

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC DÂN LẬP HẢI PHÒNG**

LƯƠNG ĐỖ TOÀN

**PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN TÍNH KHUNG
CÓ XÉT ĐẾN BIẾN DẠNG TRƯỢT NGANG CHỊU
TÁC DỤNG CỦA TẢI TRỌNG TẬP TRUNG**

Chuyên ngành: **Kỹ thuật Xây dựng Công trình Dân dụng & Công nghiệp**

Mã số: **60.58.02.08**

LUẬN VĂN THẠC SĨ KỸ THUẬT

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS.TS. TRẦN HỮU NGHỊ

Hải Phòng, 2017

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các số liệu, kết quả trong luận văn là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Tác giả luận văn

Lương Đỗ Toàn

LỜI CẢM ƠN

Tác giả xin chân thành cảm ơn các nhà khoa học, các chuyên gia trong và ngoài trường Đại học Dân lập Hải phòng đã tạo điều kiện giúp đỡ, quan tâm góp ý cho bản luận văn được hoàn thiện hơn. Đặc biệt, tác giả luận văn xin trân trọng bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất đối với GS.TS Trần Hữu Nghị vì đã tận tình giúp đỡ và cho nhiều chỉ dẫn khoa học có giá trị cũng như thường xuyên động viên, tạo mọi điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu hoàn thành luận văn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn các cán bộ, giáo viên của Khoa xây dựng, Phòng đào tạo Đại học và Sau đại học - trường Đại học Dân lập Hải phòng, và các đồng nghiệp đã tạo điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tác giả trong quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tác giả luận văn

Lương Đỗ Toàn

MỤC LỤC

LỜI CAM ĐOAN	i
LỜI CẢM ƠN	iii
MỤC LỤC	iii
MỞ ĐẦU	1
CHƯƠNG 1.CÁC NGUYÊN LÝ BIẾN PHÂN THƯỜNG DÙNG TRONG CƠ HỌC CÔNG TRÌNH	2
1.1. Các liên kết cơ học [14]	2
1.2. Phương pháp năng lượng	3
1.3. Các phương pháp biến phân năng lượng thường dùng	7
1.3.1. Nguyên lý thế năng biến dạng cực tiểu - nguyên lý Castiliano (1847-7 1884).....	7
1.3.2 Nguyên lý công bù cực đại.....	13
1.3.3. Nguyên lý công ảo	16
CHƯƠNG 2.LÝ THUYẾT DÀM CÓ XÉT ĐẾN BIẾN DẠNG TRƯỢT NGANG	19
2.1. Lý thuyết dầm Euler – Bernoulli.....	19
2.1.1. Dầm chịu uốn thuần túy phẳng	19
2.1.2. Dầm chịu uốn ngang phẳng	23
2.2. Lý thuyết dầm có xét biến dạng trượt ngang	30
CHƯƠNG 3 PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN ĐỐI VỚI KHUNG PHẪNG CHỊU UỐN CÓ XÉT ĐẾN BIẾN DẠNG TRƯỢT NGANG	36
3.1. PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN	36
3.3. Giải bài toán khung có xét đến biến dạng trượt ngang bằng phương pháp phần tử hữu hạn.....	46

3.3.1. Bài toán khung	46
3.4. Các ví dụ tính toán khung	47
KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ	80
KẾT LUẬN	80
KIẾN NGHỊ	80
Danh mục tài liệu tham khảo	80

MỞ ĐẦU

Phương pháp phần tử hữu hạn là phương pháp được xây dựng dựa trên ý tưởng rời rạc hóa công trình thành những phần tử nhỏ (số phần tử là hữu hạn). Các phần tử nhỏ được nối lại với nhau thông qua các phương trình cân bằng và các phương trình liên tục. Để giải quyết bài toán cơ học kết cấu, có thể tiếp cận phương pháp này theo mô hình gồm: Mô hình chuyển vị, xem chuyển vị là đại lượng cần tìm và hàm nội suy biểu diễn gần đúng dạng phân bố của chuyển vị trong phần tử; Mô hình cân bằng, hàm nội suy biểu diễn gần đúng dạng phân bố của ứng suất hay nội lực trong phần tử và mô hình hỗn hợp, coi các đại lượng chuyển vị và ứng suất là hai yếu tố độc lập riêng biệt. Các hàm nội suy biểu diễn gần đúng dạng phân bố của cả chuyển vị lẫn ứng suất trong phần tử.

Đối tượng, phương pháp và phạm vi nghiên cứu của đề tài

Trong luận văn này, tác giả sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn theo mô hình chuyển vị để xây dựng và giải bài toán khung phẳng chịu tác dụng của tải trọng tĩnh tập trung.

Mục đích nghiên cứu của đề tài

“Xác định nội lực và chuyển vị của khung phẳng có xét biến dạng trượt ngang chịu tải trọng tĩnh tập trung bằng phương pháp phần tử hữu hạn”

Nhiệm vụ nghiên cứu của đề tài

1. Tìm hiểu và giới thiệu các phương pháp giải bài toán cơ học kết cấu hiện nay.
2. Trình bày lý thuyết dầm Euler - Bernoulli và lý thuyết dầm có xét đến biến dạng trượt ngang.
3. Trình bày phương pháp phần tử hữu hạn và áp dụng để giải bài toán khung phẳng, chịu tác dụng của tải trọng tĩnh tập trung.
4. Lập chương trình máy tính điện tử cho các bài toán nêu trên.

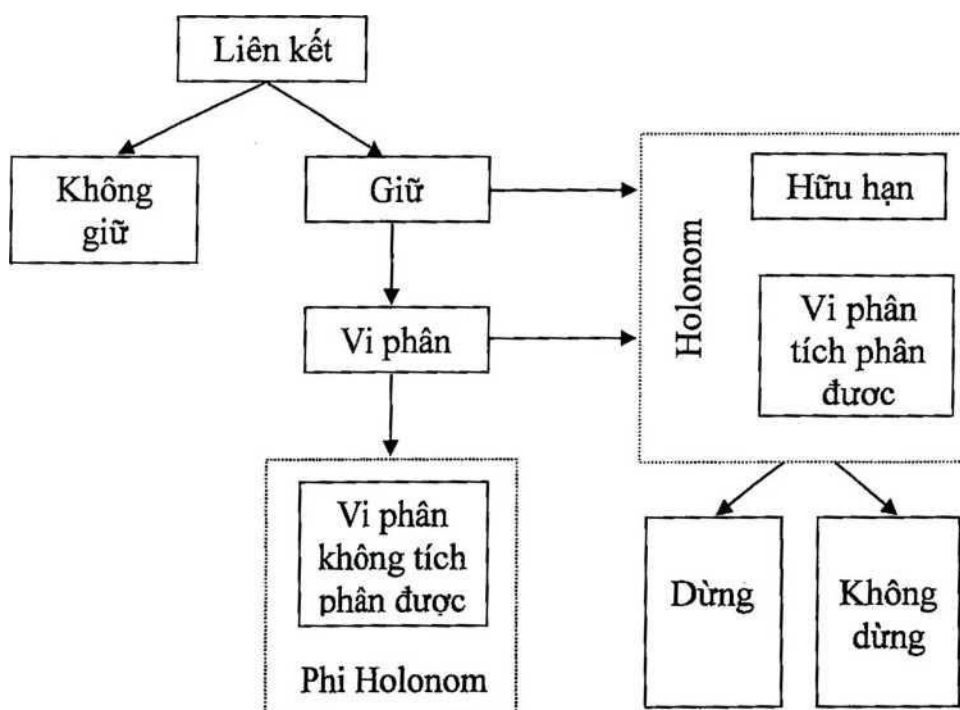
CHƯƠNG 1.

CÁC NGUYÊN LÝ BIẾN PHÂN THƯỜNG DỪNG TRONG CƠ HỌC CÔNG TRÌNH

1.1. Các liên kết cơ học [14]:

Các ràng buộc, các hạn chế đối với chuyển động của hệ chất điểm đang xét do sự tồn tại của các chất điểm khác trong không gian được gọi là liên kết cơ học.

Các liên kết cơ học thường dùng được biểu thị dưới dạng các hàm, bất phương trình hoặc phương trình vi phân. Sơ đồ phân loại các liên kết được trình bày như hình 1.1 dưới đây:



Hình 1.1. Phân loại các liên kết

Trên sơ đồ hình 1.1, các liên kết không giữ là các liên kết được biểu thị bằng các bất phương trình hoặc các bất phương trình vi phân. Các liên kết giữ được biểu thị bằng các phương trình hoặc các phương trình vi phân.

Các tài liệu và giáo trình cơ học giải tích hiện nay chỉ nghiên cứu cơ hệ có liên kết giữ (liên kết hai chiều).

1.2. Phương pháp năng lượng:

Trong cơ học thường dùng các nguyên lý biến phân năng lượng. Năng lượng là đại lượng vô hướng (scalar), không phải là đại lượng vectơ cho nên sử dụng năng lượng để xây dựng phương trình cân bằng thuận tiện và đơn giản hơn nhiều so với việc dùng lực và chuyển vị là những đại lượng vectơ. Đối với cơ hệ không tiêu hao (no damping) thì năng lượng của cơ hệ bao gồm động năng T và thế năng Π . Động năng được xác định theo khối lượng và vận tốc chuyển động, còn thế năng Π bao gồm thế năng biến dạng và công của các trường lực, phụ thuộc vào chuyển vị. Trường lực là lực có thể như lực trọng trường. Các lực ngoài tác dụng lên cơ hệ là lực không thế.

Theo nguyên lý bảo toàn năng lượng thì:

$$T + \Pi = \text{const} \quad (1.1)$$

Từ biểu thức (1.1) suy ra tốc độ thay đổi năng lượng phải bằng không:

$$\frac{d}{dt}(T + \Pi) = 0$$

Đối với bài toán tĩnh, $T = 0$, do đó

$$\Pi = \text{const}$$

Thế năng Π có thể biểu thị qua ứng suất và nội lực cũng có thể biểu thị qua chuyển vị và biến dạng.

Dựa trên nguyên lý bảo toàn năng lượng, ta có phương trình Lagrange - phương trình Lagrange là phương trình vi phân của chuyển động được biểu thị qua các tọa độ tổng quát (các chuyển vị tổng quát).

Gọi T là động năng và Π là thế năng của hệ, các q_i là các chuyển vị tổng quát và Q_i là các lực tác động (lực không thế - các lực ngoài tác dụng lên hệ, lực trọng trường là lực thế) thì phương trình Lagrange có dạng:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i, (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (1.4)$$

trong đó: $q_i = \frac{\partial q_i}{\partial t}$ là vận tốc của chuyển động

Đối với mỗi chuyển vị q_i sẽ có một phương trình Lagrange. Động năng trong tọa độ tổng quát là hàm của vận tốc và có thể là hàm của cả chuyển vị tổng quát.

Thế năng toàn phần của hệ bao gồm thế năng biến dạng, thế năng của lực có thế và công của ngoại lực.

Phương trình Lagrange áp dụng cho cơ hệ chất điểm (hệ rời rạc) cũng như cơ hệ môi trường liên tục.

Để thấy rõ điều này, sau đây trình bày ví dụ sử dụng phương trình Lagrange để xây dựng phương trình chuyển động của dầm Euler-Bemoulli:

Ví dụ 1. Dựa vào phương pháp năng lượng để xây dựng phương trình vi phân chuyển động của dầm Euler-Bemoulli.

Lý thuyết dầm Euler-Bemoulli đưa bài toán hai chiều về bài toán một chiều với chuyển động của dầm là độ võng của trục dầm $w(x)$. Nội lực trong dầm là mômen uốn M được xác định theo liên hệ sau:

$$M + EJ \frac{d^2 \omega}{dx^2} = 0 \quad (1.5)$$

Trong đó:

q là ngoại lực phân bố tác dụng trên dầm.

EJ được gọi là độ cứng uốn của tiết diện dầm.

Phương trình (1.5) là phương trình liên hệ giữa nội lực mômen uốn M

và biến dạng uốn (độ cong của đường đàn hồi) $\chi = -\frac{d^2 \omega}{dx^2}$ của dầm

Theo phương trình Lagrange, ta xác định động năng và thế năng biến dạng của dầm như sau:

Gọi W_i là chuyển vị (tổng quát) của điểm i của dầm và q_i là lực tác dụng tại điểm i của dầm và m_i là khối lượng.

Động năng của dầm:

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m w_i^2 dx \quad \text{trong đó: } w_i = \frac{\partial w_i}{\partial t} \quad (1.6)$$

Thế năng biến dạng của dầm chịu uốn:

$$\Pi = \sum_{i=1}^n EJ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_i^2 \quad (1.7)$$

Dấu tổng lấy tất cả các điểm i của dầm. Phương trình Lagrange đối với dầm có dạng (viết cho điểm i của dầm):

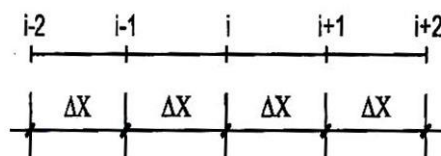
$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial w_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial w} + \frac{\partial \Pi}{\partial w_i} = q_i$$

Ta tính hai thành phần đầu của phương trình (1.8) như sau:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial w_i} \right) - \frac{\partial}{\partial t} m_i w_i = m_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = m_i w_i \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial w_i} = 0$$

Để tính thế năng biến dạng có thể dùng phương pháp sai phân hữu hạn (hình 1.2)



Hình 1.2. Bước sai phân

Bởi vì độ võng w_i của dầm chỉ có mặt trong biểu thức thế năng biến dạng của ba điểm liên tiếp $i-1$, i và $i+1$ cho nên chỉ cần tính thế năng biến dạng của dầm (1.7) cho ba điểm này, Δx là khoảng cách giữa các điểm.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} EJ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_i^2 &= \frac{1}{2} EJ \left(\frac{w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}}{\Delta x^2} \right)^2 \\ \frac{1}{2} EJ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{i-1}^2 &= \frac{1}{2} EJ \left(\frac{w_{i-2} - 2w_{i-1} + w_i}{\Delta x^2} \right)^2 \\ \frac{1}{2} EJ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{i+1}^2 &= \frac{1}{2} EJ \left(\frac{w_i - 2w_{i+1} + w_{i+2}}{\Delta x^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Tổng cộng ba phương trình trên cho ta thế năng của dầm để tính w_i . Ta tính

$\frac{\partial \Pi}{\partial w_i}$ của phương trình (1.8):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial w_i} &= EJ \left(\frac{-2w_{i-1} + 4w_i - 2w_{i+1} + w_{i-2} - 2w_{i-1} + w_i + w_i - 2w_{i+1} + w_{i+2}}{\Delta x^4} \right) \\ &= EJ \left(\frac{w_{i-2} + 4w_i - 6w_{i+1} - 4w_{i+1} - 2w_{i-1} + w_{i+2}}{\Delta x^4} \right) = EJ \frac{\Delta_i^4}{\Delta x^4} \Big|_i \end{aligned}$$

Biểu thức (1.11) biểu thị sai phân hữu hạn của $EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \Big|_i$ (1.11)

Cộng biểu thức (1.9) và biểu thức (1.11) nhận được phương trình Lagrange đối với chuyển vị w_i

$$m \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = q_i \quad (1.12)$$

Điểm i là bất kỳ nên nhận được phương trình vi phân cân bằng của dầm

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \Big|_i = q_i \quad (1.13)$$

Đối với bài toán tĩnh, động năng $T = 0$ ta có:

$$EJ \frac{d_4 w}{dx^4} = q \quad (1.14)$$

Biểu thức (1.14) là phương trình chuyển động của dầm.

Như vậy ta thấy từ phương trình Lagrange dễ dàng nhận được phương trình chuyển động của dầm.

Ngoài việc sử dụng phương trình Lagrange, ta có thể sử dụng các nguyên lý khác để xây dựng các phương trình cân bằng của cơ hệ.

1.3. Các phương pháp biến phân năng lượng thường dùng:

Các phương trình cân bằng của cơ hệ có thể viết dưới dạng ứng suất (hoặc nội lực) hoặc dưới dạng chuyển vị.

Trong trường hợp dùng ứng suất làm ẩn thì ta có nguyên lý biến phân sau :

1.3.1. Nguyên lý thế năng biến dạng cực tiểu - nguyên lý Castiliano (1847-1884):

Nguyên lý phát biểu như sau:

Trong tất cả các trạng thái cân bằng lực có thể thì trạng thái cân bằng thực xảy ra khi thế năng biến dạng là cực tiểu.

Trạng thái cân bằng lực có thể là trạng thái mà các lực tác dụng lên phân tử thỏa mãn các phương trình cân bằng. Đối với bài toán hai chiều (bài toán phẳng), ta viết nguyên lý trên dưới dạng sau:

$$\min_V \int \frac{1}{E} \left[\left(\frac{\sigma_x^2}{E} + \frac{\sigma_y^2}{2} \right) - \mu \sigma_x \sigma_y + (1 + \mu) \tau_{xy}^2 \right] dV \quad (1.15)$$

Trong đó V là diện tích hệ cần tính.

Với ràng buộc :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (1.15a)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = 0 \quad (1.15b)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Trong bài toán trên, hàm mục tiêu là thế năng biến dạng đàn hồi biểu diễn qua ứng suất của bài toán phẳng. Hai phương trình cân bằng (1.15a), (1.15b) không xét đến lực khối (ví dụ trọng lượng của phân tử).

Đây là bài toán cực trị có ràng buộc. Các bài toán cực trị có ràng buộc trong toán học có thể được biến đổi thành bài toán không có ràng buộc bằng phương pháp thừa số Lagrange. Bằng cách dùng thừa số Lagrange $\lambda_1(x, y), \lambda_2(x, y)$, viết phiếm hàm Lagrange mở rộng để đưa về bài toán trên về bài toán không ràng buộc như sau:

$$\begin{aligned} \min \int_V \frac{1}{E} \left[\left(\frac{\sigma_x^2}{E} + \frac{\sigma_y^2}{2} \right) - \mu \sigma_x \sigma_y + (1 + \mu) \tau_{xy}^2 \right] dV \\ + \int_V \lambda_1(x, y) \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) dV + \int_V \lambda_2(x, y) \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \right) dV \end{aligned} \quad (1.16a)$$

$\lambda_1(x, y), \lambda_2(x, y)$ là thừa số Lagrange và cũng là ẩn chưa biết của bài toán.

Do $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ nên ta có thể viết lại (1.16) như sau:

$$\begin{aligned} \min \int_V \frac{1}{E} \left[\left(\frac{\sigma_x^2}{E} + \frac{\sigma_y^2}{2} \right) - \mu \sigma_x \sigma_y + (1 + \mu) \left(\frac{\tau_{xy} + \tau_{yx}}{2} \right)^2 \right] dV \\ + \int_V \lambda_1(x, y) \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) dV + \int_V \lambda_2(x, y) \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \right) dV \end{aligned}$$

Theo phép tính biến phân, từ phiếm hàm (1.16a), lấy biến phân theo các ứng suất pháp: σ_x, σ_y các ứng suất tiếp: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ và thừa số Lagrange : $\lambda_1(x, y), \lambda_2(x, y)$ ta nhận được hệ 6 phương trình sau :

$$\frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y) - \frac{\partial \lambda_1(x, y)}{\partial x} = 0 \quad (1.16b)$$

$$\frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x) - \frac{\partial \lambda_2(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (1.16c)$$

$$\frac{1 + \mu}{2E} (\tau_{xy} + \tau_{yx}) - \frac{\partial \lambda_1(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (1.16d)$$

$$\frac{1 + \mu}{2E} (\tau_{yx} + \tau_{xy}) - \frac{\partial \lambda_2(x, y)}{\partial x} = 0 \quad (1.16e)$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (1.16f)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \quad (1.16g)$$

Trong bài toán này, do có ràng buộc : ứng suất tiếp $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, nên từ hệ phương trình trên ta có được 5 phương trình cân bằng để xác định được các ứng suất và chuyển vị của cơ hệ.

Mặt khác, cộng hai phương trình (1.16d) và (1.16e), ta được:

Từ biểu thức (11.6b), (11.6c) và (11.6h) thấy rằng $\lambda_1(x,y)$ và $\lambda_2(x,y)$ có thứ nguyên là chuyển vị, hơn nữa $\lambda_2(x,y)$ là chuyển vị ngang theo phương x và là chuyển vị thẳng đứng theo phương y. Phương trình (1.16h) là phương trình liên hệ giữa ứng suất tiếp và biến dạng trượt ε_{xy} , hai phương trình (11.6b) và (11.6c) xác định biến dạng ε_x và ε_y qua ứng suất của trường đàn hồi.

Trong trường hợp dùng ứng suất làm ẩn, ta cần loại bỏ hai hàm ẩn $\lambda_1(x,y)$ và $\lambda_2(x,y)$ trong hệ 6 phương trình từ (1.16b) đến (1.16g) nêu trên để chỉ còn các phương trình theo ẩn là ứng suất.

Bốn phương trình đầu của hệ 6 phương trình từ (1.16b) đến (1.16g) nêu trên có thể dẫn về một phương trình của ứng suất như sau:

Đạo hàm phương trình (1.16b) theo y và kết hợp với phương trình (1.16d), ta nhận được :

$$\frac{\partial}{\partial y}(\sigma_x - \mu\sigma_y) = E \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \lambda_1(x,y)}{\partial x} = E \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \lambda_1(x,y)}{\partial y} = \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy} + \tau_{yx}) \quad (1.16k)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_y - \mu\sigma_x) = E \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \lambda_2(x,y)}{\partial y} = E \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \lambda_2(x,y)}{\partial x} = \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx} + \tau_{xy}) \quad (1.16m)$$

Đạo hàm phương trình (1.16k) theo y, ta được:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \mu\sigma_y) = \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\tau_{xy} + \tau_{yx}) \quad (1.16n)$$

Lấy hai vế trái và phải của (1.16n) và (1.16p) cộng với nhau ta có:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \mu\sigma_y) + \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_y - \mu\sigma_x) = (1+\mu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\tau_{yx} + \tau_{xy}) \quad (1.16q)$$

Ta đạo hàm phương trình (1.16f) theo x và đạo hàm phương trình (1.16g) theo y sau đó cộng lại với nhau ta nhận được:

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{yx}}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \quad (1.16r)$$

$$\text{Hay } \frac{\partial^2(\tau_{xy} + \tau_{yx})}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \quad (1.16s)$$

Thay thế biểu thức (1.16s) vào biểu thức (1.16q), ta có:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \mu\sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_y - \mu\sigma_x) = (1+\mu) \left(-\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}\right) \quad (1.16t)$$

$$\text{Hoặc: } \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \quad (1.16u)$$

Biểu thức (1.16u) được rút gọn như sau:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

Như vậy khi loại bỏ các thừa số Lagrange $\lambda_1(x, y), \lambda_2(x, y)$ ta có thể dẫn về hệ 3 phương trình sau:

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (1.17a)$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (1.17c)$$

Trong công thức trên: ∇^2 – toán tử Laplace: $\nabla^2 = \frac{\partial^2(\dots)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\dots)}{\partial y^2}$

Hệ phương trình trên (1.17a), (1.17b), (1.17c) cho ta đầy đủ các phương trình để xác định 3 hàm ẩn là các ứng suất pháp: σ_x, σ_y và các ứng suất tiếp: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

. Phương trình (1.17a) chính là phương trình liên tục viết dưới dạng ứng suất.

Tương tự, sử dụng nguyên lý thế năng biến dạng cực tiểu để xây dựng phương

trình chuyển động của dầm thông như sau:

Ví dụ 2. Xây dựng phương trình vi phân chuyển động của dầm Euler-Bernoulli theo nguyên lý thế năng biến dạng cực tiểu.

Đối với dầm, nguyên lý trên được viết như sau:

$$\min \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{M^2}{EJ} dx \quad (1.18)$$

Với ràng buộc:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q$$

Nội lực cần tìm mômen uốn là hàm phân bố theo chiều dài dầm $M(x)$. Đây là bài toán cực trị có ràng buộc. Bằng cách dùng thừa số Lagrange $\lambda(x)$, viết phiếm hàm Lagrange mở rộng để đưa về bài toán trên về bài toán không ràng buộc như sau:

$$\int_0^1 \frac{1}{2} \frac{M^2}{EJ} dx + \int_0^1 \lambda(x) \left[\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right] dx \quad (1.20)$$

$\lambda(x)$ là thừa số Lagrange và cũng là ẩn chưa biết của bài toán. Theo phép tính biến phân, từ phiếm hàm (1.20) lần lượt lấy biến phân theo $M(x)$ và $\lambda(x)$, ta nhận được hai phương trình sau (phương trình Euler - Lagrange của phép tính biến phân)

$$\frac{M}{EJ} + \frac{d^2 \lambda}{dx^2} = 0 \quad (1.21)$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + q = 0 \quad (1.22)$$

Ta thấy $\lambda(x)$ có thứ nguyên là chuyển vị và đó là độ võng của dầm

Ta có thể viết lại phương trình (1.21) như sau:

$$M = -EJ \frac{d^2 \lambda}{dx^2} \quad (1.21a)$$

Phương trình (1.21a) biểu thị quan hệ giữa nội lực mômen uốn M và độ võng của dầm (chuyển vị) của lý thuyết dầm Euler - Bernoulli như đã trình ở trên.

Lấy đạo hàm hai lần phương trình (1.21a) theo x sau đó thế vào (1.22) ta có

$$EJ \frac{d^4 \lambda}{dx^4} = q \quad (1.21a)$$

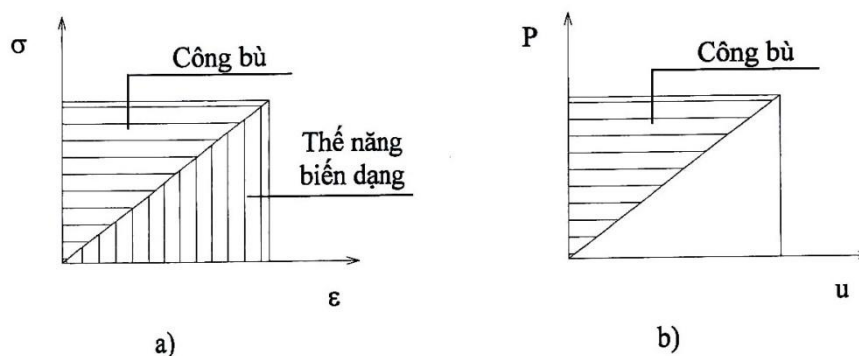
Phương trình (1.23) là phương trình vi phân viết theo độ võng của dầm.

Ta có thể viết lại phương trình (1.21) như sau:

$$EJ \frac{d^4 \lambda}{dx^4} = q \quad (1.23)$$

Phương trình (1.23) là phương trình vi phân viết theo độ võng của dầm và đó là phương trình chuyển động của dầm.

1.3.2 Nguyên lý công bù cực đại



Hình 1.3. Quan hệ giữa $\sigma - \varepsilon$ và $P-u$

a. Quan hệ giữa ứng suất (σ) và biến dạng (ε) của vật liệu đàn hồi tuyến tính

b. Quan hệ giữa lực tác dụng (P) và chuyển vị (u)

Trên hình 1.3 biểu thị quan hệ giữa ứng suất và biến dạng của vật liệu đàn hồi tuyến tính.

Theo hình 1.3a, thế năng biến dạng được tính bằng $\frac{1}{2} \sigma \varepsilon$ được biểu thị bằng đường gạch đứng, công bù được biểu thị bằng đường gạch ngang.

Công bù được tính bằng công của ngoại lực (không có hệ số —) trừ đi thế năng biến dạng.

$$[\text{Công ngoại lực} - \text{thế năng biến dạng}] \rightarrow \max$$

Nguyên lý công bù cực đại được phát biểu như sau:

Trong tất cả các chuyển vị động học khả dĩ thì chuyển vị thực xảy ra khi công bù của ngoại lực là lớn nhất

Chuyển vị động học khả dĩ là chuyển vị thỏa mãn các phương trình liên tục (các liên hệ giữa ứng suất và biến dạng).

Đối với bài toán hai chiều, mỗi điểm có chuyển vị u theo chiều ngang X và v theo chiều đứng y , p_x và p_y là lực tác dụng tương ứng theo chiều ngang X và theo chiều đứng y thì công bù được viết như sau:

$$\left[\int_V (P_x u + p_y v) dV - \Pi \right]$$

Khi tính thế năng biến dạng n , ta chú ý rằng các ứng suất pháp σ_x, σ_y gây ra các biến dạng dài $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ và còn gây ra sự thay đổi thể tích $(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$ cho nên thế năng biến dạng của bài toán hai chiều được viết như sau:

$$\Pi = \int 2G \left[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \frac{\mu}{1-2\mu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2} \varepsilon_{xy}^2 \right] dV \quad (1.25)$$

Trong đó: G là mô đun trượt $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$;

Bây giờ ta viết nguyên lý công bù cực đại cho bài toán hai chiều như sau:

$$\max \left[\int_V (p_x u + p_y v) dV - \int_V 2G \left[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \frac{\mu}{1-2\mu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2} \varepsilon_{xy}^2 \right] dV \right] \quad (1.26)$$

Với ràng buộc là các phương liên hệ giữa chuyển vị và biến dạng:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Thay $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ vào hàm mục tiêu với chú ý $\max[A] = \min[-A]$, ta có:

$$\min \int_V (p_x u + p_y v) dV +$$

$$\min \left[\int 2G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\mu}{1-2\mu} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dV \right] \quad (1.27)$$

Trong phiếm hàm trên chứa hai hàm ẩn là hàm $u(x,y)$; $v(x,y)$ chưa biết.

Sử dụng phép tính biến phân ta nhận được hai phương trình cân bằng sau:

$$G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{G}{1-2\mu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + p_x = 0 \quad (1.28a)$$

$$G \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{G}{1-2\mu} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + p_y = 0 \quad (1.28b)$$

Đó là hai phương trình cân bằng viết theo chuyển vị của bài toán phẳng.

Bây giờ ta viết nguyên lý công bù cực đại cho bài toán dầm chịu uốn như sau:

Ví dụ 3. Sử dụng nguyên lý công bù cực đại xây dựng phương trình chuyển động cho bài toán dầm Euler-Bernoulli.

Xét dầm chịu uốn, nguyên lý công bù cực đại được viết như sau:

$$\min \left[- \int_0^l q w dx + \int_0^l \frac{EJ}{2} \chi^2 dx \right] \quad (1.29)$$

Với ràng buộc:

$$\chi = \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (1.30)$$

χ là biến dạng uốn cũng là độ cong của đường độ võng. Tích phân thứ nhất

trong (1.29) là công toàn phần của ngoại lực (không có hệ số $\frac{1}{2}$), tích phân thứ hai là thế năng biến dạng biểu thị quan biến dạng uốn.

Thay χ từ (1.30) vào (1.29) ta có:

$$\min \left[- \int_0^l q w dx + \int_0^l \frac{EJ}{2} \left(- \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx \right] \quad (1.31)$$

Phiếm hàm trên có hàm độ võng $w(x)$ chưa biết. Bằng phép tính biến phân ta có phương trình Euler sau:

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} - q = 0 \quad (1.32)$$

Phương trình (1.32) là phương trình chuyển động của dầm.

Như vậy, nguyên lý công bù cực đại khác với nguyên lý thế năng biến dạng tối thiểu là sử dụng chuyển vị làm ẩn. Phương pháp phần tử hữu hạn cũng dùng ẩn làm chuyển vị cho nên khi xây dựng phương trình cân bằng cho phần tử (ma trận độ cứng của phần tử) thì thường dùng nguyên lý công bù cực đại.

1.3.3. Nguyên lý công ảo:

Nếu như hệ cân bằng thì tổng hình chiếu của tất cả các lực tác dụng lên hệ lên ba trục của hệ tọa độ Đề các phải bằng không.

$$\sum X = 0 \quad \sum Y = 0 \quad \sum Z = 0 \quad (1.33a)$$

$\sum X, \sum Y, \sum Z$: là tổng hình chiếu của tất cả các lực tác dụng lên ba trục của hệ tọa độ Đề các.

Bây giờ ta viết biểu thức sau:

$$\sum X \delta U + \sum Y \delta V + \sum Z \delta W \quad (1.33b)$$

ở đây xem các $\delta U, \delta V, \delta Z$ là các thừa số bất kỳ.

Nếu như có biểu thức (1.33a) thì ta có biểu thức (1.33b) và ngược lại, nếu như có biểu thức (1.33b) thì nhận được biểu thức (1.33a) bởi vì các $\delta U, \delta V, \delta Z$ là những thừa số bất kỳ.

Áp dụng vào bài toán cơ ta xem U, V, W là các chuyển vị ảo, là các chuyển vị do các nguyên nhân bất kỳ bên ngoài nào khác gây ra và $\delta U, \delta V, \delta Z$ là các biến phân (thay đổi bé) của các chuyển vị ảo. Các chuyển vị ảo này phải tương thích với chuyển vị của hệ đang xét có nghĩa là phải thoả mãn các điều kiện liên kết của hệ.

Ví dụ chuyển vị thực là liên tục, có đạo hàm bậc 1 hoặc bậc 2,... thì chuyển vị ảo cũng phải là liên tục, có đạo hàm bậc 1 hoặc bậc 2,...

Do là chuyển vị ảo, không phải do lực tác dụng gây ra, nên nếu hệ đã cân bằng thì ngoại lực tác dụng và nội lực (nếu có) đều không thay đổi (không thay đổi độ lớn và chiều tác dụng, chỉ thay đổi vị trí đặt lực).

Như vậy, các chuyển vị ảo $\delta U, \delta V, \delta Z$ các đại lượng độc lập với lực tác dụng và từ biểu thức (1.31a), (1.33b) với các tích $\delta U, \delta V, \delta Z$ là công ảo, cho nên ta có nguyên lý công ảo được phát biểu như sau:

Nếu như tổng công của các lực tác dụng của hệ thực hiện trên các chuyển vị ảo bằng không thì hệ ở trạng thái cân bằng.

Chuyển vị ảo là bất kỳ cho nên ta có thể xem chuyển vị ảo là chuyển vị thực. Vì vậy nguyên lý công ảo còn được gọi là nguyên lý công khả dĩ hoặc nguyên lý chuyển vị khả dĩ.

Trong bài toán hai chiều, giả thiết mỗi điểm có chuyển vị u theo chiều ngang x và v theo chiều đứng y , p_x và p_y là lực khối tác dụng theo chiều X và chiều y tương ứng, nguyên lý công ảo được viết như sau:

$$-\int_V p_x \delta u + p_y \delta v) dV + \int_V [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \varepsilon_{xy}] dV = 0 \quad (1.34)$$

$$-\int_V p_x \delta u + p_y \delta v) dV + \int_V [\sigma_x \delta \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \delta \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{xy} \delta (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})] dV = 0 \quad (1.35)$$

Phiếm hàm trên có hai đại lượng biến phân là u và v độc lập với nhau, nên sử dụng phép tính biến phân ta nhận được hai phương trình cân bằng sau:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + p_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + p_y = 0$$

Trên cơ sở nguyên lý công ảo như trên, ta tìm cách xây dựng phương trình chuyển động của dầm Euler-Bemoulli bằng ví dụ sau:

Ví dụ 4. Xây dựng phương trình chuyển động của dầm Euler-Bemoulli bằng nguyên lý công ảo.

Đối với bài toán dầm Euler-Bemoulli, nguyên lý công ảo được viết như sau:

$$\int_0^l M \delta \left(-\frac{d^2 w}{dx^2} \right) dx - \int_0^l q \delta w = 0$$

Phương trình cân bằng của dầm sẽ là:

$$\left(\frac{d^2 w}{dx^2} + q = 0 \right) \quad (1.38)$$

Thay $M = -EJ \frac{d^2 w}{dx^2}$ vào (1.38) ta có phương trình chuyển động của dầm như sau:

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} - q = 0$$

Từ những trình bày trên cho thấy nguyên lý công ảo hay nguyên lý công khả dĩ hay nguyên lý chuyển vị khả dĩ là phương pháp rất thuận tiện để xây dựng phương trình cân bằng của cơ hệ và được sử dụng rất rộng rãi trong cơ học. Nguyên lý công ảo cũng được sử dụng rộng rãi trong tính toán công trình theo phương pháp phần tử hữu hạn.

CHƯƠNG 2.

LÝ THUYẾT DÀM CÓ XÉT ĐẾN BIẾN DẠNG TRƯỢT NGANG

Trong chương này trước tiên trình bày lý thuyết dầm thông thường, lý thuyết dầm Euler - Bernoulli, sau đó giới thiệu lý thuyết dầm có xét biến dạng trượt ngang và phương pháp nghiên cứu nội lực và chuyển vị của hệ dầm chịu uốn có xét biến dạng trượt ngang.

2.1. Lý thuyết dầm Euler – Bernoulli

Dầm chịu uốn là cấu kiện có kích thước tiết diện nhỏ hơn nhiều lần so với chiều dài của nó, trên mặt cắt ngang dầm tồn tại hai thành phần nội lực là mômen uốn M và lực cắt Q . Tải trọng tác dụng lên dầm nằm trong mặt phẳng có chứa đường trung bình của dầm và thẳng góc với trục dầm. Dưới đây ta xét hai trường hợp dầm chịu uốn thuần túy phẳng và uốn ngang phẳng.

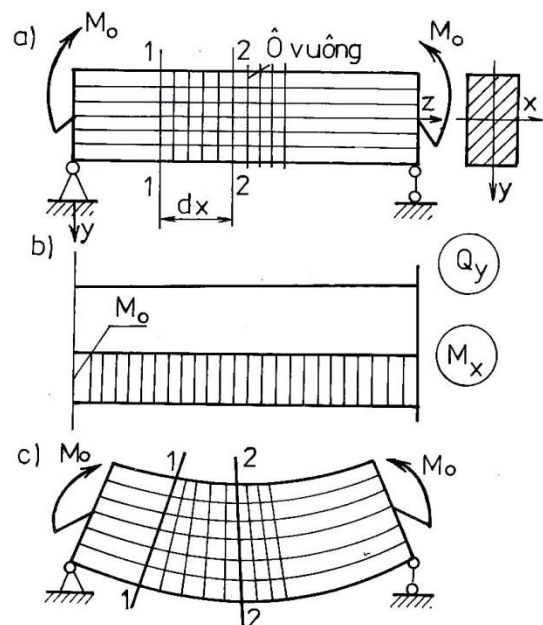
2.1.1. Dầm chịu uốn thuần túy phẳng

Dầm chịu uốn thuần túy phẳng là dầm mà trên mọi mặt cắt ngang dầm chỉ có một thành phần nội lực là mômen uốn nằm trong mặt phẳng quán tính chính trung tâm.

Ứng suất trên mặt cắt ngang

Giả sử dầm có mặt cắt ngang hình chữ nhật (bxh) chịu uốn thuần túy như, hình 2.1a. Ta tiến hành thí nghiệm sau:

Trước khi dầm chịu lực ta vạch lên mặt ngoài dầm những đường thẳng song song và vuông góc với trục dầm tạo nên những ô vuông, hình 2.1a. Sau khi dầm biến dạng, hình 2.1c, ta thấy rằng những đường song song với trục dầm trở thành những đường cong, những đường thẳng vuông góc với trục dầm vẫn thẳng và vuông góc với trục dầm. Từ đó người ta đưa ra hai giả thiết sau đây:



Hình 2.1. Dầm chịu uốn thuần túy

- Mặt cắt ngang dầm ban đầu phẳng và vuông góc với trục dầm, sau biến dạng vẫn phẳng và vuông góc với trục dầm (giả thiết về mặt cắt ngang, giả thiết Bernoulli).
- Trong quá trình biến dạng các thớ dọc của dầm không ép lên nhau và không đẩy xa nhau (giả thiết về các thớ dọc).

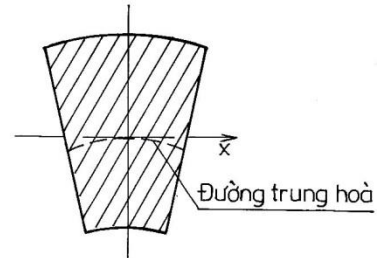
Ngoài ra khi tính toán dầm ta còn dựa vào các giả thiết sau:

- Vật liệu có tính chất liên tục, đồng nhất và đẳng hướng
- Biến dạng của vật thể là biến dạng đàn hồi và đàn hồi tuyệt đối.
- Biến dạng của vật thể do ngoại lực gây ra là nhỏ so với kích thước của chúng.
- Tuân theo nguyên lý độc lập tác dụng

Từ hình 2.1c, ta nhận thấy rằng: khi dầm bị uốn thì các thớ trên co lại, các thớ dưới giãn ra. Do vậy khi chuyển từ thớ co sang thớ giãn sẽ có thớ không co, không giãn. Thớ này gọi là thớ trung hòa. Tập hợp các thớ trung hòa gọi là

lớp trung hòa, giao của lớp trung hòa với mặt cắt ngang gọi là đường trung hòa. Nếu ta xét một mặt cắt ngang nào đó của dầm thì sau khi bị uốn nó sẽ cho hình dạng như hình 2.2.

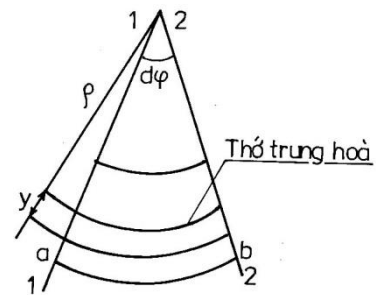
Đường trung hòa của mặt cắt ngang là một đường cong. Vì chuyển vị của các điểm trên mặt cắt ngang của dầm là bé, nên ta coi rằng hình dáng mặt cắt ngang dầm không thay đổi sau khi biến dạng.



Hình 2.2. Mặt cắt ngang dầm

Khi đó đường trung hòa của mặt cắt ngang là đường thẳng và giả sử lấy trục ox trùng với đường trung hòa.

Xét biến dạng của đoạn dầm dz được cắt ra khỏi dầm bằng hai mặt cắt 1-1 và 2-2. Sau biến dạng hai mặt cắt này làm với nhau một góc $d\varphi$ và thớ trung hòa có bán kính cong là ρ (hình 2.3).



Hình 2.3. Hai mặt cắt sau khi uốn

Theo tính chất của thớ trung hòa ta có:

$$dz = \rho d\varphi \quad (2.1)$$

Ta xét biến dạng của thớ ab cách thớ trung hòa một khoảng là y , ta có:

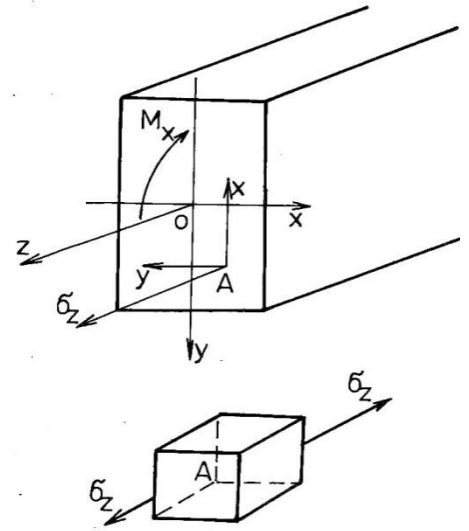
$$\overline{ab}_t = dz = \rho d\varphi; \quad \overline{ab}_s = dz = (\rho + y)d\varphi \quad (2.2)$$

Từ (2.2) ta suy ra:

$$\varepsilon_z = \frac{\overline{ab}_s - \overline{ab}_t}{\overline{ab}_t} = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi}; \quad (2.3)$$

Xét ứng suất tại điểm bất kỳ $A(x,y)$ trên mặt cắt ngang nào đó của dầm (hình 2.4a). Trong đó trục oy là trục đối xứng của mặt cắt ngang, trục ox trùng với đường trung hòa của mặt cắt ngang.

Ta tách ra tại A một phân tử hình hộp bằng các mặt cắt song song với các mặt tọa độ (hình 2.4b). Khi đó theo giả thiết thứ nhất thì góc của phân tử sau biến dạng không đổi, nên ta suy ra trên các mặt của phân tử không có ứng suất tiếp. Mặt khác theo giả thiết thứ hai thì trên các mặt của phân tử song song với trục Z không có ứng suất pháp, nghĩa là $\sigma_x = \sigma_y = 0$. Do vậy trên các mặt của phân tử chỉ có ứng suất pháp σ_z và theo định luật Hooke ta có:



Hình 2.4. Phân tử A

$$\sigma_z = E\varepsilon_z = E \frac{y}{\rho}; \quad (2.4)$$

Dầm chịu uốn thuần túy nên ta có

$$N_z = \int_F \sigma_z dF = 0 \quad (2.5)$$

$$M_x = \int_F \sigma_z y dF = 0 \quad (2.6)$$

Thay (2.4) vào (2.5) ta được

$$N_z = \int_F E \frac{y}{\rho} dF = \frac{E}{\rho} \int_F y dF = 0 = \frac{E}{\rho} S_x = 0 \quad (2.7)$$

$S_x = 0$ nghĩa là ox là trục quán tính chính trung tâm. Vì y là trục đối xứng nên suy ra oxy là trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt ngang. Thay (2.4) vào (2.6) ta được:

$$M_x = \int_F \sigma_z y dF = \frac{E}{\rho} \int_F E \frac{y^2}{\rho} dF = \frac{E}{\rho} J_x \quad (2.8)$$

Suy ra:
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x} \quad (2.9)$$

EJ_x là độ cứng của dầm khi uốn. Thay (2.9) vào (2.4) ta có:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{EJ_x} y \quad (2.10)$$

Từ công thức (2.10) ta có các nhận xét:

- Luật phân bố của σ_z trên mặt cắt ngang dầm là bậc nhất đối với y .
- Những điểm trên mặt cắt ngang có cùng tung độ y (nghĩa là những điểm nằm trên đường thẳng song song với trục trung hòa x) sẽ có trị số bằng nhau và nó tỉ lệ với khoảng cách từ các điểm đó tới trục trung hòa.
- Những điểm nằm trên trục trung hòa $y=0$ có trị số $\sigma_z = 0$. Những điểm xa trục trung hòa nhất sẽ có trị số ứng suất lớn nhất và bé nhất.

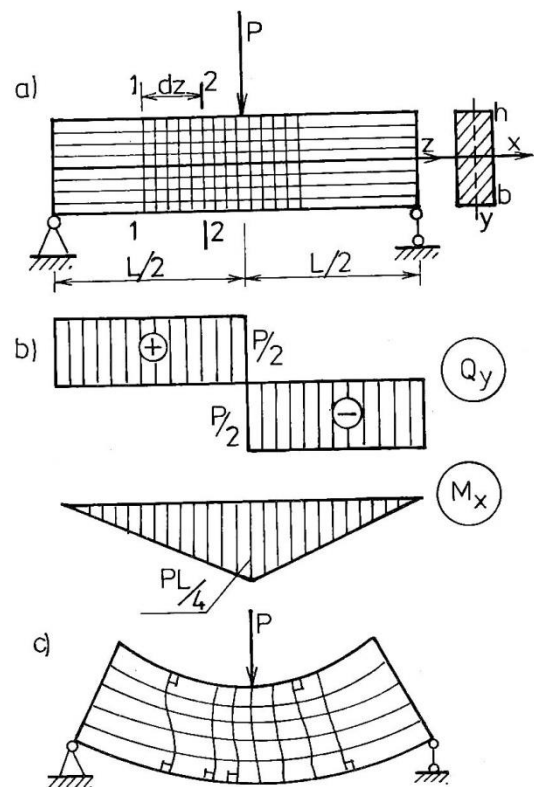
2.1.2. Dầm chịu uốn ngang phẳng

Dầm chịu uốn ngang phẳng là dầm mà các mặt cắt ngang của nó có các thành phần nội lực là lực cắt Q_y và mômen uốn M_x nằm trong mặt phẳng quán tính chính trung tâm của dầm.

Ứng suất trên mặt cắt ngang

Xét dầm chịu uốn ngang phẳng như trên hình 2.5a. Ta quan sát thí nghiệm sau:

Trước khi dầm chịu lực ta vạch lên mặt ngoài dầm những đường thẳng song song và vuông góc với trục dầm tạo. Sau khi dầm biến dạng ta thấy rằng những đường thẳng song song với trục dầm trở thành những đường cong nhưng vẫn còn song song với trục dầm, những đường thẳng vuông góc với trục dầm không còn thẳng và vuông góc với trục dầm nữa hình 2.5c.

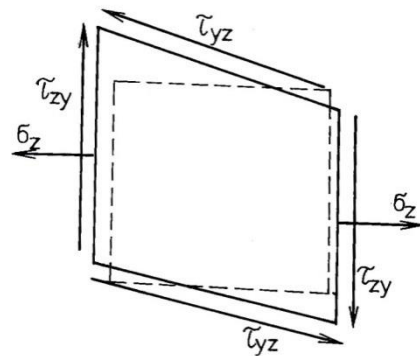


Hình 2.5. Dầm chịu uốn ngang phẳng

Điều đó chứng tỏ mặt cắt ngang dầm sau biến dạng bị vênh đi. Nếu tại điểm A bất kỳ của dầm ta tách ra một phân tố bằng các mặt song song với các mặt tọa độ thì sau khi biến dạng các góc vuông của phân tố không còn vuông nữa, nghĩa là phân tố có biến dạng góc. Suy ra trên các mặt phân tố sẽ có ứng suất tiếp.

Trong lý thuyết đàn hồi người ta đã chứng minh được rằng trên các mặt của phân tố có các ứng suất sau:

$\sigma_y, \sigma_z, \tau_{zy}, \tau_{yz}$. Nhưng thực tế cho thấy rằng ứng suất pháp σ_y , rất bé so với các thành phần khác nên ta bỏ qua, nghĩa là khi dầm chịu uốn ngang phẳng thì trên mặt cắt ngang dầm có hai thành phần ứng suất là: ứng suất pháp σ_z , và ứng suất tiếp hình 2.6.



Hình 2.6. Phân tố dầm chịu uốn ngang phẳng

a. Ứng suất pháp σ_z :

Trong mục trước nhờ giả thiết Bernoulli về mặt cắt ngang phẳng ta đã đưa tới công thức tính ứng suất pháp σ_z trên mặt cắt ngang dầm là:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{EJ_x} y \quad (2.11)$$

Trong trường hợp dầm bị uốn ngang phẳng thì sau biến dạng mặt cắt ngang dầm bị vênh đi, nghĩa là không còn phẳng nữa. Như vậy mọi lập luận để đưa tới công thức (2.11) để tính ứng suất pháp σ_z không phù hợp nữa. Tuy nhiên trong lý thuyết đàn hồi người ta đã chứng minh được rằng đối với dầm chịu uốn ngang phẳng ta vẫn có thể dùng công thức (2.11) để tính ứng suất σ_z mà sai số không lớn lắm.

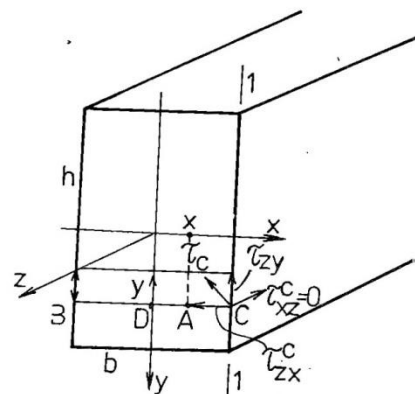
b. Ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang dầm chịu uốn ngang phẳng (công thức Durapski):

Giả sử có dầm mặt cắt ngang là hình chữ nhật hẹp ($b < h$) chịu uốn ngang phẳng hình 2.7.

Ta xét ứng suất tiếp tại điểm bất kỳ $A(x,y)$ trên mặt cắt ngang 1-1 nào đó của dầm. Qua điểm A ta kẻ đường thẳng song song với trục ox cắt biên của mặt cắt tại B và C, cắt trục oy tại D. Trước hết ta xét ứng suất tiếp tại B,C và D.

Ứng suất tiếp tại C là τ_c , giả sử có phương bất kỳ trong 1-1.

Phân τ_c thành hai thành phần: τ_{zx}^c và τ_{zy}^c . Nhưng theo định luật đối ứng của ứng suất tiếp thì ta có: $\tau_{zx}^c = \tau_{xz}^c = 0$ ($\tau_{xz}^c = 0$ vì mặt bên dầm theo giả thiết không có tải trọng tác dụng) hình 2.7.



Hình 2.7.

Do vậy $\tau_c = \tau_{zy}^c$ có phương song song với oy . Do tính chất đối xứng ta suy ra $\tau_B = \tau_{zy}^B = \tau_{zy}^c$.

Cũng do tính chất đối xứng và giả thiết hình chữ nhật hẹp nên $\tau_D = \tau_{yz}^D = \tau_{yz}^B = \tau_{yz}^c$.

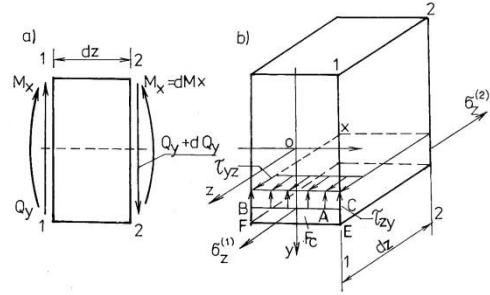
Do giả thiết hình chữ nhật hẹp nên $CD=b/2$ càng nhỏ mà ứng suất tiếp tại C và D chỉ có phương y . Do vậy ta suy ra là ứng suất tiếp tại A chỉ có phương y : $\tau_A = \tau_{yz}^A$. Đồng thời:

$$\tau_{yz}^A = \frac{\tau_{yz}^c + \tau_{yz}^D}{2} = \tau_{yz}^c = \tau_{yz}^D$$

Như vậy ứng suất tiếp của các điểm trên đường thẳng BC qua A chỉ có phương y và trị số bằng nhau. Nghĩa là ứng suất tiếp trên BC phân bố đều với

cường độ là τ_{zy} . Để tính τ_{zy} ta cắt một đoạn dầm dz bằng hai mặt cắt 1-1 và 2-2, hình 2.8.

Sau đó cắt đoạn dầm dz bằng một mặt phẳng qua điểm A song song với trục Z. Mặt phẳng này chia đoạn dầm dz ra làm hai phần. Nếu gọi BC = bc và dt (BCEF)=Fc thì từ điều kiện cân bằng của phần dưới của đoạn dz hình...ta suy ra:



Hình 2.8.

$$\sum Z = \int_{Fc} \sigma_z^{(1)} dF - \int_{Fc} \sigma_z^{(2)} dF + \tau_{yz} bcdz = 0$$

Mặt khác ta lại có

$$\sigma_z^{(1)} = \frac{M_x}{J_x} y \quad (a)$$

$$\sigma_z^{(2)} = \frac{M_x + dM_x}{J_x} y \quad (b)$$

Thay (b) vào (a) ta được:

$$\begin{aligned} \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \frac{1}{bc \cdot dz} \left[\int_{Fc} \frac{M_x + dM_x}{J_x} y dF - \int_{Fc} \frac{M_x}{J_x} y dF \right] = \\ &= \frac{1}{J_x \cdot bc} \frac{dM_x}{dz} \int_{Fc} y dF \end{aligned} \quad (c)$$

$$\text{Ta có: } \frac{dM_x}{dz} = Q_y; \int_{Fc} y dF = S_x^c \quad (d)$$

S_x^c : gọi là mômen tĩnh của phần diện tích Fc đối với trục x. Thay (d) vào (c) ta suy ra:

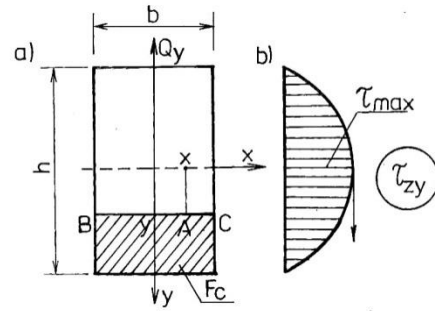
$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^c}{J_x \cdot bc} \quad (2.12)$$

Trong đó bc gọi là bề rộng của mặt cắt ngang qua điểm cần tính ứng suất A. Công thức (2.12) gọi là công thức Durapski. Từ công thức này và theo điều kiện cân bằng của phần thanh ở trên ta suy ra là τ_{yz} cùng chiều với trục z,

τ_{zy} cùng chiều với Q_y . Nghĩa là dấu của τ_{zy} và Q_y như nhau. Do vậy ở đây chỉ cần tính trị số của τ_{zy} theo (2.12) còn dấu của nó được xác định từ biểu đồ lực cắt Q_y .

c. Luật phân bố ứng suất tiếp τ_{zy} đối với mặt cắt hình chữ nhật:

Giả sử mặt cắt ngang dầm chịu uốn ngang phẳng là hình chữ nhật bề rộng b , chiều cao h . Ta đi tìm luật phân bố của ứng suất tiếp τ_{zy} đối với mặt cắt nếu lực cắt tại mặt cắt này là Q_y .



Hình 2.9.

Ta xét điểm bất kỳ $A(x,y)$ trên mặt cắt, ta có $bc=BC=b$.

$$S_x^c = \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot b \left[y + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y\right)\right] = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

Suy ra:
$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^c}{J_x \cdot bc} = \frac{Q_y \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{J_x \cdot b} = \frac{Q_y}{2J_x} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \quad (2.13)$$

Từ (2.13) ta nhận thấy rằng: Luật phân bố τ_{zy} trên mặt cắt là parabol bậc hai đối với y . Với $y=0$ (những điểm nằm trên trục trung hòa ox) thì:

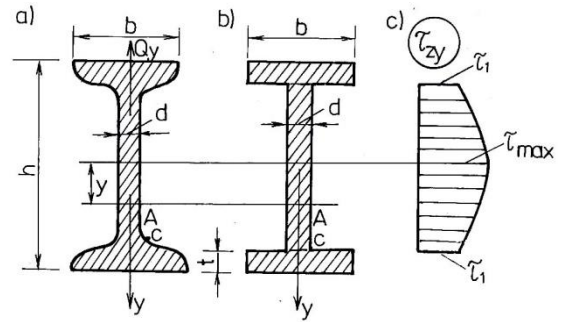
$$\tau_{zy}(0) = \tau_{max} = \frac{Q_y h^2}{8J_x} = \frac{3Q_y}{2F} \quad (2.14)$$

$$y = \pm \frac{h}{2} \text{ thì } \tau_{zy} = 0$$

Từ đó ta có thể vẽ được biểu đồ τ_{zy} cho mặt cắt như, hình 2.9b.

d. Luật phân bố ứng suất tiếp τ_{zy} đối với mặt cắt hình chữ I:

Xét dầm chịu uốn ngang phẳng có mặt cắt ngang hình chữ I hình 2.10. Để đơn giản ta có thể coi mặt cắt bao gồm ba hình chữ nhật ghép lại: Hình chữ nhật long rộng d , cao $(h-2t)$ và hai hình chữ nhật đế rộng b cao t , hình 2.10b.



Hình 3.10.

Thực tế cho thấy ứng suất tiếp do Q_y gây ra ở phần đế rất bé so với phần lòng. Do vậy ở đây ta chỉ xét sự phân bố ứng suất tiếp τ_{yz} ở phần long mặt cắt chữ I mà thôi.

Ta xét điểm bất kỳ $A(x,y)$ thuộc long ta có: $bc=d$. $S_x^c = S_x - \frac{1}{2}dy^2$

Suy ra:
$$\tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^c}{J_x \cdot bc} = \frac{Q_y (S_x - \frac{1}{2}dy^2)}{J_x \cdot d} \quad (2.15)$$

Từ (2.15) ta nhận thấy rằng: Luật phân bố τ_{zy} của phần lòng mặt cắt chữ I là parabol bậc hai đối với y . Với $y=0$ (những điểm nằm trên trục trung hòa ox) thì:

$$\tau_{zy}(0) = \tau_{max} = \frac{Q_y S_x}{J_x \cdot bc} \quad (2.16)$$

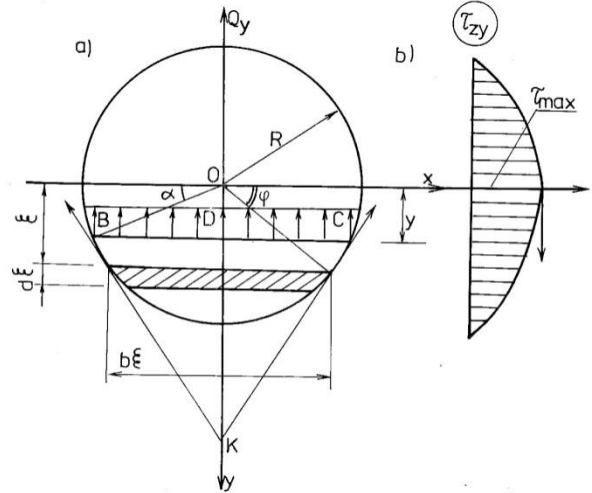
Đối với điểm C tiếp giáp giữa long và đế của chữ I, nhưng thuộc phần long thì ta có: $y_c = \frac{h}{2} - t$ Từ đó ta có:

$$\tau_c = \tau_1 = \tau_{zy} \left(\frac{h}{2} - t \right) = \frac{Q_y \left[S_x - \frac{1}{2}d \left(\frac{h}{2} - t \right)^2 \right]}{J_x \cdot d} \quad (2.17)$$

Biểu đồ τ_{zy}^1 của phần long mặt cắt chữ I được vẽ trên, hình 2.10c.

e. **Luật phân bố ứng suất tiếp τ_{zy} đối với mặt cắt hình tròn:**

Xét dầm chịu uốn ngang phẳng có mặt cắt ngang hình tròn bán kính R , và lực cắt trên mặt cắt này là Q_y , hình 2.11. Ta xét ứng suất tiếp trên đường BC song song với trục ox và cách ox một khoảng bằng y . Ta thấy rằng tại các điểm biên B,C ứng suất tiếp τ tiếp tuyến với chu vi hình tròn và do đối xứng thì ứng suất tiếp tại D có phương y .



Hình 2.11.

Ta thừa nhận rằng ứng suất tiếp tại các điểm khác nhau trên BC có phương qua điểm K đồng thời thành phần song song oy của chúng là bằng nhau, nghĩa là thành phần τ_{zy} phân bố đều trên BC, hình 2.11a. Ta đi tìm luật phân bố của τ_{zy} . Ta có:

$$bc = 2R \cdot \cos\alpha$$

$$\begin{aligned} S_x^c &= \int_{Fc} \rho dF = \int_y^R \rho b dF = \int_{\alpha}^{\pi/2} R \sin\varphi \cdot 2R \cos\varphi \cdot d(R \sin\varphi) \\ &= 2R^3 \int_{\alpha}^{\pi/2} \cos^2\varphi \cdot \sin\varphi d(\varphi) = -2R^3 \int_{\alpha}^{\pi/2} \cos^2\varphi d(\cos\varphi) = \frac{2}{3} R^3 \cos^3\alpha \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } \tau_{zy} = \frac{Q_y \frac{2}{3} R^3 \cos^3\alpha}{J_x \cdot 2R \cos\alpha} = \frac{Q_y R^2 \cos^3\alpha}{3J_x} = \frac{Q_y R^2 (1 - \sin^2\alpha)}{3J_x}$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y (R^2 - y^2)}{3J_x} \quad (2.18)$$

Biểu đồ τ_{zy} được vẽ trên hình 2.11b, trong đó:

$$\tau_{zy}(0) = \tau_{max} = \frac{Q_y R^2}{3J_x} = \frac{4Q_y}{3\pi R^2} = \frac{4Q_y}{3F} \quad (2.19)$$

Biểu đồ τ_{zy} của mặt cắt hình tròn được vẽ trên, hình 2.11b.

2.2. Lý thuyết dầm có xét biến dạng trượt ngang

Lý thuyết xét biến dạng trượt trong dầm do Timoshenko đưa ra và thường được gọi là lý thuyết dầm Timoshenko. Khi xây dựng lý thuyết này vẫn sử dụng giả thiết tiết diện phẳng của lý thuyết dầm thông thường, tuy nhiên do có biến dạng trượt, trục dầm sẽ xoay đi một góc và không còn thẳng góc với tiết diện dầm nữa.

Lý thuyết xét biến dạng trượt được dùng phổ biến trong phương pháp phần tử hữu hạn hiện nay là dùng hàm độ võng y và hàm góc xoay θ do momen uốn gây ra là hai hàm chưa biết. Trong trường hợp này biến dạng trượt tại trục trung hòa được xác định như sau, ví dụ như [28, trg 5].

$$\gamma = \frac{dy}{dx} - \theta \quad (2.20)$$

Từ đó ta có các công thức xác định M và Q

$$\begin{aligned} M &= -EJ \left(\frac{d\theta}{dx} \right) \\ Q &= \frac{GF}{\alpha} \left[-\frac{dy}{dx} + \theta \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

Trong các công thức trên EJ là độ cứng uốn, GF là độ cứng cắt của tiết diện, G là môđun trượt của vật liệu, F là diện tích tiết diện, α là hệ số xét sự phân bố không đều của ứng suất tiếp trên chiều cao tiết diện.

Các tác giả [28, trg 5] cho rằng khi môđun trượt $G \rightarrow \infty$ thì từ (2.21) suy ra

$$\theta = \frac{dy}{dx} \quad (2.22)$$

nghĩa là trở về lý thuyết dầm không xét biến dạng trượt: Góc xoay của đường độ võng là do mômen gây ra. Theo tác giả, lập luận trên không đúng bởi vì khi thỏa mãn phương trình (2.22) thì từ phương trình (2.21) suy ra lực cắt $Q = 0$,

dẫn về trường hợp uốn thuần túy của dầm. Vì lý do đó nên lý thuyết xét biến dạng trượt dùng y và θ làm ẩn không hội tụ về lý thuyết dầm thông thường và khi áp dụng vào bài toán tấm, nó cũng không hội tụ về lý thuyết tấm thông thường (lý thuyết tấm Kierchhoff, [28, trg 71], [25, trg 404]. Phương hướng chung để khắc phục thiếu sót vừa nêu là bổ sung thêm các nút xét lực cắt Q trong các phần tử dầm hoặc phần tử tấm [25, 26, 28] hoặc dùng phần tử có hàm dạng là đa thức bậc thấp (bậc nhất) [31, trg 126]. Vấn đề tìm phần tử có hàm dạng không bị hiện tượng biến dạng trượt bị khóa, shear locking, vẫn đang được tiếp tục nghiên cứu, [32]. Tình hình chung hiện nay về lý thuyết xét biến dạng trượt trong dầm và tấm là như trên.

Khác với các tác giả khác, trong [15, 16] lý thuyết xét biến dạng trượt được xây dựng trên cơ sở hai hàm chưa biết là hàm độ võng y và hàm lực cắt Q . Trong trường hợp này biến dạng trượt xác định theo

$$\gamma = \frac{\alpha Q}{GF} \quad (2.23)$$

α là hệ số xét sự phân bố không đều của ứng suất cắt tại trục dầm.

Góc xoay do momen uốn sinh ra bằng hiệu giữa góc xoay đường độ võng với góc xoay do lực cắt gây ra.

$$\theta = \frac{dy}{dx} - \gamma = \frac{dy}{dx} - \frac{\alpha Q}{GF} \quad (2.24)$$

Momen uốn sẽ bằng

$$M = -EJ \frac{d\theta}{dx} = EJ \left(-\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right) \quad (2.25)$$

Biến dạng uốn χ

$$\chi = -\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \quad (2.26)$$

Dựa trên lý thuyết này ta sẽ xây dựng phương trình cân bằng và các điều kiện biên của dầm như sau. Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss ta viết

phiếm hàm lượng cưỡng bức (chuyển động) như sau: (giả sử dầm có lực phân bố đều q).

$$Z = \int_0^l M\chi dx + \int_0^l Q\gamma dx - \int_0^l qy dx \rightarrow Min \quad (2.27)$$

Các hàm độ võng y , hàm biến dạng trượt γ và hàm biến dạng uốn χ là các đại lượng biến phân, nghĩa là điều kiện cần và đủ để hệ ở trạng thái cân bằng là

$$\delta Z = \int_0^l M\delta\chi dx + \int_0^l Q\delta\gamma dx - \int_0^l q\delta y dx = 0$$

$$\text{Hay } \delta Z = \int_0^l M\delta \left[-\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right] dx + \int_0^l Q\delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] dx - \int_0^l q\delta[y] dx = 0 \quad (2.28)$$

Trong phương trình tích phân (2.28) hai đại lượng cần tìm là $y(x)$ và $Q(x)$ do đó có thể tách ra thành hai phương trình sau:

$$\int_0^l M\delta \left[-\frac{d^2y}{dx^2} \right] dx - \int_0^l q\delta[y] dx = 0 \quad (2.29)$$

$$\int_0^l M\delta \left[\frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right] dx + \int_0^l Q\delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] dx = 0 \quad (2.30)$$

Lấy tích phân từng phần phương trình (2.29)

$$\begin{aligned} \int_0^l M\delta \left[-\frac{d^2y}{dx^2} \right] dx &= - \int_0^l M d \left(\delta \left[\frac{dy}{dx} \right] \right) dx \\ &= -M\delta \left[\frac{dy}{dx} \right] \Big|_0^l + \int_0^l \frac{dM}{dx} \delta \left[\frac{dy}{dx} \right] dx \end{aligned}$$

Tích phân từng phần thành phần cuối của biểu thức trên ta có

$$\int_0^l M\delta \left[-\frac{d^2y}{dx^2} \right] dx = -M\delta \left[\frac{dy}{dx} \right] \Big|_0^l + \frac{dM}{dx} \delta[y] \Big|_0^l - \int_0^l \frac{d^2M}{dx^2} \delta[y] dx$$

Phương trình (2.29) sau khi lấy tích phân từng phần có dạng

$$-M\delta\left[\frac{dy}{dx}\right]\Big|_0^l + \frac{dM}{dx}\delta[y]\Big|_0^l - \int_0^l \left(\frac{d^2M}{dx^2} + q\right)\delta[y]dx = 0 \quad (2.31)$$

Bởi vì các đại lượng $\delta[y]$ và $\delta\left[\frac{dy}{dx}\right]$ là nhỏ và bất kỳ nên từ (2.31) ta có

$$\frac{d^2M}{dx^2} + q = 0 \quad (2.31a)$$

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]\Big|_0^l = 0 \quad (2.31b)$$

$$\frac{dM}{dx}\delta[y]\Big|_0^l = 0 \quad (2.31c)$$

Tích phân từng phần phương trình (2.30):

$$\begin{aligned} \int_0^l M\delta\left[\frac{\alpha}{GF}\frac{dQ}{dx}\right]dx &= \int_0^l Md\left(\delta\left[\frac{\alpha Q}{GF}\right]\right)dx \\ &= M\left(\delta\left[\frac{\alpha Q}{GF}\right]\right)\Big|_0^l - \int_0^l \frac{dM}{dx}\delta\left[\frac{\alpha Q}{GF}\right]dx \end{aligned}$$

Sau khi lấy tích phân từng phần

$$M\left(\delta\left[\frac{\alpha Q}{GF}\right]\right)\Big|_0^l + \int_0^l \left(-\frac{dM}{dx} + Q\right)\delta\left[\frac{\alpha Q}{GF}\right]dx = 0 \quad (2.32)$$

Bởi vì biến phân $\delta\left[\frac{\alpha Q}{GF}\right]$ là nhỏ và bất kỳ nên từ (2.13) ta có

$$-\frac{dM}{dx} + Q = 0 \quad (2.32a)$$

$$M\delta\left[\frac{\alpha Q}{GF}\right]\Big|_0^l = 0 \quad (2.32b)$$

Sử dụng công thức (2.6), hai phương trình vi phân cân bằng của dầm (2.31a) và (2.32a) có dạng.

$$EJ \left[\frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{\alpha}{GF} \frac{d^3 Q}{dx^3} \right] = q \quad (2.33a)$$

$$EJ \left[\frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{\alpha}{GF} \frac{d^2 Q}{dx^2} \right] = Q \quad (2.34a)$$

Phương trình (2.33a) và (2.34a) có thể viết lại dưới dạng

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{\alpha h^2}{6} \frac{d^3 Q}{dx^3} = q \quad (2.33b)$$

$$EJ \frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{\alpha h^2}{6} \frac{d^2 Q}{dx^2} = Q \quad (2.34b)$$

Để nhận được các điều kiện biên của dầm thì kết hợp (2.31b) và (2.32b) ta có

$$M\delta \left[-\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha Q}{GF} \right] \Big|_0^l = 0 \quad (2.35)$$

Chú ý tới phương trình (2.32a), phương trình (2.31c) viết lại như sau

$$Q\delta[y] \Big|_0^l = 0 \quad (2.36)$$

Tóm lại, lý thuyết xét biến dạng trượt cho ta hai phương trình vi phân (2.33) và (2.34) đối với hai hàm y và Q : phương trình (2.33) là phương trình vi phân cân bằng giữa nội lực và ngoại lực, phương trình (2.34) là phương trình liên hệ giữa mômen uốn và lực cắt. Các phương trình (2.35) và (2.36) là các điều kiện biên ở hai đầu thanh.

Ta xét điều kiện biên (2.35)

Nếu như tại $x=0$ hoặc $x=l$, góc xoay θ do mômen uốn gây ra có biến phân

$$\delta\theta = \delta \left[-\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha Q}{GF} \right] \Big|_0^l \neq 0 \text{ thì } M \Big|_0^l = 0 \rightarrow \text{liên kết khớp} \quad (2.37a)$$

Nếu như góc xoay θ không có biến phân

$$\delta\theta = \delta \left[-\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha Q}{GF} \right] \Big|_0^l = 0 \text{ thì } M \Big|_0^l \text{ bất kỳ} \rightarrow \text{liên kết ngàm} \quad (2.37b)$$

Đối với điều kiện (2.36), nếu như chuyển vị y tại $x=0$ hoặc $x=l$ có biến phân.

$$\delta[y] \Big|_0^l \neq 0 \text{ thì } Q \Big|_0^l = 0, \rightarrow \text{không có gối tựa} \quad (2.37c)$$

Nếu như $\delta[y]|_0^l = 0$ thì $Q|_0^l$ bất kỳ, \rightarrow liên kết gối tựa (2.37d)

Khi không xét biến dạng trượt, $G \rightarrow \infty$ hoặc $h \rightarrow 0$ thì các phương trình (2.33) và (2.34) cũng như các phương trình về điều kiện biên (2.35) và (2.36) hoặc (2.37) đều dẫn về lý thuyết dầm Euler- Bernoulli. Cho nên có thể nói lý thuyết xét biến dạng trượt nêu trên (xem hàm y và hàm Q là hai hàm chưa biết) là lý thuyết đầy đủ về dầm.

Cuối cùng cần lưu ý rằng khi xét tính liên tục về góc xoay giữa hai đoạn dầm là nói đến tính liên tục của góc xoay do mômen gây ra xác định theo công thức (2.24), không phải liên tục của góc xoay $\frac{dy}{dx}$.

Hệ số α

Hệ số α là hệ số tập trung ứng suất cắt tại trục dầm.

Đối với tiết diện chữ nhật $\alpha=1.5$, đối với tiết diện tròn $\alpha=4/3$. Tuy nhiên khi xét biến dạng trượt các trị trên thay đổi tương ứng bằng 1.2 và 1.11 [23, trg 132, 52, trg 492]. Trong tính toán sau này tác giả dùng hệ số $\alpha=1.2$ đối với tiết diện chữ nhật. Phương pháp chung để xác định hệ số α là cân bằng tổng theo chiều cao dầm công của ứng suất cắt thực hiện trên biến dạng trượt tương ứng với công lực cắt thực hiện trên biến dạng trượt tại trục dầm, vấn đề này đã được nhiều tác giả nghiên cứu [23] [25, trg 400].

CHƯƠNG 3

PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN ĐỐI VỚI KHUNG PHẪNG CHỊU UỐN CÓ XÉT ĐẾN BIẾN DẠNG TRƯỢT NGANG

3.1. PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH) chia công trình thành những phần nhỏ được gọi là phần tử. Việc tính toán được thực hiện đối với mỗi phần tử, sau đó kết nối chúng lại với nhau có được toàn bộ công trình.

Khi dùng phương pháp sai phân hữu hạn, trạng thái của công trình (ví dụ chuyển vị của dầm, tấm v.v...) được tính tại mỗi điểm của lưới sai phân, trạng thái công trình tại các điểm nằm giữa các nút của lưới sai phân được tính bằng cách nội suy tuyến tính. Từ cách nhìn này thấy rõ ưu điểm của phương pháp PTHH so với phương pháp sai phân hữu hạn là trạng thái các điểm trong mỗi phần tử được xác định theo các hàm nội suy (còn gọi là hàm dạng) chọn trước. Do vậy, để có kết quả có độ chính xác tương đương nhau, phương pháp PTHH thường dùng ít ẩn hơn so với phương pháp sai phân hữu hạn. Theo E.Wilson [30], thuật ngữ PTHH được giáo sư Ray Clough [22] đưa ra vào năm 1960 và ông xem phương pháp PTHH là khả năng nữa (alternative) của phương pháp sai phân hữu hạn.

Các hàm nội suy được viết theo tọa độ tự nhiên (xem phần sau) được dùng vừa để mô tả trạng thái (ví dụ chuyển vị của dầm, tấm v.v...) và có thể vừa để mô tả dạng hình học (ví dụ dầm cong, vỏ...) của công trình cho phép dễ dàng lập trình và tạo điều kiện tự động hóa quá trình tính toán (phần tử hữu hạn dùng hàm nội suy như vậy được gọi là phần tử đẳng thông số, (Isoparametric finite element). Các hàm nội suy viết theo tọa độ tự nhiên do B.Irons và O.Zienkiewicz đưa ra năm 1968 [20].

Do kích thước phần tử nhỏ, trạng thái (ví dụ chuyển vị của dầm, tấm...) của các điểm trong mỗi phần tử khác nhau ít cho nên các hàm nội suy được dùng là các đa thức bậc thấp, ví dụ đối với độ võng của dầm hàm nội suy thường dùng là các đa thức bậc ba theo tọa độ x , đối với độ võng của tấm là các đa thức bậc ba theo tọa độ x và bậc ba theo tọa độ y v.v.. Vì dùng các đa thức bậc thấp cho nên các lực tác dụng trong mỗi phần tử cũng như lực quán tính (bài toán động lực học) đều phải quy về các nút. Vì phương pháp PTHH xét cân bằng tại nút nên lực tác dụng trong phần tử cũng như lực quán tính đều phải quy về các lực tập trung tác dụng tại nút.

Hàm nội suy được chọn sao cho kết quả tính là ổn định: kết quả là duy nhất, thay đổi bé của điều kiện biên hoặc điều kiện ban đầu không làm thay đổi kết quả tính.

Lý thuyết dầm xét ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang được trình bày ở mục 2.2 xem độ võng y lực cắt Q của dầm là hai hàm cần xác định cho nên cần xác định hai hàm nội suy cho hai hàm ẩn nói trên.

Dựa vào hàm nội suy có thể tính được trường ứng suất và trường chuyển vị của mỗi phần tử và do đó ta thiết lập được ma trận độ cứng phần tử. Dựa trên ma trận độ cứng phần tử xây dựng được ma trận độ cứng tổng thể của công trình.

Phương trình cơ bản để giải bài toán cơ học kết cấu theo phương pháp phần tử hữu hạn, có dạng như sau:

$$[K]\{\Delta\} = \{F\} \quad (3.1)$$

Trong đó: $[K]$ là ma trận độ cứng tổng thể của toàn kết cấu, là ma trận vuông có kích thước là số ẩn của toàn bộ kết cấu, nghĩa là số ẩn của phương pháp, $\{\Delta\}$ là véc tơ chuyển vị nút của toàn kết cấu (đối với bài toán không xét biến dạng trượt ngang), là véc tơ chuyển vị nút và lực cắt (đối với bài toán có xét đến biến dạng trượt ngang), $\{F\}$ là véc tơ lực nút.

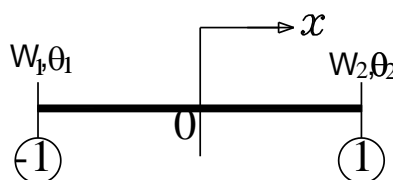
Giải hệ phương trình (3.1) ta có thể dùng các chương trình có sẵn trong Matlab để giải. Nếu như gọi r là nghiệm của bài toán thì $r = [K] \setminus \{F\}$.

Trong đề tài này tác giả dùng chương trình Matlab nói trên để giải các bài toán.

3.1.1. Hàm nội suy của phần tử

3.1.1.1. Hàm nội suy chuyển vị và góc xoay tại hai nút đầu phần tử

Trong khi tính dầm ta có thể sử dụng phần tử chịu uốn hai nút, như hình 3.1.



Hình 3.1. Phần tử dầm

Tại mỗi nút có các thông số là chuyển vị $W_1, \theta_1, W_2, \theta_2$, do đó chuyển vị trong mỗi phần tử được viết theo công thức sau:

$$W = [fw_1fw_2fx_1fx_2]X \quad (3.2)$$

Trong đó: $X = [W_1W_2\theta_1\theta_2]'$

$$\theta_1 = \left. \frac{dW}{dx} \right|_{x=-1}; \theta_2 = \left. \frac{dW}{dx} \right|_{x=1}$$

Các hàm fw_1, fw_2, fx_1, fx_2 , là các hàm nội suy cần được xác định. Ta viết hàm nội suy dạng đa thức bậc 3, $W = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, dưới dạng ma trận hàm độ võng W được viết như sau:

$$W = [1 \ x \ x^2 \ x^3]X_a \quad (3.3a)$$

Trong đó: $X_a = [a_0a_1a_2a_3]'$

Bây giờ ta tìm mối liên hệ giữa X và X_a

Thay $x=-1$ vào (3.3a) ta có

$$W_1 = [1 \ -1 \ 1 \ -1]X_a \quad (a)$$

Thay $x=1$ vào (3.3a) ta có

$$W_2 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]X_a \quad (b)$$

Lấy đạo hàm (3.3) theo x ta có

$$\frac{dW}{dx} = [0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2]X_a \quad (3.3b)$$

Thay x=-1 vào (2.40b) ta có

$$\theta_1 = [0 \quad 1 \quad -2 \quad 3]X_a \quad (c)$$

Thay x=1 vào (2.40b) ta có

$$\theta_2 = [0 \quad 1 \quad 2 \quad 3]X_a \quad (d)$$

Từ a, b, c và d ta nhận được

$$X = [W_1 W_2 \theta_1 \theta_2]' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} X_a = aX_a \rightarrow X_a = a^{-1}X$$

Trong đó:

$$a = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Từ đó ta tìm được các hàm nội suy fw_1, fw_2, fx_1, fx_2 , như sau:

$$\left. \begin{aligned} fw_1 &= \frac{1}{4}(x-1)^2(x+2), \\ fw_2 &= \frac{1}{4}(x+1)^2(2-x) \\ fx_1 &= \frac{1}{4}(x-1)^2(x+1) \\ fx_2 &= \frac{1}{4}(x-1)^2(x+1) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Các hàm nội suy (3.4) thường được dùng để tính phần tử chịu uốn và cho kết quả hội tụ.

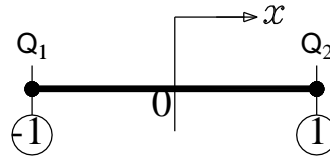
$$W = [fw_1 fw_2 fx_1 fx_2]X = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(x-1)^2(x+2) & \frac{1}{4}(x+1)^2(2-x) \\ \frac{1}{4}(x-1)^2(x+1) & \frac{1}{4}(x-1)^2(x+1) \end{bmatrix} X \quad (3.2a)$$

Như vậy, nếu biết được các thông số $W_1, \theta_1, W_2, \theta_2$ tại hai đầu phần tử thì chuyển vị tại mỗi điểm bất kỳ trong phần tử đó được xác định theo đa thức bậc 3 sau đây

$$W = fw_1W_1 + fw_2W_2 + fx_1\theta_1 + fx_2\theta_2 \quad (3.5)$$

3.1.1.2. Hàm nội suy lực cắt tại hai nút đầu phần tử

Trong trường hợp xét biến dạng trượt ngang ta viết thêm các hàm nội suy lực cắt tại hai đầu phần tử hai nút như hình 3.2.



Hình 3.2. Phần tử hai nút

Tại nút đầu phần tử có thông số là lực cắt Q_1 , và tại nút cuối phần tử có thông số lực cắt là Q_2 , do đó lực cắt trong mỗi phần tử được viết theo công thức sau:

$$V = [fq_1fq_2]X \quad (3.6)$$

Trong đó: $X = [Q_1 \ Q_2]'$

Các hàm fq_1, fq_2 , là các hàm nội suy cần được xác định

Ta viết hàm nội suy dạng đa thức bậc 1, $V = a_0 + a_1x$, dưới dạng ma trận hàm lực cắt V được viết như sau:

$$V = [1 \ x]X_a \quad (3.7)$$

Trong đó: $X_a = [a_0 \ a_1]'$

Bây giờ ta tìm mối liên hệ giữa θ và θ_a

Thay $x=-1$ vào (3.7) ta có

$$V_1 = [1 \ -1]X_a \quad (a)$$

Thay $x=1$ vào (3.7) ta có

$$V_2 = [1 \ 1]X_a \quad (b)$$

Từ a và b ta nhận được

$$X = [fq_1fq_2]' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X_a = aX_a \rightarrow X_a = a^{-1}X$$

Trong đó: $a = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Từ đó ta tìm được các hàm nội suy fq_1, fq_2 , như sau:

$$\left. \begin{aligned} fq_1 &= \frac{1}{2}(1-x) \\ fq_2 &= \frac{1}{2}(1+x) \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

$$V = [fq_1fq_2]X = \left[\frac{1}{2}(1-x) \frac{1}{2}(1+x) \right] X$$

Trong đó: $X = [Q_1Q_2]'$

Như vậy, nếu biết được các thông số Q_1, Q_2 , tại hai đầu phần tử thì lực cắt tại mỗi điểm bất kỳ trong phần tử đó được xác định theo đa thức bậc nhất sau đây

$$V = fq_1Q_1 + fq_2Q_2 \quad (3.9)$$

Do vậy, trong trường hợp phần tử có xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang, chuyển vị tại một điểm bất kỳ trong phần tử được xác định như sau:

$$W = fw_1W_1 + fw_2W_2 + fx_1\theta_1 + fx_2\theta_2 + fq_1Q_1 + fq_2Q_2 \quad (3.10)$$

3.1.2. Ma trận độ cứng của phần tử

3.1.2.1. Trường hợp không xét biến dạng trượt ngang

Trong trường hợp không xét ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang, mỗi phần tử có hai chuyển vị nút W_1, W_2 , và hai góc xoay θ_1, θ_2 , tổng cộng có bốn thông số (4 ẩn) cần xác định.

Gọi X là véc tơ cột chứa bốn ẩn của phần tử theo thứ tự sau

$$X = [W_1W_2\theta_1\theta_2] \quad (3.11)$$

Thì có thể viết lại biểu thức (3.5) dưới dạng ma trận như sau

$$W = [fw_1 + fw_2 + fx_1 + fx_2]X \quad (3.12)$$

Sau khi đã biết các hàm chuyển vị thì dễ dàng tính được biến dạng uốn χ_x , nội lực mômen uốn M_x , của phần tử như sau:

$$\chi_x = \left[-\frac{d^2W}{dx^2} \beta^2 \right] \quad (3.13)$$

$$M_x = EJ\chi_x \quad (3.14)$$

Trong các công thức trên $\beta = 2/\Delta x$ là hệ số đưa chiều dài hai đơn vị của phần tử về chiều dài thực Δx của nó.

Biết được hàm độ võng của phần tử thì dễ dàng tính được ma trận độ cứng phần tử. Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss ta viết lượng cưỡng bức đối với bài toán tĩnh như sau:

$$Z = \int_{-1}^1 M_x[\chi_x] dx \rightarrow \min \quad (3.15)$$

Trong đó χ_x là các biểu thức chứa các ẩn $X(i)$ cho nên điều kiện dừng của (3.15) được viết lại như sau:

$$\delta Z = \int_{-1}^1 M_x \delta[\chi_x] dx = 0$$

$$\text{hay} \quad \delta Z = \frac{1}{\beta} \left(\int_{-1}^1 M_x \left[\frac{\partial \chi_x}{\partial X_i} \right] dx \right) = 0 \quad (3.16)$$

hệ số $1/\beta = \Delta x/2$ là hệ số để đưa tích phân từ (-1) đến (1) về tích phân theo chiều dài phần tử. Có bốn ẩn ta có được bốn phương trình và có dạng (3.1), viết lại như sau:

$$[K]_e \{\Delta\}_e = \{F\}_e \quad (3.17)$$

Trong đó: $[K]_e$ là ma trận độ cứng phần tử e, $\{\Delta\}_e$ là véc tơ chuyển vị nút tại hai đầu phần tử e, $\{F\}_e$ là véc tơ tải trọng tương ứng với chuyển vị nút $\{\Delta\}_e$.

Các tích phân trong (3.16) có thể tính chính xác hoặc có thể tính theo các tích phân gần đúng (tích phân số) của Gauss. Sau khi tính (3.16), nhận được ma trận độ cứng phần tử $[K]_e(4 \times 4)$.

3.2.2.2. Trường hợp có xét đến biến dạng trượt ngang

Trong trường hợp có xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang, mỗi phần tử có hai chuyển vị nút W_1, W_2 , và hai góc xoay θ_1, θ_2 , tại hai đầu phần tử,

giống như trường hợp trên, ngoài ra tại nút đầu phần tử còn có thêm ảnh lực cắt Q_1 và tại nút cuối phần tử có thêm lực cắt Q_2 , tổng cộng có sáu thông số (6 ảnh) cần xác định.

Gọi X là véc tơ cột chứa sáu ảnh của phần tử theo thứ tự sau

$$X = [W_1 W_2 \theta_1 \theta_2 Q_1 Q_2] \quad (3.18)$$

Thì có thể viết lại biểu thức (3.10) dưới dạng ma trận như sau

$$W = [fw_1 + fw_2 + fx_1 + fx_2 + fq_1 + fq_2]X \quad (3.19)$$

Sau khi đã biết các hàm chuyển vị thì dễ dàng tính được biến dạng uốn χ_x , nội lực mômen uốn M_x , biến dạng trượt γ_x , góc xoay φ (do mômen gây ra) của phần tử như sau:

$$\chi_x = \left[-\frac{d^2W}{dx^2} \beta^2 + \frac{\alpha}{GF} \frac{dV}{dx} \beta \right] \quad (3.20)$$

$$M_x = EJ\chi_x \quad (3.21)$$

$$\gamma_x = -\frac{\alpha}{GF} [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad fq_1 \quad fq_2] \quad (3.22)$$

$$\varphi = \left[-\frac{dW}{dx} \beta + \frac{\alpha}{GF} V \right] \quad (3.23)$$

Trong các công thức trên $\beta = 2/\Delta x$ là hệ số đưa chiều dài hai đơn vị của phần tử về chiều dài thực Δx của nó.

Biết được hàm độ võng của phần tử thì dễ dàng tính được ma trận độ cứng phần tử. Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss ta viết lượng cưỡng bức đối với bài toán tĩnh có xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang như sau:

$$Z = \int_{-1}^1 M_x[\chi_x] dx + \int_{-1}^1 V\delta[\gamma_x] dx \rightarrow \min \quad (3.24)$$

Trong đó χ_x, γ_x là các biểu thức chứa các ảnh $X(i)$ cho nên điều kiện dừng của (3.24) được viết lại như sau:

$$\delta Z = \int_{-1}^1 M_x \delta[\chi_x] dx + \int_{-1}^1 V \delta[\gamma_x] dx = 0$$

$$\text{hay} \quad \delta Z = \frac{1}{\beta} \left(\int_{-1}^1 M_x \left[\frac{\partial \chi_x}{\partial X_i} \right] dx + \int_{-1}^1 V \left[\frac{\partial \gamma_x}{\partial X_i} \right] dx \right) = 0 \quad (3.25)$$

hệ số $1/\beta = \Delta x/2$ là hệ số để đưa tích phân từ (-1) đến (1) về tích phân theo chiều dài phần tử. Có sáu ẩn ta có được sáu phương trình và có dạng (3.1), viết lại như sau:

$$[K]_e \{\Delta\}_e = \{F\}_e \quad (3.26)$$

Trong đó: $[K]_e$ là ma trận độ cứng phần tử e, $\{\Delta\}_e$ là véc tơ chuyển vị nút và lực cắt tại hai đầu phần tử e, $\{F\}_e$ là véc tơ tải trọng tương ứng với chuyển vị nút $\{\Delta\}_e$.

Các tích phân trong (3.25) có thể tính chính xác hoặc có thể tính theo các tích phân gần đúng (tích phân số) của Gauss. Sau khi tính (3.25), nhận được ma trận độ cứng phần tử $[K]_e$ (6x6).

3.2.3. Ma trận độ cứng tổng thể

Biết được ma trận độ cứng phần tử $[K]_e$ thì dễ dàng xây dựng được ma trận độ cứng toàn hệ $[K]$. Giả sử thanh chỉ có một phần tử thì ma trận $[K]_e$ chính là ma trận độ cứng tổng thể của thanh. Giả sử chuyển vị tại nút (1) bằng không thì ta bỏ dòng 1, cột 1 của ma trận $[K]_e$.

Chú ý ngoài các ẩn chuyển vị, góc xoay, lực cắt của hệ còn phải xét thêm các ẩn là các thừa số Lagrange λ của các điều kiện liên kết tại đầu hoặc cuối các phần tử. Ngoài ra còn cần đưa thêm các điều kiện liên tục về góc xoay tại điểm tiếp giáp giữa hai phần tử.

Việc thành lập ma trận độ cứng tổng thể $[K]$ của toàn kết cấu từ các ma trận độ cứng phần tử $[K]_e$ có thể trình bày như sau:

Hệ phương trình cơ bản để giải bài toán kết cấu theo phương pháp chuyển vị có dạng (3.1), viết lại dưới đây.

$$[K]\{\Delta\} = \{F\}$$

Trong đó: véc tơ ẩn chuyển vị nút $\{\Delta\}$ gồm các thành phần xếp theo thứ tự chuyển vị nút của toàn bộ kết cấu, véc tơ lực nút $\{F\}$ và ma trận độ cứng toàn

hệ $[K]$ cũng là các thành phần xếp theo thứ tự tương ứng với chuyển vị nút. $[K]$ và $\{F\}$ ở đây được lập từ các ma trận độ cứng $[K]_e$ và lực nút $\{F\}_e$ của từng phần tử trong kết cấu ở hệ tọa độ chung.

Đối với mỗi phần tử e có một hệ phương trình cân bằng dạng (3.17) hoặc (3.26) ở hệ tọa độ chung là:

$$[K]_e \{\Delta\}_e = \{F\}_e$$

Trong đó: $\{\Delta\}_e$ là véc tơ chuyển vị nút có các thành phần được xếp theo thứ tự đã được quy định sẵn cho từng phần tử. Cấu trúc của ma trận độ cứng phần tử $[K]_e$ và véc tơ lực nút $\{F\}_e$ cũng tương ứng với chuyển vị nút $\{\Delta\}_e$.

Do thứ tự các thành phần trong véc tơ chuyển vị nút $\{\Delta\}_e$ của từng phần tử nói chung khác với thứ tự trong véc tơ chuyển vị nút $\{\Delta\}$ của toàn kết cấu, nên cần lưu ý xếp đúng vị trí của từng phần tử trong $[K]_e$ và $\{F\}_e$ vào $[K]$ và $\{F\}$. Việc sắp xếp này thường được áp dụng phương pháp số mã có nội dung như sau:

Mỗi chuyển vị nút và lực nút tương ứng được dùng hai số mã để đặt tên:

- **Số mã cục bộ**: là số mã từ 1 đến m (m là tổng số chuyển vị nút của mỗi phần tử). Đó là thứ tự sắp xếp trong véc tơ chuyển vị nút $\{\Delta\}_e$ và véc tơ lực nút $\{F\}_e$ của một phần tử. Nếu các phần tử có các chuyển vị nút (m) như nhau thì số mã cục bộ của chuyển vị nút giống nhau.

- **Số mã toàn thể**: là số mã từ 1 đến n (n là tổng số chuyển vị nút của toàn kết cấu). Đó là thứ tự sắp xếp trong véc tơ chuyển vị nút $\{\Delta\}$ và lực nút $\{F\}$ của toàn kết cấu.

Mỗi thành phần của $[K]_e$ và $\{F\}_e$ tương ứng với một số mã cục bộ của chuyển vị nút cụ thể. Căn cứ vào số mã toàn thể của chuyển vị nút cụ thể này mà sắp xếp trị của thành phần $[K]_e$ và $\{F\}_e$ vào đúng vị trí trong ma trận $[K]$ và véc tơ lực $\{F\}$ của toàn kết cấu. Các thành phần trong ma trận độ cứng của từng phần tử được xếp vào cùng một vị trí của ma trận toàn hệ thì được cộng lại với nhau.

Phần ví dụ minh họa được trình bày thông qua các ví dụ ở phần sau.

3.2.4. Xét điều kiện ngoại lực

Do dùng hàm độ võng của phần tử là đa thức bậc ba cho nên các lực tác dụng lên phần tử đều phải quy về nút kể cả lực quán tính trong bài toán động.

3.2.5. Xác định nội lực

Giải hệ phương trình $[K]\{\Delta\} = \{F\}$ ta sẽ nhận được véc tơ chuyển vị của toàn kết cấu, từ đó xác định được nội lực cần tìm của toàn cơ hệ.

3.3. Giải bài toán khung có xét đến biến dạng trượt ngang bằng phương pháp phần tử hữu hạn

3.3.1. Bài toán khung

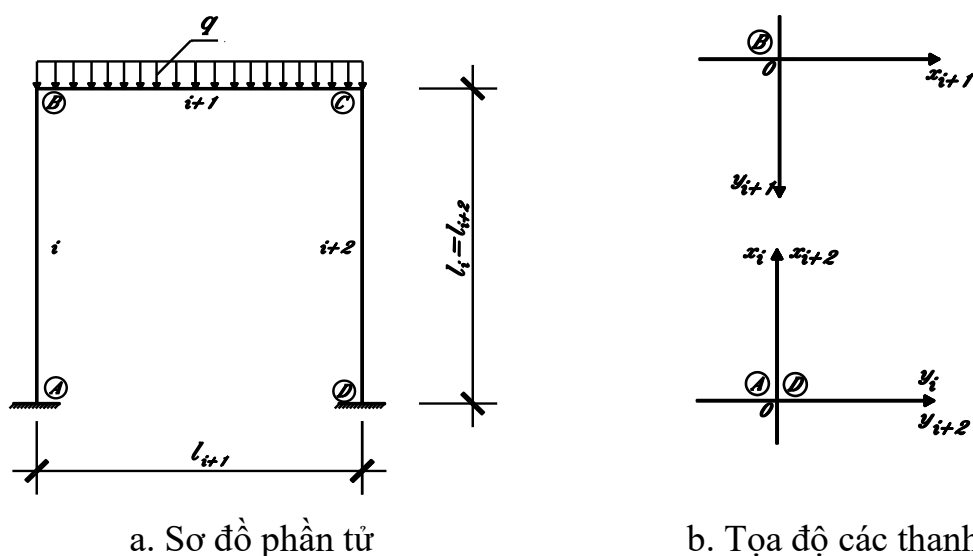
Khung là kết cấu làm việc chịu uốn. Các đại lượng biến phân theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss là biến dạng và chuyển vị cho nên để tính khung trước tiên cần giả định dạng đường độ võng của các đoạn của khung, (thí dụ, theo đa thức) hoặc rời rạc đường độ võng theo phương pháp phần tử hữu hạn hoặc theo phương pháp sai phân hữu hạn. Như vậy, khi giải trực tiếp phiếm hàm lượng cưỡng bức Z thì các ẩn của bài toán là:

- các hệ số của hàm xấp xỉ (ví dụ, của đa thức xấp xỉ) hoặc
 - chuyển vị tại các điểm của sai phân hữu hạn hoặc
 - chuyển vị và góc xoay tại hai nút của phần tử hữu hạn
- sẽ là các đại lượng biến phân (các biến độc lập) của bài toán.

Gọi $y_i(x)$ là đường độ võng của đoạn thứ i nào đó của khung với trục x trùng với trục dầm, EJ_i là độ cứng uốn của nó, χ_i là biến dạng uốn. Đối với đoạn thứ i của khung, ta có:

$$EJ_i = \frac{Ebh^3}{12}, \quad \chi_i = -\frac{d^2 y_i}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_i}{dx},$$
$$M_i = EJ_i \cdot \chi_i = EJ_i \left(-\frac{d^2 y_i}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_i}{dx} \right) \quad (3.27)$$

ở đây E là môđun đàn hồi vật liệu dầm, b và h là chiều rộng và chiều cao tiết diện đoạn dầm. Tại điểm nối đoạn i và đoạn $(i+1)$ chuyển vị và góc xoay hai đoạn phải bằng nhau (điều kiện liên tục), tại gối tựa chuyển vị bằng không, nếu là ngàm thì góc xoay cũng bằng không (hình 3.3). Đối với khung, cần xét thêm các chuyển vị tại nút khung. Trên hình (3.3) giới thiệu sơ đồ phần tử, nút khung phẳng một nhịp, một tầng, và tọa độ của các thanh. Do chỉ xét momen uốn và lực cắt trong thanh nên chỉ cần xét một chuyển vị ngang tại đầu cột tầng một và hai chuyển vị xoay tại hai nút của khung.



Hình 3.3. Sơ đồ phần tử, nút và tọa độ các đoạn thanh của khung

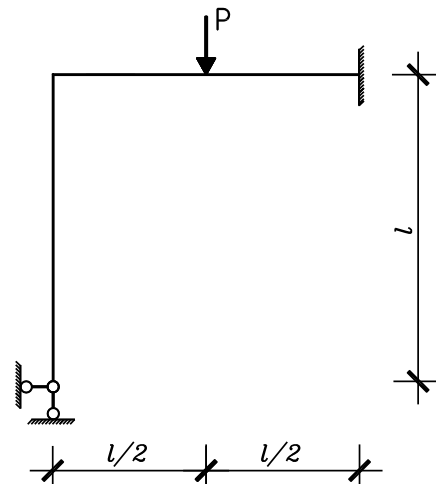
Khi giải bài toán cụ thể cần xét điều kiện động học của khung. Do xem lực cắt Q là đại lượng chưa biết nên ngoài việc giả thiết đường độ võng y của các đoạn khung, cần giả thiết dạng phân bố lực cắt Q . Dưới đây dùng phương pháp phần tử hữu hạn để xây dựng và giải bài toán khung chịu uốn có xét đến biến dạng trượt ngang.

3.4. Các ví dụ tính toán khung

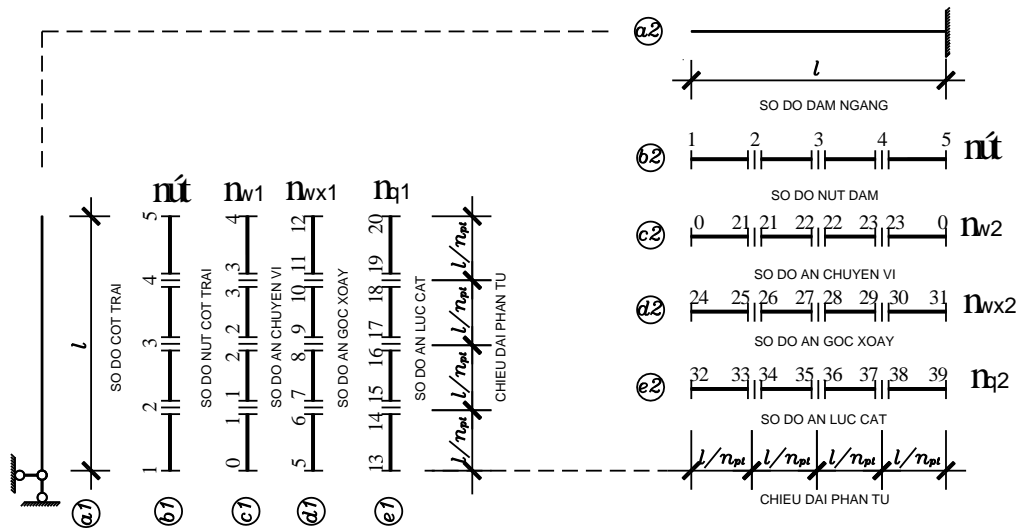
Ví dụ 3.4.1. Khung siêu tĩnh bậc 2, hình 3.13.

Xác định nội lực và chuyển vị của khung chịu lực như hình 2, độ cứng uốn $EJ=const$.

Rời rạc hóa kết cấu dầm ra thành n_{pt} phần tử. Các nút của phần tử phải trùng với vị trí đặt lực tập trung, hay vị trí thay đổi tiết diện, chiều dài các phần tử có thể khác nhau.



Hình 3.13. Khung siêu tĩnh bậc 2



Hình 3.14. Sơ đồ rời rạc kết cấu

Mỗi phần tử có 6 ẩn $w_1, w_2, \theta_1, \theta_2, q_1, q_2$ (lần lượt là, hai ẩn chuyển vị, hai ẩn góc xoay và hai ẩn lực cắt tại hai đầu mỗi phần tử) vậy nếu n_{pt} phần tử rời rạc thì tổng cộng có $6xn_{pt}$ ẩn.

Nhưng vì cần đảm bảo liên tục giữa các chuyển vị là chuyển vị của nút cuối phần tử thứ e bằng chuyển vị của nút đầu phần tử thứ $(e + 1)$ nên số ẩn của thanh sẽ nhỏ hơn $6xn_{pt}$. Khi giải ta chỉ cần đảm bảo điều kiện liên tục của chuyển vị còn điều kiện liên tục về góc xoay được xét bằng cách đưa vào các điều kiện ràng buộc. Ví dụ dầm trong (ví dụ 3.4.1, hình 3.13) ta chia thành 4 phần tử (hình 3.14).

Khi chia cột thành 4 phần tử thì số nút cột sẽ là 5, thứ tự từ dưới lên trên là [1, 2, 3, 4, 5] (hình 3.14b1), số ản chuyên vị $nw1=4$, thứ tự từ trái sang phải là [1, 2, 3, 4] (hình 3.14c1), ở đây ản chuyên vị tại chân cột bằng không, ản góc xoay $nwx1=8$, thứ tự từ trái sang phải là [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12] (hình 3.14d1), ản lực cắt $nq1=8$, thứ tự từ trái sang phải là [13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20] (hình 3.14e1).

Khi chia dầm thành 4 phần tử thì số nút dầm sẽ là 5, thứ tự từ trái sang phải là [1, 2, 3, 4, 5] (hình 3.14b2), số ản chuyên vị $nw2=3$, thứ tự từ trái sang phải là [21, 22, 23] (hình 3.14c2), ở đây ản chuyên vị tại hai đầu dầm bằng không, ản góc xoay $nwx2=8$, thứ tự từ trái sang phải là [24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31] (hình 3.14d2), ản lực cắt $nq2=8$, thứ tự từ trái sang phải là [32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39] (hình 3.14e2).

Như vậy, tổng cộng số ản là 39 ản $< 2 \times 6 \times 6 = 72$ ản. Gọi ma trận $nw1$ là ma trận chuyên vị có kích thước $nw1(n_{pt}, 2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ản số là chuyên vị tại hai đầu nút của các phần tử (hình 3.14c1).

Các phần tử cột:

$$\begin{aligned} nw1(1,:) &= [0 \quad 1]; \\ nw1(2,:) &= [1 \quad 2]; \\ nw1(3,:) &= [2 \quad 3]; \\ nw1(4,:) &= [3 \quad 4] \end{aligned} \quad nw1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Gọi ma trận $nwx1$ là ma trận chuyên vị góc xoay có kích thước $nwx1(n_{pt}, 2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ản số là góc xoay tại nút của các phần tử (hình 3.14).

$$\begin{aligned}
nwx1(1,:) &= [5 \ 6]; \\
nwx1(2,:) &= [7 \ 8]; \\
nwx1(3,:) &= [9 \ 10]; \\
nwx1(4,:) &= [11 \ 12]
\end{aligned}
\quad nwx1 = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$$

Gọi ma trận $nq1$ là ma trận lực cắt có kích thước $nq1(n_{pt}, 2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ẩn số là lực cắt tại hai đầu nút của các phần tử (hình 3.14).

$$\begin{aligned}
nwx1(1,:) &= [13 \ 14]; \\
nwx1(2,:) &= [15 \ 16]; \\
nwx1(3,:) &= [17 \ 18]; \\
nwx1(4,:) &= [19 \ 20]
\end{aligned}
\quad nwx1 = \begin{bmatrix} 13 & 14 \\ 15 & 16 \\ 17 & 18 \\ 19 & 20 \end{bmatrix}$$

Các phần tử dầm:

$$\begin{aligned}
nw2(1,:) &= [0 \ 21]; \\
nw2(2,:) &= [21 \ 22]; \\
nw2(3,:) &= [22 \ 23]; \\
nw2(4,:) &= [23 \ 0]
\end{aligned}
\quad nw2 = \begin{bmatrix} 0 & 21 \\ 21 & 22 \\ 22 & 23 \\ 23 & 0 \end{bmatrix}$$

Gọi ma trận $nwx2$ là ma trận chuyển vị góc xoay có kích thước $nwx2(n_{pt}, 2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ẩn số là góc xoay tại nút của các phần tử (hình 3.14).

$$\begin{aligned}
nwx2(1,:) &= [24 \ 25]; \\
nwx2(2,:) &= [26 \ 27]; \\
nwx2(3,:) &= [28 \ 29]; \\
nwx2(4,:) &= [30 \ 31]
\end{aligned}
\quad nwx2 = \begin{bmatrix} 24 & 25 \\ 26 & 27 \\ 28 & 29 \\ 30 & 31 \end{bmatrix}$$

Gọi ma trận $nq2$ là ma trận lực cắt có kích thước $nq2(n_{pt}, 2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ẩn số là lực cắt tại hai đầu nút của các phần tử (hình 3.14).

$$\begin{aligned} nq2(1,:) &= [32 \quad 33]; \\ nq2(2,:) &= [34 \quad 35]; \\ nq2(3,:) &= [36 \quad 37]; \\ nq2(4,:) &= [38 \quad 39] \end{aligned} \quad nq2 = \begin{bmatrix} 32 & 33 \\ 34 & 35 \\ 36 & 37 \\ 38 & 39 \end{bmatrix}$$

Sau khi biết ẩn số thực của dầm và cột ta có thể xây dựng độ cứng tổng thể của khung (có rất nhiều cách ghép nối phần tử khác nhau, tùy vào trình độ lập trình của mỗi người nên tác giả không trình bày chi tiết cách ghép nối các phần tử lại để được ma trận độ cứng của toàn dầm và có thể xem trong code mô đun chương trình của tác giả)

Nếu bài toán có $nw1, nw2$, ẩn số chuyển vị thẳng của dầm và cột và $nwx1, nwx2$ ẩn số góc xoay của dầm và cột, $nq1, nq2$ ẩn số lực cắt của cột và dầm thì ma trận độ cứng tổng thể của dầm và cột là K có kích thước $(n \times n)$, $K(n, n)$ với $n = (nw1 + nwx1 + nq1 + nw2 + nwx2 + nq2)$. Như ở ví dụ 3.4.1, $n = 39$. Bây giờ xét điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử.

Điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử được viết như sau:

$$\left(\frac{dy_i}{dx} - \frac{\alpha Q_i}{GF} \right) \Big|_{n_{ur2}} - \left(\frac{dy_{i+1}}{dx} - \frac{\alpha Q_{i+1}}{GF} \right) \Big|_{n_{ur1}} = 0 \quad (a)$$

Đối với cột trái, ta có:

$$\left. \begin{aligned} \delta\lambda_1 \left[\left(\frac{dy_{11}}{dx} - \frac{\alpha Q_{11}}{GF} \right) \Big|_{nut2} - \left(\frac{dy_{12}}{dx} - \frac{\alpha Q_{12}}{GF} \right) \Big|_{nut1} \right] &= 0 \\ \delta\lambda_2 \left[\left(\frac{dy_{12}}{dx} - \frac{\alpha Q_{12}}{GF} \right) \Big|_{nut2} - \left(\frac{dy_{13}}{dx} - \frac{\alpha Q_{13}}{GF} \right) \Big|_{nut1} \right] &= 0 \\ \delta\lambda_3 \left[\left(\frac{dy_{13}}{dx} - \frac{\alpha Q_{13}}{GF} \right) \Big|_{nut2} - \left(\frac{dy_{14}}{dx} - \frac{\alpha Q_{14}}{GF} \right) \Big|_{nut1} \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Đối với dầm ngang, ta có:

$$\left. \begin{aligned} \delta\lambda_4 \left[\left(\frac{dy_{21}}{dx} - \frac{\alpha Q_{21}}{GF} \right) \Big|_{nut2} - \left(\frac{dy_{22}}{dx} - \frac{\alpha Q_{22}}{GF} \right) \Big|_{nut1} \right] &= 0 \\ \delta\lambda_5 \left[\left(\frac{dy_{22}}{dx} - \frac{\alpha Q_{22}}{GF} \right) \Big|_{nut2} - \left(\frac{dy_{23}}{dx} - \frac{\alpha Q_{23}}{GF} \right) \Big|_{nut1} \right] &= 0 \\ \delta\lambda_6 \left[\left(\frac{dy_{23}}{dx} - \frac{\alpha Q_{23}}{GF} \right) \Big|_{nut2} - \left(\frac{dy_{24}}{dx} - \frac{\alpha Q_{23}}{GF} \right) \Big|_{nut1} \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Gọi k_1 là góc xoay tại nút 2 của phần tử trước, k_2 là góc xoay tại nút 1 của phần tử sau thì ta có các hệ số trong ma trận độ cứng K:

$$k(n+i, k_1) = \frac{2}{\Delta x}; \quad k(n+i, k_2) = -\frac{2}{\Delta x} \quad (i=1 \div k) \quad (d)$$

$$k(k_1, n+i) = \frac{2}{\Delta x}; \quad k(k_2, n+i) = -\frac{2}{\Delta x} \quad (i=1 \div k) \quad (e)$$

Nếu có hai phần tử thì có một điều kiện về góc xoay, có n_{pt} phần tử thì có $(2n_{pt} - 1)$ điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử.

Điều kiện biên được viết như sau:

- Tại đầu ngàm bên phải dầm ngang có góc xoay bằng không:

$$\delta\lambda_7 \left(\left[\frac{d^2 y_{24}}{dx} - \frac{\alpha Q_{24}}{GF} \right] \Big|_{nut2} \right) = 0 \quad (f)$$

Điều kiện góc xoay tại nút giao giữa cột và dầm được viết như sau:

Góc xoay tại nút cuối của phần tử đầu cột bằng góc xoay tại nút đầu của phần tử đầu tiên của dầm

$$\delta\lambda_8 \left(\left[\frac{d^2 y_{14}}{dx} - \frac{\alpha Q_{14}}{GF} \right]_{nut2} - \left[\frac{d^2 y_{21}}{dx} - \frac{\alpha Q_{21}}{GF} \right]_{nut1} \right) = 0 \quad (g)$$

Điều kiện chuyển vị ngang tại đầu cột bằng không:

$$\delta\lambda_9 (y_{14}|_{nut2}) = 0 \quad (h)$$

Trong đó $\lambda_k (k=1 \div 9)$ cũng là ẩn số của bài toán (có k ẩn số λ), do đó tổng số ẩn số của bài toán lúc đó là $(n+k)$, do đó ma trận độ cứng của phần tử lúc này cũng phải thêm k dòng và k cột như vậy kích thước của ma trận độ cứng là $K(n+k, n+k)$. Chẳng hạn trong ví dụ này, ta có $n=39$, $k=9$ và tổng số ẩn của bài toán là $n+k=39+9=48$ ẩn. Trong trường hợp này ta xác định được kích thước của ma trận độ cứng tổng thể là: $K[48 \times 48]$.

Như vậy cuối cùng ta sẽ thiết lập được phương trình:

$$[K]\{\Delta\} = \{F\} \quad (e)$$

trong đó: $\{F\} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$; $\{\Delta\} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix}$ là ẩn số của bài toán

$\left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{array} \right\} \text{so - hang} = n \\ \left. \begin{array}{l} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\} \text{so - hang} = k \end{array} \right]$

Trong ví dụ 3.4.1 khi chia thành ra thành 4 phần tử, ta có:

- Ma trận độ cứng phần tử $[K_e]$, như sau: $h=l/1000$

$$[K]_e = \begin{bmatrix} 768.0000 & -768.0000 & 96.0000 & 96.0000 & 0 & 0 \\ -768.0000 & 768.0000 & -96.0000 & -96.0000 & 0 & 0 \\ 96.0000 & -96.0000 & 16.0000 & 8.0000 & -0.0000 & 0.0000 \\ 96.0000 & -96.0000 & 8.0000 & 16.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0 & 0 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & 0 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

- Ma trận độ cứng toàn dầm $[K]$:

Ghép nối các ma trận độ cứng phần tử $[K_e]$ vào hệ tọa độ chung, ta được ma trận độ cứng tổng thể của toàn kết cấu $[K(48 \times 48)]$, ở đây không trình bày vì kích thước ma trận quá lớn.

- Véc tơ lực nút $\{F\}$: Trong ví dụ này là véc tơ 1 cột 48 dòng, như sau:

Giải phương trình (e) ta nhận được:

$$\{\Delta\} = [K]^{-1} \{F\}$$

Theo ngôn ngữ lập trình Matlab ta có thể viết:

$$\{\Delta\} = [K] \setminus \{F\}$$

Kết quả chuyển vị, góc xoay tại các nút:

$$\{W\} = \begin{Bmatrix} W_{12} \\ W_{13} \\ W_{14} \\ W_{15} \\ W_{22} \\ W_{23} \\ W_{24} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0021 \\ -0.0033 \\ -0.0029 \\ 0.0000 \\ 0.0051 \\ 0.0074 \\ 0.0034 \end{Bmatrix} \times ql^4$$

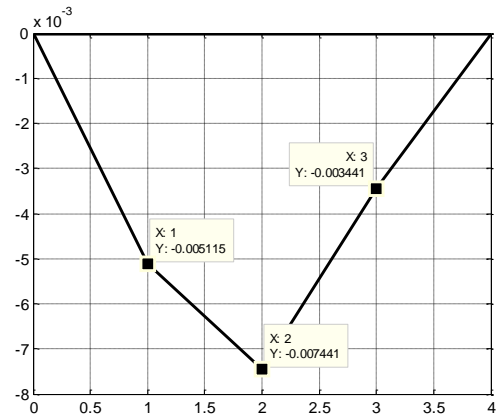
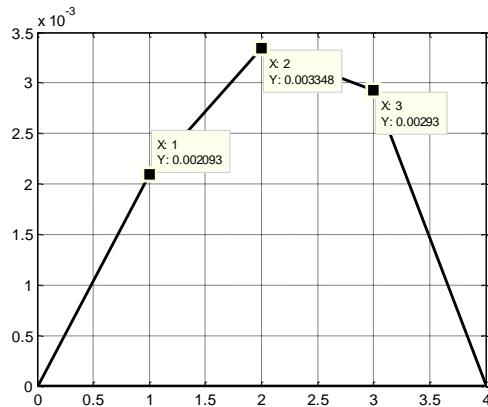
$$\{\varphi\} = \begin{Bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{12} \\ \varphi_{13} \\ \varphi_{14} \\ \varphi_{15} \\ \varphi_{21} \\ \varphi_{22} \\ \varphi_{23} \\ \varphi_{24} \\ \varphi_{25} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0089 \\ -0.0073 \\ -0.0022 \\ 0.0061 \\ 0.0179 \\ 0.0179 \\ 0.0190 \\ -0.0045 \\ -0.0212 \\ 0.0000 \end{Bmatrix} \times ql^3$$

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_{11} \\ Q_{12} \\ Q_{13} \\ Q_{14} \\ Q_{15} \\ Q_{21} \\ Q_{22} \\ Q_{23} \\ Q_{24} \\ Q_{25} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0536 \\ -0.0536 \\ -0.0536 \\ -0.0536 \\ -0.0536 \\ 0.3929 \\ 0.3929 \\ -0.6071 \\ -0.6071 \\ -0.0134 \end{Bmatrix} \times ql$$

Mômen uốn của dầm:

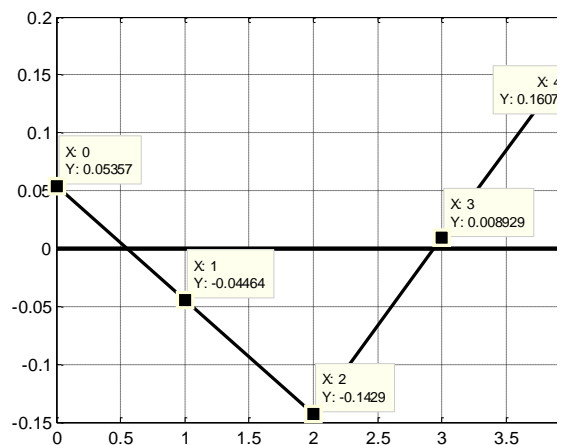
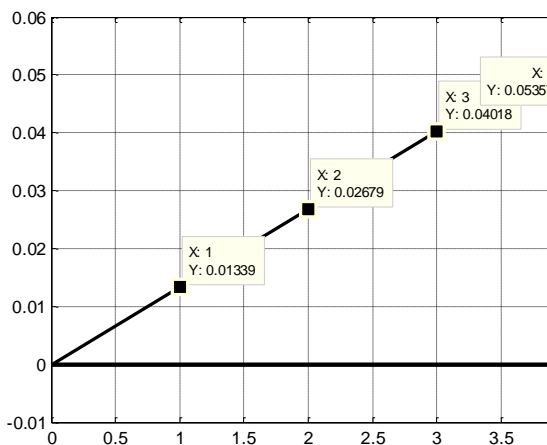
$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{12} \\ M_{13} \\ M_{14} \\ M_{15} \\ M_{21} \\ M_{22} \\ M_{23} \\ M_{24} \\ M_{25} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0000 \\ -0.0133 \\ -0.0268 \\ -0.0401 \\ -0.0535 \\ -0.0535 \\ 0.0446 \\ 0.0142 \\ -0.0084 \\ -0.0160 \end{Bmatrix} \times Pl$$

Dưới đây lần là đường độ võng và biểu đồ moomen uốn của cột và dầm



Hình 3.15a. Đường độ võng của cột trái

Hình 3.15b. Đường độ võng của dầm



Hình 3.15c. Biểu đồ mômen cột trái

Hình 3.15d. Biểu đồ mômen của dầm

Nhận xét kết quả trên:

Khi $h=l/1000$ (không kể đến ảnh hưởng của biến dạng trượt) chia cột và dầm thành 4 phần tử ta nhận được kết quả như trên, so sánh với kết quả theo lời giải giải tích ta nhận được sai số theo bảng sau:

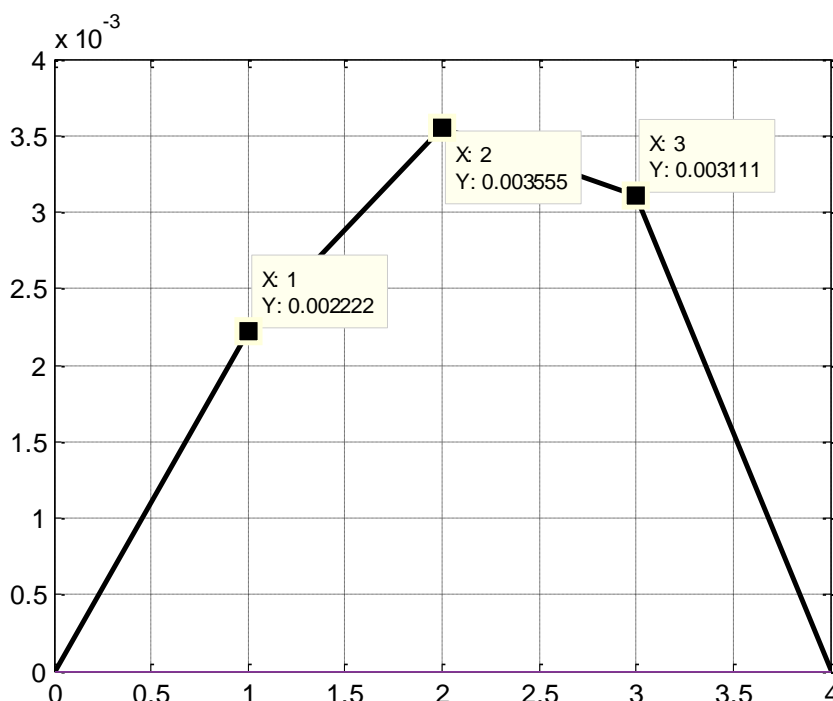
BẢNG SO SÁNH MÔMEN UỐN TẠI CÁC TIẾT DIỆN CỘT VÀ DẦM

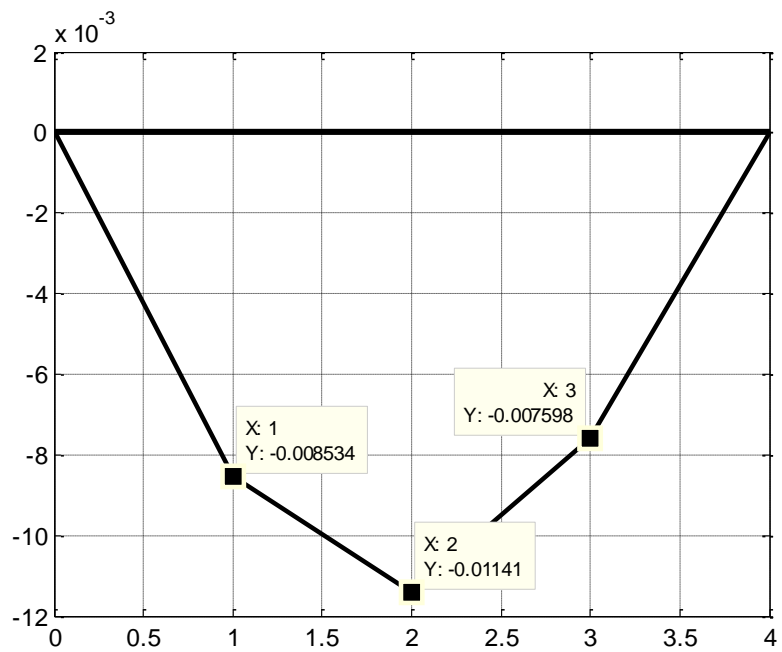
Các tiết diện của cột 1 và dầm 2	Lời giải số theo phương pháp PTHH	Lời giải giải tích	Sai số %
Giữa cột	-0,0267	-0,0267	0,000
Đầu cột	-0,0535	-0,0535	0,000
Đầu trái dầm	-0,0535	-0,0535	0,000
Giữa dầm	0,1420	0,1420	0,000
Đầu phải dầm	-0,1607	-0,1607	0,000

Khi chia dầm và cột thành 4 phần tử ta đã nhận được kết quả trùng khớp kết quả chính xác.

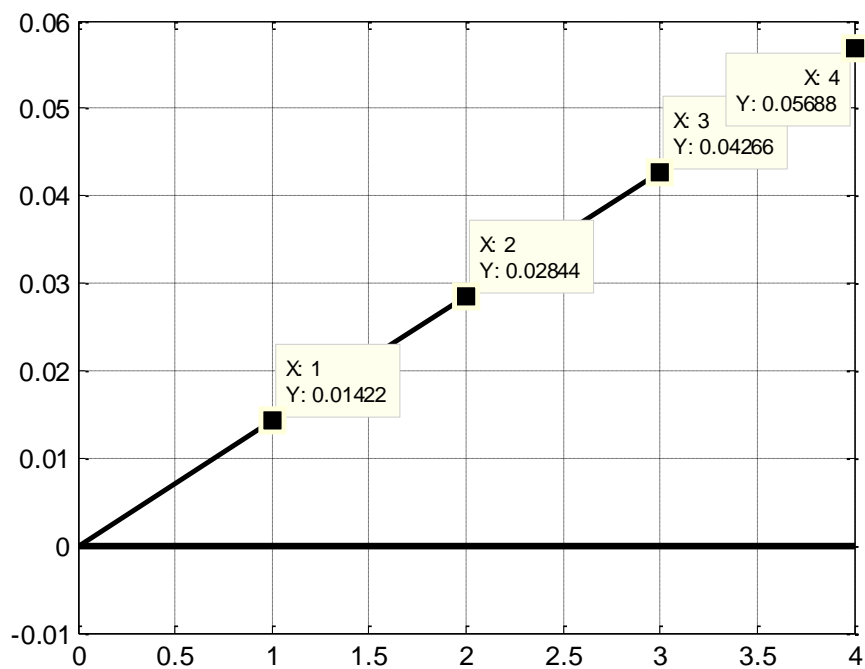
Khi $h=l/3$ (kể đến ảnh hưởng của biến dạng trượt) chia cột và dầm thành 4 phần tử ta nhận được kết quả như sau, so sánh với kết quả theo lời giải giải tích ta nhận được sai số theo bảng sau:

Dưới đây lần là đường độ võng và biểu đồ mômen uốn của cột và dầm khi $h=l/3$

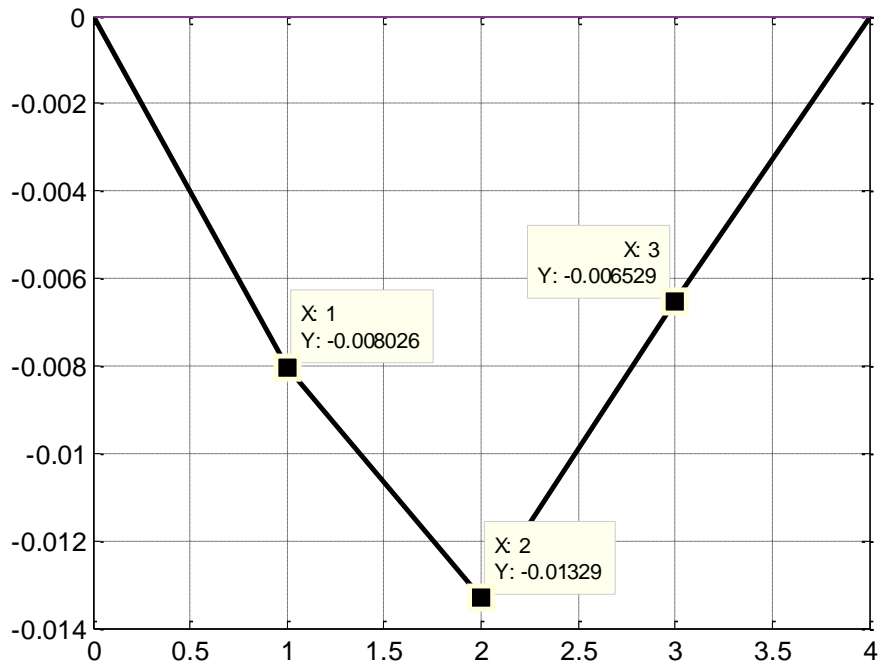




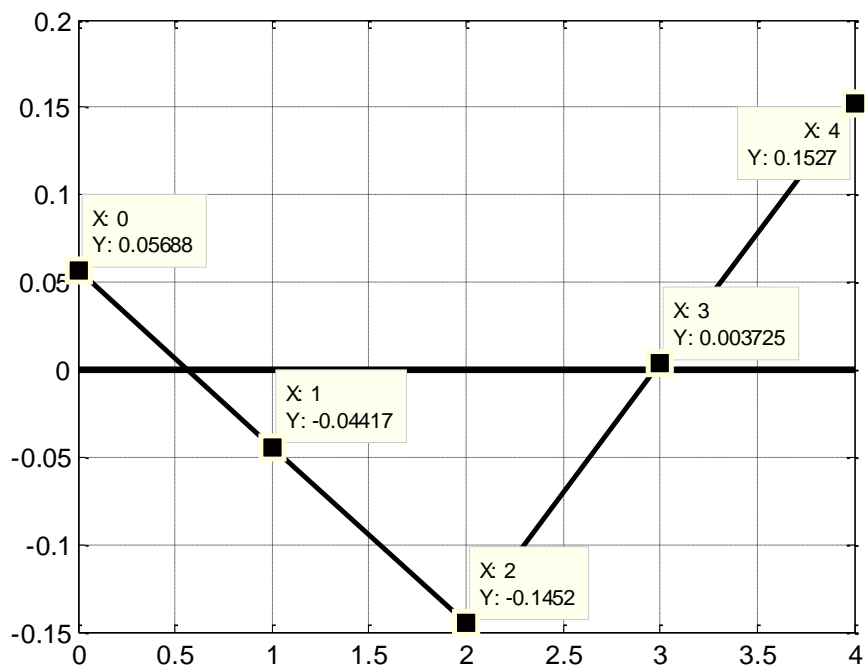
Hình 3.16a. Đường độ võng của cột



Hình 3.16b. Biểu đồ mômen của cột



Hình 3.16c. Đường độ võng của dầm



Hình 3.16d. Biểu đồ mômen của dầm

Mỗi phần tử có 6 ẩn $w_1, w_2, \theta_1, \theta_2, q_1, q_2$, vậy nếu n_{pt} phần tử rời rạc thì tổng cộng có $6 \times n_{pt}$ ẩn.

Nhưng vì cần đảm bảo liên tục giữa các chuyển vị là chuyển vị của nút cuối phần tử thứ e bằng chuyển vị của nút đầu phần tử thứ $(e + 1)$ nên số ẩn của thanh sẽ nhỏ hơn $4 \times n_{pt}$. Khi giải ta chỉ cần đảm bảo điều kiện liên tục của chuyển vị còn điều kiện liên tục về góc xoay được xét bằng cách đưa vào các điều kiện ràng buộc. Ví dụ dầm trong (ví dụ 3.2, hình 3.17) ta chia thành 4 phần tử (hình 3.18).

Khi chia cột bên trái và cột bên phải của khung thành 4 phần tử thì:

- Số nút mỗi cột sẽ là 5, thứ tự từ dưới lên trên là [1, 2, 3, 4, 5] (hình 3.18b1, b3).

- Số ẩn chuyển vị của cột bên trái khung $n_{w1}=4$, thứ tự từ dưới lên trên là [1, 2, 3, 4] (hình 3.18c1). Số ẩn chuyển vị của dầm ngang là $n_{w2}=3$, thứ tự từ trái sang phải là [21, 22, 23] (hình 3.18c2). Số ẩn chuyển vị của cột bên phải khung $n_{w3}=4$, thứ tự từ dưới lên trên là [40, 41, 42, 43] (hình 3.18c3).

- Ẩn chuyển vị tại chân cột trái và phải bằng không.

- Ẩn góc xoay của cột trái là $n_{wx1}=8$, thứ tự từ dưới lên trên là [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12] (hình 3.18d1). Ẩn góc xoay của dầm ngang là $n_{wx2}=8$, thứ tự từ trái sang phải là [24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31] (hình 3.18d2). Ẩn góc xoay của cột phải là $n_{wx3}=8$, thứ tự từ dưới lên trên là [44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51] (hình 3.18d3).

- Ẩn lực cắt $n_{q1}=8$, thứ tự từ dưới lên trên là [13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20] (hình 3.18e1). Ẩn lực cắt $n_{q2}=8$, thứ tự từ trái sang phải là [32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39] (hình 3.18e2). Ẩn lực cắt $n_{q3}=8$, thứ tự từ dưới lên trên là [52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59] (hình 3.18e1).

Như vậy, tổng cộng số ẩn chính của bài toán là 59 ẩn $< 3 \times 4 \times 6 = 72$ ẩn. Gọi ma trận nw là ma trận chuyển vị có kích thước $nw(n_{pt}, 2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ẩn số là chuyển vị tại nút của các phần tử (hình 3.18).

Các phần tử cột bên trái:

$$\begin{aligned} nw1(1,:) &= [0 \quad 1]; \\ nw1(2,:) &= [1 \quad 2]; \\ nw1(3,:) &= [2 \quad 3]; \\ nw1(4,:) &= [3 \quad 4] \quad nw1 = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 4] \end{aligned}$$

Gọi ma trận $nwx1$ là ma trận chuyển vị góc xoay có kích thước $nwx1(n_{pt}, 2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ẩn số là góc xoay tại nút của các phần tử (hình 3.18d1).

$$\begin{aligned} nwx1(1,:) &= [5 \quad 6]; \\ nwx1(2,:) &= [7 \quad 8]; \\ nwx1(3,:) &= [9 \quad 10]; \\ nwx1(4,:) &= [11 \quad 12] \quad nwx1 = [5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12] \end{aligned}$$

Gọi ma trận $nq1$ là ma trận lực cắt có kích thước $nq1(n_{pt}, 2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ẩn số là lực cắt tại nút của các phần tử (hình 3.18e1).

$$\begin{aligned} nq1(1,:) &= [13 \quad 14]; \\ nq1(2,:) &= [15 \quad 16]; \\ nq1(3,:) &= [17 \quad 18]; \\ nq1(4,:) &= [19 \quad 20] \quad nq1 = \begin{bmatrix} 13 & 14 \\ 15 & 16 \\ 17 & 18 \\ 19 & 20 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Các phần tử dầm:

$$\begin{aligned} nw2(1,:) &= [0 \quad 21]; \\ nw2(2,:) &= [21 \quad 22]; \\ nw2(3,:) &= [22 \quad 23]; \\ nw2(4,:) &= [23 \quad 0] \quad nw2 = \begin{bmatrix} 0 & 21 \\ 21 & 22 \\ 22 & 23 \\ 23 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Gọi ma trận $nwx2$ là ma trận chuyển vị góc xoay có kích thước $nwx2(n_{pt}, 2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ẩn số là góc xoay tại nút của các phần tử (hình 3.18).

$$\begin{aligned} nwx2(1,:) &= [24 \quad 25]; \\ nwx2(2,:) &= [26 \quad 27]; \\ nwx2(3,:) &= [28 \quad 29]; \\ nwx2(4,:) &= [30 \quad 31] \end{aligned} \quad nwx2 = \begin{bmatrix} 24 & 25 \\ 26 & 27 \\ 28 & 29 \\ 30 & 31 \end{bmatrix}$$

Gọi ma trận $nq2$ là ma trận lực cắt có kích thước $nq2(n_{pt}, 2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ẩn số là lực cắt tại nút của các phần tử (hình 3.18e2).

$$\begin{aligned} nq2(1,:) &= [32 \quad 33]; \\ nq2(2,:) &= [34 \quad 35]; \\ nq2(3,:) &= [36 \quad 37]; \\ nq2(4,:) &= [38 \quad 39] \end{aligned} \quad nq2 = \begin{bmatrix} 32 & 33 \\ 34 & 35 \\ 36 & 37 \\ 38 & 39 \end{bmatrix}$$

Các phần tử cột bên phải:

$$\begin{aligned} nw3(1,:) &= [0 \quad 40]; \\ nw3(2,:) &= [40 \quad 41]; \\ nw3(3,:) &= [41 \quad 42]; \\ nw3(4,:) &= [42 \quad 43] \end{aligned} \quad nw3 = \begin{bmatrix} 0 & 40 \\ 40 & 41 \\ 41 & 42 \\ 42 & 43 \end{bmatrix}$$

Gọi ma trận $nwx3$ là ma trận chuyển vị góc xoay có kích thước $nwx3(n_{pt}, 2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ẩn số là góc xoay tại nút của các phần tử (hình 3.18d3).

$$\begin{aligned}
nwx3(1,:) &= [44 \quad 45]; \\
nwx3(2,:) &= [46 \quad 47]; \\
nwx3(3,:) &= [48 \quad 49]; \\
nwx3(4,:) &= [50 \quad 51]
\end{aligned}
\quad nwx3 = \begin{bmatrix} 44 & 45 \\ 46 & 47 \\ 48 & 49 \\ 50 & 51 \end{bmatrix}$$

Gọi ma trận nq3 là ma trận lực cắt có kích thước nq2(n_{pt}, 2) là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ẩn số là lực cắt tại nút của các phần tử (hình 3.18e3).

$$\begin{aligned}
nq3(1,:) &= [52 \quad 53]; \\
nq3(2,:) &= [54 \quad 55]; \\
nq3(3,:) &= [56 \quad 57]; \\
nq3(4,:) &= [58 \quad 59]
\end{aligned}
\quad nq3 = \begin{bmatrix} 52 & 53 \\ 54 & 55 \\ 56 & 57 \\ 58 & 59 \end{bmatrix}$$

Sau khi biết ẩn số thực của dầm và cột ta có thể xây dựng độ cứng tổng thể của khung (có rất nhiều cách ghép nối phần tử khác nhau, tùy vào trình độ lập trình của mỗi người nên tác giả không trình bày chi tiết cách ghép nối các phần tử lại để được ma trận độ cứng của toàn dầm và có thể xem trong code mô đun chương trình của tác giả)

Nếu bài toán có nw1, nw2, nw3 ẩn số chuyển vị thẳng của dầm và cột và nwx1, nwx2, nwx3 ẩn số góc xoay của dầm và cột thì ma trận độ cứng của dầm là K có kích thước (nxn), K(n,n)

với n=(nw1+nwx1+nq1+nw2+nwx2+nq2+nw3+nwx3+nq3). Như ở ví dụ 3.2, n=59. Bây giờ xét điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử.

Điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử được viết như sau:

$$\left(\frac{dy_i}{dx} - \frac{\alpha Q_i}{GF} \right) \Big|_{nnt2} - \left(\frac{dy_{i+1}}{dx} - \frac{\alpha Q_{i+1}}{GF} \right) \Big|_{nnt1} = 0 \quad (a)$$

Đối với cột trái, ta có:

$$\left. \begin{aligned}
\delta\lambda_1 \left[\left(\frac{dy_{11}}{dx} - \frac{\alpha Q_{11}}{GF} \right) \Big|_{nut2} - \left(\frac{dy_{12}}{dx} - \frac{\alpha Q_{12}}{GF} \right) \Big|_{nut1} \right] &= 0 \\
\delta\lambda_2 \left[\left(\frac{dy_{12}}{dx} - \frac{\alpha Q_{12}}{GF} \right) \Big|_{nut2} - \left(\frac{dy_{13}}{dx} - \frac{\alpha Q_{13}}{GF} \right) \Big|_{nut1} \right] &= 0 \\
\delta\lambda_3 \left[\left(\frac{dy_{13}}{dx} - \frac{\alpha Q_{13}}{GF} \right) \Big|_{nut2} - \left(\frac{dy_{14}}{dx} - \frac{\alpha Q_{14}}{GF} \right) \Big|_{nut1} \right] &= 0
\end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Đối với dầm ngang, ta có:

$$\left. \begin{aligned} \delta\lambda_4 \left[\left(\frac{dy_{21}}{dx} - \frac{\alpha Q_{21}}{GF} \right) \Big|_{nut2} - \left(\frac{dy_{22}}{dx} - \frac{\alpha Q_{22}}{GF} \right) \Big|_{nut1} \right] &= 0 \\ \delta\lambda_5 \left[\left(\frac{dy_{22}}{dx} - \frac{\alpha Q_{22}}{GF} \right) \Big|_{nut2} - \left(\frac{dy_{23}}{dx} - \frac{\alpha Q_{23}}{GF} \right) \Big|_{nut1} \right] &= 0 \\ \delta\lambda_6 \left[\left(\frac{dy_{23}}{dx} - \frac{\alpha Q_{23}}{GF} \right) \Big|_{nut2} - \left(\frac{dy_{24}}{dx} - \frac{\alpha Q_{23}}{GF} \right) \Big|_{nut1} \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Đối với cột phải, ta có:

$$\left. \begin{aligned} \delta\lambda_7 \left[\left(\frac{dy_{31}}{dx} - \frac{\alpha Q_{31}}{GF} \right) \Big|_{nut2} - \left(\frac{dy_{32}}{dx} - \frac{\alpha Q_{31}}{GF} \right) \Big|_{nut1} \right] &= 0 \\ \delta\lambda_8 \left[\left(\frac{dy_{32}}{dx} - \frac{\alpha Q_{32}}{GF} \right) \Big|_{nut2} - \left(\frac{dy_{33}}{dx} - \frac{\alpha Q_{33}}{GF} \right) \Big|_{nut1} \right] &= 0 \\ \delta\lambda_9 \left[\left(\frac{dy_{33}}{dx} - \frac{\alpha Q_{33}}{GF} \right) \Big|_{nut2} - \left(\frac{dy_{34}}{dx} - \frac{\alpha Q_{34}}{GF} \right) \Big|_{nut1} \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

Gọi k_1 là góc xoay tại nút 2 của phần tử trước, k_2 là góc xoay tại nút 1 của phần tử sau thì ta có các hệ số trong ma trận độ cứng K:

$$k(n+i, k_1) = \frac{2}{\Delta x}; \quad k(n+i, k_2) = -\frac{2}{\Delta x} \quad (i=1 \div k) \quad (e)$$

$$k(k_1, n+i) = \frac{2}{\Delta x}; \quad k(k_2, n+i) = -\frac{2}{\Delta x} \quad (i=1 \div k) \quad (f)$$

Nếu có hai phần tử thì có một điều kiện về góc xoay, có n_{pt} phần tử thì có $(2n_{pt} - 1)$ điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử.

Điều kiện biên được viết như sau:

- Tại đầu ngàm chân cột trái và phải có góc xoay bằng không:

$$\delta\lambda_{10} \left(\left[\frac{dy_{11}}{dx} - \frac{\alpha Q_{11}}{GF} \right] \Big|_{nut1} \right) = 0 \quad (f)$$

$$\delta\lambda_{11} \left(\left. \frac{dy_{31}}{dx} - \frac{\alpha Q_{31}}{GF} \right|_{nut1} \right) = 0 \quad (g)$$

Điều kiện hai góc xoay tại hai nút giao giữa hai cột và dầm được viết như sau:

Góc xoay tại nút cuối của phần tử đầu cột trái bằng góc xoay tại nút đầu của phần tử đầu tiên của dầm

$$\delta\lambda_{12} \left(\left[\left. \frac{dy_{11}}{dx} - \frac{\alpha Q_{11}}{GF} \right]_{nut2} - \left(\left. \frac{dy_{21}}{dx} - \frac{\alpha Q_{21}}{GF} \right) \right|_{nut1} \right) = 0 \quad (h)$$

Góc xoay tại nút cuối của phần tử đầu cột phải bằng góc xoay tại nút cuối của phần tử cuối cùng của dầm

$$\delta\lambda_{13} \left(\left[\left. \frac{dy_{24}}{dx} - \frac{\alpha Q_{24}}{GF} \right]_{nut2} - \left[\left. \frac{dy_{34}}{dx} - \frac{\alpha Q_{34}}{GF} \right]_{nut2} \right) = 0 \quad (i)$$

Điều kiện chuyển vị ngang tại đầu cột trái và phải bằng nhau:

$$\delta\lambda_{14} (y_1|_{nut2} - y_3|_{nut2}) = 0 \quad (k)$$

Trong đó $\lambda_k (k=1 \div 14)$ cũng là ẩn số của bài toán (có k ẩn số λ), do đó tổng số ẩn số của bài toán lúc đó là $(n+k)$, do đó ma trận độ cứng của phần tử lúc này cũng phải thêm k dòng và k cột như vậy kích thước của ma trận độ cứng là $K(n+k, n+k)$. Chẳng hạn trong ví dụ này, ta có $n=59$, $k=14$ và tổng số ẩn của bài toán là $n+k=59+14=73$ ẩn. Trong trường hợp này ta xác định được kích thước của ma trận độ cứng tổng thể là: $K[73 \times 73]$.

Như vậy cuối cùng ta sẽ thiết lập được phương trình:

$$[K]\{\Delta\} = \{F\} \quad (e)$$

trong đó: $\{F\} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$; $\{\Delta\} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix}$ là ẩn số của bài toán

$\left. \begin{array}{l} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{array} \right\} \text{so - hang} = n$
 $\left. \begin{array}{l} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\} \text{so - hang} = k$

Trong ví dụ 3.2 khi chia thành ra thành 4 phần tử, ta có:

- Ma trận độ cứng phần tử $[K_e]$, như sau:

$$[K_e] = \begin{bmatrix} 768.0000 & -768.0000 & 96.0000 & 96.0000 & 0 & 0 \\ -768.0000 & 768.0000 & -96.0000 & -96.0000 & 0 & 0 \\ 96.0000 & -96.0000 & 16.0000 & 8.0000 & -0.0000 & 0.0000 \\ 96.0000 & -96.0000 & 8.0000 & 16.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0 & 0 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & 0 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

- Ma trận độ cứng toàn dầm $[K]$:

Ghép nối các ma trận độ cứng phần tử $[K_e]$ vào hệ tọa độ chung, ta được ma trận độ cứng tổng thể của toàn kết cấu $[K(73 \times 73)]$, ở đây không trình bày vì kích thước ma trận quá lớn.

- Véc tơ lực nút $\{F\}$: Trong ví dụ này là véc tơ 1 cột 73 dòng, như sau:

Giải phương trình (e) ta nhận được:

$$\{\Delta\} = [K]^{-1} \{F\}$$

Theo ngôn ngữ lập trình Matlab ta có thể viết:

$$\{\Delta\} = [K] \setminus \{F\}$$

Kết quả chuyển vị, góc xoay tại các nút:

$$\{W\} = \begin{Bmatrix} W_{12} \\ W_{13} \\ W_{14} \\ W_{15} \\ W_{22} \\ W_{23} \\ W_{24} \\ W_{32} \\ W_{33} \\ W_{34} \\ W_{35} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0010 \\ -0.0026 \\ -0.0029 \\ 0.0000 \\ 0.0065 \\ 0.0104 \\ 0.0065 \\ 0.0010 \\ 0.0026 \\ 0.0029 \\ 0.0000 \end{Bmatrix} \times Pl^3 ; \quad \{\varphi\} = \begin{Bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{12} \\ \varphi_{13} \\ \varphi_{14} \\ \varphi_{15} \\ \varphi_{21} \\ \varphi_{22} \\ \varphi_{23} \\ \varphi_{24} \\ \varphi_{25} \\ \varphi_{35} \\ \varphi_{34} \\ \varphi_{33} \\ \varphi_{32} \\ \varphi_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0000 \\ -0.0065 \\ -0.0052 \\ 0.0039 \\ 0.0208 \\ 0.0208 \\ 0.0260 \\ 0.0000 \\ -0.0000 \\ -0.0260 \\ -0.0208 \\ -0.0208 \\ -0.0039 \\ 0.0052 \\ 0.0065 \\ 0.0000 \end{Bmatrix} \times Pl^2$$

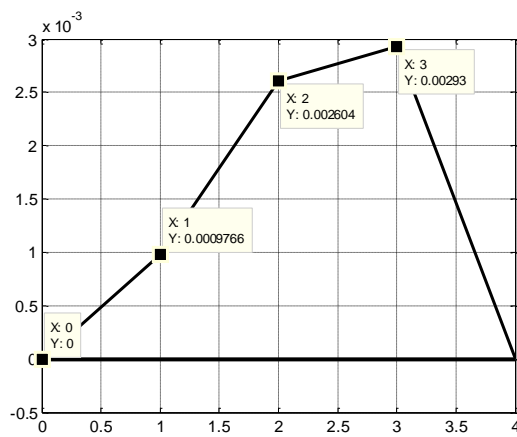
Mômen uốn của khung:

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{12} \\ M_{13} \\ M_{14} \\ M_{15} \\ M_{21} \\ M_{22} \\ M_{23} \\ M_{24} \\ M_{25} \\ M_{35} \\ M_{34} \\ M_{33} \\ M_{32} \\ M_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0417 \\ -0.0104 \\ 0.0208 \\ 0.0521 \\ 0.0833 \\ 0.0833 \\ -0.0417 \\ -0.167 \\ -0.0417 \\ 0.0833 \\ -0.0833 \\ -0.0521 \\ -0.0208 \\ 0.0104 \\ 0.0417 \end{Bmatrix} \times Pl$$

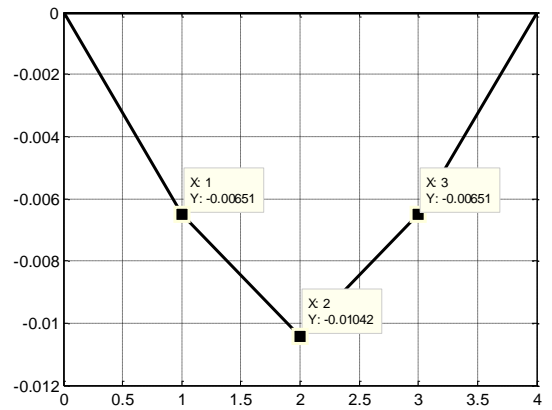
Lực cắt của khung:

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_{11} \\ Q_{12} \\ Q_{13} \\ Q_{14} \\ Q_{15} \\ Q_{21} \\ Q_{22} \\ Q_{23} \\ Q_{24} \\ Q_{25} \\ Q_{35} \\ Q_{34} \\ Q_{33} \\ Q_{32} \\ Q_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.1250 \\ -0.1250 \\ -0.1250 \\ -0.1250 \\ -0.1250 \\ 0.5000 \\ 0.5000 \\ -0.5000 \\ -0.5000 \\ -0.5000 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \end{Bmatrix} \times Pl$$

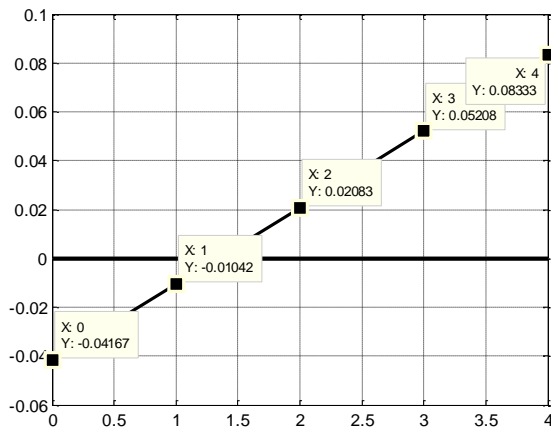
Dưới đây lần là đường độ võng và biểu đồ moomen uốn của cột và dầm



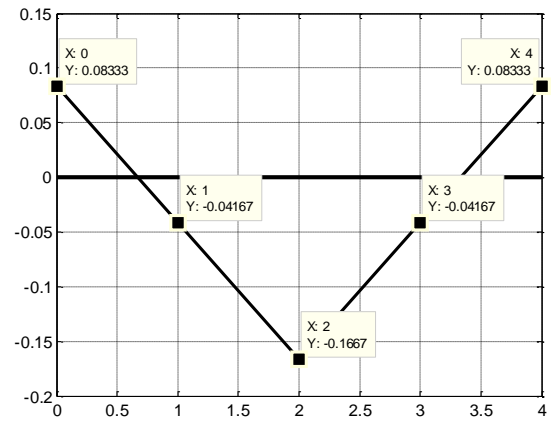
Hình 3.15a. Đường độ võng của cột trái



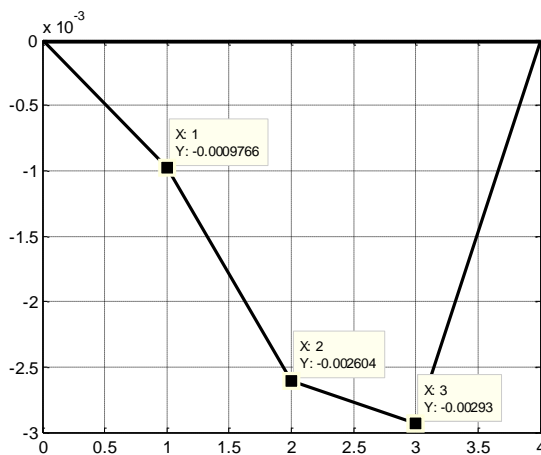
Hình 3.15b. Đường độ võng của dầm



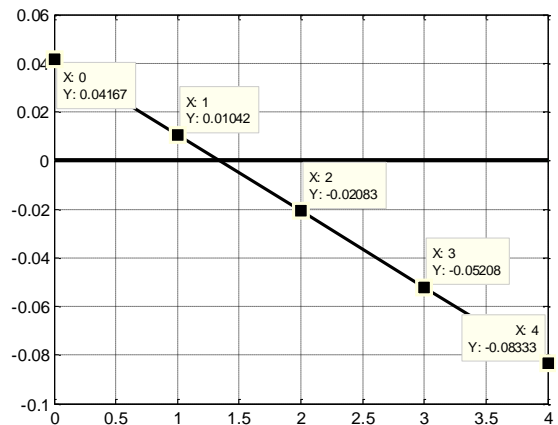
Hình 3.15c. Biểu đồ mômen cột trái



Hình 3.15d. Biểu đồ mômen của dầm



Hình 3.15c. Đường độ võng cột phải



Hình 3.15d. Biểu đồ mômen cột phải

Nhận xét kết quả trên:

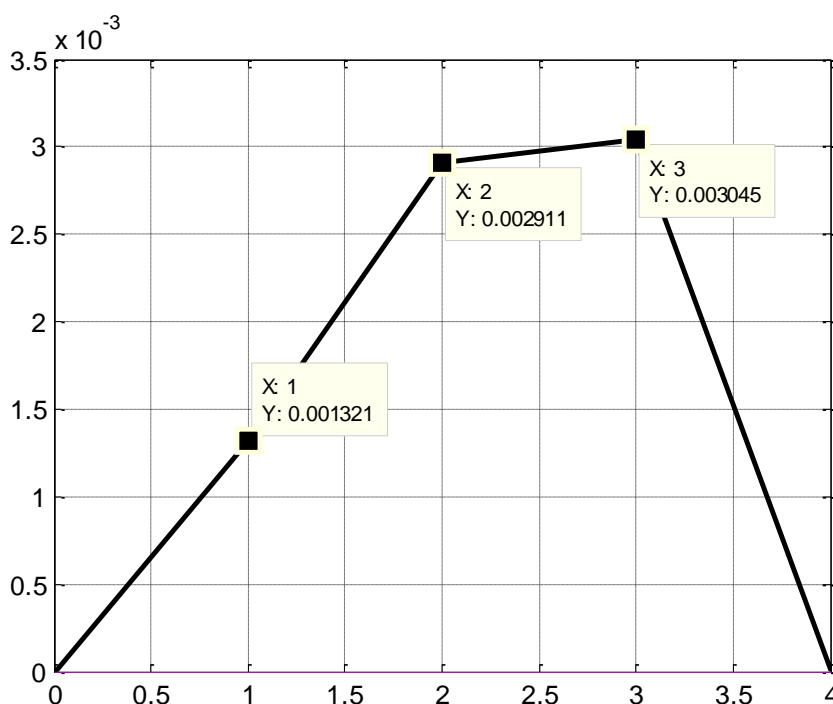
Khi chia cột và dầm thành 4 phần và khi $h=1/1000$ ta nhận được kết quả như trên, so sánh với kết quả chính xác theo lời giải giải tích ta nhận được sai số theo bảng sau:

BẢNG SO SÁNH MÔMEN UỐN TẠI CÁC TIẾT DIỆN CỘT VÀ DẦM

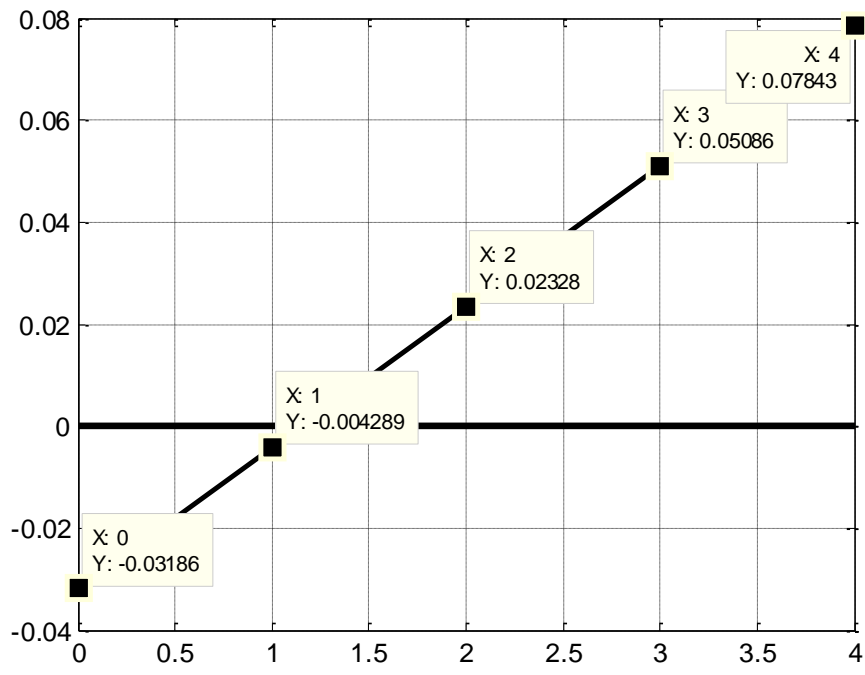
Các tiết diện của cột 1,3 và dầm 2	Lời giải số theo phương pháp PTHH	Lời giải chính xác	Sai số %
Chân cột	0,417	0,417	0,000
Giữa cột	0,0208	0,0208	0,000
Đầu cột	-0,0833	-0,0833	0,000
Đầu trái dầm	-0,0833	-0,0833	0,000
Giữa dầm	0,0167	0,0167	0,000

Trong ví dụ này ta chỉ cần rời rạc hóa kết cấu dầm và cột thành 4 phần tử ta đã nhận được kết quả trùng khớp với lời giải chính xác.

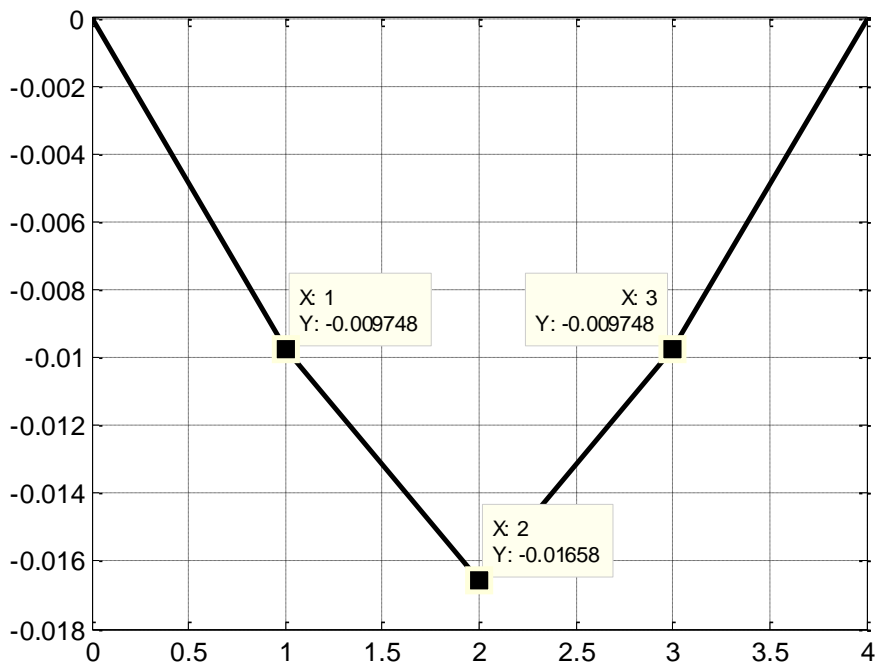
Khi chia cột và dầm thành 4 phần và khi $h=1/3$ ta nhận được kết quả như sau:



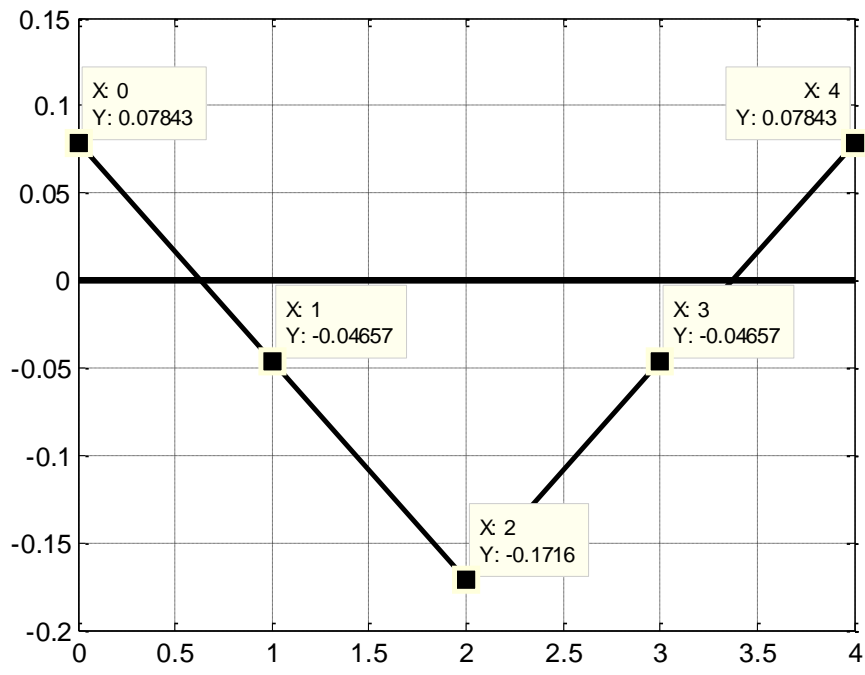
Hình 3.20a. Đường độ võng của cột trái



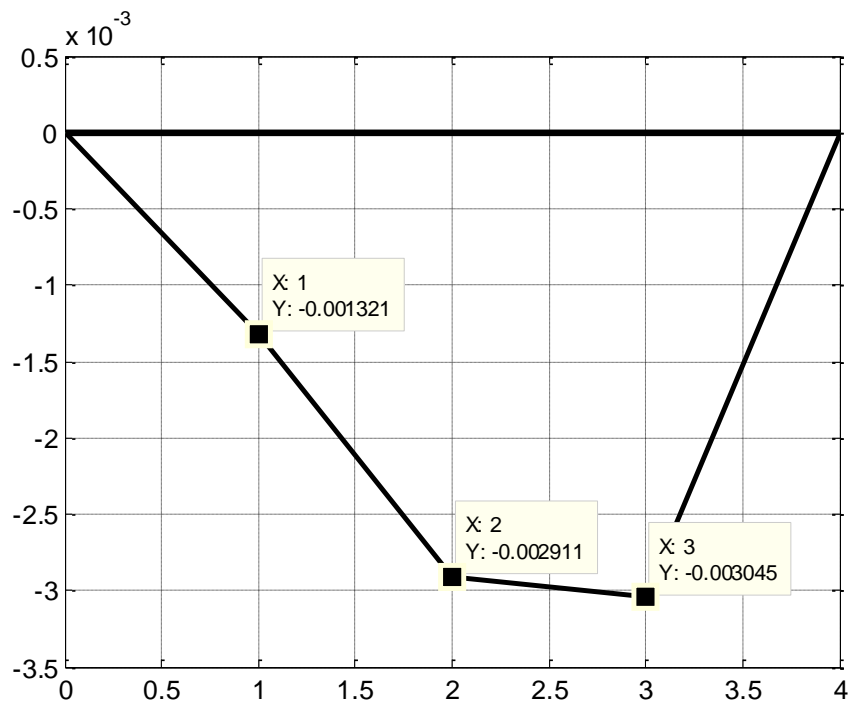
Hình 3.20b. Biểu đồ mômen của cột trái



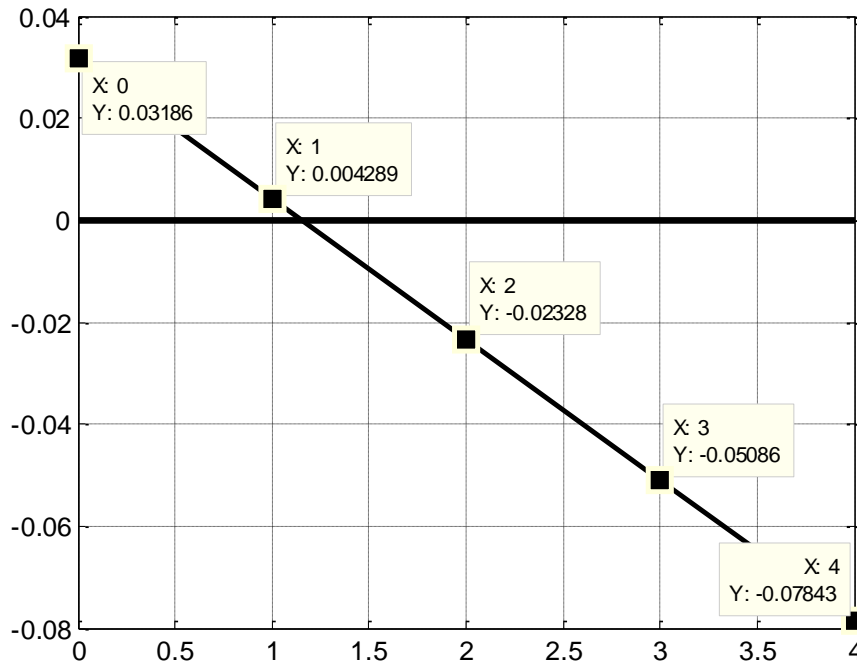
Hình 3.20c. Đường độ võng của dầm ngang



Hình 3.20d. Biểu đồ mômen của dầm ngang



Hình 3.20e. Đường độ võng của cột phải



Hình 3.20f. Biểu đồ mômen của cột phải

BẢNG SO SÁNH MÔMEN UỐN TẠI CÁC TIẾT DIỆN CỘT VÀ DÀM

Các tiết diện của cột 1 và dầm 2	$h=l/1000$ (Không xét biến dạng trượt)	$h=l/3$ (Có xét biến dạng trượt)	Chênh lệch % giữa không và có xét biến dạng trượt ngang
Chân cột	0,0417	0,0318	-23,741
Giữa cột	0,0208	0,0232	11,538
Đầu cột	-0,0833	-0,0784	5,882
Đầu trái dầm	-0,0833	-0,0784	5,882
Giữa dầm	0,0167	0,0171	2,395
Đầu phải dầm	-0,0833	-0,0784	5,882

Khi xét đến biến dạng trượt ngang, tất cả các tiết diện của khung đều thay đổi nội lực tăng hoặc giảm, chân cột momen giảm lớn nhất 23,741%.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

KẾT LUẬN

Qua kết quả nghiên cứu từ các chương, chương 1 đến chương 3 đối với bài toán khung phẳng có xét đến biến dạng trượt ngang chịu tác dụng của tải trọng tĩnh tập trung. Tác giả rút ra các kết luận sau:

1. Trình bày được các phương pháp giải bài toán cơ học kết cấu. Trình bày phương pháp phân tử hữu hạn đối với bài toán cơ học kết cấu.
2. Đã trình bày được bài toán dầm chịu uốn theo lý thuyết dầm Euler - Bernoulli và Lý thuyết dầm có xét đến biến dạng trượt ngang.
3. Bằng phương pháp phân tử hữu hạn, tác giả đã xác định được nội lực và chuyển vị của các khung siêu tĩnh chịu tải trọng tập trung có các điều kiện biên khác nhau. Kết quả về nội lực và chuyển vị đều trùng khớp với kết quả nhận được khi giải bằng các phương pháp hiện có nếu tăng số lượng phân tử lên lớn hơn 4 phân tử. Khi xét đến biến dạng trượt ngang nội lực trong khung thay đổi tương đối lớn, 23,741% tại chân ngàm cột khung siêu tĩnh một tầng một nhịp.
4. Khi rời rạc hóa kết cấu với số phân tử càng nhiều thì kết quả càng tiệm cận tới kết quả chính xác nhận được từ phương pháp giải tích. Đối với bài toán khung chịu tải trọng tập trung thì để đạt được nội lực chính xác cần chia dầm thành 4 phân tử.

KIẾN NGHỊ

Sử dụng phương pháp phân tử hữu hạn để giải các bài toán khác như: Dầm, khung, dàn, tấm, vỏ....

Danh mục tài liệu tham khảo

I. TIẾNG VIỆT

- [1] Hà Huy Cương (2005), *Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss*, Tạp chí Khoa học và kỹ thuật, IV/ Tr. 112 ÷118.
- [2] Nguyễn Văn Liên, Nguyễn Phương Thành, Đinh Trọng Bằng (2003), *Giáo trình Sức bền vật liệu*, Nhà xuất bản xây dựng, tái bản lần thứ 3, 330 trang.
- [3] Phạm Văn Trung (2006), *Phương pháp mới Tính toán hệ dầm và mái treo*, Luận án Tiến sỹ kỹ thuật.
- [4] Nguyễn Văn Đạo (2001), *Cơ học giải tích*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà nội, 337 trang.
- [5] Nguyễn Văn Đạo, Trần Kim Chi, Nguyễn Dũng (2005), *Nhập môn Động lực học phi tuyến và chuyển động hỗn độn*. Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà nội.
- [6] Đoàn Văn Duẩn (2007), *Phương pháp nguyên lý Cực trị Gauss đối với các bài toán ổn định công trình*, Luận văn thạc sỹ kỹ thuật.
- [7] Đoàn Văn Duẩn (2010), *Phương pháp phần tử hữu hạn nghiên cứu ổn định uốn dọc của thanh*, Tạp chí kết cấu và Công nghệ xây dựng, số 05, Quý IV(Tr30-Tr36).
- [8] Đoàn Văn Duẩn (2011), *Nghiên cứu ổn định đàn hồi của thanh và hệ thanh*, Luận án Tiến sỹ kỹ thuật.
- [9] Đoàn Văn Duẩn (2012), *Phương pháp mới tính toán dầm mềm*, Tạp chí kết cấu và công nghệ Xây dựng số 09, Quý II (Tr56-Tr61).
- [10] Đoàn Văn Duẩn (2014), *Phương pháp chuyển vị cưỡng bức giải bài toán trị riêng và véc tơ riêng*, Tạp chí Xây dựng số 11 (Tr82-Tr84).
- [11] Đoàn Văn Duẩn (2015), *Bài toán cơ học kết cấu dưới dạng tổng quát*, Tạp chí Xây dựng số 02 (Tr59-Tr61).
- [12] Đoàn Văn Duẩn (2015), *Phương pháp so sánh nghiên cứu nội lực và chuyển vị của hệ dầm*, Tạp chí Xây dựng số 11 (Tr56-Tr58).

[13] Đoàn Văn Duẩn (2015), Tính toán kết cấu khung chịu uốn bằng phương pháp so sánh, Tạp chí Xây dựng số 12 (Tr62-Tr64).

[14] Trần Thị Kim Huệ (2005), *Phương pháp nguyên lý Cực trị Gauss đối với các bài toán cơ học kết cấu*, Luận văn thạc sỹ kỹ thuật.

[15] Vũ Thanh Thủy (2009), *Xây dựng bài toán dầm khi xét đầy đủ hai thành phần nội lực momen và lực cắt*. Tạp chí Xây dựng số 4.

[16] Vũ Thanh Thủy (2009), *Dao động tự do của dầm khi xét ảnh hưởng của lực cắt*. Tạp chí Xây dựng, số 7.

II. TIẾNG PHÁP

[17] Robert L’Hermite (1974), *Flambage et Stabilité – Le flambage élastique des pièces droites*, édition Eyrolles, Paris.

III. TIẾNG ANH

[18] Stephen P. Timoshenko-Jame M. Gere (1961), *Theory of elastic stability*, McGraw-Hill Book Company, Inc, New York – Toronto – London, 541 Tr.

[19] William T. Thomson (1998), *Theory of Vibration with Applications* (Tái bản lần thứ 5). Stanley Thornes (Publishers) Ltd, 546 trang.

[20] Irons, B. M. and O. C. Zienkiewicz, “*The Isoparametric Finite Element System – A New Concept in Finite Element Analysis*”, Proc. Conf. “*Recent Advances in Stress Analysis*”, Royal Aeronautical Society, London, 1968.

[20] Klaus – Jürgen Bathe (1996), *Finite Element procedures*. Part two, Prentice – Hall International, Inc, 553 trang.

[21] Ray W. Clough, Joseph Penzien (1993), *Dynamics of Structures* (Tái bản lần thứ 2), McGraw-Hill Book Company, Inc, 738 trang.

[22] O.C. Zienkiewicz-R.L. Taylor (1991), *The finite element method* (four edition) Volume 2, McGraw-Hill Book Company, Inc, 807 trang.

[23] G.Korn-T.Korn (1961), *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill, New York (Bản dịch tiếng Nga, I.Bramovich chủ biên, Nhà xuất bản Nauka-Moscow, 1964).

- [24] Stephen P. Timoshenko-J. Goodier (1970), *Theory of elasticity*, McGraw-Hill, New York (Bản dịch tiếng Nga, G. Shapiro chủ biên, Nhà xuất bản Nauka-Moscow, 1979), 560 trang.
- [25] D.R.J. Owen, E.Hinton (1986), *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*, Pineridge Press Lt.
- [26] Lars Olovsson, Kjell Simonsson, Mattias Unosson (2006), *Shear locking reduction in eight-node tri-linear solid finite elements*, J. ‘Computers @ Structures’, 84, trg 476-484.
- [27] C.A. Brebbia, J.C.F. Telles, L.C. Wrobel (1984), *Boundary Element Techniques. Theory and Applications in Engineering*. Nxb Springer – Verlag. (Bản dịch tiếng Nga, 1987).
- [28] Chopra Anil K (1995). *Dynamics of structures*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New – Jersey 07632.
- [29] Wilson Edward L. Professor Emeritus of structural Engineering University of California at Berkeley (2002). *Three – Dimensional Static and Dynamic Analysis of structures*, Inc. Berkeley, California, USA. Third edition, Reprint January.
- [30] Wilson, E. L., R. L. Taylor, W. P. Doherty and J. Ghaboussi (1971). “*Incompatible Displacement Models*”, Proceedings, ORN Symposium on “Numerical and Computer Method in Structural Mechanics”. University of Illinois, Urbana. September. Academic Press.
- [31] Strang, G (1972). “*Variational Crimes in the Finite Element Method*” in “The Mathematical Foundations of the Finite Element Method”. P.689 -710 (ed. A.K. Aziz). Academic Press.
- [32] Irons, B. M. and O. C. Zienkiewicz (1968). “*The isoparametric Finite Element System – A New Concept in Finite Element Analysis*”, Proc. Conf. “Recent Advances in Stress Analysis”. Royal Aeronautical Society. London.

[33] Kolousek Vladimir, DSC Professor, Technical University, Pargue (1973). *Dynamics in engineering structures*. Butter worths London.

[34] Felippa Carlos A (2004). *Introduction of finite element methods*. Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures University of Colorado Boulder, Colorado 80309-0429, USA, Last updated Fall.