Cuối cùng tôi xin chân thành cảm ơn đồng nghiệp, đơn vị công tác đã giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và thực hiện Luận văn.”

Xin trân trọng cảm ơn!

*Hải Phòng, ngày      tháng      năm 2018*

**Tác giả**

**Lại Minh Quyết**

## MỤC LỤC

MỞ ĐẦU.....	1
CHƯƠNG 1: TỔNG QUAN VỀ LÝ THUYẾT ỔN ĐỊNH CÔNG TRÌNH...	4
1.1. Tầm quan trọng của việc nghiên cứu ổn định công trình.....	4
1.2 Nguyên lý cực trị Gauss .....	6
1.2.1 Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss với cơ hệ chất điểm .....	7
1.2.2. Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss đối với bài toán cơ học kết cấu hệ thanh.....	8
1.3. Khái niệm ổn định và mất ổn định công trình .....	9
1.4. Các phương pháp xây dựng bài toán ổn định công trình hiện nay .....	13
1.4.1 Phương pháp tĩnh học .....	13
1.4.2 Phương pháp động lực học .....	13
1.4.3 Phương pháp năng lượng.....	14
1.5. Một số nhận xét .....	15
CHƯƠNG 3: PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ CƯỜNG BỨC ĐỐI VỚI BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH ĐÀN HỒI CỦA THANH.....	16
2.1 Phương pháp phần tử hữu hạn .....	16
2.1.1 Nội dung phương pháp phần tử hữu hạn theo mô hình chuyển vị .....	17
2.1.2. Cách xây dựng ma trận độ cứng của phần tử chịu uốn .....	38
2.1.3 Cách xây dựng ma trận độ cứng tổng thể của kết cấu.....	41
2.2 Phương pháp chuyển vị cưỡng bức trong phân tích bài toán ổn định của thanh chịu nén .....	45
2.2.1 Ổn định thanh chịu nén.....	45
2.2.2 Phương pháp chuyển vị cưỡng bức .....	47
CHƯƠNG 3: MỘT SỐ VÍ DỤ PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH THANH CHỊU NÉN THEO PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ CƯỜNG BỨC .....	50
3.1. Phân tích ổn định của thanh chịu nén đầu ngàm – đầu khớp .....	50
3.2 Phân tích ổn định của thanh chịu nén đầu ngàm – đầu ngàm .....	53

3.3 Phân tích ổn định của thanh chịu nén đầu ngàm – đầu ngàm trượt.....	56
3.4 Phân tích ổn định của thanh chịu nén đầu ngàm – đầu tự do .....	59
3.5 Phân tích ổn định của thanh chịu nén đầu khớpdi động – đầu khớp cố định .....	63
KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ.....	66
TÀI LIỆU THAM KHẢO .....	67

## MỞ ĐẦU

### Lý do lựa chọn đề tài

Trong các năm gần đây kinh tế xã hội ngày càng phát triển, thu nhập của người dân ngày một nâng cao do vậy ngày càng có nhiều các công trình nhà cao tầng, công trình vượt khẩu độ lớn được xây mới nhằm phục vụ cho các hoạt động sinh hoạt và nhu cầu thưởng thức đời sống văn hóa, giải trí của người dân. Vì vậy, vấn đề đặt ra cho các kỹ sư thiết kế cho các công trình này ngoài việc phải đảm bảo được yêu cầu của mỹ thuật kiến trúc vấn đề quan trọng nhất là các công trình này phải đảm bảo được khả năng chịu lực cũng như sự làm việc bình thường của các hệ thống kỹ thuật; đảm bảo an toàn cho con người làm việc hoặc sinh hoạt bên trong công trình. Một trong những yêu cầu đó là vấn đề ổn định của các kết cấu, đã trở thành một trong những nội dung bắt buộc phải tính toán và kiểm tra trong quá trình thiết kế công trình.

Bài toán ổn định của kết cấu cho đến nay đã được rất nhiều tác giả quan tâm đưa ra rất nhiều phương pháp khác nhau. Các phương pháp này thường dựa vào ba tiêu chí để đánh giá ổn định: Tiêu chí dưới dạng tĩnh học; Tiêu chí dưới dạng năng lượng và Tiêu chí dưới dạng động lực học.

Nhằm có một cách nhìn đơn giản và luôn xác định được lực tới hạn cho bài toán ổn định, luận văn sẽ trình bày phương pháp chuyển vị cưỡng bức kết hợp với phương pháp nguyên lý cực trị Gauss để giải bài toán ổn định đàn hồi cho kết cấu công trình.

### Mục đích nghiên cứu

Nhằm làm phong phú thêm phương pháp giải cho bài toán ổn định đàn hồi của kết cấu thanh, trong nội dung luận văn này sẽ trình bày một phương pháp giải khác so với các phương pháp phân tích ổn định đã được cũng như nước ngoài đã trình bày.

## **Đối tượng và phạm vi nghiên cứu**

Luận văn tập trung khảo sát bài toán ổn định đàn hồi của một số kết cấu thanh chịu nén dọc trục với các điều kiện liên kết hai đầu khác nhau.

## **Phương pháp nghiên cứu**

Dựa trên phương pháp chuyển vị cưỡng bức đồng thời kết hợp với phương pháp nguyên lý cực trị Gauss của GS TSKH Hà Huy Cương xác định được lực tới hạn trong bài toán kết cấu đàn hồi.

## **Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài**

Vấn đề xác định lực tới hạn trong bài toán ổn định đàn hồi có rất nhiều phương pháp khác nhau và đã được trình bày trong nhiều tài liệu trong nước cũng như nước ngoài. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài luận văn thạc sĩ là giới thiệu một cách giải khác để làm phong phú thêm phương pháp giải trong bài toán ổn định đàn hồi thanh chịu nén.

## **Bố cục của luận văn**

Ngoài phần mở đầu, phần kết luận, tài liệu tham khảo và phụ lục. Nội dung chính của luận văn được bố cục trong 3 chương:

- Chương 1: Tổng quan về phân tích ổn định kết cấu công trình: Trình bày sự cần thiết của việc phải phân tích ổn định cho kết cấu công trình khi thiết kế cũng như kiểm tra tính toán kết cấu công trình. Ngoài ra trong chương này cũng trình bày một số khái niệm về ổn định và mất ổn định công trình, đồng thời giới thiệu sơ bộ một số phương pháp hiện nay thường sử dụng để phân tích ổn định cho kết cấu công trình. Cuối chương tác giả đưa ra các vấn đề cụ thể giải quyết của luận văn.

- Chương 2: Cơ sở lý thuyết phân tích ổn định kết cấu công trình theo phương pháp chuyển vị cưỡng bức: Trình bày cơ sở lý thuyết phân tích ổn định kết cấu công trình dựa trên phương pháp chuyển vị cưỡng bức và kết hợp với phương pháp nguyên lý cực trị Gauss.

- Chương 3: Một số ví dụ phân tích ổn định kết cấu của thanh chịu nén dọc trục với các liên kết hai đầu khác nhau dựa trên phương pháp chuyển vị cưỡng bức theo hai cách tiếp cận bài toán: Xây dựng bài toán ổn định theo phương pháp phân tử hữu hạn.



# CHƯƠNG 1

## TỔNG QUAN VỀ LÝ THUYẾT ỔN ĐỊNH CÔNG TRÌNH

### 1.1. Tầm quan trọng của việc nghiên cứu ổn định công trình

Vấn đề tính toán điều kiện ổn định cho kết cấu là một trong những điều kiện bắt buộc khi tính toán thiết kế kết cấu công trình. Nếu khi tính toán thiết kế chỉ tính toán theo điều kiện bền và điều kiện cứng thôi thì chưa đủ để đảm bảo công trình an toàn khi đưa công trình vào sử dụng. Trong thực tế có rất nhiều trường hợp khi kết cấu chịu lực, đặc biệt là đối với kết cấu chịu nén hoặc nén uốn đồng thời, tuy tải trọng tác dụng chưa đạt đến giá trị tải trọng làm kết cấu mất an toàn theo điều kiện bền hoặc điều kiện biến dạng nhưng kết cấu chuyển sang vị trí cân bằng mới khác trạng thái cân bằng ban đầu. Tại trạng thái cân bằng mới này nội lực trong kết cấu tăng lên rất nhanh làm cho kết cấu nhanh chóng bị phá hoại. Lịch sử về công nghệ xây dựng cho thấy, không ít các sự cố sập công trình xảy ra tại các nước khác nhau do khi thiết kế có thể người thiết kế không xem xét đầy đủ về hiện tượng dao động cũng như sự mất ổn định của kết cấu.

Năm 1875 cầu sắt Kevđa ở Nga là cây cầu dàn hỏ đã bị phá hủy do hệ thanh biên trên mất ổn định. Năm 1891 cầu Menkhiexlein ở Thụy Sĩ bị phá hủy do mất ổn định [2, 8].

Năm 1907 bể chứa khí Hamburg bị phá hủy do thanh ghép chịu nén bị mất ổn định. Cũng trong năm 1907 cây cầu Quebec ( ba nhịp với chiều dài hai nhịp ở đầu cầu là 152,2m, chiều dài nhịp giữa là 548,64m) trong quá trình thi công lắp dựng nhịp giữa cầu, các thanh cánh dưới của cầu đã mất ổn định làm cây cầu bị sụp đổ dẫn đến 75 công nhân đang thi công trên công trình bị tử nạn, chỉ còn 11 công nhân sống sót (hình 1.1) [2, 8, 17].

Năm 1925 Cầu dầm Mujur ở Nga bị phá hủy do thanh ghép bị nén mất ổn định. Ngày 07 tháng 11 năm 1940 Cầu Tacoma ở Mỹ bị mất ổn định vì tác dụng của gió sau 4 tháng 6 ngày kể từ khi hoàn thành xong [2, 8].

Năm 1978 công trình mái dầm nhà thi đấu Hartford có kích thước 91,44m x 109,73m sau trận mưa tuyết lớn một số thanh dầm đã bị mất ổn định làm kết cấu mái dầm nhanh chóng bị sụp đổ (hình 1.2) [17].



Hình 1.1 Cầu Quebec năm 1907



Hình 1.2 Nhà thi đấu Hartford 1978

Ngoài ra, trong khoảng thời gian từ 1951-1977 tại Nga đã có 59 công trình kết cấu thép bị phá hủy, trong số đó có 17 trường hợp là do nguyên nhân mất ổn định tổng thể hoặc mất ổn định cục bộ chiếm 29% [17].

Ngày nay do kinh tế ngày càng phát triển, điều kiện sống của người dân ngày một nâng cao vì vậy ngày càng có nhiều công trình cao tầng, công trình khẩu độ lớn xây dựng, đặc biệt do công nghệ vật liệu ngày càng phát triển do đó các vật liệu mới ngày càng chịu lực tốt hơn vì vậy các kích thước các cấu kiện của kết cấu ngày càng nhỏ gọn và mỏng hơn. Do đó, việc nghiên cứu tính toán ổn định cho kết cấu công trình là một vấn đề rất cần thiết và có ý nghĩa thực tiễn.

Vấn đề nghiên cứu ổn định kết cấu được bắt đầu từ công trình nghiên cứu thực nghiệm do Piter van Musschefnbroek công bố năm 1972, đã đi đến

kết luận rằng “*Lực tới hạn tỷ lệ nghịch với bình phương chiều dài thanh*”. Mười lăm năm sau nhà toán học L.Euler là người đầu tiên đặt nền móng cho việc nghiên cứu lý thuyết bài toán ổn định. Kết quả nghiên cứu của Euler ban đầu không được chấp nhận và ngay cả với Culông cũng cho rằng độ cứng của cột tỷ lệ thuận với diện tích mặt cắt ngang và không phụ thuộc vào chiều dài thanh. Những quan niệm của Culông dựa trên các kết quả thí nghiệm đối với các cột gỗ và cột sắt có chiều dài tương đối ngắn, những thanh này thường phá hoại thường nhỏ thua tải trọng Euler do vật liệu bị phá hoại chứ không phải do mất ổn định ngang gây ra. E.Lamac là người đầu tiên giải thích thỏa đáng sự phù hợp giữa lý thuyết ổn định của Euler và kết quả thực nghiệm với giả thuyết cơ bản xem vật liệu đàn hồi [2, 8].

Đến cuối thế kỷ XIX vấn đề nghiên cứu ổn định mới được phát triển mạnh mẽ qua các công hiến của các nhà khoa học như: Giáo sư F.S.Iaxinski, Viện sĩ A.N.Đinnik, Viện sĩ V.G.Galerkin v.v...cho đến nay có rất nhiều các công trình nghiên cứu về ổn định cho kết cấu công trình [8].

## 1.2 Nguyên lý cực trị Gauss

Nhà toán học người Đức K.F.Gauss năm 1829 đã đưa ra nguyên lý sau đây đối với các cơ hệ chất điểm: “*Chuyển động của hệ chất điểm có liên kết tùy ý chịu tác động bất kỳ ở mỗi thời điểm sẽ xảy ra một cách phù hợp nhất có thể với chuyển động của hệ đó khi hoàn toàn tự do, nghĩa là chuyển động xảy ra với lượng ràng buộc tối thiểu nếu như số đo lượng ràng buộc lấy bằng tổng các tích khối lượng chất điểm với bình phương độ lệch vị trí chất điểm so với vị trí khi chúng hoàn toàn tự do.*”[1].

Gọi  $m_i$  là khối lượng chất điểm,  $A_i$  là vị trí của nó,  $B_i$  là vị trí sau thời đoạn vô cùng bé do tác động lực ngoài và vận tốc ở đầu thời điểm gây ra,  $C_i$  là vị trí có thể (ràng buộc bởi liên kết) thì lượng ràng buộc được viết như sau:

$$Z = \sum_i m_i (\overline{B_i C_i})^2 \rightarrow \min \quad (1.1)$$

Do hệ cần tính và hệ hoàn toàn tự do đều chịu lực giống nhau, nên trong biểu thức lượng cưỡng bức không xuất hiện lực tác dụng. Lượng ràng buộc có dạng bình phương tối thiểu là phương pháp toán do Gauss đưa ra.

### 1.2.1 Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss với cơ hệ chất điểm

Xét hệ chất điểm có liên kết tùy ý ở một thời điểm bất kỳ nào đó có nghĩa là phải đưa lực quán tính  $f_i$  của hệ tại thời điểm nào đó tác dụng lên hệ. Đối với hệ hoàn toàn tự do lực quán tính  $f_{oi}$  của nó bằng với ngoại lực (chỉ số '0' ở chân ký tự chỉ rằng ký tự đó ở hệ so sánh, trường hợp này hoàn toàn tự do có cùng khối lượng và cùng chịu tác dụng lực ngoài giống như hệ có liên kết). Như vậy, các lực tác dụng lên hệ có liên kết gồm các lực  $f_i = m_i \ddot{x}_i$  và các lực  $f_{oi} = m_i \ddot{x}_{oi}$  (thay cho ngoại lực). Theo nguyên lý chuyển vị ảo đối với liên kết giữ (liên kết dưới dạng đẳng thức) và không giữ (liên kết dưới dạng bất đẳng thức) điều kiện cần và đủ để hệ ở trạng thái cân bằng là:

$$\delta Z = \sum_i (f_i - f_{oi}) \delta r_i \leq 0 \quad (1.2)$$

Để nhận được biểu thức (1.2) cần xem các chuyển vị  $r_i$  độc lập đối với lực tác dụng. Cho nên biểu thức (1.2) có thể viết:

$$Z = \sum_i (f_i - f_{oi}) r_i \rightarrow \min \quad (1.3)$$

Nếu như chuyển vị ảo  $r_i$  thỏa mãn các điều kiện liên kết đã cho của hệ cần tính thì ta có thể dùng vận tốc ảo  $\dot{r}_i$  làm đại lượng biến phân, nghĩa là:

$$\delta Z = \sum_i (f_i - f_{oi}) \delta \dot{r}_i \leq 0 \quad (1.4)$$

hay: 
$$Z = \sum_i (f_i - f_{oi}) \dot{r}_i \rightarrow \min \quad (1.5)$$

trong biểu thức (1.4), (1.5) vận tốc của chất điểm là đại lượng biến phân.

Cuối cùng khi chuyển vị ảo  $r_i$  thỏa mãn các điều kiện liên kết đã cho của hệ cần tính thì ta có thể dùng gia tốc ảo  $\ddot{r}_i$  làm đại lượng biến phân, ta có:

$$\delta Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) \delta \ddot{r}_i \leq 0 \quad (1.6)$$

hay: 
$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) \ddot{r}_i \rightarrow \min \quad (1.7)$$

Ta biến đổi thuần túy về mặt toán học biểu thức (1.7):

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) \ddot{r}_i \rightarrow \min$$

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) (\ddot{r}_i - \ddot{r}_{0i}) \rightarrow \min$$

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) \left( \frac{f_i}{m_i} - \frac{f_{0i}}{m_i} \right) \rightarrow \min$$

$$Z = \sum_i \frac{1}{m_i} (f_i - f_{0i})^2 \rightarrow \min \quad (1.8)$$

$$Z = \sum_i m_i \left( \frac{f_i}{m_i} - \ddot{r}_{0i} \right)^2 \rightarrow \min \quad (1.9)$$

Hai biểu thức (1.8), (1.9) là hai biểu thức thường dùng của nguyên lý cực tiểu Gauss với đại lượng biến phân là gia tốc.

Các biểu thức (1.3), (1.5), (1.7) và (1.9) là tương đương và được gọi là lượng ràng buộc chuyển động của cơ hệ cần tính.

### 1.2.2. Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss đối với bài toán cơ học kết cấu hệ thanh

Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss do GS TSKH Hà Huy Cương đưa ra là phương pháp sử dụng trực tiếp nguyên lý cực tiểu Gauss vào cơ hệ bằng cách:

- So sánh chuyển động của cơ hệ đang xét với chuyển động của nó khi hoàn toàn tự do. So sánh được hiểu theo nghĩa là tìm cực trị của lượng ràng buộc.

- Phương pháp nguyên lý chuyển vị ảo với bất đẳng thức Gauss đối với liên kết không giữ, xem liên kết giữ là trường hợp riêng.

Những nội dung trên là nội dung tổng quát của phương pháp nguyên lý cực trị Gauss.

Trong bài toán cơ học kết cấu hệ thanh chịu tải trọng tĩnh mà ứng suất và biến dạng tuân theo định luật Hooke thì mối quan hệ giữa nội lực và biến dạng được viết như sau:

$$\begin{aligned} M_x &= EI_x \cdot \chi_x; & M_y &= EI_y \cdot \chi_y; & M_z &= GI_p \cdot \theta; \\ Q_x &= \frac{GA}{\alpha} \cdot \gamma_{xz}; & Q_y &= \frac{GA}{\alpha} \cdot \gamma_{yz}; & N &= EA \cdot \varepsilon_z \end{aligned} \quad (1.10)$$

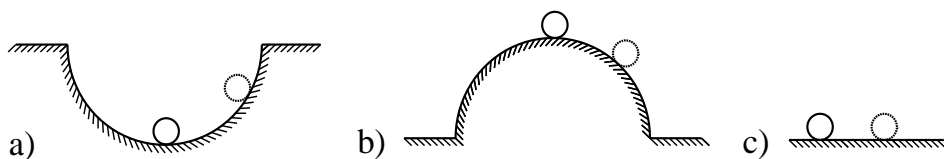
Như vậy theo (1.9) lượng ràng buộc của bài toán có thể được viết dưới dạng bình phương tối thiểu như sau:

$$\begin{aligned} Z &= \int_0^{l^{(0)}} \frac{(M_x - M_{0x})}{EI_x} \cdot \chi_x dz + \int_0^{l^{(0)}} \frac{(M_y - M_{0y})}{EI_y} \cdot \chi_y dz + \int_0^{l^{(0)}} \frac{(M_z - M_{0z})}{GI_p} \cdot \theta dz + \\ &+ \int_0^{l^{(0)}} \frac{\alpha(Q_x - Q_{0x})}{GA} \gamma_{xz} dz + \int_0^{l^{(0)}} \frac{\alpha(Q_y - Q_{0y})}{GA} \gamma_{yz} dz + \int_0^{l^{(0)}} \frac{(N - N_0)}{EA} \varepsilon_z dz \rightarrow \min \end{aligned} \quad (1.11)$$

trong đó:  $\alpha$  là hệ số tập trung ứng suất tiếp do lực cắt gây ra tại trục dầm [2]. Phương pháp nguyên lý cực Gauss đã được rất nhiều học viên cao học cũng như các nghiên cứu sinh đã áp dụng để giải quyết được nhiều bài toán khác nhau trong cơ học. Đây cũng là một cách tiếp cận khác so với cách tiếp cận của các phương pháp thường được trình bày trong một số sách cơ học hiện nay.

### 1.3. Khái niệm ổn định và mất ổn định công trình

Một cách hình dung tốt nhất về khái niệm ổn định là ta xét các trường hợp viên bi cứng trên các mặt phẳng cứng, mặt cầu cứng lõm và lồi (hình 1.3)



### Hình 1.3 Trạng thái ổn định và mất ổn định của viên bi

Trong trường hợp a: Mặt cầu lõm, sự cân bằng của viên bi là ổn định bởi vì kích nó ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu (đáy cầu) rồi thả ra thì nó sẽ trở về vị trí đáy cầu hoặc lân cận vị trí đó (nếu có ma sát).

Trong trường hợp b: Mặt cầu lồi, sự cân bằng là không ổn định, bởi vì kích viên bi ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu rồi thả bi ra thì viên bi sẽ không trở lại vị trí ban đầu nữa.

Trong trường hợp c: Kích viên bi ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu thì nó lăn trên mặt ngang đến khi ngừng chuyển động, nó có vị trí cân bằng mới khác với trạng thái cân bằng ban đầu. Trong trường hợp này ta nói rằng trạng thái cân bằng ban đầu là phiếm định (không phân biệt).

Ở trên ta đã nói trạng thái cân bằng của viên bi. Suy rộng ra ta cũng có thể nói như vậy đối với các trạng thái cân bằng của cơ hệ phức tạp, ví dụ trạng thái ứng suất và biến dạng, trạng thái nội lực và chuyển vị hoặc là trạng thái năng lượng.

Trở lại (hình 1.3a). Khi lệch khỏi vị trí cân bằng, trọng tâm của viên bi lên cao, thế năng của nó tăng. Trạng thái cân bằng ổn định là trạng thái có thế năng tối thiểu. Ở (hình 1.3b), khi lệch với trị số nhỏ, trọng tâm của viên bi giảm, thế năng của nó giảm. Trạng thái cân bằng không ổn định ứng với thế năng lớn. Ở (hình 1.3c) khi lệch ra khỏi vị trí cân bằng, trọng tâm của viên bi không thay đổi, trạng thái cân bằng là phiếm định hoặc không phân biệt.

Như hình 1.3, để biết được trạng thái cân bằng của cơ hệ có ổn định hay không thì ta kích thích nó ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu. Phương pháp chung để đánh giá sự mất ổn định của cơ hệ là: Đưa hệ ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu của nó và kiểm tra xem nó có tồn tại trạng thái cân bằng mới không. Nếu như tìm được trạng thái cân bằng mới khác với trạng thái cân bằng ban đầu thì hệ là mất ổn định và lực giữ cho hệ ở trạng thái cân bằng mới này gọi là lực tới hạn, trường hợp ngược lại là hệ ổn định.

Nói đến ổn định của cơ hệ là nói đến ổn định của trạng thái cân bằng, mà trạng thái cân bằng là nghiệm của phương trình vi phân, cho nên nói đến ổn định của cơ hệ là nói đến ổn định của nghiệm của các phương trình vi phân. Như vậy khi nghiệm của phương trình vi phân cân bằng là ổn định thì trạng thái cân bằng là ổn định, còn nghiệm của phương trình vi phân cân bằng không ổn định thì trạng thái cân bằng là không ổn định.

Cách xây dựng bài toán ổn định là đưa hệ ra khỏi vị trí cân bằng và xem có tồn tại trạng thái cân bằng mới không, nếu tồn tại trạng thái cân bằng mới thì trạng thái cân bằng ban đầu là không ổn định. Trong trường hợp không cần giải bài toán ổn định đến cùng chúng ta vẫn có thể biết được hệ có ổn định hay không ổn định thông qua các tiêu chí về sự cân bằng ổn định sau:

- Tiêu chí ổn định dưới dạng tĩnh học [8, 17]: Trong tĩnh học, sự cân bằng của kết cấu được thể hiện bằng các phương trình cân bằng tĩnh học song điều kiện cân bằng đó không nói nên được dạng cân bằng đó là ổn định hay không ổn định. Để khẳng định vấn đề này ta cần khảo sát hệ ở trạng thái lệch khỏi dạng cân bằng đang nghiên cứu. Giả sử trạng thái lệch này sự cân bằng có thể thực hiện được về nguyên tắc có thể tìm giá trị  $P^*$  của lực từ điều kiện cân bằng tĩnh học của hệ ở trạng thái lệch để đối chiếu với giá trị  $P$  của lực đã cho ở trạng thái ban đầu.

+ Nếu  $P > P^*$ : lực cản giữ cho hệ ở trạng thái lệch không thể giữ hệ ở trạng thái lệch mà còn làm tăng độ lệch, hệ không thể trở về trạng thái cân bằng ban đầu, nghĩa là cân bằng không ổn định.

+ Nếu  $P < P^*$ : lực cản giữ cho hệ ở trạng thái lệch có thể giữ hệ ở trạng thái lệch được, hệ phải trở về trạng thái cân bằng ban đầu, nghĩa là cân bằng ổn định.

+ Nếu  $P = P^*$ : lực cản giữ cho hệ ở trạng thái lệch bằng lực đã cho thì sự cân bằng là phiếm định.



Trong trường hợp khi sự cân bằng ở trạng thái lệch không thể thực hiện được về nguyên tắc ta cần căn cứ vào lực tác dụng trên hệ để phán đoán cách thức chuyển động của hệ. Nếu độ lệch tăng thì sự cân bằng là không ổn định còn nếu độ lệch giảm thì sự cân bằng là không ổn định.

- Tiêu chí ổn định dưới dạng động lực học [8, 17]: Tiêu chí của sự cân bằng ổn định dưới dạng động học được xây dựng trên cơ sở khuynh hướng chuyển động của hệ sau khi lệch khỏi dạng cân bằng ban đầu bằng một nhiễu loạn nào đó rồi bỏ nhiễu loạn đó đi. Nếu sau khi nhiễu loạn mất đi, hệ dao động tắt dần hay trở về trạng thái cân bằng ban đầu không dao động thì cân bằng là ổn định. Ngược lại là cân bằng không ổn định.

Để thực hiện ta cần khảo sát chuyển động bé của hệ ở lân cận vị trí cân bằng:

+ Nếu chuyển động tắt dần hoặc điều hòa (khi không kể đến lực cản) thì cân bằng là ổn định.

+ Nếu chuyển động không tuần hoàn (xa dần trạng thái ban đầu), mang đặc trưng dẫn đến sự tăng dần của biên độ chuyển động thì cân bằng là không ổn định.

- Tiêu chí ổn định dưới dạng năng lượng [8, 17]: Ngoại lực có khuynh hướng sinh công dương, do đó nếu ở trạng thái lệch, thế năng biến dạng của hệ được tích lũy lớn hơn công của ngoại lực thì năng lượng tích lũy đó có khả năng đưa hệ về trạng thái cân bằng ban đầu tức là hệ ổn định. Ngược lại thì hệ mất ổn định. Để áp dụng tiêu chuẩn ổn định về năng lượng, ta thường vận dụng nguyên lý Lejeune-Dirichlet: *“Nếu hệ ở trạng thái cân bằng ổn định thì thế năng toàn phần đạt giá trị cực tiểu so với tất cả vị trí của hệ ở lân cận vị trí cân bằng ban đầu với những chuyển vị vô cùng bé. Nếu hệ ở trạng thái cân bằng không ổn định thì thế năng toàn phần đạt giá trị cực đại. Nếu hệ ở trạng thái cân bằng phiếm định thì thế năng toàn phần không đổi”*.

Theo nguyên lý Lejeune-Dirichlet, nếu gọi  $U$  là thế năng toàn phần và  $T$  là công của ngoại lực thì:

+ Nếu  $\delta U > \delta T$  hệ ở trạng thái cân bằng ổn định

+ Nếu  $\delta U < \delta T$  hệ ở trạng thái cân bằng không ổn định

+ Nếu  $\delta U = \delta T$  hệ ở trạng thái cân bằng phiếm định

Ngoài ra tiêu chí về năng lượng cũng có thể diễn đạt theo điều kiện cực trị của thế năng toàn phần [8].

## 1.4. Các phương pháp xây dựng bài toán ổn định công trình hiện nay

### 1.4.1 Phương pháp tĩnh học

Khi giải bài toán ổn định theo phương pháp tĩnh có thể thực hiện qua các bước như sau [8, 15, 17, 18, 19]:

**Bước 1:** Tạo cho hệ nghiên cứu một dạng cân bằng lệch khỏi dạng cân bằng ban đầu.

**Bước 2:** Xác định trị số lực tới hạn (trị số lực cần thiết giữ cho hệ ở dạng cân bằng mới, lệch khỏi dạng cân bằng đầu). Lực tới hạn xác định từ phương trình đặc trưng (hay còn gọi là phương trình ổn định).

Người nghiên cứu có thể vận dụng nội dung nói trên khi áp dụng: Phương pháp thiết lập và giải phương trình vi phân; Phương pháp thông số ban đầu; Phương pháp lực; Phương pháp chuyển vị; Phương pháp hỗn hợp; Phương pháp sai phân hữu hạn; Phương pháp dây xích; Phương pháp nghiệm đúng tại từng điểm; Phương pháp Bubnov-Galerkin; Phương pháp giải đúng dần.

Trong thực tế, áp dụng các phương pháp tĩnh học để tìm nghiệm chính xác của bài toán ổn định thường gặp nhiều khó khăn và đôi khi không thể thực hiện được [8].

### 1.4.2 Phương pháp động lực học

Khi giải bài toán ổn định theo phương pháp động có thể thực hiện qua các bước như sau [8, 15, 17, 18, 19]:

**Bước 1:** Lập và giải phương trình dao động riêng của hệ.

**Bước 2:** Xác định lực tới hạn bằng cách biện luận tính chất nghiệm của chuyển động: nếu dao động của hệ có biên độ tăng không ngừng theo thời gian thì dạng cân bằng ban đầu là không ổn định; ngược lại, nếu hệ luôn dao động bé quanh vị trí cân bằng ban đầu hoặc tắt dần thì là dạng đó là ổn định.

### 1.4.3 Phương pháp năng lượng

Khi giải bài toán ổn định theo phương pháp năng lượng có thể thực hiện qua các bước như sau [8, 15, 17, 18, 19]:

**Bước 1:** Giả thiết trước dạng biến dạng của hệ ở trạng thái lệch khỏi dạng cân bằng ban đầu.

**Bước 2:** Xuất phát từ dạng biến dạng đã giả thiết, lập biểu thức thế năng biến dạng và công của ngoại lực để viết điều kiện tới hạn của hệ.

**Bước 3:** Từ điều kiện tới hạn, xác định giá trị của lực tới hạn.

Có thể vận dụng các phương pháp năng lượng bằng cách áp dụng: Trực tiếp nguyên lý Lejeune-Dirichlet; Phương pháp Rayleigh-Ritz; Phương pháp Timoshenko.

Do giả thiết trước biến dạng của hệ nên kết quả lực tới hạn tìm được thường là gần đúng và cho kết quả lớn hơn giá trị của lực tới hạn chính xác. Như vậy mức độ chính xác của kết quả theo các phương pháp năng lượng phụ thuộc vào khả năng phán đoán biến dạng của hệ ở trạng thái lệch: hàm chuyển vị được chọn càng gần với đường đàn hồi thực của thanh thì kết quả càng chính xác. Theo cách làm này thì hàm chuyển vị chọn trước thỏa mãn càng nhiều điều kiện biên hình học và tĩnh học càng tốt nhưng ít nhất phải thỏa mãn điều kiện biên tĩnh học [8, 15, 17, 18, 19].

Đường lối của ba loại phương pháp (phương pháp tĩnh; phương pháp động; phương pháp năng lượng) tuy khác nhau nhưng cho cùng một kết quả

đối với hệ bảo toàn. Đối với hệ không bảo toàn, các phương pháp tĩnh và các phương pháp năng lượng dẫn đến kết quả không chính xác, người ta phải sử dụng các phương pháp động lực học [8, 15, 17, 18, 19].

Hệ bảo toàn tức là những hệ chịu lực bảo toàn. Lực bảo toàn có tính chất sau đây [8]:

- Độ biến thiên công của lực bằng vi phân toàn phần của thế năng.
- Công sinh ra bởi các lực trên các chuyển vị hữu hạn không phụ thuộc vào đường đi chuyển của lực mà chỉ phụ thuộc vào vị trí điểm đặt đầu và điểm đặt cuối của lực.
- Tuân theo nguyên lý bảo toàn năng lượng.

Sự xuất hiện của ma sát nội do quan hệ phi đàn hồi hay ma sát ngoại sẽ dẫn đến hệ lực không bảo toàn.

### **1.5. Một số nhận xét**

Qua các phân tích ở các phần trên của chương một, nhằm làm phong phú cho các cách giải bài toán ổn định kết cấu công trình cũng như có một cách tiếp cận khác cho bài toán ổn định, luận văn sẽ tập trung nghiên cứu một số vấn đề sau:

1) Dựa trên phương pháp chuyển vị cưỡng bức kết hợp phương pháp nguyên lý cực trị Gauss xây dựng được phương pháp giải cho bài toán ổn định cho kết cấu công trình.

2) Dựa trên phương pháp chuyển vị cưỡng bức trong phân tích bài toán ổn định, nhằm cung cấp cho người nghiên cứu tính toán ổn định có một cách đơn giản khi phân tích lực tới hạn trong bài toán ổn định.

3) Trên cơ sở của phương pháp chuyển vị cưỡng bức kết hợp với phần mềm Matlab 7.0 viết các mô đun chương trình tính toán ổn định thanh chịu nén dọc trục dựa trên cách xây dựng bài toán theo phương pháp phần tử hữu hạn.

4) Phân tích ổn định một số thanh chịu nén dọc trục với các điều kiện biên khác nhau dựa trên phương pháp chuyển vị cưỡng bức để xác định lực tới hạn tác dụng lên các thanh. Kết quả này được so sánh với các kết quả của phương pháp giải khác để thấy được độ tin cậy của phương pháp trong luận văn.

## CHƯƠNG 2

### PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ CƯỜNG BỨC

### ĐỐI VỚI BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH ĐÀN HỒI CỦA THANH

Trong chương này, luận văn sẽ trình bày cơ sở lý thuyết của phương pháp chuyển vị cưỡng bức trong việc phân tích các bài toán ổn định. Đồng thời, trong chương còn trình bày một số khái niệm cơ bản của phương pháp phần tử hữu hạn, để phục vụ cho việc xây dựng các bài toán xác định lực tới hạn cho các thanh chịu nén theo cách xây dựng bằng phương pháp phần tử hữu hạn ở chương 3.

#### 2.1 Phương pháp phần tử hữu hạn

Phương pháp phần tử hữu hạn là một phương pháp số đặc biệt có hiệu quả để tìm dạng gần đúng của một hàm chưa biết trong miền xác định  $V$  của nó. Tuy nhiên phương pháp phần tử hữu hạn không tìm dạng xấp xỉ của hàm cần tìm trên toàn miền  $V$  mà chỉ trong từng miền con  $V_e$  (phần tử) thuộc miền xác định  $V$ . Do đó phương pháp này rất thích hợp với hàng loạt bài toán vật lý và kỹ thuật trong đó hàm cần tìm được xác định trên các miền phức tạp gồm nhiều vùng nhỏ có đặc tính hình học, vật lý khác nhau, chịu những điều kiện biên khác nhau. Phương pháp ra đời từ trực quan phân tích kết cấu, rồi được phát biểu một cách chặt chẽ và tổng quát như một phương pháp biến phân hay phương pháp dư có trọng nhưng được xấp xỉ trên mỗi phần tử.

Trong phương pháp phần tử hữu hạn chia kết cấu công trình thành một số hữu hạn các phần tử. Các phần tử này được nối với nhau tại các điểm định trước thường tại đỉnh phần tử (thậm trí tại các điểm trên biên phần tử) gọi là nút. Như vậy việc tính toán kết cấu công trình được đưa về tính toán trên các phần tử của kết cấu sau đó kết nối các phần tử này lại với nhau ta được lời giải của một kết cấu công trình hoàn chỉnh. Tương tự như phương pháp sai

phân hữu hạn cũng chia công trình thành các đoạn nhỏ (phần tử) và các trạng thái chuyển vị (trường chuyển vị) v.v... được xác định tại các điểm nút sai phân. Sự khác biệt của hai phương pháp là Phương pháp sai phân hữu hạn sau khi tìm được các chuyển vị tại các nút của sai phân còn các điểm nằm giữa hai nút được xác định bằng nội suy tuyến tính, còn phương pháp phần tử hữu hạn sau khi xác định được chuyển vị tại các nút của phần tử thì các điểm bên trong được xác định bằng hàm nội suy (hàm dạng).

Với bài toán cơ học vật rắn biến dạng, tùy theo ý nghĩa vật lý của hàm nội suy có thể phân tích bài toán theo 3 loại mô hình sau:

- Mô hình chuyển vị: Xem chuyển vị là đại lượng cần tìm và hàm nội suy biểu diễn gần đúng dạng phân bố của chuyển vị trong phần tử.

- Mô hình cân bằng: Hàm nội suy biểu diễn gần đúng dạng phân bố của ứng suất hay nội lực trong phần tử.

- Mô hình hỗn hợp: Coi các đại lượng chuyển vị và ứng suất là 2 yếu tố độc lập riêng biệt. Các hàm nội suy biểu diễn gần đúng dạng phân bố của cả chuyển vị lẫn ứng suất trong phần tử.

Hiện nay, khi áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn để giải các bài toán cơ học thường sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn theo mô hình chuyển vị. Sau đây luận văn trình bày nội dung phương pháp phần tử hữu hạn theo mô hình chuyển vị.

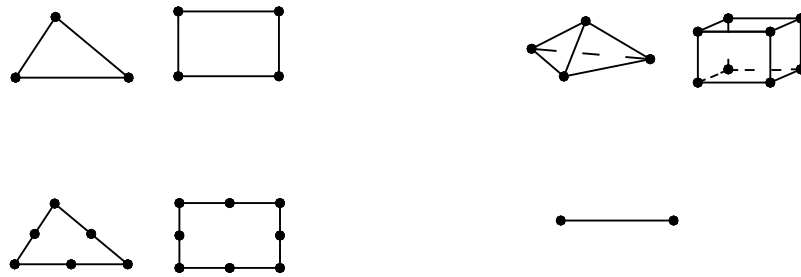
### **2.1.1 Nội dung phương pháp phần tử hữu hạn theo mô hình chuyển vị**

Trong phương pháp phần tử hữu hạn - mô hình chuyển vị, thành phần chuyển vị được xem là đại lượng cần tìm. Chuyển vị được lấy xấp xỉ trong dạng một hàm đơn giản gọi là hàm nội suy (hay còn gọi là hàm chuyển vị). Trình tự phân tích bài toán theo phương pháp phần tử hữu hạn - mô hình chuyển vị gồm các bước sau:

### Bước 1. Rời rạc hoá miền khảo sát

Miền khảo sát (đối tượng nghiên cứu) được chia thành các miền con hay còn gọi là các phần tử có hình dạng hình học thích hợp. Các phần tử này được coi là liên kết với nhau tại các nút nằm tại đỉnh hay biên của phần tử. Số nút của phần tử không lấy tùy tiện mà phụ thuộc vào hàm chuyển vị định chọn.

Các phần tử thường có dạng hình học đơn giản (hình 2.1)



Hình 2.1 Dạng hình học đơn giản của phần tử

### Bước 2. Chọn hàm xấp xỉ

Một trong những tư tưởng của phương pháp phần tử hữu hạn là xấp xỉ hoá đại lượng cần tìm trong mỗi miền con. Điều này cho phép ta khả năng thay thế việc tìm nghiệm vốn phức tạp trong toàn miền  $V$  bằng việc tìm nghiệm tại các nút của phần tử, còn nghiệm trong các phần tử được tìm bằng việc dựa vào hàm xấp xỉ đơn giản.

Giả thiết hàm xấp xỉ (hàm chuyển vị) sao cho đơn giản đối với việc tính toán nhưng phải thoả mãn điều kiện hội tụ. Thường chọn dưới dạng hàm đa thức. Biểu diễn hàm xấp xỉ theo tập hợp giá trị các thành phần chuyển vị và có thể cả đạo hàm của nó tại các nút của phần tử. Hàm xấp xỉ này thường được chọn là hàm đa thức vì các lý do sau:

- Đa thức khi được xem như một tổ hợp tuyến tính của các đơn thức thì tập hợp các đơn thức thoả mãn yêu cầu độc lập tuyến tính như yêu cầu của Ritz, Galerkin.

- Hàm xấp xỉ dạng đa thức thường dễ tính toán, dễ thiết lập công thức khi xây dựng các phương trình của phần tử hữu hạn và tính toán bằng máy tính. Đặc biệt là dễ tính đạo hàm, tích phân.

- Có khả năng tăng độ chính xác bằng cách tăng số bậc của đa thức xấp xỉ (về lý thuyết đa thức bậc vô cùng sẽ cho nghiệm chính xác). Tuy nhiên, khi thực hành tính toán ta thường lấy đa thức xấp xỉ bậc thấp mà thôi.

Tập hợp các hàm xấp xỉ sẽ xây dựng nên một trường chuyển vị xác định một trạng thái chuyển vị duy nhất bên trong phần tử theo các thành phần chuyển vị nút. Từ trường chuyển vị sẽ xác định một trạng thái biến dạng, trạng thái ứng suất duy nhất bên trong phần tử theo các giá trị của các thành phần chuyển vị nút của phần tử.

Khi chọn bậc của hàm đa thức xấp xỉ cần lưu ý các yêu cầu sau:

- Các đa thức xấp xỉ cần thoả mãn điều kiện hội tụ. Đây là yêu cầu quan trọng vì phương pháp phần tử hữu hạn là một phương pháp số, do đó phải đảm bảo khi kích thước phần tử giảm thì kết quả sẽ hội tụ đến nghiệm chính xác.

- Các đa thức xấp xỉ được chọn sao cho không mất tính đẳng hướng hình học.

- Số tham số của các đa thức xấp xỉ phải bằng số bậc tự do của phần tử, tức là bằng số thành phần chuyển vị nút của phần tử. Yêu cầu này cho khả năng nội suy đa thức của hàm xấp xỉ theo giá trị đại lượng cần tìm, tức là theo giá trị các thành phần chuyển vị tại các điểm nút của phần tử.

**Bước 3. Xây dựng phương trình cân bằng trong từng phần tử, thiết lập ma trận độ cứng  $[K]_e$  và vector tải trọng nút  $\{F\}_e$  của phần tử thứ  $e$ .**

**Thiết lập mối quan hệ giữa ứng suất và chuyển vị nút phần tử**



Cần thiết lập biểu thức tính biến dạng và ứng suất tại một điểm bất kì trong phần tử thông qua ẩn cơ bản là chuyển vị nút phần tử  $\{\delta\}_e$ . Sử dụng các công thức trong Lí thuyết đàn hồi, mối quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị :

$$\{\varepsilon\} = [\nabla]\{u\} \quad (2.1)$$

Ta có: 
$$\{u\} = [N]\{\delta\}_e \quad (2.2)$$

trong đó:  $[N]$  - gọi là ma trận hàm dạng, chứa các tọa độ của các điểm nút của phần tử và các biên của điểm bất kì đang xét.

Thay (2.2) vào (2.1), ta được:

$$\{\varepsilon\} = [\nabla][N]\{\delta\}_e = [B]\{\delta\}_e \quad (2.3)$$

trong đó :  $[B] = [\nabla][N]$  - ma trận chứa đạo hàm của hàm dạng.

Theo lý thuyết đàn hồi quan hệ giữa ứng suất và biến dạng :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (2.4)$$

Thay (2.3) vào (2.4), ta được :

$$\{\sigma\} = [D][B]\{\delta\}_e \quad (2.5)$$

### **Thế năng toàn phần $\Pi_e$ của phần tử**

Xét trường hợp phần tử chịu tải trọng tập trung tại nút  $\{P_n\}_e$  (ứng với chuyển vị nút  $\{\delta\}_e$ ) và chịu tải trọng phân bố trên bề mặt phần tử có cường độ tại điểm M bất kì là  $\{q\} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix}$ .

Thiết lập biểu thức tính thế năng toàn phần  $\Pi_e$  của phần tử theo công của ngoại lực  $W_e$  và thế năng biến dạng  $U_e$  của phần tử đó.

$$\Pi_e = U_e - W_e \quad (2.6)$$

Công ngoại lực  $W_e$  (không xét lực thể tích) được tính:

$$W_e = \{\delta\}_e^T \{P_n\}_e + \int_S \{u\}^T \{q\} dS$$

Từ (2.2), ta có:  $\{u\} = [N]\{\delta\}_e \Rightarrow \{u\}^T = ([N]\{\delta\}_e)^T = \{\delta\}_e^T [N]^T$

Thay vào biểu thức tính công ngoại lực  $W_e$  trên, thu được:

$$W_e = \{\delta\}_e^T \{P_n\}_e + \{\delta\}_e^T \int_S [N]^T \{q\} dS \quad (2.7)$$

Thế năng biến dạng  $U_e$  của PT được tính:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV$$

Thay (2.3) và (2.5) vào biểu thức tính thế năng biến dạng  $U_e$  của phần tử, ta có:

$$U_e = \frac{1}{2} \{\delta\}_e^T \left( \int_V [B]^T [D] [B] dV \right) \{\delta\}_e \quad (2.8)$$

Thay (2.7) và (2.8) vào (2.6) thu được thế năng toàn phần của phần tử :

$$\Pi_e = U_e - W_e = \frac{1}{2} \{\delta\}_e^T \left( \int_V [B]^T [D] [B] dV \right) \{\delta\}_e - \left( \{\delta\}_e^T \{P_n\}_e + \{\delta\}_e^T \int_S [N]^T \{q\} dS \right) \quad (2.9)$$

$$\text{Đặt: } [K]_e = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (2.10)$$

$[K]_e$  - gọi là ma trận độ cứng phần tử. Vì  $[D]$  là ma trận đối xứng nên tích  $([B]^T [D] [B])$  cũng đối xứng và do đó  $[K]_e$  là ma trận đối xứng.

$$\text{Đặt: } \{F\}_e = \{P_n\}_e + \int_S [N]^T \{q\} dS = \{P_n\}_e + \{P_q\}_e \quad (2.11)$$

$\{F\}_e$  - là vector tải trọng nút của phần tử; được xây dựng bởi ngoại lực đặt tại nút phần tử  $\{P_n\}_e$  và ngoại lực đặt trong phần tử quy về nút  $\{P_q\}_e$

$$\text{trong đó: } \{P_q\}_e = \int_S [N]^T \{q\} dS \quad (2.12)$$

Thay (2.11) và (2.12) vào (2.9), ta được :

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \{\delta\}_e^T [K]_e \{\delta\}_e - \{\delta\}_e^T \{F\}_e \quad (2.13)$$

**Thiết lập phương trình cân bằng**

Theo nguyên lí dừng thế năng toàn phần, điều kiện cân bằng của phần tử tại các điểm nút :

$$\partial \Pi_e = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Pi_e}{\partial \{\delta\}_e} = 0 \quad (2.14)$$

Tiến hành lấy đạo hàm riêng lần lượt với từng chuyển vị nút và cho bằng 0, thu được m phương trình (cho phần tử có m chuyển vị nút):

$$\frac{\partial \Pi_e}{\partial \{\delta\}_e} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \Pi_e}{\partial \delta_1} \\ \frac{\partial \Pi_e}{\partial \delta_2} \\ \dots \\ \frac{\partial \Pi_e}{\partial \delta_m} \end{array} \right\} = 0 \quad (2.15)$$

Thay  $\Pi_e$  theo (2.13) vào (2.15) và áp dụng phép lấy đạo hàm riêng đối

với ma trận  $\left( \frac{\partial (\{\mathbf{X}\}^T [\mathbf{A}] \{\mathbf{X}\})}{\partial \{\mathbf{X}\}} = 2[\mathbf{A}] \{\mathbf{X}\}; \frac{\partial (\{\mathbf{X}\}^T \{\mathbf{B}\})}{\partial \{\mathbf{X}\}} = \{\mathbf{B}\} \right)$ , thu được:

$$[\mathbf{K}]_e \{\delta\}_e - \{\mathbf{F}\}_e = 0 \quad (2.16)$$

$$\text{Suy ra : } [\mathbf{K}]_e \{\delta\}_e = \{\mathbf{F}\}_e \quad (2.17)$$

trong đó:

$\{\mathbf{F}\}_e$  - vectơ tải trọng nút của phần tử thứ e xét trong hệ tọa độ địa phương;

$\{\delta\}_e$  - vectơ chuyển vị nút của phần tử thứ e xét trong hệ tọa độ địa phương;

$[\mathbf{K}]_e$  - ma trận độ cứng của phần tử thứ e xét trong hệ tọa độ địa phương.

Phương trình (2.17) chính là phương trình cân bằng của phần tử thứ e.

#### **Bước 4. Ghép nối các phần tử xây dựng phương trình cân bằng của toàn hệ.**

Giả sử hệ kết cấu được rời rạc hoá thành  $m$  phần tử. Theo (2.17) ta viết được  $m$  phương trình cân bằng cho tất cả  $m$  phần tử trong hệ tọa độ riêng của từng phần tử. Sau khi chuyển về hệ tọa độ chung của toàn kết cấu, tiến tới gộp các phương trình cân bằng của từng phần tử trong cả hệ, thu được phương trình cân bằng cho toàn hệ kết cấu trong hệ tọa độ chung:

$$[K']\{\delta'\} = \{F'\} \quad (2.18)$$

Do thứ tự các thành phần trong vector chuyển vị nút  $\{\delta'\}_e$  của từng phần tử khác với thứ tự trong vector chuyển vị nút  $\{\delta'\}$  của toàn hệ kết cấu, nên cần lưu ý xếp đúng vị trí của từng thành phần trong  $[K']_e$  và  $\{F'\}_e$  vào  $[K']$  và  $\{F'\}$ . Việc sắp xếp này thường được áp dụng phương pháp số mã, hay sử dụng ma trận định vị phần tử  $[H]_e$  để thiết lập các ma trận tổng thể và vector tải trọng nút tổng thể của toàn hệ kết cấu.

#### **Áp dụng ma trận định vị phần tử $[H]_e$**

Giả sử hệ kết cấu được rời rạc hoá thành  $m$  phần tử. Số bậc tự do của toàn hệ là  $n$ . Vectơ chuyển vị nút tổng thể có dạng:

$$\{\delta'\} = \{\delta'_1 \quad \delta'_2 \quad \dots \quad \delta'_n\}^T \quad (2.19)$$

Với phần tử thứ  $e$ , số bậc tự do là  $n_e$ , có vectơ chuyển vị nút trong hệ tọa độ chung là  $\{\delta'\}_e$ . Các thành phần của  $\{\delta'\}_e$  nằm trong số các thành phần của  $\{\delta'\}$ . Do đó có sự biểu diễn quan hệ giữa 2 vectơ này như sau:

$$\{\delta'\}_e = [H]_e \{\delta'\} \quad (2.20)$$

$(n_e \times 1) \quad (n_e \times n) \quad (n \times 1)$

trong đó:  $[H]_e$  - là ma trận định vị của phần tử  $e$ , nó cho thấy hình ảnh sắp xếp các thành phần của vectơ  $\{\delta'\}_e$  trong  $\{\delta'\}$ .

Dựa vào (2.13) ta xác định được thế năng toàn phần cho từng phần tử. Thay (2.20) vào (2.13), sau đó cộng gộp của m phần tử, xác định được thế năng toàn phần của hệ:

$$\Pi = \sum_{e=1}^m \left[ \frac{1}{2} \{\delta'\}^T [H]_e^T [K']_e [H]_e \{\delta'\} - \{\delta'\}^T [H]_e^T \{F'\}_e \right] \quad (2.21)$$

Biểu thức (2.21) biểu diễn thế năng toàn phần của hệ theo vector chuyển vị nút tổng thể  $\{\delta'\}$ . áp dụng nguyên lí thế năng dừng toàn phần sẽ có điều kiện cân bằng của toàn hệ tại điểm nút:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{\delta'\}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial \delta'_1} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \delta'_2} \\ \dots \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \delta'_n} \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.22)$$

Áp dụng phép lấy đạo hàm riêng đối với ma trận thu được:

$$\left( \sum_{e=1}^m [H]_e^T [K']_e [H]_e \right) \{\delta'\} - \sum_{e=1}^m [H]_e^T \{F'\}_e = \{0\} \quad (2.23)$$

Nhận thấy đây chính là phương trình cân bằng cho toàn hệ. So sánh với (2.18), thu được:

$$\text{Ma trận độ cứng tổng thể: } [K'] = \sum_{e=1}^m [H]_e^T [K']_e [H]_e \quad (2.24)$$

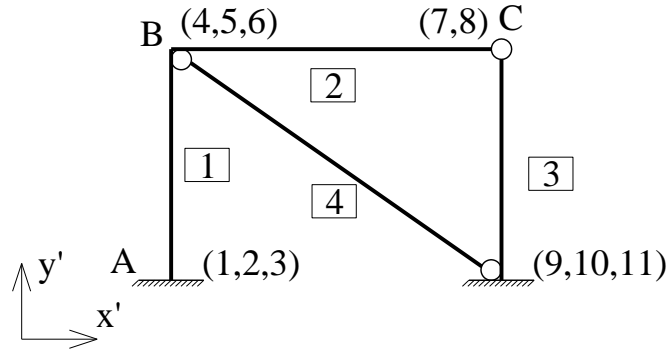
$$\text{Vector tải trọng nút tổng thể: } \{F'\} = \sum_{e=1}^m [H]_e^T \{F'\}_e \quad (2.25)$$

**Ví dụ 2.1:** Xác định các ma trận định vị  $[H]_e$  của dầm với 4 điểm nút, có các thành phần chuyển vị nút như trên hình 2.2.

### Lời giải

Vecto chuyển vị nút tổng thể của kết cấu trong hệ tọa độ chung:

$$\{\delta'\} = \{\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3 \quad \delta_4 \quad \delta_5 \quad \delta_6 \quad \delta_7 \quad \delta_8 \quad \delta_9 \quad \delta_{10} \quad \delta_{11}\}^T$$



Hình 2.2 Hình ví dụ 2.1

Vecto chuyển vị nút của từng phần tử biểu diễn theo vectơ chuyển vị nút tổng thể:

$$\{\delta'\}_1 = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} = [H]_1 \{\delta'\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_9 \\ \delta_{10} \\ \delta_{11} \end{Bmatrix}$$

$$\{\delta'\}_2 = \begin{Bmatrix} \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \end{Bmatrix} = [H]_2 \{\delta'\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{10} \\ \delta_{11} \end{Bmatrix}$$

$$\{\delta'\}_3 = \begin{Bmatrix} \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \\ \delta_{10} \\ \delta_{11} \end{Bmatrix} = [\mathbf{H}]_3 \{\delta'\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{10} \\ \delta_{11} \end{Bmatrix}$$

$$\{\delta'\}_4 = \begin{Bmatrix} \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_9 \\ \delta_{10} \end{Bmatrix} = [\mathbf{H}]_4 \{\delta'\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{11} \end{Bmatrix}$$

Ma trận độ cứng, véc tơ tải tác dụng tại nút của từng phần tử:

$$[\mathbf{K}' ]_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} & \mathbf{a}_{14} & \mathbf{a}_{15} & \mathbf{a}_{16} \\ & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} & \mathbf{a}_{24} & \mathbf{a}_{25} & \mathbf{a}_{26} \\ & & \mathbf{a}_{33} & \mathbf{a}_{34} & \mathbf{a}_{35} & \mathbf{a}_{36} \\ & & & \mathbf{a}_{44} & \mathbf{a}_{45} & \mathbf{a}_{46} \\ & & & & \mathbf{a}_{55} & \mathbf{a}_{56} \\ & & & & & \mathbf{a}_{66} \end{bmatrix} ; \{\mathbf{F}'\}_1 = \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{e}_5 \\ \mathbf{e}_6 \end{Bmatrix}$$

(đx)

$$[\mathbf{K}' ]_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{11} & \mathbf{b}_{12} & \mathbf{b}_{13} & \mathbf{b}_{14} & \mathbf{b}_{15} \\ & \mathbf{b}_{22} & \mathbf{b}_{23} & \mathbf{b}_{24} & \mathbf{b}_{25} \\ & & \mathbf{b}_{33} & \mathbf{b}_{34} & \mathbf{b}_{35} \\ & & & \mathbf{b}_{44} & \mathbf{b}_{45} \\ & & & & \mathbf{b}_{55} \end{bmatrix} ; \{\mathbf{F}'\}_2 = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_4 \\ \mathbf{f}_5 \end{Bmatrix}$$

(đx)

$$[\mathbf{K}' ]_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{11} & \mathbf{c}_{12} & \mathbf{c}_{13} & \mathbf{c}_{14} & \mathbf{c}_{15} \\ & \mathbf{c}_{22} & \mathbf{c}_{23} & \mathbf{c}_{24} & \mathbf{c}_{25} \\ & & \mathbf{c}_{33} & \mathbf{c}_{34} & \mathbf{c}_{35} \\ & & & \mathbf{c}_{44} & \mathbf{c}_{45} \\ & & & & \mathbf{c}_{55} \end{bmatrix} ; \{\mathbf{F}'\}_3 = \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 \end{Bmatrix}$$

(đx)

$$[\mathbf{K}' ]_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{11} & \mathbf{d}_{12} & \mathbf{d}_{13} & \mathbf{d}_{14} \\ & \mathbf{d}_{22} & \mathbf{d}_{23} & \mathbf{d}_{24} \\ & & \mathbf{d}_{33} & \mathbf{d}_{34} \\ & & & \mathbf{d}_{44} \end{bmatrix} ; \{\mathbf{F}'\}_4 = \begin{Bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 \\ \mathbf{h}_3 \\ \mathbf{h}_4 \end{Bmatrix}$$

(đx)

Ma trận độ cứng tổng thể:  $[K'] = \sum_{e=1}^4 [H]_e^T [K']_e [H]_e$

$$[K'] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & a_{44} + b_{11} + d_{11} & a_{45} + b_{12} + d_{12} & a_{46} + b_{13} & b_{14} & b_{15} & d_{13} & d_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & a_{55} + b_{22} + d_{22} & a_{56} + b_{23} & b_{24} & b_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & a_{66} + b_{33} & b_{34} & b_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & b_{44} + c_{11} & b_{45} + c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & b_{55} + c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & c_{33} + e_{33} & c_{34} + e_{34} & c_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & c_{44} + e_{44} & c_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & c_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{matrix}$$

(đx)

Vector tải trọng nút tổng thể:  $[F'] = \sum_{e=1}^4 [H]_e^T \{F'\}_e$

$$[F'] = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 + f_1 + h_1 \\ e_5 + f_2 + h_2 \\ e_6 + f_3 \\ f_4 + g_1 \\ f_5 + g_2 \\ g_3 + h_3 \\ g_4 + h_4 \\ g_5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{matrix}$$

Việc sử dụng ma trận định vị  $[H]_e$  trong (2.24) và (2.25) để tính ma trận độ cứng  $[K']$  và vector tải trọng nút  $\{F'\}$  thực chất là sắp xếp các thành phần của ma trận độ cứng phần tử  $[K']_e$  và vector tải trọng nút phần tử  $\{F'\}_e$  vào vị trí của nó trong ma trận độ cứng tổng thể  $[K']$  và vector tải trọng nút tổng thể  $\{F'\}$ . Tuy nhiên trong thực tế người ta hay sử dụng phương pháp số mã.

### Phương pháp đánh số mã

Khi tiến hành ghép nối ma trận độ cứng của kết cấu và véc tơ tải trọng tác dụng tại nút, ta làm theo các bước sau:



- Tiến hành đánh số mã của các thành phần véc tơ chuyển vị nút tại các nút của kết cấu và đánh số mã cho phần tử.

- Lập bảng xác định mã cục bộ của các phần tử theo mã tổng thể của kết cấu.

- Tính toán xác định các ma trận độ cứng, véc tơ tải trọng tác dụng tại các nút của phần tử theo mã cục bộ và tương ứng với mã tổng thể trong hệ tọa độ chung.

- Tiến hành ghép nối ma trận độ cứng và véc tơ tải trọng tác dụng nút của các phần tử thành ma trận độ cứng và véc tơ tải trọng tác dụng nút của toàn bộ hệ kết cấu trong hệ tọa độ chung theo công thức.

$$k'_{ij} = \sum (k'_{ij})_e \quad (2.26)$$

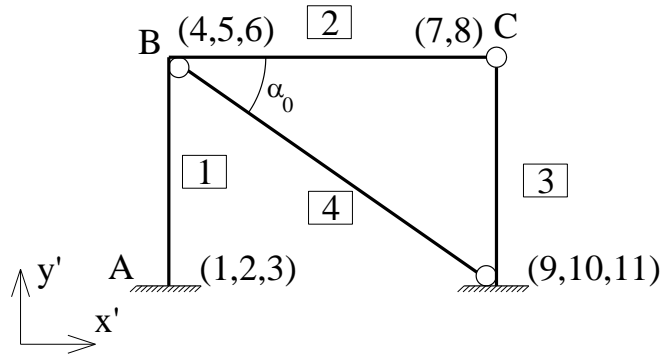
trong đó:

+  $i, j$ : là số hiệu mã tổng thể của toàn bộ kết cấu trong hệ tọa độ chung;

+  $k'_{ij}$ : là hệ số của trong ma trận độ cứng của toàn bộ kết cấu tương ứng với hàng có số hiệu mã tổng thể  $i$  và cột có số hiệu mã tổng thể  $j$  trong hệ tọa độ chung;

+  $(k'_{ij})_e$ : là hệ số của ma ma trận độ cứng của phần tử tương ứng với hàng có số hiệu mã tổng thể  $i$  và cột có số hiệu mã tổng thể  $j$  trong hệ tọa độ chung

**Ví dụ 2.2:** Thiết lập ma trận độ cứng tổng thể  $[K']$  và véc tơ tải trọng nút  $\{F'\}$  của toàn hệ kết cấu của hệ trên hình 2.3.



Hình 2.3 Hình ví dụ 2.2

### Lời giải

- Đánh số mã của các thành phần véc tơ chuyển vị nút tại các nút của kết cấu và đánh số mã cho các phần tử như hình.
- Lập bảng xác định mã cục bộ của các phần tử theo mã tổng thể của kết cấu.

Phần tử			Mã cục bộ					
TT	Loại	$\alpha$	1	2	3	4	5	6
			Số mã toàn thể					
1		90	1	2	3	4	5	6
2		0	4	5	6	7	8	
3		-90	7	8	9	10	11	
4		$\alpha_0$	4	5	9	10		

- Tính toán xác định các ma trận độ cứng  $[K]_e$ , véc tơ tải trọng tác dụng tại các nút  $\{F\}_e$  của phần tử theo mã cục bộ và tương ứng với mã tổng thể trong hệ tọa độ chung.

CB 1 2 3 4 5 6

$$\begin{array}{c}
1 \\
2 \\
3 \\
4 \\
5 \\
6
\end{array}
\begin{array}{c}
\left[ \begin{array}{cccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\
& a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\
& & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\
& & & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\
(dx) & & & & a_{55} & a_{56} \\
& & & & & a_{66}
\end{array} \right]
\end{array}
\begin{array}{c}
1 \\
2 \\
3 \\
4 \\
5 \\
6
\end{array}
\begin{array}{c}
\left. \begin{array}{l}
\{F'\}_1 = \begin{cases} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{cases} \\
\end{array} \right\}
\begin{array}{c}
1 \\
2 \\
3 \\
4 \\
5 \\
6
\end{array}
\end{array}$$

1    2    3    4    5    6    TT

$$\begin{array}{c}
1 \\
2 \\
3 \\
4 \\
5
\end{array}
\begin{array}{c}
\left[ \begin{array}{ccccc}
b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\
& b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\
& & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\
(dx) & & & b_{44} & b_{45} \\
& & & & b_{55}
\end{array} \right]
\end{array}
\begin{array}{c}
4 \\
5 \\
6 \\
7 \\
8
\end{array}
\begin{array}{c}
\left. \begin{array}{l}
\{F'\}_2 = \begin{cases} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{cases} \\
\end{array} \right\}
\begin{array}{c}
4 \\
5 \\
6 \\
7 \\
8
\end{array}
\end{array}$$

CB 1    2    3    4    5  
4    5    6    7    8    TT

$$\begin{array}{c}
1 \\
2 \\
3 \\
4 \\
5
\end{array}
\begin{array}{c}
\left[ \begin{array}{ccccc}
c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\
& c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\
& & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\
(dx) & & & c_{44} & c_{45} \\
& & & & c_{55}
\end{array} \right]
\end{array}
\begin{array}{c}
7 \\
8 \\
9 \\
10 \\
11
\end{array}
\begin{array}{c}
\left. \begin{array}{l}
\{F'\}_3 = \begin{cases} g_1 \\ g_2 \\ g_2 \\ g_2 \\ g_2 \end{cases} \\
\end{array} \right\}
\begin{array}{c}
7 \\
8 \\
9 \\
10 \\
11
\end{array}
\end{array}$$

CB 1    2    3    4    5  
7    8    9    10    11    TT

$$\begin{array}{c}
1 \\
2 \\
3 \\
4
\end{array}
\begin{array}{c}
\left[ \begin{array}{cccc}
d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\
& d_{22} & d_{23} & d_{24} \\
(dx) & & d_{33} & d_{34} \\
& & & d_{44}
\end{array} \right]
\end{array}
\begin{array}{c}
4 \\
5 \\
9 \\
10
\end{array}
\begin{array}{c}
\left. \begin{array}{l}
\{F'\}_4 = \begin{cases} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{cases} \\
\end{array} \right\}
\begin{array}{c}
4 \\
5 \\
9 \\
10
\end{array}
\end{array}$$

CB 1    2    3    4  
4    5    9    10    TT

- Tiến hành ghép nối ma trận độ cứng và véctơ tải trọng tác dụng nút của các phần tử thành ma trận độ cứng  $[K']$  và véctơ tải trọng tác dụng nút  $\{F'\}$  của toàn bộ hệ kết cấu trong hệ tọa độ chung theo công thức.

$$[K'] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & a_{44} + b_{11} + d_{11} & a_{45} + b_{12} + d_{12} & a_{46} + b_{13} & b_{14} & b_{15} & d_{13} & d_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & a_{55} + b_{22} + d_{22} & a_{56} + b_{23} & b_{24} & b_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & a_{66} + b_{33} & b_{34} & b_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & b_{44} + c_{11} & b_{45} + c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & b_{55} + c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & c_{33} + e_{33} & c_{34} + e_{34} & c_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & b_{55} + c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & c_{33} + e_{33} & c_{34} + e_{34} & c_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & c_{44} + e_{44} & c_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & c_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (dx)$$

$$[F'] = \begin{bmatrix} e_1 & 1 \\ e_2 & 2 \\ e_3 & 3 \\ e_4 + f_1 + h_1 & 4 \\ e_5 + f_2 + h_2 & 5 \\ e_6 + f_3 & 6 \\ f_4 + g_1 & 7 \\ f_5 + g_2 & 8 \\ g_3 + h_3 & 9 \\ g_4 + h_4 & 10 \\ g_5 & 11 \end{bmatrix}$$

### Bước 5: Sử lý điều kiện biên của bài toán

Phương pháp phần tử hữu hạn là cuối cùng đưa về giải phương trình toán học:

$$[K']\{\delta'\} = \{F'\} \quad (2.27)$$

Để phương trình này không có nghiệm tầm thường thì điều kiện định thức của ma trận  $[K']$  khác 0 (  $\det [K'] \neq 0$  ), khi đó phương trình không suy biến. Với bài toán kết cấu, điều này chỉ đạt được khi điều kiện biên được thoả mãn (kết cấu phải bất biến hình). Đó là điều kiện cho trước một số chuyển vị nút nào đó bằng 0 hay bằng một giá trị xác định hoặc một số chuyển vị nút phải liên hệ với nhau. Sau khi áp đặt điều kiện biên vào, phương trình cân bằng của toàn hệ kết cấu trong hệ tọa độ chung có dạng:

$$[K^*]\{\delta^*\} = \{F^*\} \quad (2.28)$$

Trong thực tế khi phân tích kết cấu thường gặp 2 điều kiện biên sau:

- Biên làm một hoặc nhiều thành phần chuyển vị bằng 0.
- Biên làm một hoặc nhiều thành phần chuyển vị có một giá trị xác định

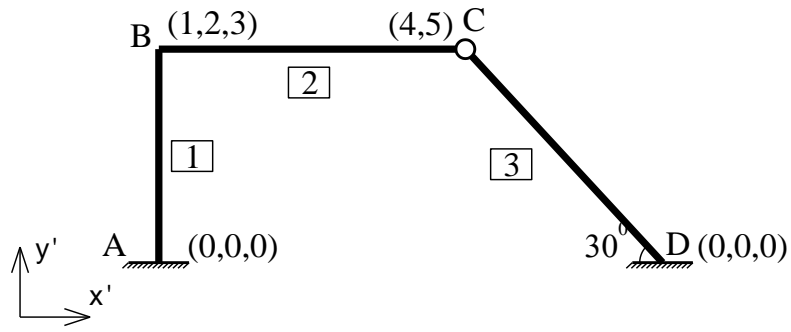
### **Khi biên có thành phần chuyển vị nào đó bằng 0**

Thành phần chuyển vị tại một nút của phần tử bằng 0 do tương ứng với các thành phần chuyển vị này là các liên kết với đất, ta xử lý bằng cách:

- Khi đánh mã chuyển vị cho toàn bộ hệ, những thành phần chuyển vị tại nút nào đó bằng 0 thì ghi mã của chuyển vị đó là 0. Việc đánh số mã toàn thể của chuyển vị nút theo thứ tự và vector chuyển vị nút của toàn hệ chỉ bao gồm các chuyển vị nút còn lại.

- Khi lập ma trận  $[K']_e$  và vector  $\{F'\}_e$  của từng PT, các hàng và cột tương ứng với số mã chuyển vị nút bằng không thì không cần tính. Và khi thiết lập ma trận độ cứng tổng thể  $[K']$  và vector tải trọng nút tổng thể  $\{F'\}$  thì những hàng và cột nào có mã bằng 0 thì ta loại bỏ hàng, cột.

**Ví dụ 2.3:** Thiết lập ma trận độ cứng tổng thể  $[K']$  và vector tải trọng nút  $\{F'\}$  của toàn hệ kết cấu như hình 2.4 (có xét tới điều kiện biên).



Hình 2.4 Hình ví dụ 2.3

**Lời giải:**

Lập bảng số mã khi xét tới điều kiện biên:

Phần tử			Mã cục bộ					
TT	Loại	$\alpha$	1	2	3	4	5	6
			Số mã toàn thể					
1		90	0	0	0	1	2	3
2		0	1	2	3	4	5	
3		-30	4	5	0	0	0	

Ma trận độ cứng  $[K']_e$  và vector tải trọng nút  $\{F'\}_e$  của từng phần tử trong hệ trục tọa độ chung:

$$[K']_1 = \begin{matrix} \text{CB} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} x & x & x & x & x & x \\ & x & x & x & x & x \\ & & x & x & x & x \\ & & & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ & & & & a_{55} & a_{56} \\ & & & & & a_{66} \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

0    0    0    1    2    3    TT

$$\{F'\}_1 = \begin{matrix} \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$\text{CB } \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix}$$

$$[K']_2 = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ & & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ & (\text{đx}) & & b_{44} & b_{45} \\ & & & & b_{55} \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \quad ; \{F'\}_2 = \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}$$

1      2      3      0      0      TT

$$[K']_3 = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & x & x & x \\ & c_{22} & x & x & x \\ & & x & x & x \\ & (\text{đx}) & & x & x \\ & & & & x \end{bmatrix} \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \quad ; \{F'\}_3 = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ x \\ x \\ x \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

4      5      0      0      0      TT

Căn cứ vào bảng số mã, thu được ma trận độ cứng và vectơ tải trọng nút tổng thể (có xét tới điều kiện biên) như sau:

$$[K^*] = \begin{bmatrix} (a_{44} + b_{11}) & (a_{45} + b_{12}) & (a_{46} + b_{13}) & b_{14} & b_{15} \\ & (a_{55} + b_{22}) & (a_{56} + b_{23}) & b_{24} & b_{25} \\ & & (a_{66} + b_{33}) & b_{34} & b_{35} \\ & & (\text{đx}) & (b_{44} + c_{11}) & (b_{45} + c_{12}) \\ & & & & (b_{55} + c_{22}) \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}$$

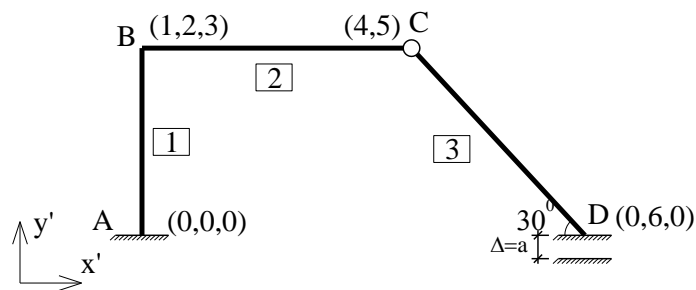
$$\{F^*\} = \{(d_4 + e_1) \quad (d_5 + e_2) \quad (d_6 + e_3) \quad (e_4 + f_1) \quad (e_5 + f_2)\}^T$$

### Khi biên có thành phần chuyển vị cho trước một giá trị

Khi thành phần chuyển vị tại một nút nào đó cho trước một giá trị xác định, thí dụ  $\Delta m = a$  (hay liên kết tương ứng với các thành phần chuyển vị nút  $\delta m$  chịu chuyển vị cưỡng bức có giá trị bằng  $a$ ). Lúc này ta có thể giải quyết bài toán này theo 2 cách:

**Cách 1:** Khi đánh số mã của bậc tự do (các thành phần chuyển vị) tổng thể kết cấu thì thành phần chuyển vị tại nút có chuyển vị bằng  $a$  ta vẫn đánh mã bình thường chẳng hạn mã là  $m$ . Sau khi lập được ma trận độ cứng tổng thể  $[K']$  và vector tải trọng nút tổng thể  $\{F'\}$  thay thế số hạng  $k_{mm}$  trong ma trận thể  $[K']$  bằng  $(k_{mm} + A)$  và thay số hạng tại hàng  $m$  trong ma trận  $\{F'\}$  là  $f_m$  bằng  $(k_{mm} + A)a$ .

**Ví dụ 2.4:** Thiết lập ma trận độ cứng tổng thể  $[K']$  và vector tải trọng nút  $\{F'\}$  của toàn hệ kết cấu như hình 2.5 (có xét tới điều kiện biên).



Hình 2.5 Hình ví dụ 2.4

### Lời giải

Hệ được đánh số phân tử và số mã chuyển vị tổng thể của kết cấu như hình 2.5.

Bảng số mã khi xét tới điều kiện biên:

Phần tử			Mã cục bộ					
TT	Loại	$\alpha$	1	2	3	4	5	6
			Số mã toàn thể					
1		90	0	0	0	1	2	3
2		0	1	2	3	4	5	
3		-30	4	5	0	6	0	



Ma trận độ cứng  $[K']_e$  và vector tải trọng nút  $\{F'\}_e$  của từng phần tử trong hệ trục tọa độ chung:

$$\begin{array}{c}
 \text{CB } 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \\
 [K']_1 = \begin{array}{l} 1 \left[ \begin{array}{cccccc} x & x & x & x & x & x \end{array} \right] 0 \\ 2 \quad \left[ \begin{array}{cccccc} & x & x & x & x & x \end{array} \right] 0 \\ 3 \quad \left[ \begin{array}{cccccc} & & x & x & x & x \end{array} \right] 0 \\ 4 \quad \left[ \begin{array}{cccccc} & & & a_{44} & a_{45} & a_{46} \end{array} \right] 1 \\ 5 \quad \left( \begin{array}{cccccc} & & & & a_{55} & a_{56} \end{array} \right) 2 \\ 6 \quad \left[ \begin{array}{cccccc} & & & & & a_{66} \end{array} \right] 3 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \text{TT} \end{array}
 \end{array}
 \quad ; \{F'\}_1 = \begin{array}{l} \left( \begin{array}{c} x \\ x \\ x \end{array} \right) \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \\ \left( \begin{array}{c} d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{array} \right) \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{CB } 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \\
 [K']_2 = \begin{array}{l} 1 \left[ \begin{array}{ccccc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \end{array} \right] 1 \\ 2 \quad \left[ \begin{array}{ccccc} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \end{array} \right] 2 \\ 3 \quad \left[ \begin{array}{ccccc} & & b_{33} & b_{34} & b_{35} \end{array} \right] 3 \\ 4 \quad \left( \begin{array}{ccccc} & & & b_{44} & b_{45} \end{array} \right) 4 \\ 5 \quad \left[ \begin{array}{ccccc} & & & & b_{55} \end{array} \right] 5 \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad \text{TT} \end{array}
 \end{array}
 \quad ; \{F'\}_2 = \begin{array}{l} \left( \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \right) \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \\ \left( \begin{array}{c} e_4 \\ e_5 \end{array} \right) \begin{array}{l} 4 \\ 5 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{CB } 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \\
 [K']_3 = \begin{array}{l} 1 \left[ \begin{array}{ccccc} c_{11} & c_{12} & x & c_{14} & x \end{array} \right] 4 \\ 2 \quad \left[ \begin{array}{ccccc} & c_{22} & x & c_{25} & x \end{array} \right] 5 \\ 3 \quad \left[ \begin{array}{ccccc} & & x & x & x \end{array} \right] 0 \\ 4 \quad \left( \begin{array}{ccccc} & & & c_{44} & x \end{array} \right) 6 \\ 5 \quad \left[ \begin{array}{ccccc} & & & & x \end{array} \right] 0 \\ 4 \quad 5 \quad 0 \quad 6 \quad 0 \quad \text{TT} \end{array}
 \end{array}
 \quad ; \{F'\}_3 = \begin{array}{l} \left( \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ x \end{array} \right) \begin{array}{l} 4 \\ 5 \\ 0 \end{array} \\ \left( \begin{array}{c} f_4 \\ x \end{array} \right) \begin{array}{l} 6 \\ 0 \end{array} \end{array}$$

Căn cứ vào bảng số mã, thu được ma trận độ cứng và vector tải trọng nút tổng thể (có xét tới điều kiện biên) như sau:

$$[K^*] = \begin{bmatrix} (a_{44} + b_{11}) & (a_{45} + b_{12}) & (a_{46} + b_{13}) & b_{14} & b_{15} & 0 & 1 \\ & (a_{55} + b_{22}) & (a_{56} + b_{23}) & b_{24} & b_{25} & 0 & 2 \\ & & (a_{66} + b_{33}) & b_{34} & b_{35} & 0 & 3 \\ & & & (b_{44} + c_{11}) & (b_{45} + c_{12}) & c_{14} & 4 \\ & (\delta x) & & & (b_{55} + c_{22}) & c_{25} & 5 \\ & & & & & (c_{44} + A) & 6 \end{bmatrix}$$

$$\{F^*\} = \{(d_4 + e_1) \quad (d_5 + e_2) \quad (d_6 + e_3) \quad (e_4 + f_1) \quad (e_5 + f_2) \quad (c_{44} + A)a\}^T$$

Giải hệ phương trình  $[K^*]\{\delta^*\} = \{F^*\}$  thỏa mãn điều kiện biên vì phương trình thứ 6 thu được:

$$K_{61}\delta_1 + K_{62}\delta_2 + K_{63}\delta_3 + K_{64}\delta_4 + K_{65}\delta_5 + (c_{44} + A)\delta_6 = (c_{44} + A)a$$

$$\text{Chia cả 2 vế cho } (c_{44} + A), \text{ thu được: } \delta_6 = a$$

**Cách 2:** Theo cách thứ 2 này thì khi đánh mã chuyển vị tổng thể cho kết cấu thì những thành phần nào chuyển vị bằng không hoặc có chuyển vị cưỡng bức ta đánh mã 0, còn các thành phần chuyển vị còn lại ta đánh mã theo thứ tự từ 1 đến hết. Sau đó ta lập ma trận độ cứng và vectơ tải trọng tác dụng nút cho toàn bộ hệ như bài toán không có chuyển vị cưỡng bức. Lúc này ta coi chuyển vị cưỡng bức như là một dạng tải tải trọng tác dụng lên kết cấu, vì vậy khi tính vectơ tải trọng tác dụng nút lên toàn bộ hệ phải kể thêm phần tải trọng tác dụng nút do chuyển vị cưỡng bức gây ra. Vectơ tải trọng nút lúc này là do chuyển vị cưỡng bức các liên kết tựa, được tổng hợp từ các vectơ tải trọng nút  $\{P'_\Delta\}_e$  của mỗi phần tử có liên kết tựa chuyển vị cưỡng bức:  $\{P'_\Delta\}_e = [T]_e^T \{P_\Delta\}_e$ ; trong đó:  $\{P_\Delta\}_e$  nhận được bằng phản lực liên kết nút do chuyển vị cưỡng bức gối tựa với dấu ngược lại.

## Bước 6. Giải hệ phương trình cân bằng

Với bài toán tuyến tính, việc giải hệ phương trình đại số là không khó. Kết quả tìm được là chuyển vị của các nút:

$$\{\delta^*\} = [K^*]^{-1} \{F^*\} \quad (2.29)$$

## Bước 7. Xác định nội lực

Từ kết quả thu được, kết hợp với các điều kiện biên xác định được vector chuyển vị nút của từng phần tử trong hệ tọa độ địa phương. Từ đó xác định được nội lực trong phần tử.

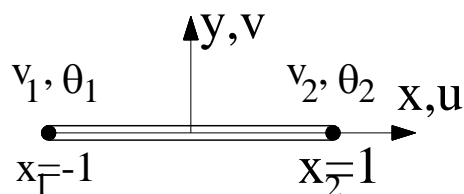
Phương pháp phần tử có ưu điểm là việc chia kết cấu ra thành các phần tử nhỏ thì dễ dàng mô tả được hình dạng phức tạp của công trình, đặc biệt vì các phần tử nhỏ nên mô tả trạng thái chuyển vị của phần tử chỉ cần các đa thức bậc thấp. Thông thường đối với phần tử dầm chịu uốn thì ta thường dùng đa thức bậc 3 để mô tả chuyển vị của phần tử:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (2.30)$$

Trong phương trình mô tả chuyển vị ta thấy có bốn thông số cần xác định. Để thuận tiện ta thay bốn thông số  $a_0, a_1, a_2, a_3$  bằng các chuyển vị và góc xoay tại các nút của phần tử  $v_1, \theta_1, v_2, \theta_2$ . Vì hàm chuyển vị bậc 3 nên ta các lực tác dụng trên phần tử ta phải quy về nút của phần tử.

### 2.1.2. Cách xây dựng ma trận độ cứng của phần tử chịu uốn

Xét phần tử dầm có hai nút, mỗi nút có hai bậc tự do là chuyển vị và góc xoay và dầm có diện tích mặt cắt ngang là  $A$ ; mô men quán tính của mặt cắt ngang là  $I$ ; mô đun đàn hồi của vật liệu  $E$  (hình 2.6)



### Hình 2.6 Phần tử đẳng hình học

Để tính toán được tổng quát, chiều dài phần tử lấy bằng hai đơn vị, gốc tọa độ nằm ở giữa phần tử. Như vậy, nếu biết được các bậc tự do tại các nút phần tử là  $v_1, \theta_1, v_2, \theta_2$  thì chuyển vị tại điểm bất kỳ trong phần tử tại tọa độ  $x$  được xác định như sau:

$$v = N_1 \cdot v_1 + N_2 \cdot \theta_1 + N_3 \cdot v_2 + N_4 \cdot \theta_2 \quad (2.31)$$

Trong đó :  $N_1, N_2, N_3, N_4$  : là các hàm dạng và được xác định như sau:

$$N_1 = \frac{1}{4}(2 - 3x + x^3); \quad N_2 = \frac{1}{4}(1 - x - x^2 + x^3);$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(2 + 3x - x^3); \quad N_4 = \frac{1}{4}(-1 - x + x^2 + x^3).$$

Theo công thức trên ta thấy:

$$v|_{x=-1} = v_1; \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=-1} = \theta_1; \quad v|_{x=1} = v_2; \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=1} = \theta_2. \quad (2.32)$$

Như vậy, mỗi phần tử có 4 bậc tự do  $X = \{v_1, \theta_1, v_2, \theta_2\}$  cần xác định. Nếu biết được  $X$  thì ta có biết được chuyển vị trong phần tử cũng như biến dạng uốn và mô men theo công thức sau:

$$\chi = -\frac{d^2v}{dx^2} = -\left[ \frac{d^2N_1}{dx^2} \quad \frac{d^2N_2}{dx^2} \quad \frac{d^2N_3}{dx^2} \quad \frac{d^2N_4}{dx^2} \right] \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\}^T; \quad (2.33a)$$

$$M = EI \cdot \chi = -EI \left[ \frac{d^2N_1}{dx^2} \quad \frac{d^2N_2}{dx^2} \quad \frac{d^2N_3}{dx^2} \quad \frac{d^2N_4}{dx^2} \right] \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\}^T \quad (2.34a)$$

Công thức trên là tính toán cho phần tử có chiều dài bằng 2, nếu phần tử có chiều dài là  $\Delta x$  thì biến dạng uốn và mô men được tính như sau:

$$\chi = -\frac{d^2v}{dx^2} \left( \frac{2}{\Delta x} \right)^2 = -\left( \frac{2}{\Delta x} \right)^2 \left[ \frac{d^2N_1}{dx^2} \quad \frac{d^2N_2}{dx^2} \quad \frac{d^2N_3}{dx^2} \quad \frac{d^2N_4}{dx^2} \right] \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\}^T \quad (2.33b)$$

$$M = EI.\chi = -EI.\left(\frac{2}{\Delta x}\right)^2 \left[ \frac{d^2 N_1}{dx^2} \quad \frac{d^2 N_2}{dx^2} \quad \frac{d^2 N_3}{dx^2} \quad \frac{d^2 N_4}{dx^2} \right] \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\}^T \quad (2.34b)$$

Xét phần tử có các tải trọng tập trung  $F = \{P_1, P_2, M_1, M_2\}^T$  tác dụng tại các nút của phần tử. Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, lượng ràng buộc đối với bài toán tĩnh viết cho phần tử như sau:

$$Z = \frac{\Delta x}{2} \int_{-1}^1 M[\chi] dx - \sum_{i=1}^4 F_i X_i \rightarrow \min \quad (2.35)$$

Điều kiện dừng của (3.25) được viết lại như sau:

$$\delta Z = \frac{\Delta x}{2} \int_{-1}^1 M\delta[\chi] dx - \sum_{i=1}^4 F_i \delta X_i = 0 \quad (2.36)$$

hay:

$$\left(\frac{2}{\Delta x}\right)^3 .EJ. \begin{bmatrix} \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_4}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} dx \\ \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_4}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} dx \\ \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_4}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} dx \\ \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_4}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_4}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_4}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_4}{dx^2} \frac{d^2 N_4}{dx^2} dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$[K]\{X\} = \{F\} \quad (2.38)$$

trong đó:  $[K]$ : ma trận độ cứng của phần tử;  $\{F\}$ : véc tơ tải trọng tác dụng nút;  $\{X\}$ : véc tơ chuyển vị nút của phần tử.

Tính tích phân các hệ số trong  $[K]$  ta có thể tính bằng phương pháp chính xác (bằng hàm  $\text{int}(fx,a,b)$  có sẵn trong matlab) hoặc tính bằng phương pháp tích phân số của Gauss và kết quả độ cứng của phần tử chịu uốn ngang phẳng như sau:

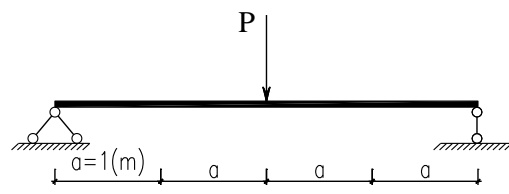
$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{\Delta x^3} & \frac{6EI}{\Delta x^2} & -\frac{12EI}{\Delta x^3} & \frac{6EI}{\Delta x^2} \\ \frac{6EI}{\Delta x^2} & \frac{4EI}{\Delta x} & -\frac{6EI}{\Delta x^2} & \frac{2EI}{\Delta x} \\ -\frac{12EI}{\Delta x^3} & -\frac{6EI}{\Delta x^2} & \frac{12EI}{\Delta x^3} & -\frac{6EI}{\Delta x^2} \\ \frac{6EI}{\Delta x^2} & \frac{2EI}{\Delta x} & -\frac{6EI}{\Delta x^2} & \frac{4EI}{\Delta x} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Biết được ma trận độ cứng phần tử thì ta dễ dàng xây dựng được ma trận độ cứng của toàn thanh. Nếu thanh chỉ có một phần tử thì ma trận của phần tử cũng chính là ma trận độ cứng của thanh. Trong phần tử nếu bậc tự do nào không có thì trong ma trận độ cứng của phần tử đó ta bỏ đi hàng và cột tương ứng với bậc tự do đó.

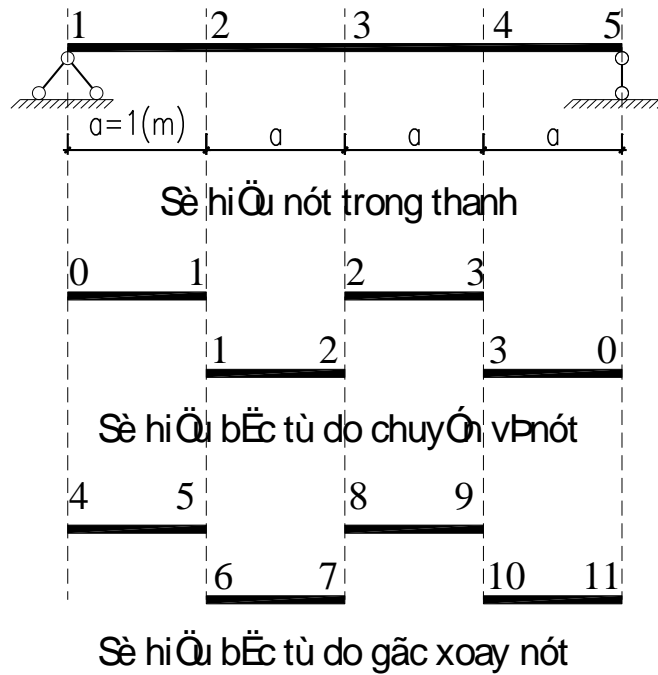
### 2.1.3 Cách xây dựng ma trận độ cứng tổng thể của kết cấu

Để trình bày cách xây dựng ma trận độ cứng tổng thể của kết cấu trong phương pháp phần tử hữu hạn, luận văn xin được trình bày thông qua ví dụ giải bài toán dầm chịu uốn dưới tác dụng của tải trọng tĩnh cụ thể sau (còn các bài toán khác thì cách xây dựng ma trận độ cứng tổng thể cũng làm tương tự):

**Ví dụ 2.5:** Tính toán kết cấu dầm chịu lực như (hình 2.7). Biết dầm có độ cứng  $EI = 10^8 \text{ (kN.cm}^2\text{)}$  không đổi và  $P = 10 \text{ (kN)}$ . Xác định chuyển vị tại giữa dầm.



Hình 2.7 Hình ví dụ 2.5



Hình 2.8 Rời rạc hóa thanh thành các phần tử

Chia thanh ra thành  $n_{pt}$  phần tử. Các nút của phần tử phải trùng với vị trí đặt lực tập trung, chiều dài các phần tử có thể khác nhau. Mỗi phần tử có 4 bậc tự do, như vậy nếu  $n_{pt}$  phần tử rời rạc thì tổng cộng có  $4n_{pt}$  bậc tự do. Nhưng vì cần đảm bảo liên tục giữa các chuyển vị là chuyển vị của nút cuối phần tử thứ  $e$  bằng chuyển vị của nút đầu phần tử thứ  $(e+1)$  nên số bậc tự do của thanh sẽ nhỏ hơn  $4n_{pt}$ . Khi giải ta chỉ cần đảm bảo điều kiện liên tục của chuyển vị còn điều kiện liên tục về góc xoay được xét bằng cách đưa vào các điều kiện ràng buộc. Ví dụ dầm trong (ví dụ 2.5) ta chia thành 4 phần tử (hình 2.8)

Như vậy, tổng cộng số ẩn là  $11$  ẩn  $< 4 \times 4 = 16$  ẩn. Gọi ma trận  $n_w$  là ma trận chuyển vị có kích thước  $n_w(n_{pt}, 2)$  là ma trận có  $n_{pt}$  hàng và 2 cột chứa các ẩn số là chuyển vị tại nút của các phần tử (hình 2.8)

$$n_w(1,:) = [0 \quad 1]; n_w(2,:) = [1 \quad 2]; n_w(3,:) = [2 \quad 3]; n_w(4,:) = [3 \quad 0]$$

$$\mathbf{n}_w = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Gọi ma trận  $\mathbf{n}_\theta$  là ma trận chuyển vị có kích thước  $n_\theta(n_{pt}, 2)$  là ma trận có  $n_{pt}$  hàng và 2 cột chứa các ẩn số là góc xoay tại nút của các phần tử (hình 2.8)

$$\mathbf{n}_\theta(1,:) = [4 \quad 5]; \mathbf{n}_\theta(2,:) = [6 \quad 7]; \mathbf{n}_\theta(3,:) = [8 \quad 9]; \mathbf{n}_\theta(4,:) = [10 \quad 11]$$

$$\mathbf{n}_w = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 & 10 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \end{bmatrix}^T$$

Sau khi biết ẩn số thực của các thanh ta có thể xây dựng độ cứng tổng thể của thanh (có rất nhiều cách ghép nối phần tử khác nhau, tùy vào trình độ lập trình của mỗi người nên tác giả không trình bày chi tiết cách ghép nối các phần tử lại để được ma trận độ cứng của toàn thanh và có thể xem trong code mô đun chương trình của tác giả)

Nếu bài toán có  $n_{cv}$  ẩn số chuyển vị và  $n_{gx}$  ẩn số góc xoay thì ma trận độ cứng của thanh là  $\mathbf{K}$  có kích thước  $(n \times n)$ ,  $\mathbf{K}(n, n)$  với  $n = (n_{cv} + n_{gx})$ . Như ở ví dụ 2.5,  $n = 11$ . Bây giờ xét điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử.

Điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử được viết như sau:

$$\left( \frac{dy_i}{dx} \Big|_{nut2} \right) - \left( \frac{dy_{i+1}}{dx} \Big|_{nut1} \right) = 0 \quad (2.40)$$

$$\text{hay: } \delta\lambda_1 \left[ \left( \frac{dy_1}{dx} \Big|_{nut2} \right) - \left( \frac{dy_2}{dx} \Big|_{nut1} \right) \right] = 0 \quad (2.41a)$$

$$\delta\lambda_2 \left[ \left( \frac{dy_2}{dx} \Big|_{nut2} \right) - \left( \frac{dy_3}{dx} \Big|_{nut1} \right) \right] = 0 \quad (2.41b)$$

$$\delta\lambda_3 \left[ \left( \frac{dy_3}{dx} \Big|_{nut2} \right) - \left( \frac{dy_4}{dx} \Big|_{nut1} \right) \right] = 0 \quad (2.41c)$$



Trong đó  $\lambda_i$  cũng là ẩn số của bài toán (có  $k$  ẩn số), do đó tổng số ẩn số của bài toán lúc là  $(n+k)$  do đó ma trận độ cứng của phần tử lúc này cũng phải thêm  $k$  dòng và  $k$  cột như vậy kích thước của ma trận độ cứng là  $K(n+k, n+k)$ . Gọi  $k_1$  là góc xoay tại nút 2 của phần tử trước,  $k_2$  là góc xoay tại nút 1 của phần tử sau thì ta có các hệ số trong ma trận độ cứng  $K$ :

$$k(n+i, k_1) = \frac{2}{\Delta x}; k(n+i, k_2) = -\frac{2}{\Delta x} \quad (i = 1 \div k) \quad (2.42a)$$

$$k(k_1, n+i) = \frac{2}{\Delta x}; k(k_2, n+i) = -\frac{2}{\Delta x} \quad (i = 1 \div k) \quad (2.42b)$$

Nếu có hai phần tử thì có một điều kiện về góc xoay, có  $n_{pt}$  phần tử thì có  $(2n_{pt} - 1)$  điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử. Như vậy cuối cùng ta sẽ thiết lập được phương trình:

$$[K]\{X\} = \{F\}$$

trong đó:  $\{F\} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$   $\left. \begin{array}{l} \text{so - hang} = n \\ \text{so - hang} = k \end{array} \right\}$ ;  $\{X\} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix}$  là ẩn số của bài toán

Trong ví dụ 2.5 khi chia thành ra thành 4 phần tử. Kết quả ma trận độ cứng của thanh:

$$[K] = 10^3 \begin{bmatrix} 2.4 & -1.2 & 0 & -1.2 & -1.2 & 1.2 & 1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.2 & 2.4 & -1.2 & 0 & 0 & -1.2 & -1.2 & 1.2 & 1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.2 & 2.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.2 & -1.2 & 1.2 & 1.2 & 0 & 0 & 0 \\ -1.2 & 0 & 0 & 1.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.2 & 0 & 0 & 0.8 & 1.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.10^{-5} & 0 & 0 \\ 1.2 & -1.2 & 0 & 0 & 0 & 1.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.10^{-5} & 0 & 0 \\ 1.2 & -1.2 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 1.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.10^{-5} & 0 \\ 0 & 1.2 & -1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & -2.10^{-5} & 0 \\ 0 & 1.2 & -1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 1.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.10^{-5} \\ 0 & 0 & 1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.6 & 0.8 & 0 & 0 & -2.10^{-5} \\ 0 & 0 & 0 & 1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 1.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.10^{-5} & -2.10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.10^{-5} & -2.10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.10^{-5} & -2.10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kết quả chuyển vị, góc xoay tại các nút:

$$\begin{bmatrix} w_2; w_3; w_4; \\ \varphi_1; \varphi_2; \varphi_3; \varphi_4; \varphi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.09166667(\text{cm}); 0.13333333(\text{cm}); 0.09166667(\text{cm}); \\ 0.05(\text{rad}); 0.0375(\text{rad}); 0; -0.0375(\text{rad}); -0.05(\text{rad}) \end{bmatrix}$$

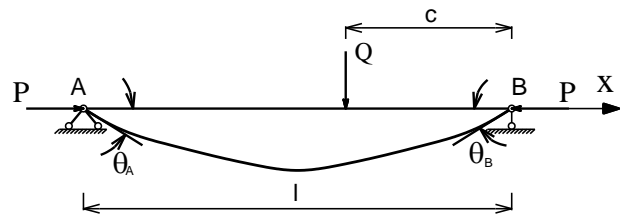
Ta thấy kết quả trên so với kết quả giải chính xác theo phương pháp giải tích rất đúng ví dụ như chuyển vị tại nút 3 tính theo phương pháp giải tích:

$$w_3 = \frac{Pl^3}{48EI} = 0,13333333(\text{cm})$$

## 2.2 Phương pháp chuyển vị cưỡng bức trong phân tích bài toán ổn định của thanh chịu nén

### 2.2.1 Ổn định thanh chịu nén

Để hiểu được ổn định của thanh chịu nén, ta có thể nghiên cứu bài toán thanh theo lý thuyết dầm cột (Beam –Columns Theory) của Timoshenko.



Hình 2.9 Thanh chịu nén uốn

Xét dầm đơn giản chiều dài  $l$  chịu tác dụng đồng thời của tải trọng ngang  $Q$  và tải dọc trục  $P$  như hình 2.9. Ta có thể xác định được mômen ở phía bên trái và phía phải của dầm trên hình 2.9 lần lượt là:

$$M = \frac{Qc}{l}x + Py, M = \frac{Q(1-c)}{l}(1-x) + Py \quad (2.43)$$

trong đó  $y$  là hàm độ võng của dầm.

Lời giải của Timoshenko cho ta hai hàm độ võng tương ứng với hai đoạn bên trái và bên phải  $Q$ .

$$y = \frac{Q \sin(kc)}{Pk \sin(kl)} \sin(kx) - \frac{Qc}{Pl}x \quad 0 \leq x \leq (1-c) \quad (2.44a)$$

$$y = \frac{Q \sin(k(1-c))}{Pk \sin(kl)} \sin(k(1-x)) - \frac{Q(1-c)}{Pl}(1-x) \quad (1-c) \leq x \leq 1 \quad (2.44b)$$

trong đó:  $k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$

Trường hợp riêng khi tải trọng đặt chính giữa của dầm, trục võng sẽ đối xứng và ta chỉ cần xét đoạn dầm ở phía trái tải trọng. Lúc này muốn tìm độ võng lớn nhất, chỉ việc thay  $x = c = l/2$  vào phương trình (2.44) ta được:

$$\delta = y|_{x=l/2} = \frac{Q}{2Pk} \left( \operatorname{tg} \left( \frac{kl}{2} \right) - \frac{kl}{2} \right) \quad (2.45)$$

Để thấy rõ ảnh hưởng của lực dọc P tới độ võng của dầm ta dùng biến đổi sau:

$$u = \frac{kl}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad (2.46)$$

Khi đó công thức (2.45) trở thành

$$\delta = y|_{x=l/2} = \frac{Ql^3}{48EI} \frac{3(\operatorname{tg}(u) - u)}{u^3} = \frac{Ql^3}{48EI} \chi(u) \quad (2.47)$$

Thừa số thứ nhất  $\frac{Ql^3}{48EI}$  ở vế phải của phương trình trên biểu thị độ võng của dầm khi chỉ có lực ngang Q tác động. Thừa số thứ hai  $\chi(u) = \frac{3(\operatorname{tg}(u) - u)}{u^3}$  biểu thị ảnh hưởng của lực dọc P tới độ võng  $\delta$ .

- Khi P nhỏ giá trị u theo phương trình (2.47) là nhỏ và thừa số  $\chi(u)$  xấp xỉ bằng đơn vị.

- Khi  $u = \pi/2$  thì  $\chi(u)$  tiến tới vô hạn, chuyển vị  $\delta$  của dầm cũng tăng lên vô hạn, ta nói dầm bị mất ổn định. Trong trường hợp này từ phương trình (2.46) ta tìm ra:

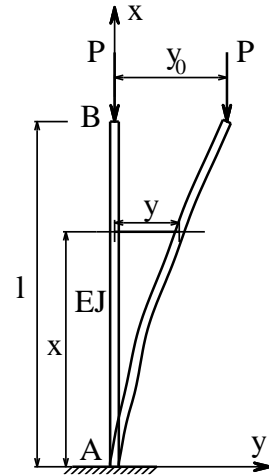
$$P = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (2.48)$$

Đây chính là trị số lực nén làm cho độ võng của dầm tăng lên vô hạn. Như vậy, có thể kết luận rằng, khi lực nén P tiến dần tới trị số tới hạn (2.48) thì dù lực ngang có nhỏ đến mấy cũng vẫn gây lên chuyển vị rất lớn. Ta gọi trạng thái này là mất ổn định, trị số tới hạn của lực nén là tải trọng tới hạn với

ký hiệu là  $P_{th}$ . Timoshenko cũng dùng lý thuyết dầm-cột để nghiên cứu ổn định của thanh chịu nén có các điều kiện biên khác nhau.

### 2.2.2 Phương pháp chuyển vị cưỡng bức

Phương pháp chung để đánh giá sự mất ổn định của cơ hệ là đưa hệ ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu của nó và kiểm tra xem nó có tồn tại trạng thái cân bằng mới không. Nếu như tìm được trạng thái cân bằng mới khác với trạng thái cân bằng ban đầu thì có thể xem là mất ổn định và lực giữ cho hệ ở trạng thái cân bằng mới này gọi là lực tới hạn, trường hợp ngược lại hệ là ổn định.



Hình 2.10 Thanh chịu nén

**Nội dung phương pháp:** Để đơn giản trong trình bày nội dung phương pháp không làm mất đi tính tổng quát của bài toán, ta xét thanh chịu nén một đầu ngàm một đầu tự do chịu lực như (hình 2.10). Thanh có trạng thái cân bằng ban đầu là trạng thái chịu nén thẳng đứng. Ở trạng thái cân bằng này thanh bị co ngắn một đoạn là  $\Delta = Pl/EA$ ,  $EA$  là độ cứng chịu kéo nén của thanh,  $E$  là mô đun đàn hồi của vật liệu,  $l$  là chiều dài ban đầu của thanh,  $P$  là lực tác dụng.

Để xét cân bằng này của thanh có ổn định hay không ta chọn cho một điểm bất kỳ trên thanh lệch ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu một đoạn  $y_0$  nào đó. Khi đó thanh sẽ chuyển vị theo đường đàn hồi  $y(x)$  và lực  $P$  ngoài tác dụng nén còn gây ra mô men uốn:

$$M_p = P(y - y_0) \quad (2.49)$$

Bây giờ trong thanh có nội lực mô men uốn  $M$  và khác với trạng thái ban đầu. Độ co ngắn của thanh thường nhỏ hơn so với chiều dài thanh cho nên để đơn giản ta xem chiều dài thanh sau biến dạng vẫn là  $l$ .

Biến dạng uốn của thanh: 
$$\chi = -\frac{d^2y}{dx^2} \quad (2.50)$$

Lượng cường bức theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss của bài toán này được viết như sau:

$$Z = \int_1 (M - M_p) \chi dx \rightarrow \min \quad (2.51)$$

Chú ý mô men nội lực và mô men ngoại lực luôn khác dấu. Điều kiện cân và đủ để thanh ở trạng thái cân bằng là:

$$\delta Z = \int_1 (M - M_p) \delta \chi dx = 0 \quad (2.52)$$

hay: 
$$\delta Z = \int_1 (M - M_p) \delta \left( -\frac{d^2y}{dx^2} \right) dx = 0 \quad (2.53)$$

Sử dụng phép tính biến phân đối với phương trình (2.53) nhận được phương trình cân bằng sau:

$$-\frac{d^2(M - M_p)}{dx^2} = 0 \quad (2.54)$$

Ta có: 
$$M = EI\chi = -EI \frac{d^2y}{dx^2} \quad (2.55)$$

Thay  $M$  (2.55) và  $M_p$  (2.49) vào phương trình (2.54) ta có:

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} + P \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad (2.56)$$

Đây là phương trình vi phân cân bằng của thanh chịu uốn dọc bởi lực  $P$  tác dụng ở đầu thanh. Đó là phương trình vi phân thuần nhất không có vế phải. Để giải phương trình vi phân này có nhiều cách giải nhưng trong phần này luận văn trình bày phương pháp chuyển vị cường bức để giải phương trình (2.56).

Phương pháp chuyển vị cưỡng bức nhằm đưa phương trình (2.56) về phương trình có vế phải bằng cách cho một điểm nào đó trong thanh, ví dụ điểm  $x=x_1$ , một chuyển vị  $y_0$ :

$$g = y_{x=x_1} - y_0 = 0 \quad (2.57)$$

Đưa bài toán tìm cực trị của phương trình (2.51) với điều kiện ràng buộc (2.57) về bài toán cực trị không ràng buộc bằng cách xây dựng phiếm hàm Lagrange  $F$  như sau:

$$F = Z + \lambda g \rightarrow \min \quad (2.58)$$

$$F = \int_1 (M - M_p) \chi dx + \lambda (y_{x=x_1} - y_0) \rightarrow \min \quad (2.59)$$

Trong đó  $\lambda$  là thừa số Lagrange và cũng là ẩn số của bài toán. Từ điều kiện:

$$\delta F = \int_1 (M - M_p) \delta \chi dx + \lambda (\delta g) = 0 \quad (2.60)$$

Dùng phép tính biến phân phương trình (2.60) nhận được phương trình sau:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + P \frac{d^2 y}{dx^2} = \begin{cases} -\lambda & \text{khi } x = x_1 \\ 0 & \text{khi } x \neq x_1 \end{cases} \quad (2.61)$$

Phương trình (2.61) là phương trình có vế phải. Để nó trở thành phương trình uốn dọc (2.56) của thanh thì:

$$\lambda = 0 \quad (2.62)$$

Về mặt toán học phương trình (2.62) là phương trình đa thức xác định các trị riêng của (2.60) bởi vì nghiệm của nó cũng là nghiệm của (2.56). Về mặt cơ học  $\lambda$  có thứ nguyên là lực. Đó là lực giữ để cho thanh có chuyển vị  $y_0$  tại điểm  $x = x_1$ . Lực giữ phải bằng không, suy ra phương trình (2.62). Trị riêng của (2.59) phụ thuộc vào thông số  $P$  và  $EI$ , suy ra  $\lambda$  cũng là hàm của  $P$  và  $EI$ . Cho nên giải phương trình (2.62) theo  $P$ , sẽ nhận được các lực tới hạn của thanh uốn dọc.

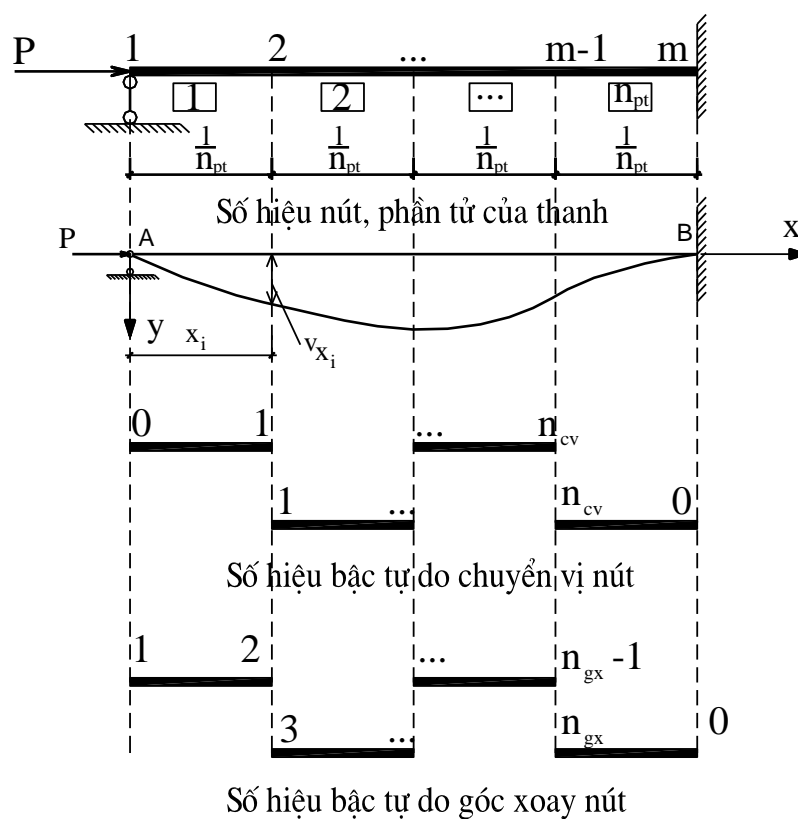
### CHƯƠNG 3

## MỘT SỐ VÍ DỤ PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH THANH CHỊU NÉN THEO PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ CƯỜNG BỨC

Trong chương này, luận văn sẽ áp dụng phương pháp chuyển vị cưỡng bức và xây dựng bài toán theo phương pháp phần tử hữu hạn để phân tích một số bài toán ổn định của thanh chịu nén dọc trục. Tất cả các kết quả phân tích lực tới hạn của các bài toán ổn định thanh chịu nén dọc trục trong chương này sẽ được so sánh với các kết quả phân tích theo các phương pháp khác, để thấy được độ tin cậy của phương pháp nghiên cứu trong luận văn.

### 3.1. Phân tích ổn định của thanh chịu nén đầu ngàm – đầu khớp

**Ví dụ 3.1:** Xác định lực tới hạn theo phương pháp chuyển vị cưỡng bức cho thanh đầu khớp và đầu ngàm chịu lực nén dọc trục  $P$  (hình 3.1).



Hình 3.1 Thanh đầu ngàm – đầu khớp

## Lời giải

Chia thanh ra làm  $n_{pt}$  phần tử (hình 3.1), nội lực mô men uốn do lực P gây ra trong các phần tử của thanh là:

$$M_{iP} = P \cdot w_{xi} \quad (i = 1 \div n_{pt}) \quad (3.1)$$

Mô men uốn  $M_{iP}$  gây ra biến dạng uốn  $\chi_{iP}$  do đó trong thành phần lượng ràng buộc của bài toán ta phải viết thêm thành phần này, như vậy lượng ràng buộc cho bài toán ổn định có thể viết như sau:

$$Z = \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{n_{pt}} \int_{-1}^1 (M^{(i)} - M_P^{(i)}) [\chi_i] dx - \sum_{k=1}^{sonut} F_k X_k \rightarrow \min \quad (3.2a)$$

hay

$$\delta Z = \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{n_{pt}} \int_{-1}^1 (M^{(i)} - M_P^{(i)}) \delta \chi_i dx - \sum_{k=1}^{sonut} F_k \delta X_k \rightarrow \min \quad (3.2b)$$

Gọi  $n_{cv}$  là số thông số chuyển vị tại các nút của thanh có chuyển vị;  $n_{gx}$  là số thông số góc xoay tại các nút của thanh có góc xoay. Dựa vào điều kiện này ta sẽ xây dựng được ma trận độ cứng của thanh có bậc:  $n \times n$  ( $n = n_{cv} + n_{gx}$ ) (sau khi bỏ đi những hàng và cột tương ứng có chuyển vị hoặc góc xoay bằng không).

Ngoài ra, cần đảm bảo điều kiện liên tục của chuyển vị còn điều kiện liên tục về góc xoay được xét thêm bằng cách đưa vào các điều kiện ràng buộc.

$$\left( \frac{dy_i}{dx} \Big|_{nut2-cua-pt-thu-i} \right) - \left( \frac{dy_{i+1}}{dx} \Big|_{nut1-cua-pt-thu-i+1} \right) = 0 \quad (3.3)$$

Như vậy ma trận độ cứng của của thanh được mở rộng thêm  $(n_{pt} - 1)$  hàng và  $(n_{pt} - 1)$  cột.



Theo phương pháp chuyển vị cưỡng bức tại một vị trí (nút) nào đó của thanh, ta cho lệch khỏi vị trí cân bằng một chuyển vị  $y_0$ . Chẳng hạn tại nút thứ  $k$  ta cho một chuyển vị cưỡng bức  $y_0$  ta có:

$$w|_{x_k} - y_0 = 0 \quad (3.4)$$

Như vậy ma trận độ cứng của phần tử lại được mở rộng thêm 1 hàng, một cột và lúc này ma trận độ cứng có bậc  $(n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}) \times (n_{cv} + n_{gx} + n_{pt})$  với hệ số trong ma trận độ cứng:

$$k(n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}, k) = 1 \quad (3.5a)$$

$$k(k, n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}) = 1 \quad (3.5b)$$

Ma trận tải trọng tác dụng lúc này có bậc:  $(n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}) \times 1$  với giá trị hệ số  $F(n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}) = y_0$  còn các hệ số còn lại bằng không.

Giải phương trình  $[K]\{X\} = \{F\}$  ta sẽ tìm được các ẩn số là các chuyển vị tại các nút của phần tử và các thừa số Lagrange. Tiếp theo, ta cho thừa số Lagrange tương ứng với chuyển vị cưỡng bức bằng không ta sẽ tìm được giá trị lực  $P$  tương ứng là các giá trị tới hạn của lực nén lên thanh.

Trong phần này, luận văn giải bài toán thanh đầu khớp – đầu ngàm với số phần tử chia bằng 6. Thừa số Lagrange tương ứng với chuyển vị cưỡng bức là:

$$\begin{aligned} \lambda = & -0,24206 * y_0 / (-0,16427e294 * 1^{44} * p^{11} + 0,13354e298 * 1^2 * 1^{40} * p^{10} * ei + \\ & - 0,44982e301 * 1^4 * 1^{36} * ei^2 * p^9 + 0,81919e304 * 1^6 * 1^{32} * ei^3 * p^8 + \\ & - 0,88490e307 * 1^8 * 1^{28} * ei^4 * p^7 + 0,58700e310 * 1^{10} * 1^{24} * ei^5 * p^6 + \\ & - 0,24011e313 * 1^{12} * 1^{20} * ei^6 * p^5 + 0,59428e315 * 1^{14} * 1^{16} * ei^7 * p^4 + \\ & - 0,85200e317 * 1^{16} * 1^{12} * ei^8 * p^3 + 0,65281e319 * 1^{18} * 1^8 * ei^9 * p^2 + \\ & - 0,22936e321 * 1^{20} * ei^{10} * p * 1^4 + 0,25803e322 * 1^{22} * ei^{11}) / \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (0,47948e292*p^{10}*l^{40}-0,37765e296*p^9*l^{36}*ei^1*l^2+ \\
& +0,12193e300*ei^2*p^8*l^{32}*l^4-0,20970e303*ei^3*p^7*l^{28}*l^6+ \\
& + 0,20944e306*ei^4*p^6*l^{24}*l^8- 0,12464e309*ei^5*p^5*l^{20}*l^{10}+ \\
& + 0,43784e311*ei^6*p^4*l^{16}*l^{12}-0,87219e313*ei^7*p^3*l^{12}*l^{14}+ \\
& +0,91144e315*ei^8*p^2*l^8*l^{16}- 0,42997e317*ei^9*p^1*l^4*l^{18}+ \\
& +0,64147e318*ei^{10}*l^{20})/l^4
\end{aligned}$$

Giải phương trình  $\lambda = 0$  theo ẩn số  $P$  với số bậc là 11 ta sẽ tìm được 11 giá trị lực tới hạn  $P_{th}$  (mặc dù ở đây hàm chuyển vị chỉ là đa thức bậc 3), ở đây đưa ra 3 lực tới hạn đầu tiên lần lượt là:

$$P_{th} = 20,199EI_{min} / l^2 ;$$

$$P_{th} = 59,886EI_{min} / l^2 ;$$

$$P_{th} = 120,490EI_{min} / l^2$$

Ta thấy các kết quả trên rất đúng với kết quả phân tích theo giải tích.

### 3.2 Phân tích ổn định của thanh chịu nén đầu ngàm – đầu ngàm

**Ví dụ 3.2:** Xác định lực tới hạn theo phương pháp chuyển vị cưỡng bức cho thanh đầu ngàm và đầu ngàm chịu lực nén dọc trục  $P$  (hình 3.2).

#### Lời giải

Chia thanh ra làm  $n_{pt}$  phần tử (hình 3.2), nội lực mô men uốn do lực  $P$  gây ra trong các phần tử của thanh là:

$$M_{ip} = P \cdot w_{xi} \quad (i = 1 \div n_{pt}) \quad (3.6)$$

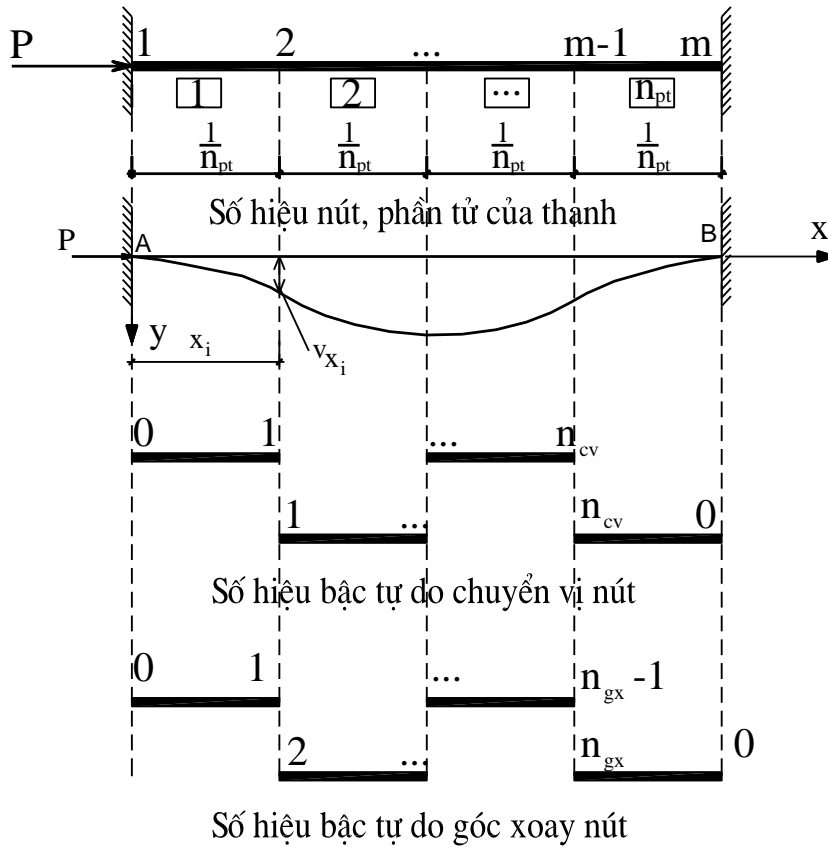
Mô men uốn  $M_{ip}$  gây ra biến dạng uốn  $\chi_{ip}$  do đó trong thành phần lượng ràng buộc của bài toán ta phải viết thêm thành phần này, như vậy lượng ràng buộc cho bài toán ổn định có thể viết như sau:

$$Z = \frac{\Delta X}{2} \sum_{i=1}^{n_{pt}} \int_{-1}^1 (M^{(i)} - M_p^{(i)}) [\chi_i] dx - \sum_{k=1}^{sonut} F_k X_k \rightarrow \min \quad (3.7a)$$

hay

$$\delta Z = \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{n_{pt}} \int_{-1}^1 (M^{(i)} - M_P^{(i)}) \delta \chi_i dx - \sum_{k=1}^{sonut} F_k \delta X_k \rightarrow \min \quad (3.7b)$$

Gọi  $n_{cv}$  là số thông số chuyển vị tại các nút của thanh có chuyển vị;  $n_{gx}$  là số thông số góc xoay tại các nút của thanh có góc xoay. Dựa vào điều kiện này ta sẽ xây dựng được ma trận độ cứng của thanh có bậc:  $n \times n$  ( $n = n_{cv} + n_{gx}$ ) (sau khi bỏ đi những hàng và cột tương ứng có chuyển vị hoặc góc xoay bằng không).



Hình 3.2 Thanh đầu ngàm – đầu ngàm

Ngoài ra, cần đảm bảo điều kiện liên tục của chuyển vị còn điều kiện liên tục về góc xoay được xét thêm bằng cách đưa vào các điều kiện ràng buộc.

$$\left( \frac{dy_i}{dx} \Big|_{nut2-cua-pt-thu-i} \right) - \left( \frac{dy_{i+1}}{dx} \Big|_{nut1-cua-pt-thu-i+1} \right) = 0 \quad (3.8)$$

Như vậy ma trận độ cứng của của thanh được mở rộng thêm  $(n_{pt} - 1)$  hàng và  $(n_{pt} - 1)$  cột.

Theo phương pháp chuyển vị cưỡng bức tại một vị trí (nút) nào đó của thanh, ta cho lệch khỏi vị trí cân bằng một chuyển vị  $y_0$ . Chẳng hạn tại nút thứ  $k$  ta cho một chuyển vị cưỡng bức  $y_0$  ta có:

$$w|_{x_k} - y_0 = 0 \quad (3.9)$$

Như vậy ma trận độ cứng của phần tử lại được mở rộng thêm 1 hàng, một cột và lúc này ma trận độ cứng có bậc  $(n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}) \times (n_{cv} + n_{gx} + n_{pt})$  với hệ số trong ma trận độ cứng:

$$k(n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}, k) = 1 \quad (3.10a)$$

$$k(k, n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}) = 1 \quad (3.10b)$$

Ma trận tải trọng tác dụng lúc này có bậc:  $(n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}) \times 1$  với giá trị hệ số  $F(n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}) = y_0$  còn các hệ số còn lại bằng không.

Giải phương trình  $[K]\{X\} = \{F\}$  ta sẽ tìm được các ẩn số là các chuyển vị tại các nút của phần tử và các thừa số Lagrange. Tiếp theo, ta cho thừa số Lagrange tương ứng với chuyển vị cưỡng bức bằng không ta sẽ tìm được giá trị lực  $P$  tương ứng là các giá trị tới hạn của lực nén lên thanh.

Trong phần này, luận văn giải bài toán thanh đầu ngàm – đầu ngàm với số phần tử chia bằng 6. Thừa số Lagrange tương ứng với chuyển vị cưỡng bức là:

$$\begin{aligned} \lambda = & -0,15129e-1 * y_0 / 1 * (0,10523e262 * l^{40} * p^{10} - 0,73557e265 * l^{36} * p^9 * ei + \\ & + 0,21006e269 * l^{32} * p^8 * ei^2 - 0,31919e272 * l^{28} * p^7 * ei^3 + \\ & + 0,28248e275 * l^{24} * p^6 * ei^4 - 0,15025e278 * l^{20} * p^5 * ei^5 + \\ & + 0,48013e280 * l^{16} * p^4 * ei^6 - 0,89733e282 * l^{12} * p^3 * ei^7 + \\ & + 0,92233e284 * l^8 * p^2 * ei^8 - 0,46014e286 * l^4 * p * ei^9 * l^4 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ 0,82825e287 * l^{20} * e_i^{10} / (-0,19122e259 * p^9 * l^{36} + \\
&+ 0,12874e263 * p^8 * l^{32} * e_i^{12} - 0,34937e266 * p^7 * l^{28} * e_i^2 * l^4 + \\
&+ 0,49505e269 * p^6 * l^{24} * e_i^3 * l^6 - 0,39773e272 * p^5 * l^{20} * e_i^4 * l^8 + \\
&+ 0,18479e275 * p^4 * l^{16} * e_i^5 * l^{10} - 0,48752e277 * p^3 * l^{12} * e_i^6 * l^{12} + \\
&+ 0,69081e279 * p^2 * l^8 * e_i^7 * l^{14} - 0,46627e281 * p * l^4 * e_i^8 * l^{16} + \\
&+ 0,11190e283 * e_i^9 * l^{18}) / l^4
\end{aligned}$$

Giải phương trình  $\lambda = 0$  theo ẩn số  $P$  với số bậc là 10 ta sẽ tìm được 10 giá trị lực tới hạn  $P_{th}$  (mặc dù ở đây hàm chuyển vị chỉ là đa thức bậc 3), ở đây đưa ra 3 lực tới hạn đầu tiên lần lượt là:

$$P_{th} = 39,540EI_{min} / l^2;$$

$$P_{th} = 81,267EI_{min} / l^2;$$

$$P_{th} = 161,340EI_{min} / l^2$$

Ta thấy các kết quả trên rất đúng với kết quả phân tích theo giải tích.

### 3.3 Phân tích ổn định của thanh chịu nén đầu ngàm – đầu ngàm trượt

**Ví dụ 3.3:** Xác định lực tới hạn theo phương pháp chuyển vị cưỡng bức cho thanh đầu ngàm và đầu ngàm trượt chịu lực nén dọc trục  $P$  (hình 3.3).

#### Lời giải

Chia thanh ra làm  $n_{pt}$  phần tử (hình 3.3), nội lực mô men uốn do lực  $P$  gây ra trong các phần tử của thanh là:

$$M_{ip} = P \cdot w_{xi} \quad (i = 1 \div n_{pt}) \quad (3.11)$$

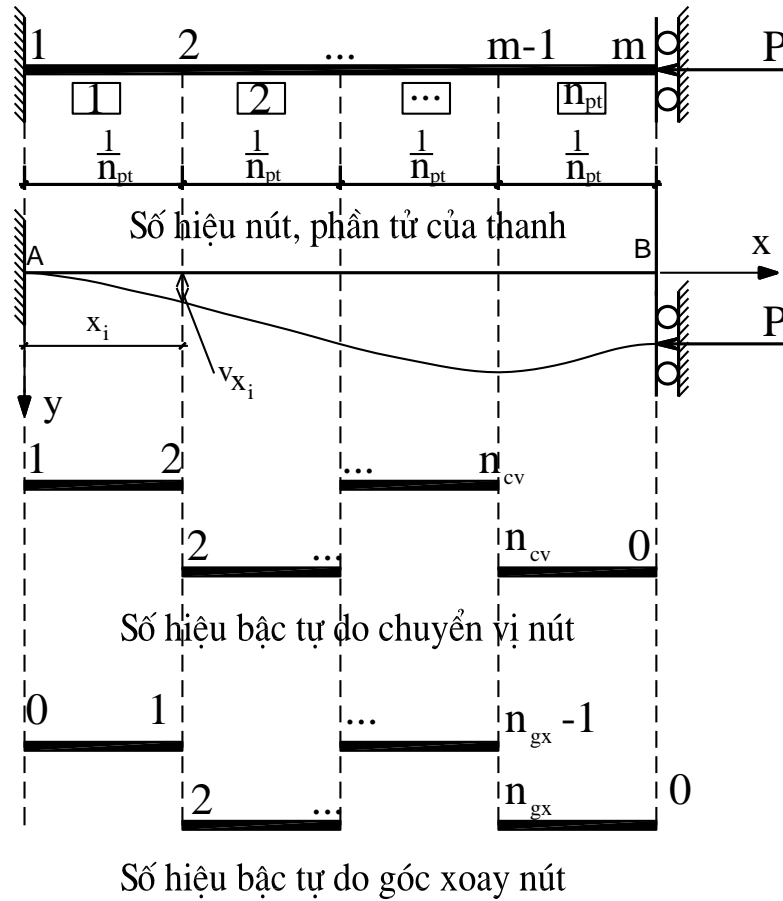
Mô men uốn  $M_{ip}$  gây ra biến dạng uốn  $\chi_{ip}$  do đó trong thành phần lượng ràng buộc của bài toán ta phải viết thêm thành phần này, như vậy lượng ràng buộc cho bài toán ổn định có thể viết như sau:

$$Z = \frac{\Delta X}{2} \sum_{i=1}^{n_{pt}} \int_{-1}^1 (M^{(i)} - M_p^{(i)}) [\chi_i] dx - \sum_{k=1}^{sonut} F_k X_k \rightarrow \min \quad (3.12a)$$

hay

$$\delta Z = \frac{\Delta X}{2} \sum_{i=1}^{n_{pt}} \int_{-1}^1 (M^{(i)} - M_p^{(i)}) \delta \chi_i dx - \sum_{k=1}^{sonut} F_k \delta X_k \rightarrow \min \quad (3.12b)$$

Gọi  $n_{cv}$  là số thông số chuyển vị tại các nút của thanh có chuyển vị;  $n_{gx}$  là số thông số góc xoay tại các nút của thanh có góc xoay. Dựa vào điều kiện này ta sẽ xây dựng được ma trận độ cứng của thanh có bậc:  $n \times n$  ( $n = n_{cv} + n_{gx}$ ) (sau khi bỏ đi những hàng và cột tương ứng có chuyển vị hoặc góc xoay bằng không).



Hình 3.3 Thanh đầu ngàm-đầu ngàm trượt

Ngoài ra, cần đảm bảo điều kiện liên tục của chuyển vị còn điều kiện liên tục về góc xoay được xét thêm bằng cách đưa vào các điều kiện ràng buộc.

$$\left( \frac{dy_i}{dx} \Big|_{\text{nút } 2\text{-cua-pt-thu-}i} \right) - \left( \frac{dy_{i+1}}{dx} \Big|_{\text{nút } 1\text{-cua-pt-thu-}i+1} \right) = 0 \quad (3.13)$$

Như vậy ma trận độ cứng của của thanh được mở rộng thêm  $(n_{pt} - 1)$  hàng và  $(n_{pt} - 1)$  cột.

Theo phương pháp chuyển vị cưỡng bức tại một vị trí (nút) nào đó của thanh, ta cho lệch khỏi vị trí cân bằng một chuyển vị  $y_0$ . Chẳng hạn tại nút thứ  $k$  ta cho một chuyển vị cưỡng bức  $y_0$  ta có:

$$w|_{x_k} - y_0 = 0 \quad (3.14)$$

Như vậy ma trận độ cứng của phần tử lại được mở rộng thêm 1 hàng, một cột và lúc này ma trận độ cứng có bậc  $(n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}) \times (n_{cv} + n_{gx} + n_{pt})$  với hệ số trong ma trận độ cứng:

$$k(n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}, k) = 1 \quad (3.15a)$$

$$k(k, n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}) = 1 \quad (3.15b)$$

Ma trận tải trọng tác dụng lúc này có bậc:  $(n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}) \times 1$  với giá trị hệ số  $F(n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}) = y_0$  còn các hệ số còn lại bằng không.

Giải phương trình  $[K]\{X\} = \{F\}$  ta sẽ tìm được các ẩn số là các chuyển vị tại các nút của phần tử và các thừa số Lagrange. Tiếp theo, ta cho thừa số Lagrange tương ứng với chuyển vị cưỡng bức bằng không ta sẽ tìm được giá trị lực P tương ứng là các giá trị tới hạn của lực nén lên thanh.

Trong phần này, luận văn giải bài toán thanh đầu ngàm – đầu ngàm trượt với số phần tử chia bằng 6. Thừa số Lagrange tương ứng với chuyển vị cưỡng bức là:

$$\begin{aligned} \lambda = & -0,24206 \cdot y_0 / l \cdot (-0,18100e263 \cdot l^{44} \cdot p^{11} + 0,12735e267 \cdot l^2 \cdot l^{40} \cdot p^{10} \cdot e_i + \\ & - 0,36670e270 \cdot l^4 \cdot l^{36} \cdot p^9 \cdot e_i^2 + 0,56329e273 \cdot l^6 \cdot l^{32} \cdot e_i^3 \cdot p^8 + \\ & - 0,50572e276 \cdot l^8 \cdot l^{28} \cdot e_i^4 \cdot p^7 + 0,27432e279 \cdot l^{10} \cdot l^{24} \cdot e_i^5 \cdot p^6 + \\ & - 0,90106e281 \cdot l^{12} \cdot l^{20} \cdot e_i^6 \cdot p^5 + 0,17534e284 \cdot l^{14} \cdot l^{16} \cdot e_i^7 \cdot p^4 + \\ & - 0,19209e286 \cdot l^{16} \cdot l^{12} \cdot e_i^8 \cdot p^3 + 0,10760e288 \cdot l^{18} \cdot l^8 \cdot e_i^9 \cdot p^2 + \\ & - 0,25548e289 \cdot l^{20} \cdot e_i^{10} \cdot p \cdot l^4 + 0,16424e290 \cdot l^{22} \cdot e_i^{11}) / \\ & (0,62939e261 \cdot p^{10} \cdot l^{40} - 0,42636e265 \cdot p^9 \cdot l^{36} \cdot e_i \cdot l^2 + \\ & + 0,11666e269 \cdot p^8 \cdot l^{32} \cdot e_i^2 \cdot l^4 - 0,16717e272 \cdot e_i^3 \cdot p^7 \cdot l^{28} \cdot l^6 + \\ & + 0,13646e275 \cdot e_i^4 \cdot p^6 \cdot l^{24} \cdot l^8 - 0,64901e277 \cdot e_i^5 \cdot p^5 \cdot l^{20} \cdot l^{10} + \\ & + 0,17752e280 \cdot e_i^6 \cdot p^4 \cdot l^{16} \cdot l^{12} - 0,26699e282 \cdot e_i^7 \cdot p^3 \cdot l^{12} \cdot l^{14} + \\ & + 0,20151e284 \cdot e_i^8 \cdot l^8 \cdot p^2 \cdot l^{16} - 0,63553e285 \cdot e_i^9 \cdot l^4 \cdot p \cdot l^{18} + \\ & + 0,53683e286 \cdot e_i^{10} \cdot l^{20}) / l^4 \end{aligned}$$

Giải phương trình  $\lambda = 0$  theo ẩn số  $P$  với số bậc là 11 ta sẽ tìm được 11 giá trị lực tới hạn  $P_{th}$  (mặc dù ở đây hàm chuyển vị chỉ là đa thức bậc 3), ở đây đưa ra 3 lực tới hạn đầu tiên lần lượt là:

$$P_{th} = 9,872EI_{min} / l^2;$$

$$P_{th} = 39,510EI_{min} / l^2;$$

$$P_{th} = 89,758EI_{min} / l^2$$

Ta thấy các kết quả trên rất đúng với kết quả phân tích theo giải tích.

### 3.4 Phân tích ổn định của thanh chịu nén đầu ngàm – đầu tự do

**Ví dụ 3.4:** Xác định lực tới hạn theo phương pháp chuyển vị cưỡng bức cho thanh đầu ngàm và đầu tự do chịu lực nén dọc trục  $P$  (hình 3.4).

#### Lời giải

Chia thanh ra làm  $n_{pt}$  phần tử (hình 3.4), nội lực mô men uốn do lực  $P$  gây ra trong các phần tử của thanh là:

$$M_{ip} = P \cdot w_{xi} \quad (i = 1 \div n_{pt}) \quad (3.16)$$

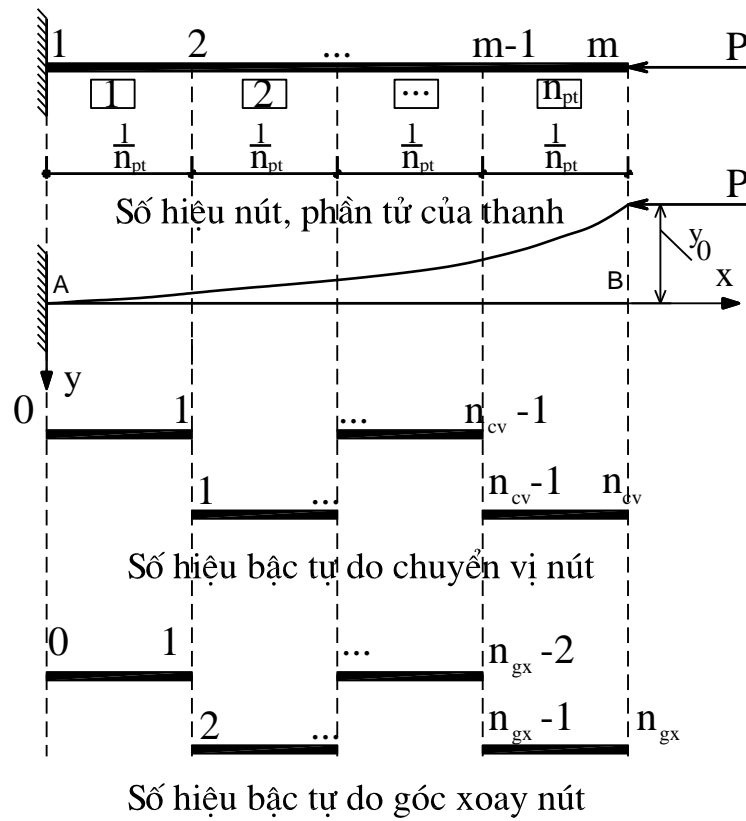


Mô men uốn  $M_{iP}$  gây ra biến dạng uốn  $\chi_{iP}$  do đó trong thành phần lượng ràng buộc của bài toán ta phải viết thêm thành phần này, như vậy lượng ràng buộc cho bài toán ổn định có thể viết như sau:

$$Z = \frac{\Delta X}{2} \sum_{i=1}^{n_{pt}} \int_{-1}^1 (M^{(i)} - M_P^{(i)}) [\chi_i] dx - \sum_{k=1}^{sonut} F_k X_k \rightarrow \min \quad (3.17a)$$

hay

$$\delta Z = \frac{\Delta X}{2} \sum_{i=1}^{n_{pt}} \int_{-1}^1 (M^{(i)} - M_P^{(i)}) \delta \chi_i dx - \sum_{k=1}^{sonut} F_k \delta X_k \rightarrow \min \quad (3.17b)$$



Hình 3.4 Thanh đầu ngàm-đầu tự do

Gọi  $n_{cv}$  là số thông số chuyển vị tại các nút của thanh có chuyển vị;  $n_{gx}$  là số thông số góc xoay tại các nút của thanh có góc xoay. Dựa vào điều kiện này ta sẽ xây dựng được ma trận độ cứng của thanh có bậc:  $n \times n$  ( $n = n_{cv} + n_{gx}$ ) (sau khi bỏ đi những hàng và cột tương ứng có chuyển vị hoặc góc xoay bằng không).

Ngoài ra, cần đảm bảo điều kiện liên tục của chuyển vị còn điều kiện liên tục về góc xoay được xét thêm bằng cách đưa vào các điều kiện ràng buộc.

$$\left( \frac{dy_i}{dx} \Big|_{\text{nút } 2\text{-cua-pt-thu-}i} \right) - \left( \frac{dy_{i+1}}{dx} \Big|_{\text{nút } 1\text{-cua-pt-thu-}i+1} \right) = 0 \quad (3.18)$$

Như vậy ma trận độ cứng của của thanh được mở rộng thêm  $(n_{pt} - 1)$  hàng và  $(n_{pt} - 1)$  cột.

Theo phương pháp chuyển vị cưỡng bức tại một vị trí (nút) nào đó của thanh, ta cho lệch khỏi vị trí cân bằng một chuyển vị  $y_0$ . Chẳng hạn tại nút thứ  $\underline{k}$  ta cho một chuyển vị cưỡng bức  $y_0$  ta có:

$$w \Big|_{x_k} - y_0 = 0 \quad (3.19)$$

Như vậy ma trận độ cứng của phần tử lại được mở rộng thêm 1 hàng, một cột và lúc này ma trận độ cứng có bậc  $(n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}) \times (n_{cv} + n_{gx} + n_{pt})$  với hệ số trong ma trận độ cứng:

$$k(n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}, k) = 1 \quad (3.20a)$$

$$k(k, n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}) = 1 \quad (3.20b)$$

Ma trận tải trọng tác dụng lúc này có bậc:  $(n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}) \times 1$  với giá trị hệ số  $F(n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}) = y_0$  còn các hệ số còn lại bằng không.

Giải phương trình  $[K]\{X\} = \{F\}$  ta sẽ tìm được các ẩn số là các chuyển vị tại các nút của phần tử và các thừa số Lagrange. Tiếp theo, ta cho thừa số Lagrange tương ứng với chuyển vị cưỡng bức bằng không ta sẽ tìm được giá trị lực P tương ứng là các giá trị tới hạn của lực nén lên thanh.

Trong phần này, luận văn giải bài toán thanh đầu ngàm – đầu tự do với số phần tử chia bằng 6. Thừa số Lagrange tương ứng với chuyển vị cưỡng bức là:

$$\begin{aligned} \lambda = & -15.492 \cdot y_0 / l \cdot (0,10816e293 \cdot l^{48} \cdot p^{12} - 0,88171e296 \cdot l^2 \cdot l^{44} \cdot e_i \cdot p^{11} + \\ & + 0,29803e300 \cdot l^4 \cdot l^{40} \cdot e_i^2 \cdot p^{10} - 0,54518e303 \cdot l^6 \cdot l^{36} \cdot e_i^3 \cdot p^9 + \\ & + 0,59238e306 \cdot l^8 \cdot l^{32} \cdot e_i^4 \cdot p^8 - 0,39605e309 \cdot l^{10} \cdot l^{28} \cdot e_i^5 \cdot p^7 + \\ & + 0,16376e312 \cdot l^{12} \cdot l^{24} \cdot e_i^6 \cdot p^6 - 0,41155e314 \cdot l^{14} \cdot l^{20} \cdot e_i^7 \cdot p^5 + \\ & + 0,60364e316 \cdot l^{16} \cdot l^{16} \cdot e_i^8 \cdot p^4 - 0,47991e318 \cdot l^{18} \cdot l^{12} \cdot e_i^9 \cdot p^3 + \\ & + 0,18079e320 \cdot l^{20} \cdot l^8 \cdot e_i^{10} \cdot p^2 - 0,24429e321 \cdot l^{22} \cdot e_i^{11} \cdot p \cdot l^4 + \\ & + 0,49967e321 \cdot l^{24} \cdot e_i^{12}) / (-0,16427e294 \cdot p^{11} \cdot l^{44} + \\ & + 0,13354e298 \cdot p^{10} \cdot l^{40} \cdot e_i \cdot l^2 - 0,44982e301 \cdot p^9 \cdot l^{36} \cdot e_i^2 \cdot l^4 + \\ & + 0,81919e304 \cdot p^8 \cdot l^{32} \cdot e_i^3 \cdot l^6 - 0,88490e307 \cdot p^7 \cdot l^{28} \cdot e_i^4 \cdot l^8 + \\ & + 0,58700e310 \cdot p^6 \cdot l^{24} \cdot e_i^5 \cdot l^{10} - 0,24011e313 \cdot p^5 \cdot l^{20} \cdot e_i^6 \cdot l^{12} + \\ & + 0,59428e315 \cdot p^4 \cdot l^{16} \cdot e_i^7 \cdot l^{14} - 0,85200e317 \cdot p^3 \cdot l^{12} \cdot e_i^8 \cdot l^{16} + \\ & + 0,65281e319 \cdot p^2 \cdot l^8 \cdot e_i^9 \cdot l^{18} - 0,22936e321 \cdot p \cdot l^4 \cdot e_i^{10} \cdot l^{20} + \\ & + 0,25803e322 \cdot e_i^{11} \cdot l^{22}) / l^4 \end{aligned}$$

Giải phương trình  $\lambda = 0$  theo ẩn số  $P$  với số bậc là 12 ta sẽ tìm được 12 giá trị lực tới hạn  $P_{th}$  (mặc dù ở đây hàm chuyển vị chỉ là đa thức bậc 3), ở đây đưa ra 3 lực tới hạn đầu tiên lần lượt là:

$$P_{th} = 2,467EI_{min} / l^2;$$

$$P_{th} = 22,220EI_{min} / l^2;$$

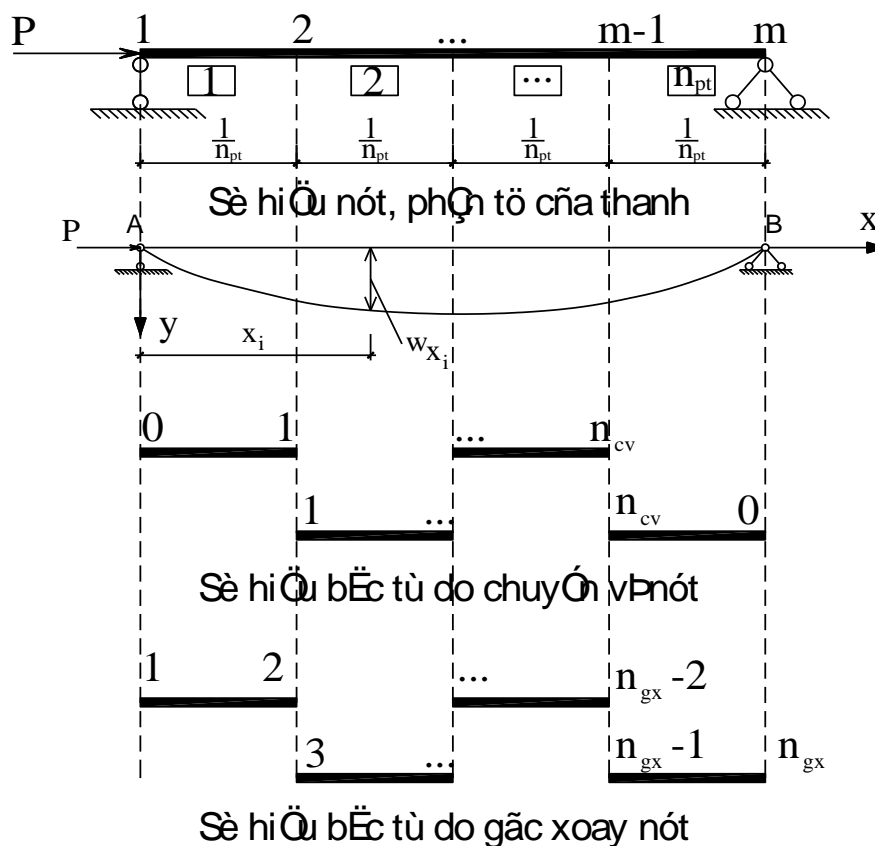
$$P_{th} = 61,920EI_{min} / l^2$$

Ta thấy các kết quả trên rất đúng với kết quả phân tích theo giải tích.

### 3.5 Phân tích ổn định của thanh chịu nén đầu khớp di động – đầu khớp cố định

**Ví dụ 3.5:** Xác định lực tới hạn theo phương pháp chuyển vị cưỡng bức cho thanh đầu khớp di động và đầu khớp cố định chịu lực nén dọc trục P (hình 3.5).

**Lời giải**



Hình 3.5 Thanh đầu khớp di động- đầu khớp cố định

Chia thanh ra làm  $n_{pt}$  phần tử (hình 3.5), nội lực mô men uốn do lực P gây ra trong các phần tử của thanh là:

$$M_{iP} = P \cdot w_{x_i} \quad (i = 1 \div n_{pt}) \quad (3.21)$$

Mô men uốn  $M_{iP}$  gây ra biến dạng uốn  $\chi_{iP}$  do đó trong thành phần lượng ràng buộc của bài toán ta phải viết thêm thành phần này, như vậy lượng ràng buộc cho bài toán ổn định có thể viết như sau:

$$Z = \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{n_{pt}} \int_{-1}^1 (M^{(i)} - M_P^{(i)}) [\chi_i] dx - \sum_{k=1}^{sonut} F_k X_k \rightarrow \min \quad (3.22a)$$

hay

$$\delta Z = \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{n_{pt}} \int_{-1}^1 (M^{(i)} - M_p^{(i)}) \delta \chi_i dx - \sum_{k=1}^{sonut} F_k \delta X_k \rightarrow \min \quad (3.22b)$$

Gọi  $n_{cv}$  là số thông số chuyển vị tại các nút của thanh có chuyển vị;  $n_{gx}$  là số thông số góc xoay tại các nút của thanh có góc xoay. Dựa vào điều kiện này ta sẽ xây dựng được ma trận độ cứng của thanh có bậc:  $n \times n$  ( $n = n_{cv} + n_{gx}$ ) (sau khi bỏ đi những hàng và cột tương ứng có chuyển vị hoặc góc xoay bằng không).

Ngoài ra, cần đảm bảo điều kiện liên tục của chuyển vị còn điều kiện liên tục về góc xoay được xét thêm bằng cách đưa vào các điều kiện ràng buộc.

$$\left( \frac{dy_i}{dx} \Big|_{nut2-cua-pt-thu-i} \right) - \left( \frac{dy_{i+1}}{dx} \Big|_{nut1-cua-pt-thu-i+1} \right) = 0 \quad (3.23)$$

Như vậy ma trận độ cứng của của thanh được mở rộng thêm  $(n_{pt} - 1)$  hàng và  $(n_{pt} - 1)$  cột.

Theo phương pháp chuyển vị cưỡng bức tại một vị trí (nút) nào đó của thanh, ta cho lệch khỏi vị trí cân bằng một chuyển vị  $y_0$ . Chẳng hạn tại nút thứ  $\underline{k}$  ta cho một chuyển vị cưỡng bức  $y_0$  ta có:

$$w \Big|_{x_k} - y_0 = 0 \quad (3.24)$$

Như vậy ma trận độ cứng của phần tử lại được mở rộng thêm 1 hàng, một cột và lúc này ma trận độ cứng có bậc  $(n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}) \times (n_{cv} + n_{gx} + n_{pt})$  với hệ số trong ma trận độ cứng:

$$k(n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}, k) = 1 \quad (3.25a)$$

$$k(k, n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}) = 1 \quad (3.25b)$$

Ma trận tải trọng tác dụng lúc này có bậc:  $(n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}) \times 1$  với giá trị hệ số  $F(n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}) = y_0$  còn các hệ số còn lại bằng không.

Giải phương trình  $[K]\{X\} = \{F\}$  ta sẽ tìm được các ẩn số là các chuyển vị tại các nút của phần tử và các thừa số Lagrange. Tiếp theo, ta cho thừa số Lagrange tương ứng với chuyển vị cưỡng bức bằng không ta sẽ tìm được giá trị lực P tương ứng là các giá trị tới hạn của lực nén lên thanh.

Trong phần này, luận văn giải bài toán thanh đầu khớp cố định – khớp di động với số phần tử chia bằng 6. Thừa số Lagrange tương ứng với chuyển vị cưỡng bức là:

$$\begin{aligned} \lambda = & -0,72618 \cdot y_0 / l * (0,13512e246 \cdot l^{40} \cdot p^{10} - 0,90202e249 \cdot l^{36} \cdot l^2 \cdot ei \cdot p^9 + \\ & + 0,24127e253 \cdot l^{32} \cdot l^4 \cdot ei^2 \cdot p^8 - 0,33364e256 \cdot l^{28} \cdot l^6 \cdot ei^3 \cdot p^7 + \\ & + 0,25742e259 \cdot l^{24} \cdot l^8 \cdot ei^4 \cdot p^6 - 0,11211e262 \cdot l^{20} \cdot l^{10} \cdot ei^5 \cdot p^5 + \\ & + 0,26904e264 \cdot l^{16} \cdot l^{12} \cdot ei^6 \cdot p^4 - 0,34036e266 \cdot l^{12} \cdot l^{14} \cdot ei^7 \cdot p^3 + \\ & + 0,20866e268 \cdot l^8 \cdot l^{16} \cdot ei^8 \cdot p^2 - 0,52032e269 \cdot l^{18} \cdot ei^9 \cdot p \cdot l^4 + \\ & + 0,34057e270 \cdot l^{20} \cdot ei^{10}) / (-0,12692e245 \cdot p^9 \cdot l^{36} + \\ & + 0,83579e248 \cdot p^8 \cdot l^{32} \cdot ei \cdot l^2 - 0,21962e252 \cdot p^7 \cdot l^{28} \cdot ei^2 \cdot l^4 + \\ & + 0,29655e255 \cdot p^6 \cdot l^{24} \cdot ei^3 \cdot l^6 - 0,22128e258 \cdot p^5 \cdot l^{20} \cdot ei^4 \cdot l^8 + \\ & + 0,91654e260 \cdot p^4 \cdot l^{16} \cdot ei^5 \cdot l^{10} - 0,20281e263 \cdot p^3 \cdot l^{12} \cdot ei^6 \cdot l^{12} + \\ & + 0,22390e265 \cdot ei^7 \cdot p^2 \cdot l^8 \cdot l^{14} - 0,10749e267 \cdot ei^8 \cdot p \cdot l^4 \cdot l^{16} + \\ & + 0,15903e268 \cdot ei^9 \cdot l^{18}) / l^4 \end{aligned}$$

Giải phương trình  $\lambda = 0$  theo ẩn số P với số bậc là 10 ta sẽ tìm được 10 giá trị lực tới hạn  $P_{th}$  (mặc dù ở đây hàm chuyển vị chỉ là đa thức bậc 3), ở đây đưa ra 3 lực tới hạn đầu tiên lần lượt là:

$$P_{th} = 9,8698EI_{min} / l^2;$$

$$P_{th} = 39,480EI_{min} / l^2;$$

$$P_{th} = 88,950EI_{min} / l^2.$$

Ta thấy các kết quả trên rất đúng với kết quả phân tích theo giải tích.

## KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

**Kết luận:** Qua các nội dung đã trình bày ở các chương trong luận văn, có thể rút ra các kết luận sau đây:

1) Dựa trên phương pháp chuyển vị cưỡng bức kết hợp phương pháp nguyên lý cực trị Gauss luận văn đã xây dựng được phương pháp giải cho bài toán ổn định kết cấu công trình theo hai cách tiếp cận bài toán: Phương pháp giải tích; Phương pháp phần tử hữu hạn.

2) Phương pháp chuyển vị cưỡng bức trong phân tích bài toán ổn định kết cấu công trình là phương pháp khi kết cấu chịu lực muốn biết trạng thái chịu lực có ổn định không bằng cách, tại một vị trí nào đó trên kết cấu ta cho một chuyển vị cưỡng bức sau đó ta bỏ ra. Nếu kết cấu trở về trạng thái cân bằng ban đầu ta nói kết cấu ổn định, còn nếu kết cấu không thể trở về trạng thái cân bằng ban đầu thì ta nói kết cấu mất ổn định. Tải trọng tới hạn là tải trọng nhỏ nhất tác dụng lên kết cấu mà tại đó kết cấu bắt đầu mất ổn định.

3) Trên cơ sở của phương pháp chuyển vị cưỡng bức kết hợp với phần mềm Matlab 7.0 luận văn đã viết được các mô đun chương trình tính toán ổn định thanh chịu nén dọc trục dựa trên cách xây dựng bài toán theo phương pháp phần tử hữu hạn.

4) Tất cả các kết quả phân tích ổn định theo cách tiếp cận Phương pháp phần tử hữu hạn đối dựa trên phương pháp chuyển vị cưỡng bức với bài toán phân tích ổn định thanh chịu nén dọc trục với các liên kết hai đầu khác nhau cho thấy kết quả phân tích của phương pháp trong luận văn là tin cậy.

**Kiến nghị:** Có thể sử dụng phương pháp chuyển vị cưỡng bức như một phương pháp mới trong giảng dạy, học tập và nghiên cứu khi phân tích ổn định cho kết cấu.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

### Tiếng Việt

1. Đoàn Văn Duẩn (2011), *Nghiên cứu ổn định đàn hồi của kết cấu hệ thanh có xét đến biến dạng trượt*, Luận án Tiến sĩ kỹ thuật, Đại học Kiến trúc Hà Nội.
2. Vũ Đình Lai, Nguyễn Xuân Lựu, Bùi Đình Nghi (2002), *Sức bền vật liệu*, Nhà xuất bản Giao thông Vận tải.
3. Nguyễn Thị Thùy Liên (2006), *Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss đối với các bài toán động lực học công trình*, Luận văn thạc sĩ kỹ thuật, Đại học Kiến trúc Hà nội.
4. Nguyễn Văn Liên, Nguyễn Phương Thành, Đinh Trọng Bằng (2003), *Sức bền vật liệu*, Nhà xuất bản Xây dựng.
5. Nguyễn Phương Thành (1996), *Phân tích phi tuyến ổn định của dàn phẳng đàn hồi*, Luận văn thạc sĩ kỹ thuật, Đại học Xây dựng Hà nội.
6. Chu Quốc Thắng (1997), *Phương pháp phần tử hữu hạn*, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật.
7. Lê Thọ Trình, Đỗ Văn Bình (2008), *Ổn định công trình*, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật.

### Tiếng Anh

8. S. P. Timoshenko, D. H. Young (1965), *Theory of Structures*, Macgraw-Hill International Editions
9. Stephen P. Timoshenko-Jame M. Gere (1961), *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill Book Company, Inc, New York – Toronto – London.

### Tiếng Nga

10. А. Р. Ржаницын (1982), *Строительная механика*, Москва «Высшая школа».
11. Ж.б.бакиров (2004), *Устойчивость механических систем*, Карагандинский государственный технический университет.
12. А. А. Битюрин (2011), *Лекции по устойчивости стержневых систем*, Оформление. УлГТУ



13. Н.а.алфутов (1978), *Основы расчета на устойчивость упругих систем*, Москва «машиностроение».
14. А. С. Вольмир (1967), *Устойчивость деформируемых систем*, Издательство «Наука» главная редакция физико атематической литературы.
15. С. П. Тимошенко (1971), *Устойчивость стержней пластин и оболочек*, издательство «наука» главная редакция физико-математической литера туры.