

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC DÂN LẬP HẢI PHÒNG**

PHẠM ÁNH DƯƠNG

**PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN
ĐỐI VỚI BÀI TOÁN DẦM ĐƠN CÓ XÉT BIẾN DẠNG
TRƯỢT NGANG CHỊU TẢI TRỌNG TẬP TRUNG**

Chuyên ngành: **Kỹ thuật Xây dựng Công trình Dân dụng & Công nghiệp**

Mã số: **60.58.02.08**

LUẬN VĂN THẠC SỸ KỸ THUẬT

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. ĐOÀN VĂN DUẤN

Hải Phòng, 2017

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các số liệu, kết quả trong luận văn là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Tác giả luận văn

Phạm Ánh Dương

LỜI CẢM ƠN

Tác giả luận văn xin trân trọng bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất đối với TS. Đoàn Văn Duẩn đã tận tình giúp đỡ và cho nhiều chỉ dẫn khoa học có giá trị cũng như thường xuyên động viên, tạo mọi điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu hoàn thành luận văn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các nhà khoa học, các chuyên gia trong và ngoài trường Đại học Dân lập Hải phòng đã tạo điều kiện giúp đỡ, quan tâm góp ý cho bản luận văn được hoàn thiện hơn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn các cán bộ, giáo viên của Khoa xây dựng, Phòng đào tạo Đại học và Sau đại học - trường Đại học Dân lập Hải phòng, và các đồng nghiệp đã tạo điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tác giả trong quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tác giả luận văn

Phạm Ánh Dương

MỞ ĐẦU

Bài toán cơ học kết cấu có tầm quan trọng đặc biệt trong lĩnh vực cơ học công trình, đòi hỏi phải nghiên cứu đầy đủ cả về mặt lý thuyết và thực nghiệm. Vấn đề nội lực và chuyển vị của kết cấu được nhiều nhà khoa học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu theo nhiều hướng khác nhau. Tựu chung lại, các phương pháp xây dựng bài toán gồm: Phương pháp xây dựng phương trình vi phân cân bằng phân tử; Phương pháp năng lượng; Phương pháp nguyên lý công ảo và Phương pháp sử dụng trực tiếp Phương trình Lagrange. Các phương pháp giải về cơ bản gồm: Phương pháp lực, phương pháp chuyển vị, phương pháp hỗn hợp, liên hợp; Các phương pháp số gồm: Phương pháp sai phân, Phương pháp biến phân, phương pháp hỗn hợp sai phân - biến phân và phương pháp phần tử hữu hạn.

Hiện nay, kết cấu chính thường được sử dụng trong các công trình dân dụng và công nghiệp thường là khung cứng thuần túy hoặc khung kết hợp với lõi và vách cứng. Với số lượng phần tử rất lớn dẫn đến số ẩn của bài toán rất lớn, vấn đề đặt ra là với những bài toán như vậy thì dùng phương pháp nào để tìm lời giải của chúng một cách nhanh chóng, thuận tiện và có hiệu quả nhất. Với sự phát triển mạnh mẽ của máy tính điện tử, đồng thời các phần mềm lập trình kết cấu ngày càng hiện đại, tác giả nhận thấy rằng phương pháp phần tử hữu hạn là một phương pháp số đáp ứng được các yêu cầu nêu trên.

Thực chất của phương pháp phần tử hữu hạn là rời rạc hóa bản thân kết cấu. Các phần tử liên kề liên hệ với nhau bằng các phương trình cân bằng và các phương trình liên tục. Để giải quyết bài toán cơ học kết cấu, có thể tiếp cận phương pháp này bằng đường lối trực tiếp, suy diễn vật lý hoặc đường lối toán học, suy diễn biến phân. Tuy nhiên bằng cách nào đi chăng nữa thì kết quả thu được là một ma trận (độ cứng hoặc độ mềm). Ma trận đó được xây dựng dựa trên cơ sở cực trị hóa phiếm hàm biểu diễn năng lượng. Trong phạm vi mỗi phần tử riêng biệt, các hàm chuyển vị được xấp xỉ gần đúng theo một dạng nào đó, thông thường là các đa thức.

Đối tượng, phương pháp và phạm vi nghiên cứu của đề tài

Trong luận văn này, tác giả sử dụng phương pháp phân tử hữu hạn nói trên để xây dựng và giải bài toán dầm đơn có xét đến biến dạng trượt ngang chịu tác dụng của tải trọng phân bố đều.

Mục đích nghiên cứu của đề tài

“Xác định nội lực và chuyển vị của dầm đơn có xét đến biến dạng trượt ngang chịu tải trọng tập trung bằng phương pháp phân tử hữu hạn”

Nhiệm vụ nghiên cứu của đề tài

1. Tìm hiểu và giới thiệu các phương pháp xây dựng và các phương pháp giải bài toán cơ học kết cấu hiện nay.
2. Trình bày lý thuyết dầm Euler - Bernoulli, lý thuyết dầm có xét biến dạng trượt ngang
3. Sử dụng phương pháp phân tử hữu hạn để giải bài toán dầm đơn có xét đến biến dạng trượt ngang, chịu tác dụng của tải trọng tập trung.
4. Lập chương trình máy tính điện tử cho các bài toán nêu trên.

CHƯƠNG 1.

CÁC PHƯƠNG PHÁP XÂY DỰNG VÀ GIẢI BÀI TOÁN CƠ HỌC KẾT CẤU

Trong chương này trình bày các phương pháp truyền thống để xây dựng các bài toán cơ học nói chung; giới thiệu bài toán cơ học kết cấu (bài toán tĩnh) và các phương pháp giải thường dùng hiện nay.

1. Phương pháp xây dựng bài toán cơ học

Bốn phương pháp chung để xây dựng bài toán cơ học kết cấu được trình bày dưới đây. Dùng lý thuyết dầm chịu uốn để minh họa.

1.1. Phương pháp xây dựng phương trình vi phân cân bằng phân tố

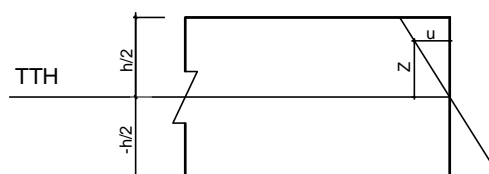
Phương trình vi phân cân bằng được xây dựng trực tiếp từ việc xét các điều kiện cân bằng lực của phân tố được tách ra khỏi kết cấu. Trong sức bền vật liệu khi nghiên cứu dầm chịu uốn ngang sử dụng các giả thiết sau:

- Trục dầm không bị biến dạng nên không có ứng suất.
- Mặt cắt thẳng góc với trục dầm sau khi biến dạng vẫn phẳng và thẳng góc với trục dầm (giả thiết Euler–Bernoulli).
- Không xét lực nén giữa các thớ theo chiều cao của dầm

Với giả thiết thứ ba thì chỉ có ứng suất pháp σ_x và các ứng suất tiếp σ_{xz} , σ_{zx} tác dụng lên phân tố dầm (hình 1.3), ứng suất pháp σ_z bằng không. Hai giả thiết thứ ba và thứ nhất dẫn đến trục dầm chỉ có chuyển vị thẳng đứng $y(x)$ và nó được gọi là đường độ võng hay đường đàn hồi của dầm. Giả thiết thứ nhất xem chiều dài trục dầm không thay đổi khi bị võng đòi hỏi độ võng của dầm là nhỏ so với chiều cao dầm, $y_{\max} / h \leq 1/5$. Với giả thiết thứ hai thì biến dạng trượt do ứng suất tiếp gây ra không được xét trong tính độ võng của dầm như trình bày dưới đây. Giả thiết này chỉ đúng khi tỉ lệ $h/l \leq 1/5$. Chuyển vị ngang u của điểm nằm ở độ cao z so với trục dầm bằng

$$u = -z \frac{dy}{dx}$$

Biến dạng và ứng suất xác định như sau



Hình 1.2. Phân tố dầm

$$\varepsilon_x = -z \frac{d^2 y}{dx^2}; \sigma_{xx} = -Ez \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Momen tác dụng lên trục dầm:

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} -Ebz^2 \frac{d^2 y}{dx^2} dz = -\frac{Ebh^3}{12} \frac{d^2 y}{dx^2}$$

hay $M = EJ\chi$ (1.7)

trong đó: $EJ = \frac{Ebh^3}{12}$, $\chi = -\frac{d^2 y}{dx^2}$

EJ được gọi là độ cứng uốn của dầm; χ là độ cong của đường đàn hồi và sẽ được gọi là biến dạng uốn; b là chiều rộng dầm. Để đơn giản trình bày, ở đây chỉ dùng trường hợp dầm có tiết diện chữ nhật.

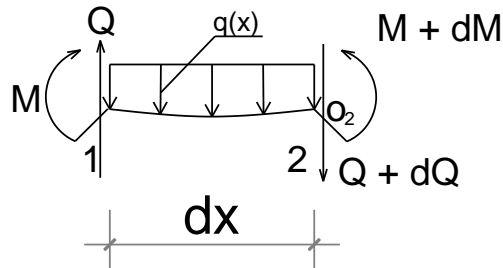
Cách tính nội lực momen ở trên không xét đến biến dạng trượt do các ứng suất tiếp gây ra. Tổng các ứng suất tiếp σ_{zx} trên mặt cắt sẽ cho ta lực cắt Q tác dụng lên

trục dầm:
$$Q = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{zx} dz$$

Biểu thức của ứng suất tiếp σ_{zx} trong tích phân trên sẽ trình bày sau.

Nhờ các giả thiết nêu trên, thay cho trạng thái ứng suất trong dầm, ta chỉ cần nghiên cứu phương trình cân bằng của các nội lực M và Q tác dụng lên trục dầm.

Xét phân tử dx của trục dầm chịu tác dụng của các lực M, Q và ngoại lực phân bố q, hình 1.3. Chiều dương của M, Q và q trên hình vẽ tương ứng với chiều dương của độ võng hướng xuống dưới.



Hình 1.3. Xét cân bằng phân tử

Lấy tổng momen đối với điểm O_2 , bỏ qua các vô cùng bé bậc cao ta có

$$\frac{dM}{dx} - Q = 0 \tag{1.8}$$

Lấy tổng hình chiếu các lực lên trục thẳng đứng:

$$\frac{dQ}{dx} + q = 0 \quad (1.9)$$

Phương trình (1.8) là phương trình liên hệ giữa momen uốn và lực cắt, phương trình (1.9) là phương trình cân bằng lực cắt Q và ngoại lực phân bố q. Đó là hai phương trình xuất phát (hai phương trình đầu tiên) của phương pháp cân bằng phân tố. Lấy đạo hàm phương trình (1.8) theo x rồi cộng với phương trình (1.9), ta có phương trình dẫn xuất sau

$$\frac{d^2M}{dx^2} + q = 0 \quad (1.10)$$

Thay M xác định theo (1.7) vào (1.10) nhận được phương trình vi phân xác định đường đàn hồi của thanh

$$EJ \frac{d^4y}{dx^4} = q \quad (1.11)$$

Phương trình (1.11) được giải với các điều kiện biên của y và các đạo hàm đến bậc ba của y (4 điều kiện), hai điều kiện biên tại mỗi đầu cuối thanh.

Các điều kiện biên thường dùng như sau

a) Liên kết khớp tại x=0:

$$\text{Chuyển vị bằng không, } y|_{x=0} = 0, \text{ momen uốn } M = 0, \text{ suy ra } \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0} = 0$$

b) Liên kết ngàm tại x=0:

$$\text{Chuyển vị bằng không, } y|_{x=0} = 0, \text{ góc xoay bằng không, } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0$$

c) không có gối tựa tại x=0:

$$\text{Momen uốn } M = 0, \text{ suy ra } \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0} = 0; \text{ lực cắt } Q=0, \text{ suy ra } \left. \frac{d^3y}{dx^3} \right|_{x=0} = 0$$

Các điều kiện tại x=l cũng lấy tương tự như trên.

Bây giờ tìm hiểu sự phân bố ứng suất tiếp σ_{zx} trên chiều dày h của dầm. Trước tiên viết phương trình cân bằng ứng suất trên trục x như sau

$$-\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \quad \text{hay} \quad \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = -Ez \frac{d^3 y}{dx^3}$$

Tích phân phương trình trên theo z:
$$\sigma_{xz} = -\frac{Ez^2}{2} \frac{d^3 y}{dx^3} + C(x)$$

Hàm $C(x)$ xác định từ điều kiện ứng suất tiếp bằng không tại mặt trên và mặt dưới dầm, $z = \pm \frac{h}{2}$. Ta có:
$$C(x) = \frac{Eh^2}{8} \frac{d^3 y}{dx^3}$$

Ứng suất tiếp phân bố trên mặt cắt dầm có dạng

$$\sigma_{xz} = -\frac{E}{8} \frac{d^3 y}{dx^3} (4z^2 - h^2)$$

Đó là hàm parabol bậc hai. Ứng suất tiếp lớn nhất tại trục dầm ($z=0$) có giá trị bằng

$$\sigma_{xz}|_{z=0} = \frac{Eh^2}{8} \frac{d^3 y}{dx^3}$$

Tích phân hàm ứng suất tiếp theo chiều cao dầm rồi nhân với chiều rộng b ta có lực cắt Q tác dụng lên phần trái của dầm

$$Q = \frac{Eb h^3}{12} \frac{d^3 y}{dx^3}$$

Ứng suất tiếp trung bình trên chiều cao dầm bằng:
$$\sigma_{xz}^{tb} = \frac{Eh^2}{12} \frac{d^3 y}{dx^3}$$

Tỉ lệ giữa ứng suất tiếp max tại trục dầm và ứng suất trung bình $\alpha=1.5$.

1.2. Phương pháp năng lượng

Năng lượng của cơ hệ bao gồm động năng T và thế năng Π . Động năng được xác định theo khối lượng và vận tốc chuyển động, còn thế năng Π bao gồm thế năng biến dạng và công của các trường lực, phụ thuộc vào chuyển vị. Trường lực là lực có thế như lực trọng trường. Các lực ngoài tác dụng lên cơ hệ là lực không thế.

Đối với hệ bảo toàn, năng lượng là không đổi

$$T + \Pi = \text{const} \quad (1.12)$$

Do đó tốc độ thay đổi năng lượng phải bằng không

$$\frac{d}{dt}(T + \Pi) = 0 \quad (1.13)$$

Ta xét bài toán tĩnh, $T=0$, do đó

$$\Pi = \text{const} \quad (1.14)$$

Thế năng Π có thể biểu thị qua ứng suất và nội lực cũng có thể biểu thị qua chuyển vị và biến dạng. Vì vậy ta có hai nguyên lý biến phân năng lượng sau:

Nguyên lý thế năng biến dạng cực tiểu

Khi phương trình cân bằng được biểu thị qua ứng suất hoặc nội lực và do đó thế năng biến dạng cũng biểu thị qua ứng suất hoặc nội lực ta có nguyên lý thế năng biến dạng cực tiểu, nguyên lý Castiliano (1847-1884). Nguyên lý phát biểu như sau:

Trong tất cả các trạng thái cân bằng lực có thể thì trạng thái cân bằng thực xảy ra khi thế năng biến dạng là cực tiểu.

Trạng thái cân bằng lực có thể là trạng thái mà các lực tác dụng lên phân tử thỏa mãn các phương trình cân bằng. Ta viết nguyên lý dưới dạng sau:

$$\Pi(F) \rightarrow \min$$

Với ràng buộc là các phương trình cân bằng viết dưới dạng lực.

Đối với dầm ta có:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EJ} dx \rightarrow \min \quad (1.15)$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q \quad (1.16)$$

Nội lực cần tìm mômen uốn là hàm phân bố theo chiều dài dầm $M(x)$ và phải thỏa mãn các điều kiện liên kết ở hai đầu thanh (được xác định ở hai đầu thanh). Đây là bài toán cực trị có ràng buộc. Bằng cách dùng thừa số Lagrange $\lambda(x)$ đưa về bài toán không ràng buộc sau:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EJ} dx + \int_0^l \lambda(x) \left[\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right] dx \rightarrow \min \quad (1.17)$$

$\lambda(x)$ là thừa số Lagrange và cũng là ẩn của bài toán. Theo phép tính biến phân từ phép thêm hàm (1.17) ta nhận được hai phương trình sau (phương trình Euler–Lagrange).

$$M = -EJ \frac{d^2 \lambda}{dx^2} \quad (1.18)$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q \quad (1.19)$$

$\lambda(x)$ có thứ nguyên là chuyển vị cho nên phương trình (1.18) biểu thị quan hệ giữa M và chuyển vị. Thế (1.18) vào (1.19) ta có

$$EJ \frac{d^4 \lambda}{dx^4} = q \quad (1.20)$$

$\lambda(x)$ là độ võng của dầm và phương trình (1.20) là phương trình vi phân cân bằng của dầm viết theo chuyển vị nhận được ở trên.

Nguyên lý công bù cực đại

Khi dùng ản là các chuyển vị và biến dạng thì có nguyên lý công bù cực đại.

Trong tất cả các chuyển vị động học có thể (khả dĩ) thì chuyển vị thực là chuyển vị có công bù cực đại.

Chuyển vị động học có thể là chuyển vị thỏa mãn các phương trình liên hệ giữa chuyển vị và biến dạng và thỏa mãn các điều kiện biên. Công bù bằng tích của ngoại lực và chuyển vị trừ đi năng lượng biến dạng.

$$[\text{Công ngoại lực} - \text{thế năng biến dạng}] \rightarrow \max$$

Với ràng buộc là các phương trình liên hệ giữa chuyển vị và biến dạng.

Lấy ví dụ đối với dầm chịu uốn, ta có

$$\int_0^l qy dx - \frac{1}{2} \int_0^l EJ \chi^2 dx \rightarrow \max \quad (1.21)$$

Với ràng buộc:

$$\chi = -\frac{d^2 y}{dx^2} \quad (1.22)$$

χ là biến dạng uốn cũng là độ cong của đường độ võng. Tích phân thứ nhất trong (1.21) là công toàn phần của ngoại lực (không có hệ số 1/2), tích phân thứ hai là thế năng biến dạng biểu thị qua biến dạng uốn.

Thay χ từ (1.22) vào (1.21), ta có

$$\int_0^l qy dx - \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left(-\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 dx \rightarrow \max \quad (1.23)$$

Thay dấu của (1.23) ta có

$$\frac{1}{2} \int_0^l EJ \left(-\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^l qy dx \rightarrow \min \quad (1.24)$$

Khi y có giá trị xác định tại hai đầu mút dầm thì điều kiện cần để biểu thức (1.24) cực tiểu là phương trình Euler sau

$$EJ \frac{d^4y}{dx^4} = q \quad (1.25)$$

Phương trình (1.25) là phương trình vi phân cân bằng của dầm chịu uốn. Nguyên lý công bù cực đại dưới dạng biểu thức (1.24) được sử dụng rộng rãi trong tính toán công trình theo phương pháp phần tử hữu hạn.

1.3. Nguyên lý công ảo

Nguyên lý công ảo được sử dụng rất rộng rãi trong cơ học. Theo K.F. Gauss (1777-1855) thì mọi nguyên lý trong cơ học hoặc trực tiếp hoặc gián tiếp đều rút ra từ nguyên lý chuyển vị ảo.

Xét cơ hệ chất điểm ở trạng thái cân bằng ta có

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0, \quad (1.26)$$

$\sum X; \sum Y; \sum Z$: là tổng hình chiếu của tất cả các lực tác dụng lên ba trục của hệ toạ độ Đề các. Ta viết biểu thức sau:

$$\sum X \delta U + \sum Y \delta V + \sum Z \delta W = 0, \quad (1.27)$$

ở đây xem các $\delta U; \delta V; \delta W$; là các thừa số bất kỳ.

Từ (1.26) ta có (1.27) và ngược lại từ (1.27) ta sẽ nhận được (1.26) bởi vì các $\delta U; \delta V; \delta W$; là những thừa số bất kỳ. Bây giờ ta xem $\delta U; \delta V; \delta W$; là các biến phân của các chuyển vị ảo theo ba chiều của hệ toạ độ vuông góc. Chuyển vị ảo là chuyển vị bé do nguyên nhân bất kỳ bên ngoài nào đó gây ra. Các chuyển vị ảo này phải thoả mãn các điều kiện liên kết của hệ.

Khi có chuyển vị ảo thì vị trí của các lực tác dụng trên hệ có thể thay đổi nhưng phương chiều và độ lớn của nó vẫn giữ nguyên không đổi. Như vậy, các chuyển vị ảo $\delta U; \delta V; \delta W$ là các đại lượng độc lập với lực tác dụng và từ hai biểu thức (1.26) và (1.27) ta có nguyên lý công ảo:

Nếu như tổng công của các lực tác dụng của hệ thực hiện trên các chuyển vị ảo bằng không thì hệ ở trạng thái cân bằng.

Đối với hệ đàn hồi (hệ biến dạng) thì ngoài ngoại lực còn có nội lực. Vấn đề đặt ra ở đây là cách tính công của nội lực như thế nào.

Trước hết ta cần phải đưa thêm yêu cầu đối với chuyển vị ảo như sau:

Các chuyển vị ảo phải thoả mãn các liên hệ giữa chuyển vị và biến dạng. Nếu như các chuyển vị có biến dạng $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \dots$ thì biến phân các chuyển vị ảo $\delta u; \delta v; \delta w$ cũng phải có các biến dạng ảo tương ứng:

$$\frac{\partial}{\partial x} \delta u; \frac{\partial}{\partial y} \delta v; \dots$$

Thông thường công của nội lực (hoặc ứng suất) được tính qua thế năng biến dạng. Khi có các chuyển vị ảo $\delta U; \delta V; \delta W$; thì thế năng biến dạng Π sẽ thay đổi bằng đại lượng biến phân $\delta \Pi$. Do đó nguyên lý chuyển vị ảo đối với hệ biến dạng được viết như sau:

$$\delta \Pi - \sum X \delta U - \sum Y \delta V - \sum Z \delta W = 0, \quad (1.28)$$

Các đại lượng biến phân trong (1.28) đều là chuyển vị ảo cho nên nếu xem nội lực (ứng suất) trong quá trình chuyển vị ảo cũng không đổi thì dấu biến phân trong (1.28) có thể viết lại như sau:

$$\delta [\Pi - \sum XU - \sum YV - \sum ZW] = 0 \quad (1.29)$$

Hai biểu thức (1.28) và (1.29) dưới dạng chi tiết hơn được trình bày trong [30, Tr.261].

$$\delta \int_0^l \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 - qy \right] dx = 0 \quad \text{hay} \quad \int_0^l \delta \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 - qy \right] dx = 0 \quad (1.30)$$

Phương trình Euler của (1.30) như sau: $EJ \frac{d^4 y}{dx^4} - q = 0$

1.4. Phương trình Lagrange:

Phương trình Lagrange là phương trình vi phân của chuyển động được biểu thị qua các tọa độ tổng quát (các chuyển vị tổng quát).

Gọi T là động năng và Π là thế năng của hệ, các q_i là các chuyển vị tổng quát và Q_i là các lực tổng quát thì phương trình Lagrange có dạng:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i, (i=1,2,3,\dots,n) \quad (1.31)$$

trong đó: $\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial t}$ là vận tốc của chuyển động. Đối với mỗi chuyển vị q_i sẽ có một phương trình Lagrange. Động năng T trong tọa độ tổng quát là hàm của vận tốc và có thể là hàm của cả chuyển vị tổng quát.

Thế năng toàn phần của hệ bao gồm thế năng biến dạng và thế năng của lực có thế (lực trọng trường là lực có thế). Q_i là lực không thế có thể được hiểu là các lực ngoài tác dụng lên hệ (lực tổng quát). áp dụng phương trình Lagrange để xây dựng phương trình chuyển động của dầm chịu uốn như sau:

Gọi y_i là chuyển vị (tổng quát) của điểm i của dầm và q_i là lực tác dụng tại điểm i của dầm và m_i là khối lượng.

Động năng của dầm

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m \dot{y}_i^2 dx \quad \text{trong đó:} \quad \dot{y}_i = \frac{\partial y_i}{\partial t} \quad (1.32)$$

Thế năng biến dạng của dầm chịu uốn

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} EJ \left(\frac{\partial^2 y_i}{\partial x^2} \right)_i^2 \quad (1.33)$$

Dấu tổng lấy cho tất cả các điểm i của dầm. Phương trình Lagrange đối với dầm có dạng

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial y_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} = q_i, \quad (1.34)$$

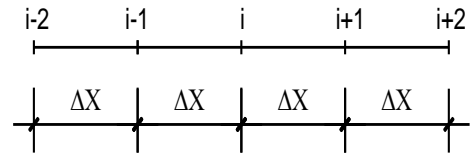
Ta tính hai thành phần đầu của phương trình (1.34)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \right) = \frac{\partial}{\partial t} m_i \dot{y}_i = m_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} = m_i \ddot{y}_i \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y_i} = 0$$

Để tính thế năng biến dạng có thể dùng phương pháp sai phân hữu hạn, hình 1.5.

Bởi vì độ võng y_i của dầm chỉ có mặt trong biểu thức thế năng biến dạng của ba điểm liên tiếp $i-1$, i và $i+1$, cho nên chỉ cần tính thế năng biến dạng của dầm (1.33) cho ba điểm này, Δx là khoảng cách giữa các điểm.



Hình 1.4. Bước sai phân

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} EJ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_i^2 &= \frac{1}{2} EJ \left(\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{\Delta x^2} \right)^2 \\ \frac{1}{2} EJ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{i-1}^2 &= \frac{1}{2} EJ \left(\frac{y_{i-2} - 2y_{i-1} + y_i}{\Delta x^2} \right)^2 \\ \frac{1}{2} EJ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{i+1}^2 &= \frac{1}{2} EJ \left(\frac{y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}}{\Delta x^2} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.36)$$

Tổng cộng ba phương trình trên cho ta thế năng của dầm để tính y_i . Ta tính $\frac{\partial \Pi}{\partial y_i}$ của phương trình (1.34).

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} &= EJ \left(\frac{-2y_{i-1} + 4y_i - 2y_{i+1} + y_{i-2} - 2y_{i-1} + y_i + y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}}{\Delta x^4} \right) \\ &= EJ \left(\frac{y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}}{\Delta x^4} \right) = EJ \frac{\Delta_i^4}{\Delta x^4} \Big|_i \end{aligned} \right\} \quad (1.37)$$

Biểu thức (1.37) biểu thị sai phân hữu hạn của $EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \Big|_i$.

Cộng (1.35) và (1.37) nhận được phương trình Lagrange đối với chuyển vị y_i

$$m \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \Big|_i = q_i \quad (1.38)$$

Điểm i là bất kỳ nên nhận được phương trình vi phân cân bằng của dầm

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = q \quad (1.39)$$

Đối với bài toán tĩnh $T=0$ ta có: $EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = q \quad (1.40)$

Phương pháp sử dụng phương trình Lagrange để nhận được phương trình vi phân của đường độ võng của dầm trình bày ở đây là của tác giả.

ở trên trình bày bốn phương pháp chung để xây dựng bài toán cơ, lấy bài toán dầm chịu uốn làm ví dụ để biết cách sử dụng chúng và để thấy bốn đường lối đó là tương đương nhau nghĩa là đều dẫn về phương trình vi phân cân bằng của hệ.

2. Bài toán cơ học kết cấu và các phương pháp giải

Bài toán cơ học kết cấu nhằm xác định nội lực và chuyển vị của hệ thanh, tấm, vỏ dưới tác dụng của các loại tải trọng, nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức,... và được chia làm hai loại:

- Bài toán tĩnh định: là bài toán có cấu tạo hình học bất biến hình và đủ liên kết tựa với đất, các liên kết sắp xếp hợp lý, chịu các loại tải trọng. Để xác định nội lực và chuyển vị chỉ cần dùng các phương trình cân bằng tĩnh học là đủ;
- Bài toán siêu tĩnh: là bài toán có cấu tạo hình học bất biến hình và thừa liên kết (nội hoặc ngoại) chịu các loại tải trọng, nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức,... Để xác định nội lực và chuyển vị ngoài các phương trình cân bằng ta còn phải bổ sung các phương trình biến dạng.

Nếu tính đến tận ứng suất, có thể nói rằng mọi bài toán cơ học vật rắn biến dạng nói chung và bài toán cơ học kết cấu nói riêng đều là bài toán siêu tĩnh.

Đã có nhiều phương pháp để giải bài toán siêu tĩnh. Hai phương pháp truyền thống cơ bản là phương pháp lực và phương pháp chuyển vị. Khi sử dụng chúng thường phải giải hệ phương trình đại số tuyến tính. Số lượng các phương trình tùy thuộc vào phương pháp phân tích. Từ phương pháp chuyển vị ta có hai cách tính gần đúng hay được sử dụng là H. Cross và G. Kani. Từ khi xuất hiện máy tính điện tử,

người ta bổ sung thêm các phương pháp số khác như: Phương pháp phần tử hữu hạn; Phương pháp sai phân hữu hạn...

2.1. Phương pháp lực

Trong hệ siêu tĩnh ta thay các liên kết thừa bằng các lực chưa biết, còn giá trị các chuyển vị trong hệ cơ bản tương ứng với vị trí và phương của các lực ẩn số do bản thân các lực đó và do các nguyên nhân bên ngoài gây ra bằng không. Từ điều kiện này ta lập được hệ các phương trình đại số tuyến tính, giải hệ này ta tìm được các ẩn số và từ đó suy ra các đại lượng cần tìm.

2.2. Phương pháp chuyển vị

Khác với phương pháp lực, phương pháp chuyển vị lấy chuyển vị tại các nút làm ẩn. Những chuyển vị này phải có giá trị sao cho phản lực tại các liên kết đặt thêm vào hệ do bản thân chúng và do các nguyên nhân bên ngoài gây ra bằng không. Lập hệ phương trình đại số tuyến tính thỏa mãn điều kiện này và giải hệ đó ta tìm được các ẩn, từ đó xác định các đại lượng còn lại. Hệ cơ bản trong phương pháp chuyển vị là duy nhất và giới hạn giải các bài toán phụ thuộc vào số các phần tử mẫu có sẵn.

2.3. Phương pháp hỗn hợp và phương pháp liên hợp

Phương pháp hỗn hợp, phương pháp liên hợp là sự kết hợp song song giữa phương pháp lực và phương pháp chuyển vị. Trong phương pháp này ta có thể chọn hệ cơ bản theo phương pháp lực nhưng không loại bỏ hết các liên kết thừa mà chỉ loại bỏ các liên kết thuộc bộ phận thích hợp với phương pháp lực; hoặc chọn hệ cơ bản theo phương pháp chuyển vị nhưng không đặt đầy đủ các liên kết phụ nhằm ngăn cản toàn bộ các chuyển vị nút mà chỉ đặt các liên kết phụ tại các nút thuộc bộ phận thích hợp với phương pháp chuyển vị. Trường hợp đầu hệ cơ bản là siêu tĩnh, còn trường hợp sau hệ cơ bản là siêu động.

Trong cả hai cách nói trên, bài toán ban đầu được đưa về hai bài toán độc lập: Một theo phương pháp lực và một theo phương pháp chuyển vị.

2.5. Phương pháp sai phân hữu hạn

Phương pháp sai phân hữu hạn cũng là thay thế hệ liên tục bằng mô hình rời rạc, song hàm cần tìm (hàm mang đến cho phép hàm giá trị dừng), nhận những giá trị gần đúng tại một số hữu hạn điểm của miền tích phân, còn giá trị các điểm trung gian sẽ được xác định nhờ một phương pháp tích phân nào đó. Phương pháp này cho lời giải số của phương trình vi phân về chuyển vị và nội lực tại các điểm nút. Thông thường ta phải thay đạo hàm bằng các sai phân của hàm tại các nút. Phương trình vi phân của chuyển vị hoặc nội lực được viết dưới dạng sai phân tại mỗi nút, biểu thị quan hệ của chuyển vị tại một nút và các nút lân cận dưới tác dụng của ngoại lực.

2.6. Phương pháp hỗn hợp sai phân – biến phân

Kết hợp phương pháp sai phân với phương pháp biến phân ta có một phương pháp linh động hơn: Hoặc là sai phân các đạo hàm trong phương trình biến phân hoặc là sai phân theo một phương và biến phân theo một phương khác (đối với bài toán hai chiều).

LÝ THUYẾT DÀM CÓ XÉT ĐẾN BIẾN DẠNG TRƯỢT NGANG

Trong chương này trước tiên trình bày lý thuyết dầm thông thường, lý thuyết dầm Euler - Bernoulli, sau đó giới thiệu lý thuyết dầm có xét biến dạng trượt ngang và phương pháp nghiên cứu nội lực và chuyển vị của hệ dầm chịu uốn có xét biến dạng trượt ngang.

2.1. Lý thuyết dầm Euler – Bernoulli

Dầm chịu uốn là cấu kiện có kích thước tiết diện nhỏ hơn nhiều lần so với chiều dài của nó, trên mặt cắt ngang dầm tồn tại hai thành phần nội lực là mômen uốn M và lực cắt Q . Tải trọng tác dụng lên dầm nằm trong mặt phẳng có chứa đường trung bình của dầm và thẳng góc với trục dầm. Dưới đây ta xét hai trường hợp dầm chịu uốn thuần túy phẳng và uốn ngang phẳng.

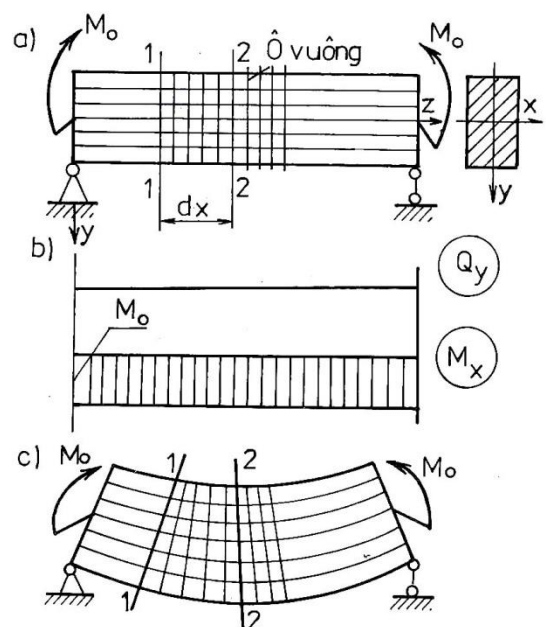
2.1.1. Dầm chịu uốn thuần túy phẳng

Dầm chịu uốn thuần túy phẳng là dầm mà trên mọi mặt cắt ngang dầm chỉ có một thành phần nội lực là mômen uốn nằm trong mặt phẳng quán tính chính trung tâm.

Ứng suất trên mặt cắt ngang

Giả sử dầm có mặt cắt ngang hình chữ nhật ($b \times h$) chịu uốn thuần túy như, hình 3.1a. Ta tiến hành thí nghiệm sau:

Trước khi dầm chịu lực ta vạch lên mặt ngoài dầm những đường thẳng song song và vuông góc với trục dầm tạo nên những ô vuông, hình 2.1a. Sau khi dầm biến dạng, hình 2.1c, ta thấy rằng những đường song song với trục dầm trở thành những đường cong, những đường thẳng vuông góc với trục dầm vẫn thẳng và vuông góc với trục dầm. Từ đó người ta đưa ra hai giả thiết sau đây:



Hình 2.1. Dầm chịu uốn thuần túy

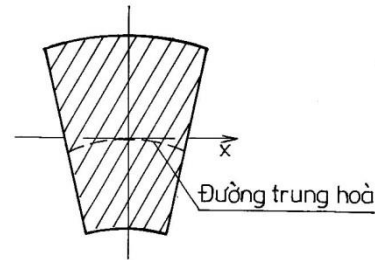
- Mặt cắt ngang dầm ban đầu phẳng và vuông góc với trục dầm, sau biến dạng vẫn phẳng và vuông góc với trục dầm (giả thiết về mặt cắt ngang, giả thiết Bernoulli).
- Trong quá trình biến dạng các thớ dọc của dầm không ép lên nhau và không đẩy xa nhau (giả thiết về các thớ dọc).

Ngoài ra khi tính toán dầm ta còn dựa vào các giả thiết sau:

- Vật liệu có tính chất liên tục, đồng nhất và đẳng hướng
- Biến dạng của vật thể là biến dạng đàn hồi và đàn hồi tuyệt đối.
- Biến dạng của vật thể do ngoại lực gây ra là nhỏ so với kích thước của chúng.
- Tuân theo nguyên lý độc lập tác dụng

Từ hình 2.1c, ta nhận thấy rằng: khi dầm bị uốn thì các thớ trên co lại, các thớ dưới giãn ra. Do vậy khi chuyển từ thớ co sang thớ giãn sẽ có thớ không co, không giãn. Thớ này gọi là thớ trung hòa. Tập hợp các thớ trung hòa gọi là lớp trung hòa, giao của lớp trung hòa với mặt cắt ngang gọi là đường trung hòa. Nếu ta xét một mặt cắt ngang nào đó của dầm thì sau khi bị uốn nó sẽ cho hình dạng như hình 3.2.

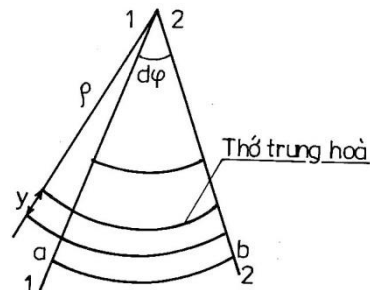
Đường trung hòa của mặt cắt ngang là một đường cong. Vì chuyển vị của các điểm trên mặt cắt ngang của dầm là bé, nên ta coi rằng hình dáng mặt cắt ngang dầm không thay đổi sau khi biến dạng.



Hình 2.2. Mặt cắt ngang dầm

Khi đó đường trung hòa của mặt cắt ngang là đường thẳng và giả sử lấy trục ox trùng với đường trung hòa.

Xét biến dạng của đoạn dầm dz được cắt ra khỏi dầm bằng hai mặt cắt 1-1 và 2-2. Sau biến dạng hai mặt cắt này làm với nhau một góc $d\varphi$ và thớ trung hòa có bán kính cong là ρ (hình 2.3). Theo tính chất của thớ trung hòa ta có:



Hình 3.3. Hai mặt cắt sau khi uốn

$$dz = \rho d\varphi \quad (2.1)$$

Ta xét biên dạng của thớ ab cách thớ trung hòa một khoảng là y, ta có:

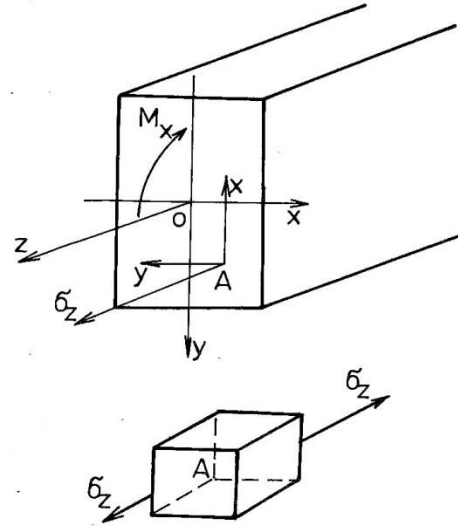
$$\overline{ab}_t = dz = \rho d\varphi; \quad \overline{ab}_s = dz = (\rho + y)d\varphi \quad (2.2)$$

Từ (2.2) ta suy ra:

$$\varepsilon_z = \frac{\overline{ab}_s - \overline{ab}_t}{\overline{ab}_t} = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi}; \quad (2.3)$$

Xét ứng suất tại điểm bất kỳ A(x,y) trên mặt cắt ngang nào đó của dầm (hình 2.4a). Trong đó trục oy là trục đối xứng của mặt cắt ngang, trục ox trùng với đường trung hòa của mặt cắt ngang.

Ta tách ra tại A một phân tử hình hộp bằng các mặt cắt song song với các mặt tọa độ (hình 2.4b). Khi đó theo giả thiết thứ nhất thì góc của phân tử sau biến dạng không đổi, nên ta suy ra trên các mặt của phân tử không có ứng suất tiếp. Mặt khác theo giả thiết thứ hai thì trên các mặt của phân tử song song với trục Z không có ứng suất pháp, nghĩa là $\sigma_x = \sigma_y = 0$. Do vậy trên các mặt của phân tử chỉ có ứng suất pháp σ_z và theo định luật Hooke ta có:



Hình 2.4. Phân tử A

$$\sigma_z = E\varepsilon_z = E \frac{y}{\rho}; \quad (2.4)$$

Dầm chịu uốn thuần túy nên ta có

$$N_z = \int_F \sigma_z dF = 0 \quad (2.5)$$

$$M_x = \int_F \sigma_z y dF = 0 \quad (2.6)$$

Thay (2.4) vào (2.5) ta được

$$N_z = \int_F E \frac{y}{\rho} dF = \frac{E}{\rho} \int_F y dF = 0 = \frac{E}{\rho} S_x = 0 \quad (2.7)$$

$S_x = 0$ nghĩa là ox là trục quán tính chính trung tâm. Vì y là trục đối xứng nên suy ra oxy là trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt ngang. Thay (2.4) vào (2.6) ta được:

$$M_x = \int_F \sigma_z y dF = \frac{E}{\rho} \int_F E \frac{y^2}{\rho} dF = \frac{E}{\rho} J_x \quad (2.8)$$

Suy ra:
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x} \quad (2.9)$$

EJ_x là độ cứng của dầm khi uốn. Thay (3.9) vào (3.4) ta có:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{EJ_x} y \quad (2.10)$$

Từ công thức (2.10) ta có các nhận xét:

- Luật phân bố của σ_z trên mặt cắt ngang dầm là bậc nhất đối với y .
- Những điểm trên mặt cắt ngang có cùng tung độ y (nghĩa là những điểm nằm trên đường thẳng song song với trục trung hòa x) sẽ có trị số bằng nhau và nó tỉ lệ với khoảng cách từ các điểm đó tới trục trung hòa.
- Những điểm nằm trên trục trung hòa $y=0$ có trị số $\sigma_z = 0$. Những điểm xa trục trung hòa nhất sẽ có trị số ứng suất lớn nhất và bé nhất.

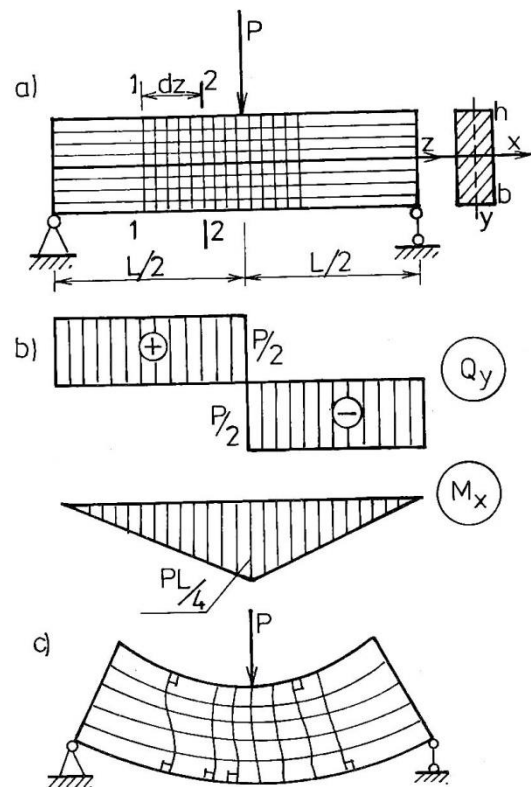
2.1.1. Dầm chịu uốn ngang phẳng

Dầm chịu uốn ngang phẳng là dầm mà các mặt cắt ngang của nó có các thành phần nội lực là lực cắt Q_y và mômen uốn M_x nằm trong mặt phẳng quán tính chính trung tâm của dầm.

Ứng suất trên mặt cắt ngang

Xét dầm chịu uốn ngang phẳng như trên hình 2.5a. Ta quan sát thí nghiệm sau:

Trước khi dầm chịu lực ta vạch lên mặt ngoài dầm những đường thẳng song song và vuông góc với trục dầm tạo. Sau khi dầm biến dạng ta thấy rằng những đường thẳng song song với trục dầm trở thành những đường cong nhưng vẫn còn song song với trục dầm, những đường thẳng vuông góc với trục dầm không còn thẳng và vuông góc với trục dầm nữa hình 2.5c.

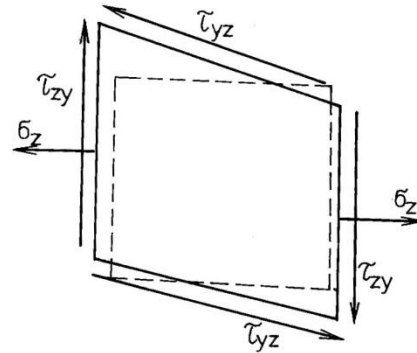


Hình 2.5. Dầm chịu uốn ngang phẳng

Điều đó chứng tỏ mặt cắt ngang dầm sau biến dạng bị vênh đi. Nếu tại điểm A bất kỳ của dầm ta tách ra một phân tố bằng các mặt song song với các mặt tọa độ thì sau khi biến dạng các góc vuông của phân tố không còn vuông nữa, nghĩa là phân tố có biến dạng góc. Suy ra trên các mặt phân tố sẽ có ứng suất tiếp.

Trong lý thuyết đàn hồi người ta đã chứng minh được rằng trên các mặt của phân tố có các ứng suất sau:

$\sigma_y, \sigma_z, \tau_{zy}, \tau_{yz}$. Nhưng thực tế cho thấy rằng ứng suất pháp σ_y , rất bé so với các thành phần khác nên ta bỏ qua, nghĩa là khi dầm chịu uốn ngang phẳng thì trên mặt cắt ngang dầm có hai thành phần ứng suất là: ứng suất pháp σ_z , và ứng suất tiếp hình 2.6.



Hình 2.6. Phân tố dầm chịu uốn ngang phẳng

a. Ứng suất pháp σ_z :

Trong mục trước nhờ giả thiết Bernoulli về mặt cắt ngang phẳng ta đã đưa tới công thức tính ứng suất pháp σ_z trên mặt cắt ngang dầm là:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{EJ_x} y \quad (2.11)$$

Trong trường hợp dầm bị uốn ngang phẳng thì sau biến dạng mặt cắt ngang dầm bị vênh đi, nghĩa là không còn phẳng nữa. Như vậy mọi lập luận để đưa tới công thức (2.11) để tính ứng suất pháp σ_z không phù hợp nữa. Tuy nhiên trong lý thuyết đàn hồi người ta đã chứng minh được rằng đối với dầm chịu uốn ngang phẳng ta vẫn có thể dùng công thức (2.11) để tính ứng suất σ_z mà sai số không lớn lắm.

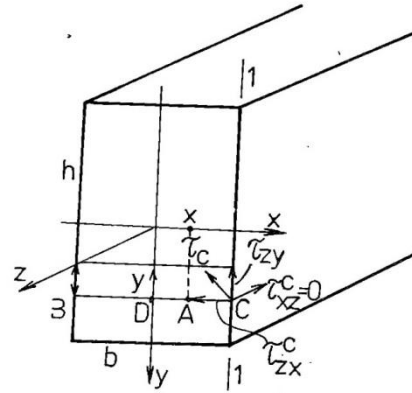
b. Ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang dầm chịu uốn ngang phẳng (công thức Durapski):

Giả sử có dầm mặt cắt ngang là hình chữ nhật hẹp ($b < h$) chịu uốn ngang phẳng hình 2.7.

Ta xét ứng suất tiếp tại điểm bất kỳ A(x,y) trên mặt cắt ngang 1-1 nào đó của dầm. Qua điểm A ta kẻ đường thẳng song song với trục ox cắt biên của mặt cắt tại B và C, cắt trục oy tại D. Trước hết ta xét ứng suất tiếp tại B,C và D.

Ứng suất tiếp tại C là τ_c , giả sử có phương bất kỳ trong 1-1.

Phân τ_c thành hai thành phần: τ_{zx}^c và τ_{zy}^c . Nhưng theo định luật đối ứng của ứng suất tiếp thì ta có: $\tau_{zx}^c = \tau_{xz}^c = 0$ ($\tau_{xz}^c = 0$ vì mặt bên dầm theo giả thiết không có tải trọng tác dụng) hình 2.7.



Hình 2.7.

Do vậy $\tau_c = \tau_{zy}^c$ có phương song song với oy. Do tính chất đối xứng ta suy ra $\tau_B = \tau_{zy}^B = \tau_{zy}^C$.

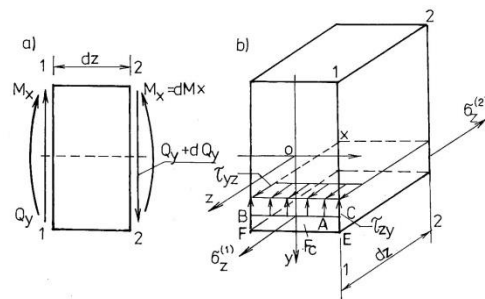
Cũng do tính chất đối xứng và giả thiết hình chữ nhật hẹp nên $\tau_D = \tau_{yz}^D = \tau_{yz}^B = \tau_{yz}^C$.

Do giả thiết hình chữ nhật hẹp nên $CD=b/2$ càng nhỏ mà ứng suất tiếp tại C và D chỉ có phương y. Do vậy ta suy ra là ứng suất tiếp tại A chỉ có phương y: $\tau_A = \tau_{yz}^A$. Đồng thời:

$$\tau_{yz}^A = \frac{\tau_{yz}^C + \tau_{yz}^D}{2} = \tau_{yz}^C = \tau_{yz}^D$$

Như vậy ứng suất tiếp của các điểm trên đường thẳng BC qua A chỉ có phương y và trị số bằng nhau. Nghĩa là ứng suất tiếp trên BC phân bố đều với cường độ là τ_{zy} . Để tính τ_{zy} ta cắt một đoạn dầm dz bằng hai mặt cắt 1-1 và 2-2, hình 2.8.

Sau đó cắt đoạn dầm dz bằng một mặt phẳng qua điểm A song song với trục Z. Mặt phẳng này chia đoạn dầm dz ra làm hai phần. Nếu gọi $BC = bc$ và dF ($BCEF$)= Fc thì từ điều kiện cân bằng của phần dưới của đoạn dz hình...ta suy ra:



Hình 2.8.

$$\sum Z = \int_{Fc} \sigma_z^{(1)} dF - \int_{Fc} \sigma_z^{(2)} dF + \tau_{yz} bcdZ = 0$$

Mặt khác ta lại có

$$\sigma_z^{(1)} = \frac{M_x}{J_x} y \quad (a)$$

$$\sigma_z^{(2)} = \frac{M_x + dM_x}{J_x} y \quad (b)$$

Thay (b) vào (a) ta được:

$$\begin{aligned} \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \frac{1}{bc \cdot dz} \left[\int_{Fc} \frac{M_x + dM_x}{J_x} y dF - \int_{Fc} \frac{M_x}{J_x} y dF \right] = \\ &= \frac{1}{J_x \cdot bc} \frac{dM_x}{dz} \int_{Fc} y dF \end{aligned} \quad (c)$$

Ta có: $\frac{dM_x}{dz} = Q_y$; $\int_{Fc} y dF = S_x^c$ (d)

S_x^c : gọi là mômen tĩnh của phần diện tích Fc đối với trục x. Thay (d) vào (c) ta suy ra:

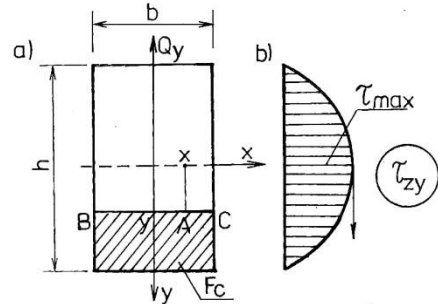
$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^c}{J_x \cdot bc} \quad (2.12)$$

Trong đó bc gọi là bề rộng của mặt cắt ngang qua điểm cần tính ứng suất A. Công thức (2.12) gọi là công thức Durapski. Từ công thức này và theo điều kiện cân bằng của phần thanh ở trên ta suy ra là τ_{yz} cùng chiều với trục z, τ_{zy} cùng chiều với Q_y . Nghĩa là dấu của τ_{zy} và Q_y như nhau. Do vậy ở đây chỉ cần tính trị số của τ_{zy} theo (2.12) còn dấu của nó được xác định từ biểu đồ lực cắt Q_y .

c. Luật phân bố ứng suất tiếp τ_{zy} đối với mặt cắt hình chữ nhật:

Giả sử mặt cắt ngang dầm chịu uốn ngang phẳng là hình chữ nhật bề rộng b, chiều cao h. Ta đi tìm luật phân bố của ứng suất tiếp τ_{zy} đối với mặt cắt nếu lực cắt tại mặt cắt này là Q_y .

Ta xét điểm bất kỳ A(x,y) trên mặt cắt, ta có bc=BC=b.



Hình 3.9.

$$S_x^c = \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot b \left[y + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y\right) \right] = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

Suy ra: $\tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^c}{J_x \cdot bc} = \frac{Q_y \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{J_x \cdot b} = \frac{Q_y}{2J_x} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$ (2.13)

Từ (2.13) ta nhận thấy rằng: Luật phân bố τ_{zy} trên mặt cắt là parabol bậc hai đối với y. Với y=0 (những điểm nằm trên trục trung hòa ox) thì:

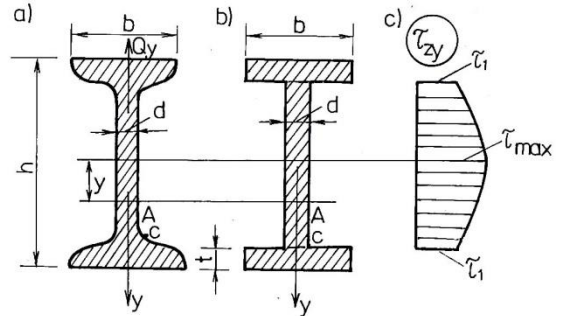
$$\tau_{zy}(0) = \tau_{max} = \frac{Q_y h^2}{8J_x} = \frac{3Q_y}{2F} \quad (2.14)$$

$$y = \pm \frac{h}{2} \text{ thì } \tau_{zy} = 0$$

Từ đó ta có thể vẽ được biểu đồ τ_{zy} cho mặt cắt như, hình 3.9b.

d. Luật phân bố ứng suất tiếp τ_{zy} đối với mặt cắt hình chữ I:

Xét dầm chịu uốn ngang phẳng có mặt cắt ngang hình chữ I hình 2.10. Để đơn giản ta có thể coi mặt cắt bao gồm ba hình chữ nhật ghép lại: Hình chữ nhật long rộng d , cao $(h-2t)$ và hai hình chữ nhật đế rộng b cao t , hình 2.10b.



Hình 2.10.

Thực tế cho thấy ứng suất tiếp do Q_y gây ra ở phần đế rất bé so với phần lòng. Do vậy ở đây ta chỉ xét sự phân bố ứng suất tiếp τ_{zy} ở phần long mặt cắt chữ I mà thôi.

Ta xét điểm bất kỳ $A(x,y)$ thuộc long ta có: $bc=d$. $S_x^c = S_x - \frac{1}{2} dy^2$

Suy ra:
$$\tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^c}{J_x \cdot bc} = \frac{Q_y (S_x - \frac{1}{2} dy^2)}{J_x \cdot d} \quad (2.15)$$

Từ (2.15) ta nhận thấy rằng: Luật phân bố τ_{zy} của phần lòng mặt cắt chữ I là parabol bậc hai đối với y . Với $y=0$ (những điểm nằm trên trục trung hòa ox) thì:

$$\tau_{zy}(0) = \tau_{max} = \frac{Q_y S_x}{J_x \cdot bc} \quad (2.16)$$

Đối với điểm C tiếp giáp giữa long và đế của chữ I, nhưng thuộc phần long thì ta có:

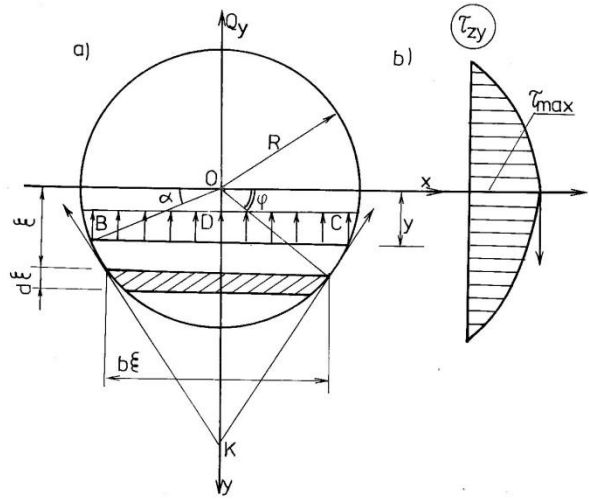
$y_c = \frac{h}{2} - t$ Từ đó ta có:

$$\tau_c = \tau_1 = \tau_{zy} \left(\frac{h}{2} - t \right) = \frac{Q_y \left[S_x - \frac{1}{2} d \left(\frac{h}{2} - t \right)^2 \right]}{J_x \cdot d} \quad (2.17)$$

Biểu đồ τ_{zy}^1 của phần long mặt cắt chữ I được vẽ trên, hình 2.10c.

e. **Luật phân bố ứng suất tiếp τ_{zy} đối với mặt cắt hình tròn:**

Xét dầm chịu uốn ngang phẳng có mặt cắt ngang hình tròn bán kính R , và lực cắt trên mặt cắt này là Q_y , hình 2.11. Ta xét ứng suất tiếp trên đường BC song song với trục ox và cách ox một khoảng bằng y . Ta thấy rằng tại các điểm biên B, C ứng suất tiếp τ tiếp tuyến với chu vi hình tròn và do đối xứng thì ứng suất tiếp tại D có phương y .



Hình 2.11.

Ta thừa nhận rằng ứng suất tiếp tại các điểm khác nhau trên BC có phương qua điểm K đồng thời thành phần song song oy của chúng là bằng nhau, nghĩa là thành phần τ_{zy} phân bố đều trên BC, hình 2.11a. Ta đi tìm luật phân bố của τ_{zy} . Ta có:

$$bc = 2R \cdot \cos\alpha$$

$$\begin{aligned} S_x^c &= \int_{Fc} \rho dF = \int_y^R \rho b dF = \int_{\alpha}^{\pi/2} R \sin\varphi \cdot 2R \cos\varphi \cdot d(R \sin\varphi) \\ &= 2R^3 \int_{\alpha}^{\pi/2} \cos^2\varphi \cdot \sin\varphi d(\varphi) = -2R^3 \int_{\alpha}^{\pi/2} \cos^2\varphi d(\cos\varphi) = \frac{2}{3} R^3 \cos^3\alpha \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } \tau_{zy} = \frac{Q_y \frac{2}{3} R^3 \cos^3\alpha}{J_x \cdot 2R \cos\alpha} = \frac{Q_y R^2 \cos^3\alpha}{3J_x} = \frac{Q_y R^2 (1 - \sin^2\alpha)}{3J_x}$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y (R^2 - y^2)}{3J_x} \quad (2.18)$$

Biểu đồ τ_{zy} được vẽ trên hình 3.11b, trong đó:

$$\tau_{zy}(0) = \tau_{max} = \frac{Q_y R^2}{3J_x} = \frac{4Q_y}{3\pi R^2} = \frac{4Q_y}{3F} \quad (2.19)$$

Biểu đồ τ_{zy} của mặt cắt hình tròn được vẽ trên, hình 3.11b.

2.2. Lý thuyết dầm có xét biến dạng trượt ngang

Lý thuyết xét biến dạng trượt trong dầm do Timoshenko đưa ra và thường được gọi là lý thuyết dầm Timoshenko. Khi xây dựng lý thuyết này vẫn sử dụng giả thiết tiết diện phẳng của lý thuyết dầm thông thường, tuy nhiên do có biến dạng trượt, trục dầm sẽ xoay đi một góc với trục ngang của tiết diện dầm.

Lý thuyết xét biến dạng trượt được dùng phổ biến trong phương pháp phần tử hữu hạn hiện nay là dùng hàm độ võng y và hàm góc xoay θ do momen uốn gây ra là hai hàm chưa biết. Trong trường hợp này biến dạng trượt tại trục trung hòa được xác định như sau, ví dụ như [28, trg 5].

$$\gamma = \frac{dy}{dx} - \theta \quad (2.20)$$

Từ đó ta có các công thức xác định M và Q

$$\begin{aligned} M &= -EJ \left(\frac{d\theta}{dx} \right) \\ Q &= \frac{GF}{\alpha} \left[-\frac{dy}{dx} + \theta \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

Trong các công thức trên EJ là độ cứng uốn, GF là độ cứng cắt của tiết diện, G là môđun trượt của vật liệu, F là diện tích tiết diện, α là hệ số xét sự phân bố không đều của ứng suất tiếp trên chiều cao tiết diện.

Các tác giả [28, trg 5] cho rằng khi môđun trượt $G \rightarrow \infty$ thì từ (2.21) suy ra

$$\theta = \frac{dy}{dx} \quad (2.22)$$

nghĩa là trở về lý thuyết dầm không xét biến dạng trượt: Góc xoay của đường độ võng là do mômen gây ra. Theo tác giả, lập luận trên không đúng bởi vì khi thỏa mãn phương trình (2.22) thì từ phương trình (2.21) suy ra lực cắt $Q = 0$, dẫn về trường hợp uốn thuần túy của dầm. Vì lý do đó nên lý thuyết xét biến dạng trượt dùng y và θ làm ẩn không hội tụ về lý thuyết dầm thông thường và khi áp dụng vào bài toán tấm, nó cũng không hội tụ về lý thuyết tấm thông thường (lý thuyết tấm Kierchhoff, [28, trg

71], [25, trg 404]. Phương hướng chung để khắc phục thiếu sót vừa nêu là bổ sung thêm các nút xét lực cắt Q trong các phần tử dầm hoặc phần tử tấm [25, 26, 28] hoặc dùng phần tử có hàm dạng là đa thức bậc thấp (bậc nhất) [31, trg 126]. Vấn đề tìm phần tử có hàm dạng không bị hiện tượng biến dạng trượt bị khóa, shear locking, vẫn đang được tiếp tục nghiên cứu, [32]. Tình hình chung hiện nay về lý thuyết xét biến dạng trượt trong dầm và tấm là như trên.

Khác với các tác giả khác, trong [19, 20] lý thuyết xét biến dạng trượt được xây dựng trên cơ sở hai hàm chưa biết là hàm độ võng y và hàm lực cắt Q . Trong trường hợp này biến dạng trượt xác định theo

$$\gamma = \frac{\alpha Q}{GF} \quad (2.23)$$

α là hệ số xét sự phân bố không đều của ứng suất cắt tại trục dầm.

Góc xoay do momen uốn sinh ra bằng hiệu giữa góc xoay đường độ võng với góc xoay do lực cắt gây ra.

$$\theta = \frac{dy}{dx} - \gamma = \frac{dy}{dx} - \frac{\alpha Q}{GF} \quad (2.24)$$

Momen uốn sẽ bằng

$$M = -EJ \frac{d\theta}{dx} = EJ \left(-\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right) \quad (2.25)$$

Biến dạng uốn χ

$$\chi = -\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \quad (2.26)$$

Dựa trên lý thuyết này ta sẽ xây dựng phương trình cân bằng và các điều kiện biên của dầm như sau. Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss ta viết phiếm hàm lượng cưỡng bức (chuyển động) như sau: (giả sử dầm có lực phân bố đều q).

$$Z = \int_0^l M \chi dx + \int_0^l Q \gamma dx - \int_0^l q y dx \rightarrow \text{Min} \quad (2.27)$$

Các hàm độ võng y , hàm biến dạng trượt γ và hàm biến dạng uốn χ là các đại lượng biến phân, nghĩa là điều kiện cần và đủ để hệ ở trạng thái cân bằng là

$$\delta Z = \int_0^l M \delta \chi dx + \int_0^l Q \delta \gamma dx - \int_0^l q \delta y dx = 0$$

$$\text{Hay } Z = \int_0^l M \delta \left[-\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right] dx + \int_0^l Q \delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] dx - \int_0^l q \delta [y] dx = 0 \quad (2.28)$$

Trong phương trình tích phân (2.28) hai đại lượng cần tìm là $y(x)$ và $Q(x)$ do đó có thể tách ra thành hai phương trình sau:

$$\int_0^l M \delta \left[-\frac{d^2 y}{dx^2} \right] dx - \int_0^l q \delta [y] dx = 0 \quad (2.29)$$

$$\int_0^l M \delta \left[\frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right] dx + \int_0^l Q \delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] dx = 0 \quad (2.30)$$

Lấy tích phân từng phần phương trình (2.29)

$$\int_0^l M \delta \left[-\frac{d^2 y}{dx^2} \right] dx = - \int_0^l M d \left(\delta \left[\frac{dy}{dx} \right] \right) dx = -M \delta \left[\frac{dy}{dx} \right] \Big|_0^l + \int_0^l \frac{dM}{dx} \delta \left[\frac{dy}{dx} \right] dx$$

Tích phân từng phần thành phần cuối của biểu thức trên ta có

$$\int_0^l M \delta \left[-\frac{d^2 y}{dx^2} \right] dx = -M \delta \left[\frac{dy}{dx} \right] \Big|_0^l + \frac{dM}{dx} \delta [y] \Big|_0^l - \int_0^l \frac{d^2 M}{dx^2} \delta [y] dx$$

Phương trình (2.29) sau khi lấy tích phân từng phần có dạng

$$-M \delta \left[\frac{dy}{dx} \right] \Big|_0^l + \frac{dM}{dx} \delta [y] \Big|_0^l - \int_0^l \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) \delta [y] dx = 0 \quad (2.31)$$

Bởi vì các đại lượng $\delta [y]$ và $\delta \left[\frac{dy}{dx} \right]$ là nhỏ và bất kỳ nên từ (2.31) ta có

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + q = 0 \quad (2.31a)$$

$$-M \delta \left[\frac{dy}{dx} \right] \Big|_0^l = 0 \quad (2.31b)$$

$$\frac{dM}{dx} \delta [y] \Big|_0^l = 0 \quad (2.31c)$$

Tích phân từng phần phương trình (2.30):

$$\int_0^l M \delta \left[\frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right] dx = \int_0^l M d \left(\delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] \right) dx = M \left(\delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] \right) \Big|_0^l - \int_0^l \frac{dM}{dx} \delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] dx$$

Sau khi lấy tích phân từng phần

$$M \left(\delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] \right) \Big|_0^l + \int_0^l \left(-\frac{dM}{dx} + Q \right) \delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] dx = 0 \quad (2.32)$$

Bởi vì biến phân $\delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right]$ là nhỏ và bất kỳ nên từ (2.13) ta có

$$-\frac{dM}{dx} + Q = 0 \quad (2.32a)$$

$$M \delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] \Big|_0^l = 0 \quad (2.32b)$$

Sử dụng công thức (2.6), hai phương trình vi phân cân bằng của dầm (2.31a) và (2.32a) có dạng.

$$EJ \left[\frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{\alpha}{GF} \frac{d^3 Q}{dx^3} \right] = q \quad (2.33a)$$

$$EJ \left[\frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{\alpha}{GF} \frac{d^2 Q}{dx^2} \right] = Q \quad (3.34a)$$

Phương trình (2.33a) và (2.34a) có thể viết lại dưới dạng

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{\alpha h^2}{6} \frac{d^3 Q}{dx^3} = q \quad (2.33b)$$

$$EJ \frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{\alpha h^2}{6} \frac{d^2 Q}{dx^2} = Q \quad (2.34b)$$

Để nhận được các điều kiện biên của dầm thì kết hợp (2.31b) và (2.32b) ta có

$$M \delta \left[-\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha Q}{GF} \right] \Big|_0^l = 0 \quad (2.35)$$

Chú ý tới phương trình (2.32a), phương trình (2.31c) viết lại như sau

$$Q \delta [y] \Big|_0^l = 0 \quad (2.36)$$

Tóm lại, lý thuyết xét biến dạng trượt cho ta hai phương trình vi phân (2.33) và (2.34) đối với hai hàm y và Q : phương trình (2.33) là phương trình vi phân cân bằng giữa nội lực và ngoại lực, phương trình (2.34) là phương trình liên hệ giữa mômen uốn và lực cắt. Các phương trình (2.35) và (2.36) là các điều kiện biên ở hai đầu thanh. Ta xét điều kiện biên (2.35)

Nếu như tại $x=0$ hoặc $x=l$, góc xoay θ do mômen uốn gây ra có biến phân

$$\delta\theta = \delta \left[-\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha Q}{GF} \right]_0^l \neq 0 \text{ thì } M|_0^l = 0 \rightarrow \text{liên kết khớp} \quad (2.37a)$$

Nếu như góc xoay θ không có biến phân

$$\delta\theta = \delta \left[-\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha Q}{GF} \right]_0^l = 0 \text{ thì } M|_0^l \text{ bất kỳ} \rightarrow \text{liên kết ngàm} \quad (2.37b)$$

Đối với điều kiện (2.36), nếu như chuyển vị y tại $x=0$ hoặc $x=l$ có biến phân.

$$\delta[y]|_0^l \neq 0 \text{ thì } Q|_0^l = 0, \rightarrow \text{không có gối tựa} \quad (2.37c)$$

$$\text{Nếu như } \delta[y]|_0^l = 0 \text{ thì } Q|_0^l \text{ bất kỳ,} \rightarrow \text{liên kết gối tựa} \quad (2.37d)$$

Khi không xét biến dạng trượt, $G \rightarrow \infty$ hoặc $h \rightarrow 0$ thì các phương trình (3.33) và (2.34) cũng như các phương trình về điều kiện biên (2.35) và (2.36) hoặc (2.37) đều dẫn về lý thuyết dầm Euler- Bernoulli. Cho nên có thể nói lý thuyết xét biến dạng trượt nêu trên (xem hàm y và hàm Q là hai hàm ch-a biÕt) là lý thuyết đầy đủ về dầm.

Cuối cùng cần lưu ý rằng khi xét tính liên tục về góc xoay giữa hai đoạn dầm là nói đến tính liên tục của góc xoay do mômen gây ra xác định theo công thức (2.24), không phải liên tục của góc xoay $\frac{dy}{dx}$.

Hệ số α

Hệ số α là hệ số tập trung ứng suất cắt tại trục dầm.

Đối với tiết diện chữ nhật $\alpha=1.5$, đối với tiết diện tròn $\alpha=4/3$. Tuy nhiên khi xét biến dạng trượt các trị trên thay đổi tương ứng bằng 1.2 và 1.11 [23, trg 132, 52, trg 492]. Trong tính toán sau này tác giả dùng hệ số $\alpha=1.2$ đối với tiết diện chữ nhật. Phương pháp chung để xác định hệ số α là cân bằng tổng theo chiều cao dầm công

của ứng suất cắt thực hiện trên biến dạng trượt tương ứng với công lực cắt thực hiện trên biến dạng trượt tại trục dầm, vấn đề này đã được nhiều tác giả nghiên cứu [23] [25, trg 400].

2.3. Giải bài toán dầm đơn có xét đến biến dạng trượt ngang bằng phương pháp phần tử hữu hạn

3.3.1. Bài toán dầm

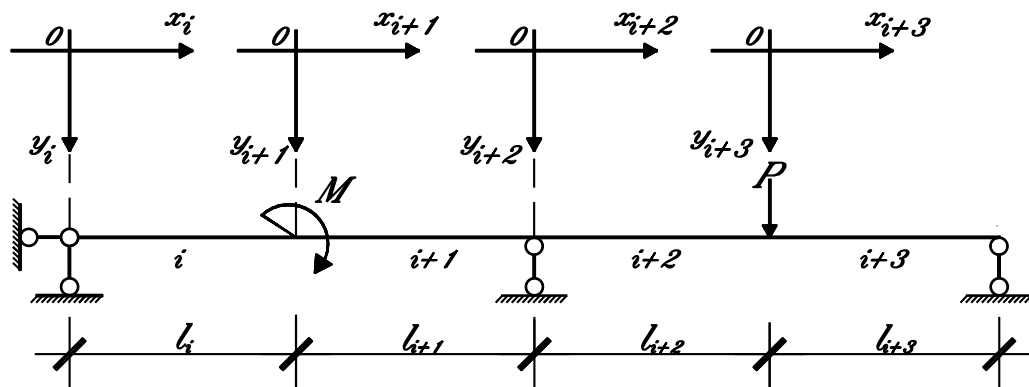
Dầm là kết cấu làm việc chịu uốn. Các đại lượng biến phân theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss là biến dạng và chuyển vị cho nên để tính dầm trước tiên cần giả định dạng đường độ võng của các đoạn của dầm, (thí dụ, theo đa thức) hoặc rời rạc đường độ võng theo phương pháp phần tử hữu hạn hoặc theo phương pháp sai phân hữu hạn. Như vậy, khi giải trực tiếp phiếm hàm lượng cưỡng bức Z thì các ẩn của bài toán là:

- các hệ số của hàm xấp xỉ (ví dụ, của đa thức xấp xỉ) hoặc
 - chuyển vị tại các điểm của sai phân hữu hạn hoặc
 - chuyển vị và góc xoay tại hai nút của phần tử hữu hạn
- sẽ là các đại lượng biến phân (các biến độc lập) của bài toán.

Gọi $y_i(x)$ là đường độ võng của đoạn thứ i nào đó của dầm hoặc khung với trục x trùng với trục dầm, EJ_i là độ cứng uốn của nó, χ_i là biến dạng uốn. Theo (2.6, 2.7) viết cho đoạn thứ i của dầm hoặc khung, ta có:

$$EJ_i = \frac{Ebh^3}{12}, \chi_i = -\frac{d^2 y_i}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_i}{dx}, M_i = EJ_i \cdot \chi_i = EJ_i \left(-\frac{d^2 y_i}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_i}{dx} \right) \quad (2.7a)$$

ở đây E là môđun đàn hồi vật liệu dầm, b và h là chiều rộng và chiều cao tiết diện đoạn dầm. Tại điểm nối đoạn i và đoạn $(i+1)$ chuyển vị và góc xoay hai đoạn phải bằng nhau (điều kiện liên tục), tại gối tựa chuyển vị bằng không, nếu là ngàm thì góc xoay cũng bằng không (hình 2.1).



Hình 2.1 Sơ đồ phân tử, nút và tọa độ các đoạn thanh của dầm liên tục

Biết được quan hệ (2.7a) thì dễ dàng xây dựng bài toán kết cấu chịu uốn có xét biến dạng trượt theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss.

Khi giải bài toán cụ thể cần xét điều kiện động học của dầm. Do xem lực cắt Q là đại lượng chưa biết nên ngoài việc giả thiết đường độ võng y của dầm, cần giả thiết dạng phân bố lực cắt Q . Những ví dụ trình bày dưới đây dùng phương pháp phân tử hữu hạn xây dựng và giải bài toán dầm đơn có xét đến biến dạng trượt ngang chịu tác dụng của tải trọng tĩnh tập trung.

CHƯƠNG 3. PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

3.1. Phương pháp phần tử hữu hạn

Trong phương pháp phần tử hữu hạn chia kết cấu công trình thành một số hữu hạn các phần tử. Các phần tử này được nối với nhau tại các điểm định trước thường tại đỉnh phần tử (thậm trí tại các điểm trên biên phần tử) gọi là nút. Như vậy việc tính toán kết cấu công trình được đưa về tính toán trên các phần tử của kết cấu sau đó kết nối các phần tử này lại với nhau ta được lời giải của một kết cấu công trình hoàn chỉnh. Tương tự như phương pháp sai phân hữu hạn cũng chia công trình thành các đoạn nhỏ (phần tử) và các trạng thái chuyển vị (trường chuyển vị) v.v... được xác định tại các điểm nút sai phân. Sự khác biệt của hai phương pháp là Phương pháp sai phân hữu hạn sau khi tìm được các chuyển vị tại các nút của sai phân còn các điểm nằm giữa hai nút được xác định bằng nội suy tuyến tính, còn phương pháp phần tử hữu hạn sau khi xác định được chuyển vị tại các nút của phần tử thì các điểm bên trong được xác định bằng hàm nội suy (hàm dạng).

Với bài toán cơ học vật rắn biến dạng, tùy theo ý nghĩa vật lí của hàm nội suy có thể phân tích bài toán theo 3 loại mô hình sau:

- Mô hình chuyển vị: Xem chuyển vị là đại lượng cần tìm và hàm nội suy biểu diễn gần đúng dạng phân bố của chuyển vị trong phần tử.

- Mô hình cân bằng: Hàm nội suy biểu diễn gần đúng dạng phân bố của ứng suất hay nội lực trong phần tử.

- Mô hình hỗn hợp: Coi các đại lượng chuyển vị và ứng suất là 2 yếu tố độc lập riêng biệt. Các hàm nội suy biểu diễn gần đúng dạng phân bố của cả chuyển vị lẫn ứng suất trong phần tử.

Hiện nay, khi áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn để giải các bài toán cơ học thường sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn theo mô hình chuyển vị. Sau đây luận văn trình bày nội dung phương pháp phần tử hữu hạn theo mô hình chuyển vị.

3.1.1 Nội dung phương pháp phần tử hữu hạn theo mô hình chuyển vị

Trong phương pháp phần tử hữu hạn - mô hình chuyển vị, thành phần chuyển vị được xem là đại lượng cần tìm. Chuyển vị được lấy xấp xỉ trong dạng một hàm đơn

giản gọi là hàm nội suy (hay còn gọi là hàm chuyển vị). Trình tự phân tích bài toán theo phương pháp phần tử hữu hạn - mô hình chuyển vị có nội dung sau:

3.1.1.1. Rời rạc hoá kết cấu:

Trong phương pháp PTHH, người ta rời rạc hoá bằng cách chọn kết cấu liên tục thành một số hữu hạn các miền con có kích thước càng nhỏ càng tốt nhưng phải hữu hạn. Các miền hoặc kết cấu con được gọi là PTHH, chúng có thể có dạng hình học và kích thước khác nhau, tính chất vật liệu được giả thiết không thay đổi trong mỗi phần tử nhưng có thể thay đổi từ phần tử này sang phần tử khác.

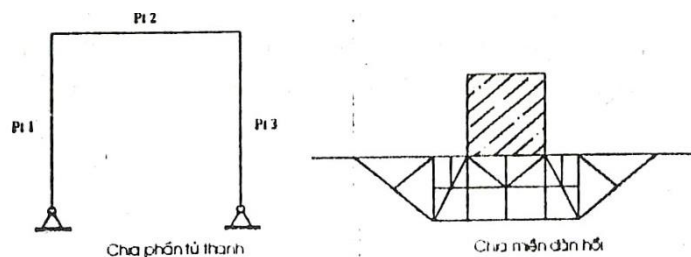
Kích thước hình học và số lượng các phần tử không những phụ thuộc vào kích thước hình học và tính chất chịu lực của kết cấu mà còn phụ thuộc vào độ chính xác của bài toán.

Với hệ thanh dùng các phương trình thanh, kết cấu tám sử dụng phương trình tám tam giác, chữ nhật, với vật thể khối dùng các phương trình hình chóp, hình hộp...

Khi rời rạc hoá kết cấu liên tục các PTHH được giả thiết nối với nhau tại một số điểm quy định gọi là các nút, toàn bộ tập hợp các phương trình rời rạc lưới PTHH. Lưới càng mau, nghĩa là số lượng phương trình càng lớn hay kích thước phương trình càng nhỏ thì mức độ chính xác của kết cấu càng tăng.

Khi rời rạc cần chú ý tại những nơi chuyển vị biến thiên nhanh thì chọn các phương trình có kích thước nhỏ, càng ra xa kích thước của phương trình có thể tăng lên để giảm số lượng phương trình hay số ẩn của bài toán mà vẫn đảm bảo độ chính xác. Miền được phân chia phải chọn sao cho tại biên các chuyển vị coi như đã tắt. Khi chia thành các phần tử thì các kích thước trong mỗi một phần tử không chênh lệch quá lớn làm giảm độ chính xác của bài toán. Để xác định được kích thước phù hợp cho phương trình với mỗi bài toán cần quy định kích thước ban đầu, sau đó lấy kích thước nhỏ đi hai lần, nếu kết quả của bài toán đạt độ chính xác như cũ thì kích thước của phương trình giả định coi như chấp nhận được.

Nhưng đối với hệ thanh thì khi chia nhỏ một thanh (phương nối hai nút) độ chính xác không tăng. Cho nên với hệ thanh kích thước của phương trình lấy với kích thước lớn nhất có thể tức là phương trình nối hai nút của kết cấu.



Hình 3.1.

3.1.1.2. Hàm chuyển vị:

Việc chọn trước các hàm chuyển vị tại một thời điểm bất kỳ trong PTHH nhằm xác định sự liên hệ giữa chuyển vị nút với chuyển vị của mọi điểm trong phạm vi của PTHH.

Gọi trường chuyển vị là vectơ các hàm chuyển vị tại điểm bất kỳ có tọa độ (x, y, z) của PTHH không gian và tọa độ (x, y) của PTHH phẳng.

$$U_x(x, y, z); U_y(x, y, z); U_z(x, y, z)$$

$$\text{và } U_x(x, y); U_y(x, y)$$

Các hàm chuyển vị thường được chọn dưới dạng hàm đa thức. Bậc của hàm và số thành phần phụ thuộc vào hình dạng, bậc của loại PTHH tương ứng.

Ví dụ trong bài toán phẳng của ứng suất hay biến dạng, đối với loại phần tử tuyến tính, hàm chuyển vị là đa thức bậc nhất và số thành phần bằng số nút quy định của phương trình. Đối với PTHH bậc hai, hàm chuyển vị là đa thức bậc hai, số thành phần chứa trong mỗi hàm bằng mỗi nút của phần tử. Dưới đây là một số hàm chuyển vị được dùng trong lý thuyết đàn hồi.

1. PTHH tuyến tính:

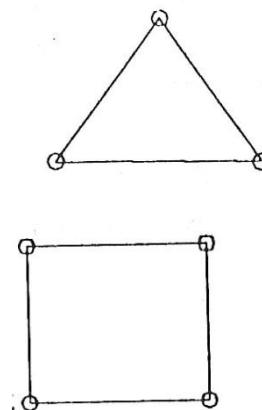
a. PTHH tam giác:

$$U_x(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot y + \alpha_4 \cdot x^2 + \alpha_5 \cdot xy + \alpha_6 \cdot y^2$$

$$U_y(x, y) = \alpha_4 + \alpha_5 \cdot x + \alpha_6 \cdot y$$

b. PTHH chữ nhật:

$$U_x(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot y + \alpha_4 \cdot xy$$



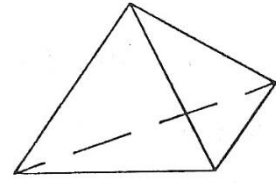
$$U_y(x, y) = \alpha_5 + \alpha_6 \cdot x + \alpha_7 \cdot y + \alpha_8 \cdot xy$$

c. PTHH hình chóp:

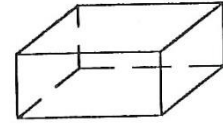
$$U_x(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot y + \alpha_4 \cdot z$$

$$U_y(x, y, z) = \alpha_5 + \alpha_6 \cdot x + \alpha_7 \cdot y + \alpha_8 \cdot z$$

$$U_z(x, y, z) = \alpha_9 + \alpha_{10} \cdot x + \alpha_{11} \cdot y + \alpha_{12} \cdot z$$



d. PTHH hình hộp:



$$U_x(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot y + \alpha_4 \cdot z + \alpha_5 \cdot xy + \alpha_6 \cdot yz + \alpha_7 \cdot zx + \alpha_8 \cdot xyz$$

$$U_y(x, y, z) = \alpha_9 + \alpha_{10} \cdot x + \alpha_{11} \cdot y + \alpha_{12} \cdot z + \alpha_{13} \cdot xy + \alpha_{14} \cdot yz + \alpha_{15} \cdot zx + \alpha_{16} \cdot xyz$$

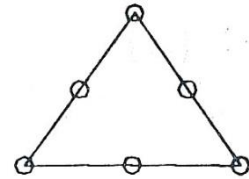
$$U_z(x, y, z) = \alpha_{17} + \alpha_{18} \cdot x + \alpha_{19} \cdot y + \alpha_{20} \cdot z + \alpha_{21} \cdot xy + \alpha_{22} \cdot yz + \alpha_{23} \cdot zx + \alpha_{24} \cdot xyz$$

2. PTHH bậc hai

a. PTHH tam giác:

$$U_x(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot y + \alpha_4 \cdot x^2 + \alpha_5 \cdot xy + \alpha_6 \cdot y^2$$

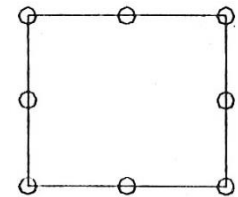
$$U_y(x, y) = \alpha_7 + \alpha_8 \cdot x + \alpha_9 \cdot y + \alpha_{10} \cdot x^2 + \alpha_{11} \cdot xy + \alpha_{12} \cdot y^2$$



b. PTHH chữ nhật:

$$U_x(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot y + \alpha_4 \cdot x^2 + \alpha_5 \cdot xy + \alpha_6 \cdot y^2 + \alpha_7 x^2 y + \alpha_8 xy^2$$

$$U_y(x, y) = \alpha_9 + \alpha_{10} \cdot x + \alpha_{11} \cdot y + \alpha_{12} \cdot x^2 + \alpha_{13} \cdot xy + \alpha_{14} \cdot y^2 + \alpha_{15} x^2 y + \alpha_{16} xy^2$$



3.1.1.3. Phương trình cơ bản của phương pháp phần tử hữu hạn

Để thiết lập phương trình cơ bản của phương pháp PTHH có thể sử dụng các nguyên lý khác nhau, tuy nhiên thông thường người ta sử dụng nguyên lý công khả dĩ.

Theo nguyên lý công khả dĩ ta có công thức:

$$\int_V \{\sigma\}^T \cdot \{\delta \varepsilon\} dv = \int_V \{g\}^T \cdot \{\delta u\} dv + \int_S \{p\}^T \cdot \{\delta \varepsilon\} ds \quad (3.12)$$

Phương trình trên biểu thị điều kiện cân bằng của hệ đàn hồi tuyến tính. Nếu chuyển trí của cả hai về theo phương pháp thông thường ta có:

$$\int_V \{\delta \varepsilon\}^T \cdot \{\delta\} dv = \int_V \{\delta u\}^T \cdot \{g\} dv + \int_S \{\delta u\}^T \cdot \{p\} ds \quad (3.13)$$

Theo định luật Hooke: $\{\delta\} = [D] \cdot \{\varepsilon\}$. thay vào vế phải nhận được:

$$\int_V \{\delta \varepsilon\}^T [D] \cdot \{\varepsilon\} dv = \int_V \{\delta u\}^T \{g\} dv + \int_S \{\delta u\}^T \cdot \{p\} ds \quad (3.14)$$

Trong phương trình trên còn thiếu điều kiện liên tục, điều kiện này được đưa vào bằng một trường chuyển vị xấp xỉ (hàm chuyển vị) thoả mãn các điều kiện tương thích.

Ta chọn một hàm chuyển vị phù hợp với loại và bậc của một phần tử mẫu (PTHH):

- Với bài toán không gian:

$$\{U(x, y, z)\} = [P(x, y, z)] \{\alpha\} \quad (3.15)$$

- Với bài toán phẳng:

$$\{U(x, y)\} = [P(x, y)] \{\alpha\} \quad (3.16)$$

Trong đó:

$\{U$ - vector chuyển vị của một điểm

$[P]$ - ma trận các biến của trường chuyển vị.

$\{\alpha\}$ - ma trận hệ số của hàm chuyển vị

Ví dụ với phần tử tam giác:

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\rightarrow \{u\} = [P] \{\alpha\}$$

Nếu tính chuyển vị của các nút trong một phần tử ta có:

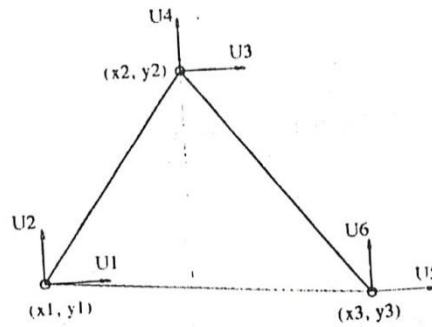
$$\{u\}_e = [A]_e \cdot \{\alpha\} \quad (3.18)$$

$\{u\}_e$ - vector chuyển vị của các nút của phần tử.

$[A]_e^T$ - ma trận được xác định theo $[P]$ và tọa độ của các nút.

$\{\alpha\}$ - ma trận hệ số.

Ví dụ với phần tử tam giác:



Hình 3.2.

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\rightarrow \{u\}_e = [A]_e \cdot \{\alpha\} \quad (3.20)$$

Trong công thức trên giá trị của $[A]_e$ hoàn toàn xác định. Nếu biết được $\{u\}_e$ ta sẽ xác định được $\{\alpha\}$, ta có:

$$\{\alpha\} = [A]_e^{-1} \cdot \{u\}_e \quad (3.21)$$

Khi đó chuyển vị tại một điểm bất kỳ được xác định theo chuẩn vị của các nút của phần tử:

$$\{u\} = [P][A]_e^{-1} \cdot \{u\}_e \quad (3.22)$$

Mặt khác ta có quan hệ giữa chuyển vị và biến dạng:

$$\{\epsilon\} = [\nabla] \{u\} \quad (3.23)$$

$[\nabla]$ - ma trận toán tử vi phân;

$\{\epsilon\}$ - vectơ biến dạng

Thay giá trị của $\{u\}$ ta có công thức biến dạng:

$$\{\varepsilon\} = [\nabla][p][A]_e^{-1} \cdot \{u\}_e \quad (3.24)$$

Đặt:

$$[N] = [p][A]_e^{-1} \quad (3.25)$$

$$[B] = [\nabla][N] \quad (3.26)$$

Trong đó:

$[N]$ - ma trận hàm dạng

$[B]$ - ma trận biến đổi của hàm dạng

Như vậy biến dạng có thể biến đổi lại như sau:

$$\{\varepsilon\} = [\nabla][N]\{u\}_e \text{ hoặc } \{\varepsilon\} = [B]\{u\}_e, \text{ đồng thời}$$

$$\{u\} = [N]\{u\}_e$$

Nếu cho các nút một chuyển vị khả dĩ khi đó ta có biến dạng khả dĩ.

$$\{\delta\varepsilon\} = [B]\{\delta u\}_e$$

$$\{\delta u\} = [N]\{\delta u\}_e \quad (3.27)$$

Thực hiện phép chuyển trí phương trình trên ta có:

$$\{\delta\varepsilon\}^T = \{\delta u\}_e^T \cdot [B]^T$$

$$\{\delta u\}^T = \{\delta u\}_e^T \cdot [N]^T \quad (3.28)$$

Thay $\{\delta\varepsilon\}^T$ vào phương trình cân bằng của nguyên lý công khả dĩ ta được

$$\int_V \{\delta u\}_e^T \cdot [B]^T \cdot [D][B]\{u\}_e \, dv = \int_V \{\delta u\}_e^T [N]^T \{g\} \, dv + \int_S \{\delta u\}_e^T [N]^T \{p\} \, ds \quad (3.29)$$

Ta dùng chuyển vị tương thích được chọn (Hạng CV) không những thoả mãn điều kiện bên trong và cả trên biên PTHH. Trong công thức trên đại lượng $\{\delta u\}_e$ không phụ thuộc vào phép tích phân nên có thể đưa ra ngoài dấu tích phân:

$$\{\delta u\}_e^T \int_V [B]^T [D][B]\{u\}_e \, dv = \{\delta u\}_e^T \int_V [N]^T \{g\} \, dv + \{\delta u\}_e^T \int_S [N]^T \{p\} \, ds$$

Do chuyển vị khả dĩ khác 0 nên:

$$\int_V [B]^T [D][B]\{u\}_e \, dv = \int_V [N]^T \{g\} \, dv + \int_S [N]^T \{p\} \, ds \quad (3.30)$$

Nếu ký hiệu:

$$[K]_e = \int_v [B]^T [D] [B] dv$$

$$\{F\}_e = \int_v [N]^T \{g\} dv + \int_s [N]^T \{p\} ds \quad (3.31)$$

Ta có:

$$[K]_e \{u\}_e = \{F\}_e \quad (3.32)$$

Đây là phương trình cơ bản của PTHH, trong đó:

$[K]_e$ - ma trận độ cứng của PTHH (ma trận đối xứng);

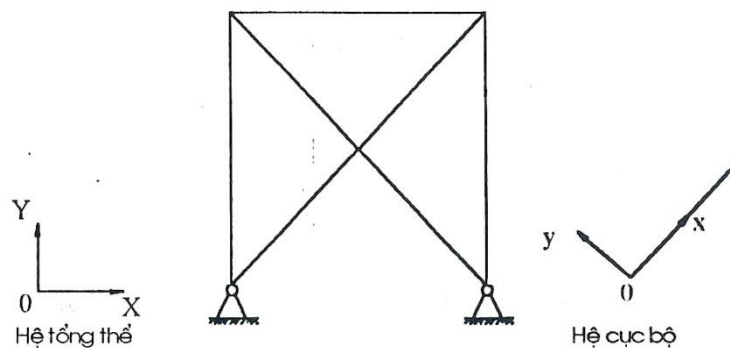
$\{u\}_e$ - vectơ chuyển vị nút;

$\{F\}_e$ - vectơ lực nút của phần tử, gọi là lực nút tương đương của PTHH

Ân của phương trình trên là chuyển vị của các nút. Còn đại lượng $[K]_e$ và $\{F\}_e$ đều xác định được dựa vào đặc trưng hình học, vật liệu của phần tử và tải trọng tác động vào nó. Tuy nhiên phương trình trên mới chỉ là phương trình cân bằng của một phần tử, trong khi đó một kết cấu bao gồm nhiều phần tử tạo nên. Dựa vào phương trình cân bằng của một phần tử, thực hiện ghép nối để tạo nên phương trình cân bằng của hệ kết cấu, từ đó xác định được chuyển vị của các nút, trước khi ghép nối đôi khi cần chuyển hệ trục tọa độ (từ hệ tọa độ cục bộ sang hệ tọa độ tổng thể).

3.1.1.4. Chuyển hệ trục tọa độ

Để thuận tiện cho việc nhập số liệu tải trọng và xem nội lực, trên mỗi một phần tử có một hệ tọa độ riêng gọi là hệ tọa độ cục bộ. Trong khi đó tọa độ của các nút và chuyển vị được tính theo hệ tọa độ chung, gọi là hệ tọa độ tổng thể.



Hình 3.3.

Khi ghép nối ma trận độ cứng và vector lực, và chuyển vị cần chuyển cả đại lượng này từ hệ tọa độ cục bộ về tổng thể, từ phương trình của hệ tọa độ cục bộ:

$$[K]_e \cdot \{u\}_e = \{F\}_e$$

Ta có:

$$[T][k]_e [T]^{-1} [T]\{u\}_e = [T]\{F\}_e$$

Trong đó $[T]$ là ma trận chuyển trục tọa độ:
$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

Đặt:

$$[K]_e' = [T][K]_e [T]^{-1} = [T][K]_e [T]^T \text{ do } [T]^T = [T]^{-1} \text{ (ma trận trực giao)}$$

$$\{F\}_e' = [T]\{F\}_e$$

$$\{u\}_e' = [T]\{u\}_e$$

Trong đó:

$[K]_e'$ - ma trận độ cứng của phương trình tử trong hệ tọa độ tổng thể.

$\{F\}_e'$ - vector lực nút trong hệ tọa độ tổng thể.

$\{u\}_e'$ - vector chuyển vị nút trong hệ tọa độ tổng thể.

Khi xác định được các chuyển vị nút của hệ trong tọa độ tổng thể thì chuyển vị của các nút của phương trình trong hệ tọa độ cục bộ là:

$$\{u\}_e = [T]^{-1} \cdot \{u\}_e' \text{ hoặc } \{u\}_e = [T]^T \cdot \{u\}_e'$$

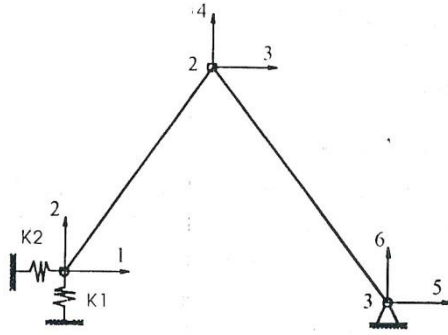
Phương trình cân bằng của phần tử trong hệ tọa độ tổng thể:

$$[K]_e' \cdot \{u\}_e' = \{F\}_e' \tag{3.33}$$

3.1.1.5. Ghép nối ma trận độ cứng và vector tải trọng nút của toàn hệ

Dựa vào đặc trưng hình học và cơ học của phần tử ta xác định được $[K]_e'$ và $\{F\}_e'$ theo sơ đồ liên kết của các phần tử thành lập bảng liên kết sau đó xác định ma trận độ cứng và vector tải trọng của hệ, các bước thực hiện như sau:

a. Đánh chỉ số nút và chuyển vị



Hình 3.4.

Hệ có ba nút, 2 phần tử giàn và 6 chuyển vị. Như vậy, ma trận độ cứng của 1 phần tử có kích thước \$4 \times 4\$.

Bảng liên kết phần tử

Phần tử	Nút đầu		Nút cuối	
	u (1)	v (2)	u (3)	v (4)
1	1	2	3	4
2	3	4	5	6

b. Ma trận độ cứng

Sau khi đã chuyển về hệ tọa độ tổng thể ta có ma trận độ cứng của các phương trình tương đương với các chuyển vị:

$$[K]_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix} \quad [K]_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{matrix} & \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{matrix}$$

Do hệ có 6 chuyển vị nên ma trận độ cứng của hệ \$[k]_s\$ có kích thước \$6 \times 6\$ tương ứng với các chuyển vị:

$$\begin{array}{cccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 [K]_s = & \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}
 \end{array}$$

Các giá trị được xác định bằng cách cộng dồn từ $[K]_1$ và $[K]_2$. Duyệt từng giá trị của $[K]_1$ chuyển vào $[K]_s$ theo đúng chỉ số, tiếp tục với $[K]_2$ nhưng cộng thêm.

c. Vectơ lực của toàn hệ

Từ số chuyển vị của hệ ta có vectơ lực tương ứng.

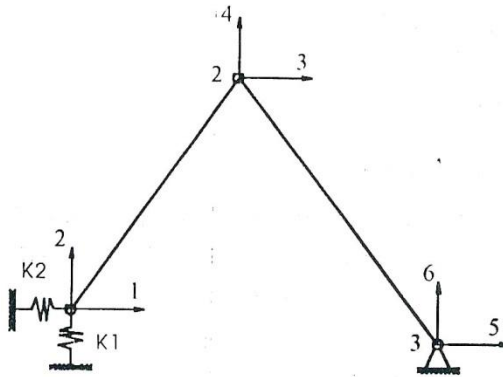
$$\{F\}'_1 = \begin{Bmatrix} * \\ * \\ * \\ * \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}, \quad \{F\}'_2 = \begin{Bmatrix} * \\ * \\ * \\ * \end{Bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}; \quad \{F\}_s = \begin{Bmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Từ các vectơ lực của mỗi phần tử đã được xác định, ta duyệt từng giá trị của $\{F\}'_1$ đưa vào vị trí của $\{F\}_s$ sao cho có cùng chỉ số. Tiếp tục làm như vậy với $\{F\}'_2$ nhưng phải cộng thêm vào. Cuối cùng ta có hệ phương trình của hệ kết cấu:

$$[K]_s \{u\}_s = \{F\}_s \tag{3.34}$$

d. Trường hợp gối đàn hồi tại nút

Với một số loại kết cấu tại gối có các liên kết đàn hồi, với mỗi liên kết ta có một lò xo với độ cứng cho trước, khi đó độ cứng của lò xo sẽ được cộng thêm vào ma trận độ cứng của hệ tại vị trí trên đường chéo chính với số chỉ tương ứng



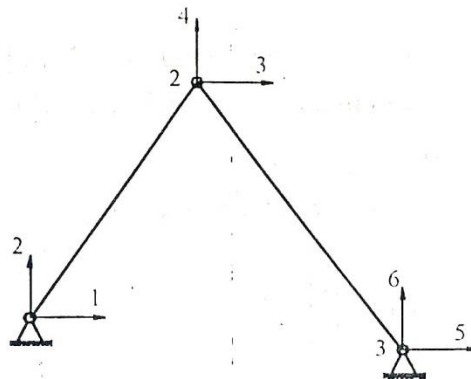
Hình 3.5.

Ví dụ: k_1 thêm vào k_{11} , k_2 thêm vào k_{22} .

3.1.1.6. Xử lý điều kiện biên

Muốn tìm chuyển vị của các nút ta cần giải hệ phương trình: $[K]_s \cdot \{u\}_s = \{F\}_s$ tuy nhiên ma trận độ cứng của hệ được thành lập khi chưa tính đến các liên kết của kết cấu với môi trường, do đó $\det[K]_s = 0$ hay nói cách khác hệ suy biến. Để giải hệ phương trình này cần đưa các điều kiện biên vào. Đó là chuyển vị bị chặn (chuyển vị = 0) tại các chuyển vị này sẽ có phản lực.

Ví dụ: $u_1 = u_2 = u_5 = u_6 = 0$



Hình 3.6.

Cách đưa các điều kiện biên vào như sau: với một chuyển vị nào đó $u_i = 0$ ta xoá cột i và dòng i của ma trận $[K]_s$ và $\{F\}_s$. Làm như vậy với tất cả các chuyển vị ta nhận được một hệ phương trình mới không suy biến và giải được bằng các phương pháp: khử Gause, Choleski, lặp: $[K]_s \cdot \{u\}_s = \{F\}_s$ ví dụ

$$\begin{array}{c}
 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 1 & * & * & * & * & * \\
 \hline
 2 & * & * & * & * & * \\
 \hline
 3 & * & * & * & * & * \\
 \hline
 4 & * & * & * & * & * \\
 \hline
 5 & * & * & * & * & * \\
 \hline
 6 & * & * & * & * & * \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 (0) \\
 \hline
 0 \\
 \hline
 * \\
 \hline
 * \\
 \hline
 0 \\
 \hline
 0 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 (*) \\
 \hline
 * \\
 \hline
 * \\
 \hline
 * \\
 \hline
 * \\
 \hline
 * \\
 \hline
 \end{array} \\
 \begin{array}{c}
 [K]_s \\
 \{u\}_s \\
 \{F\}_s
 \end{array}
 \end{array}$$

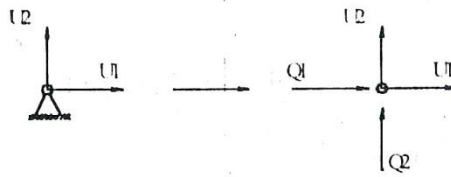
Sau khi xoá ta có hệ phương trình:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{33} & \mathbf{k}_{34} \\ \mathbf{k}_{43} & \mathbf{k}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_3 \\ \mathbf{F}_4 \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

Giải phương trình tìm $\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$

3.1.1.7. Tìm phản lực tại các gối

Phản lực tại các gối xuất hiện khi chuyển vị tại đó bị chặn ($u_i = 0$). Nếu ta bỏ phần chặn và thay vào đó bằng phản lực (theo đúng phương của chuyển vị) theo mô hình sau:



Hình 3.7.

Trong đó Q_1, Q_2 là phản lực, để tìm phản lực Q_1 tương ứng với $u_i = 0$ ta lấy dòng của hệ phương trình.

$$[K]_s \cdot \{u\}_s = \{F\}_s$$

Ví dụ u_5 khi đó ta có:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 1 & * & * & * & * & * & * \\
 2 & * & * & * & * & * & * \\
 3 & * & * & * & * & * & * \\
 4 & * & * & * & * & * & * \\
 5 & * & * & * & * & * & * \\
 6 & * & * & * & * & * & * \\
 \hline
 & [K]_s & & & & & \\
 \hline
 & & & & & \begin{array}{c} (0) \\ (0) \\ * \\ * \\ (0) \\ (0) \end{array} & \\
 & & & & & \begin{array}{c} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{array} & \\
 & & & & & = & \begin{array}{c} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{array} & + & \begin{array}{c} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{array} \\
 & & & & & \begin{array}{c} \{u\}_s \\ \{F\}_s \end{array} & & & \begin{array}{c} \{Q\}_s \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\rightarrow Q_5 = u_3 k_{53} + u_4 k_{54} - F_5 \quad (3.36)$$

Trong đó u_3 và u_4 tìm được từ việc giải hệ $[K]_s \cdot \{u\}_s = \{F\}_s$ tương tự như vậy đối với Q_1, Q_2, Q_6 . Chiều dương của lực Q_i là chiều trùng với chiều dương của hệ tọa độ tổng thể.

3.1.1.8. Trường hợp biết trước một số chuyển vị

Giả sử cho trước một số chuyển vị $\{u\}_i = \{a\}_i$ khi đó cách khử u_i được thực hiện như sau: thay u_i vào các dòng tại vị trí i chuyển tích các $k_{ij}u_i$ sang bên phải và xoá dòng i ta có hệ phương trình mới.

Ví dụ cho $u_2 = a_2$

$$\begin{array}{c}
 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \\
 \begin{array}{c}
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 4 \\
 5 \\
 6
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 * & k_{12} & * & * & * & * \\
 * & k_{22} & * & * & * & * \\
 * & k_{32} & * & * & * & * \\
 * & k_{42} & * & * & * & * \\
 * & k_{52} & * & * & * & * \\
 * & k_{62} & * & * & * & *
 \end{bmatrix}
 \cdot
 \begin{array}{c}
 \left\{ \begin{array}{c} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{array} \right\} \\
 \left\{ \begin{array}{c} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{array} \right\} \\
 \left\{ \begin{array}{c} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{array} \right\}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \left\{ \begin{array}{c} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{array} \right\} \\
 \left\{ \begin{array}{c} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{array} \right\} \\
 \left\{ \begin{array}{c} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{array} \right\}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad \text{xoá dòng } i = 2.$$

$[K]_s \qquad \{u\}_s \quad \{F\}_s$

$$\begin{array}{c}
 1 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \\
 \begin{array}{c}
 * \\
 * \\
 * \\
 * \\
 *
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 * & * & * & * & * \\
 * & * & * & * & * \\
 * & * & * & * & * \\
 * & * & * & * & * \\
 * & * & * & * & *
 \end{bmatrix}
 \cdot
 \begin{array}{c}
 \left\{ \begin{array}{c} * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{array} \right\} \\
 \left\{ \begin{array}{c} * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{array} \right\} \\
 \left\{ \begin{array}{c} * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{array} \right\}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \left\{ \begin{array}{c} * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{array} \right\} \\
 \left\{ \begin{array}{c} * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{array} \right\} \\
 \left\{ \begin{array}{c} * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{array} \right\}
 \end{array}
 - a_2
 \begin{array}{c}
 \left\{ \begin{array}{c} k_{12} \\ k_{32} \\ k_{42} \\ k_{52} \\ k_{62} \end{array} \right\}
 \begin{array}{c}
 1 \\
 3 \\
 4 \\
 5 \\
 6
 \end{array}
 \end{array}$$

$[K]_s \qquad \{u\}'_s \quad \{F\}'_s$

Giải hệ này tìm được các $\{u\}'_s$

Phản lực tại các chuyển vị cho trước xác định như sau:

Thay các chuyển vị tìm được vào dòng i, ta có:

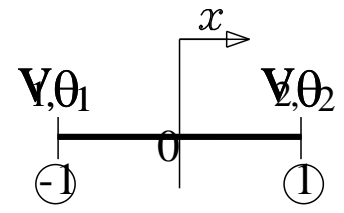
$$k_{21}u_1 + k_{22}u_2 + k_{23}u_3 + k_{24}u_4 + k_{25}u_5 + k_{26}u_6 = F_2 + Q_2 \quad (3.37)$$

$$\Rightarrow Q_2 - k_{21}u_1 + k_{22}u_2 + k_{23}u_3 + k_{24}u_4 + k_{25}u_5 + k_{26}u_6 - F_2$$

Tương tự như vậy với trường hợp các chuyển vị cho trước khác.

3.1.2. Cách xây dựng ma trận độ cứng của phần tử chịu uốn

Xét phần tử dầm có hai nút, mỗi nút có hai bậc tự do là chuyển vị và góc xoay và dầm có diện tích mặt cắt ngang là A; mô men quán tính của mặt cắt ngang là I; mô đun đàn hồi của vật liệu E (hình 3.8)



Hình 3.8. Phần tử hai nút

Để tính toán được tổng quát, chiều dài phần tử lấy bằng hai đơn vị, góc tọa độ nằm ở giữa phần tử. Như vậy, nếu biết được các bậc tự do tại các nút phần tử là $v_1, \theta_1, v_2, \theta_2$ thì chuyển vị tại điểm bất kỳ trong phần tử tại tọa độ x được xác định như sau:

$$v = N_1 \cdot v_1 + N_2 \cdot \theta_1 + N_3 \cdot v_2 + N_4 \cdot \theta_2 \quad (3.38)$$

Trong đó : N_1, N_2, N_3, N_4 : là các hàm dạng và được xác định như sau:

$$N_1 = \frac{1}{4}(2 - 3x + x^3); \quad N_2 = \frac{1}{4}(1 - x - x^2 + x^3);$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(2 + 3x - x^3); \quad N_4 = \frac{1}{4}(-1 - x + x^2 + x^3).$$

Theo công thức trên ta thấy:

$$v|_{x=1} = v_1; \quad \frac{dv}{dx}|_{x=1} = \theta_1; \quad v|_{x=-1} = v_2; \quad \frac{dv}{dx}|_{x=-1} = \theta_2. \quad (3.39)$$

Như vậy, mỗi phần tử có 4 bậc tự do $X = \{v_1, \theta_1, v_2, \theta_2\}$ cần xác định. Nếu biết được X thì ta có biết được chuyển vị trong phần tử cũng như biến dạng uốn và mô men theo công thức sau:

$$\chi = -\frac{d^2v}{dx^2} = -\left[\frac{d^2N_1}{dx^2} \quad \frac{d^2N_2}{dx^2} \quad \frac{d^2N_3}{dx^2} \quad \frac{d^2N_4}{dx^2} \right] \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\}^T; \quad (3.40a)$$

$$M = EI \cdot \chi = -EI \left[\frac{d^2N_1}{dx^2} \quad \frac{d^2N_2}{dx^2} \quad \frac{d^2N_3}{dx^2} \quad \frac{d^2N_4}{dx^2} \right] \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\}^T \quad (2.41a)$$

Công thức trên là tính toán cho phần tử có chiều dài bằng 2, nếu phần tử có chiều dài là Δx thì biến dạng uốn và mô men được tính như sau:

$$\chi = -\frac{d^2v}{dx^2} \left(\frac{2}{\Delta x} \right)^2 = -\left(\frac{2}{\Delta x} \right)^2 \left[\frac{d^2N_1}{dx^2} \quad \frac{d^2N_2}{dx^2} \quad \frac{d^2N_3}{dx^2} \quad \frac{d^2N_4}{dx^2} \right] \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\}^T \quad (3.40b)$$

$$M = EI \cdot \chi = -EI \left(\frac{2}{\Delta x} \right)^2 \left[\frac{d^2N_1}{dx^2} \quad \frac{d^2N_2}{dx^2} \quad \frac{d^2N_3}{dx^2} \quad \frac{d^2N_4}{dx^2} \right] \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\}^T \quad (3.41b)$$

Xét phần tử có các tải trọng tập trung $F = \{P_1, P_2, M_1, M_2\}^T$ tác dụng tại các nút của phần tử. Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, lượng ràng buộc đối với bài toán tĩnh viết cho phần tử như sau:

$$Z = \frac{\Delta x}{2} \int_{-1}^1 M[\chi] dx - \sum_{i=1}^4 F_i X_i \rightarrow \min \quad (3.42)$$

Điều kiện dừng của (3.42) được viết lại như sau:

$$\delta Z = \frac{\Delta x}{2} \int_{-1}^1 M\delta[\chi] dx - \sum_{i=1}^4 F_i \delta X_i = 0 \quad (3.43)$$

hay:

$$\left(\frac{2}{\Delta x}\right)^3 EJ \cdot \begin{bmatrix} \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_4}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} dx \\ \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_4}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} dx \\ \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_4}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} dx \\ \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_4}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_4}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_4}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_4}{dx^2} \frac{d^2 N_4}{dx^2} dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

$$[K]\{X\} = \{F\} \quad (3.45)$$

trong đó: $[K]$: ma trận độ cứng của phần tử; $\{F\}$: véc tơ tải trọng tác dụng nút; $\{X\}$: véc tơ chuyển vị nút của phần tử.

Tính tích phân các hệ số trong $[K]$ ta có thể tính bằng phương pháp chính xác (bằng hàm $\text{int}(fx,a,b)$ có sẵn trong matlab) hoặc tính bằng phương pháp tích phân số của Gauss và kết quả độ cứng của phần tử chịu uốn ngang phẳng như sau:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{\Delta x^3} & \frac{6EI}{\Delta x^2} & -\frac{12EI}{\Delta x^3} & \frac{6EI}{\Delta x^2} \\ \frac{6EI}{\Delta x^2} & 4EI & -\frac{6EI}{\Delta x^2} & 2EI \\ -\frac{12EI}{\Delta x^3} & -\frac{6EI}{\Delta x^2} & \frac{12EI}{\Delta x^3} & -\frac{6EI}{\Delta x^2} \\ \frac{6EI}{\Delta x^2} & 2EI & -\frac{6EI}{\Delta x^2} & 4EI \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Biết được ma trận độ cứng phần tử thì ta dễ dàng xây dựng được ma trận độ cứng của toàn thanh. Nếu thanh chỉ có một phần tử thì ma trận của phần tử cũng chính là ma trận độ cứng của thanh. Trong phần tử nếu bậc tự do nào không có thì trong ma trận độ cứng của phần tử đó ta bỏ đi hàng và cột tương ứng với bậc tự do đó.

3.1.3. Cách xây dựng ma trận độ cứng tổng thể của kết cấu

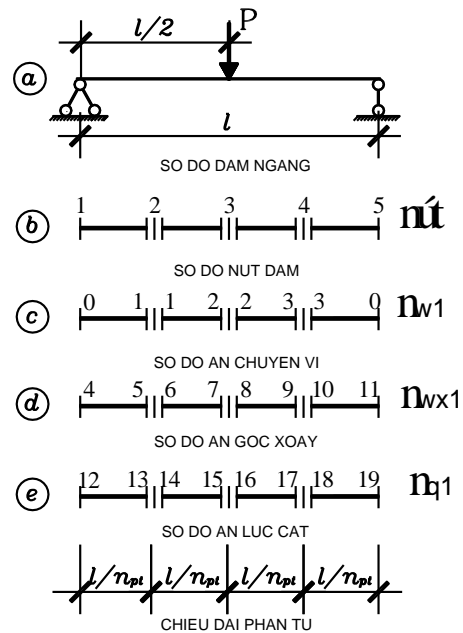
Dựa vào hướng dẫn tại mục 3.1.1.5, ta ghép nối được ma trận các phần tử $[K_e]$ vào vào ma trận độ cứng của toàn kết cấu $[K]$.

3.2. Giải bài toán dầm có xét đến biến dạng trượt ngang bằng phương pháp phần tử hữu hạn

Ví dụ 3.2.1. Dầm đơn giản, hình 3.9.

Xác định nội lực và chuyển vị của dầm chịu lực như hình 3.9, độ cứng uốn $EJ = \text{const}$.

Rời rạc hóa kết cấu dầm ra thành n_{pt} phần tử. Các nút của phần tử phải trùng với vị trí đặt lực tập trung, hay vị trí thay đổi tiết diện, chiều dài các phần tử có thể khác nhau.



Hình 3.9. Dầm đơn giản

Mỗi phần tử có 6 ẩn $w_1, w_2, \theta_1, \theta_2, q_1, q_2$ (lần lượt là, hai ẩn chuyển vị, hai ẩn góc xoay và hai ẩn lực cắt tại hai đầu mỗi phần tử) vậy nếu n_{pt} phần tử rời rạc thì tổng cộng có $6n_{pt}$ ẩn.

Nhưng vì cần đảm bảo liên tục giữa các chuyển vị là chuyển vị của nút cuối phần tử thứ e bằng chuyển vị của nút đầu phần tử thứ $(e + 1)$ nên số ẩn của thanh sẽ nhỏ hơn $6n_{pt}$. Khi giải ta chỉ cần đảm bảo điều kiện liên tục của chuyển vị còn điều kiện liên tục về góc xoay được xét bằng cách đưa vào các điều kiện ràng buộc. Ví dụ dầm trong (ví dụ 3.2.1, hình 3.9a) ta chia thành 4 phần tử (hình 3.9b).

Khi chia dầm thành 4 phần tử thì số nút dầm sẽ là 5, thứ tự từ trái sang phải là $[1, 2, 3, 4, 5]$ (hình 3.19b), số ẩn chuyển vị $n_{w1} = 3$, thứ tự từ trái sang phải là $[1, 2, 3]$ (hình 3.9c), ở đây ẩn chuyển vị tại hai đầu dầm bằng không, ẩn góc xoay $n_{wx1} = 8$, thứ

tự từ trái sang phải là [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11] (hình 3.9d), ản lực cắt $nq1=8$, thứ tự từ trái sang phải là [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19] (hình 3.9e).

Như vậy, tổng cộng số ản là 19 ản $< 4 \times 6 = 24$ ản. Gọi ma trận $nw1$ là ma trận chuyển vị có kích thước $nw1(n_{pt}, 2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ản số là chuyển vị tại hai đầu nút của các phần tử (hình 3.9c).

Các phần dầm:

$$\begin{aligned} nw1(1,:) &= [0 \quad 1]; \\ nw1(2,:) &= [1 \quad 2]; \\ nw1(3,:) &= [2 \quad 3]; \\ nw1(4,:) &= [3 \quad 0] \end{aligned} \quad nw1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Gọi ma trận $nwx1$ là ma trận chuyển vị góc xoay có kích thước $nwx1(n_{pt}, 2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ản số là góc xoay tại nút của các phần tử (hình 3.9d).

$$\begin{aligned} nwx1(1,:) &= [4 \quad 5]; \\ nwx1(2,:) &= [6 \quad 7]; \\ nwx1(3,:) &= [8 \quad 9]; \\ nwx1(4,:) &= [10 \quad 11] \end{aligned} \quad nwx1 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \\ 8 & 9 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$$

Gọi ma trận $nq1$ là ma trận lực cắt có kích thước $nq1(n_{pt}, 2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ản số là lực cắt tại hai đầu nút của các phần tử (hình 3.9e).

$$\begin{aligned} nq1(1,:) &= [12 \quad 13]; \\ nq1(2,:) &= [14 \quad 15]; \\ nq1(3,:) &= [16 \quad 17]; \\ nq1(4,:) &= [18 \quad 19] \end{aligned} \quad nq1 = \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 14 & 15 \\ 16 & 17 \\ 18 & 19 \end{bmatrix}$$

Sau khi biết ản số (chính) thực của dầm t ta có thể xây dựng độ cứng tổng thể của khung (có rất nhiều cách ghép nối phần tử khác nhau, tùy vào trình độ lập trình của mỗi người nên tác giả không trình bày chi tiết cách ghép nối các phần tử lại để được ma trận độ cứng của toàn dầm và có thể xem trong code mô đun chương trình của tác giả).

Nếu bài toán có $nw1$ ẩn số chuyển vị thẳng của dầm và $nwx1$ ẩn số góc xoay của dầm, $nq1$, ẩn số lực cắt của dầm thì ma trận độ cứng tổng thể của dầm là K có kích thước (nxn) , $K(n,n)$ với $n=(nw1+nwx1+nq1)$. Như ở ví dụ 3.2.1, $n=19$. Bây giờ xét điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử.

Điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử được viết như sau:

$$\left(\frac{dy_i}{dx} - \frac{\alpha Q_i}{GF} \right) \Big|_{nut2} - \left(\frac{dy_{i+1}}{dx} - \frac{\alpha Q_{i+1}}{GF} \right) \Big|_{nut1} = 0 \quad (a)$$

Đối với dầm, ta có:

$$\left. \begin{aligned} \delta\lambda_1 \left[\left(\frac{dy_{11}}{dx} - \frac{\alpha Q_{11}}{GF} \right) \Big|_{nut2} - \left(\frac{dy_{12}}{dx} - \frac{\alpha Q_{12}}{GF} \right) \Big|_{nut1} \right] &= 0 \\ \delta\lambda_2 \left[\left(\frac{dy_{12}}{dx} - \frac{\alpha Q_{12}}{GF} \right) \Big|_{nut2} - \left(\frac{dy_{13}}{dx} - \frac{\alpha Q_{13}}{GF} \right) \Big|_{nut1} \right] &= 0 \\ \delta\lambda_3 \left[\left(\frac{dy_{13}}{dx} - \frac{\alpha Q_{13}}{GF} \right) \Big|_{nut2} - \left(\frac{dy_{14}}{dx} - \frac{\alpha Q_{14}}{GF} \right) \Big|_{nut1} \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Gọi k_1 là góc xoay tại nút 2 của phần tử trước, k_2 là góc xoay tại nút 1 của phần tử sau thì ta có các hệ số trong ma trận độ cứng K :

$$k(n+i, k_1) = \frac{2}{\Delta x}; \quad k(n+i, k_2) = -\frac{2}{\Delta x} \quad (i=1 \div k) \quad (d)$$

$$k(k_1, n+i) = \frac{2}{\Delta x}; \quad k(k_2, n+i) = -\frac{2}{\Delta x} \quad (i=1 \div k) \quad (e)$$

Nếu có hai phần tử thì có một điều kiện về góc xoay, có n_{pt} phần tử thì có $(2n_{pt} - 1)$ điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử.

Điều kiện biên được viết như sau:

- Tại đầu trái dầm có mômen bằng không:

$$\delta\lambda_4 \left(\left[-\frac{d^2 y_{11}}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_{11}}{dx} \right] \Big|_{nut1} \right) = 0 \quad (f)$$

- Tại đầu phải dầm có mômen bằng không:

$$\delta\lambda_5 \left(\left[-\frac{d^2 y_{14}}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_{14}}{dx} \right] \Big|_{nut2} \right) = 0 \quad (g)$$

Trong đó $\lambda_k(k=1\div 5)$ cũng là ẩn số của bài toán (có k ẩn số λ), do đó tổng số ẩn số của bài toán lúc đó là $(n+k)$, do đó ma trận độ cứng của phần tử lúc này cũng phải thêm k dòng và k cột như vậy kích thước của ma trận độ cứng là $K(n+k, n+k)$. Chẳng hạn trong ví dụ này, ta có $n=19, k=5$ và tổng số ẩn của bài toán là $n+k=19+5=24$ ẩn. Trong trường hợp này ta xác định được kích thước của ma trận độ cứng tổng thể là: $K[24 \times 24]$.

Như vậy cuối cùng ta sẽ thiết lập được hệ phương trình:

$$[K]\{\Delta\} = \{F\} \quad (h)$$

Hệ phương trình (h) là hệ phương trình cơ bản của phương pháp phần tử hữu hạn

$$\text{trong đó: } \{F\} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \{\Delta\} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix}$$

} so – hang = n
} so – hang = k
là ẩn số của bài toán

Trong ví dụ 3.2.1 khi chia thành ra thành 4 phần tử, ta có:

- Ma trận độ cứng phần tử $[K_e(6 \times 6)]$, như sau: $h=1/1000$

$$[K]_e = \begin{bmatrix} 768.0000 & -768.0000 & 96.0000 & 96.0000 & 0 & 0 \\ -768.0000 & 768.0000 & -96.0000 & -96.0000 & 0 & 0 \\ 96.0000 & -96.0000 & 16.0000 & 8.0000 & -0.0000 & 0.0000 \\ 96.0000 & -96.0000 & 8.0000 & 16.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0 & 0 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & 0 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

- Ma trận độ cứng toàn dầm $[K]$:

Ghép nối các ma trận độ cứng phần tử $[K_e]$ vào hệ tọa độ chung, ta được ma trận độ cứng tổng thể của toàn kết cấu $[K(24 \times 24)]$, ở đây không trình bày vì kích thước ma trận quá lớn.

- **Véc tơ lực nút**{F}: Trong ví dụ này là véc tơ 1 cột 24 dòng, như sau:

$$\{F\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Giải phương trình (h) ta nhận được:

$$\{\Delta\} = [K]^{-1}\{F\}$$

Theo ngôn ngữ lập trình Matlab ta có thể viết:

$$\{\Delta\} = [K] \setminus \{F\}$$

Kết quả chuyển vị, góc xoay tại các nút:

$$\{W\} = \begin{Bmatrix} W_{12} \\ W_{13} \\ W_{14} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0143 \\ 0.0208 \\ 0.0143 \end{Bmatrix} xq l^4$$

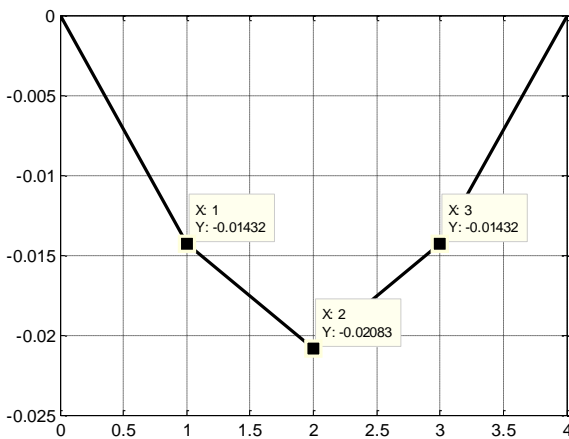
$$\{\varphi\} = \begin{Bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{12} \\ \varphi_{13} \\ \varphi_{14} \\ \varphi_{15} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0625 \\ 0.0469 \\ 0.0000 \\ -0.0469 \\ -0.0625 \end{Bmatrix} x ql^3$$

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_{11} \\ Q_{12} \\ Q_{13} \\ Q_{14} \\ Q_{15} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5000 \\ 0.5000 \\ -0.5000 \\ -0.5000 \\ -0.5000 \end{Bmatrix} x ql$$

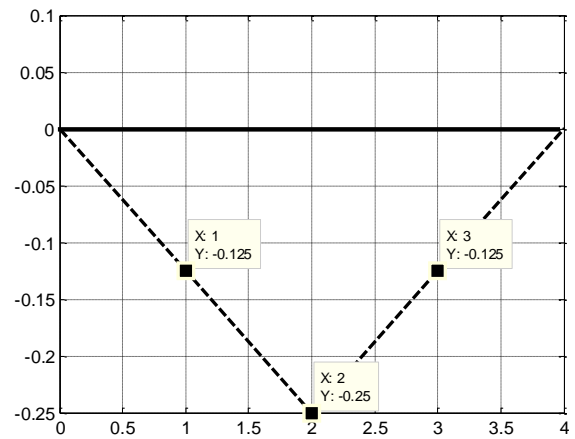
Mômen uốn của dầm:

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{12} \\ M_{13} \\ M_{14} \\ M_{15} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0000 \\ 0.1250 \\ 0.2500 \\ 0.1250 \\ 0.0000 \end{Bmatrix} x Pl$$

Dưới đây lần là đường độ võng và biểu đồ moomen uốn của dầm



Hình 3.10a. Đường độ võng



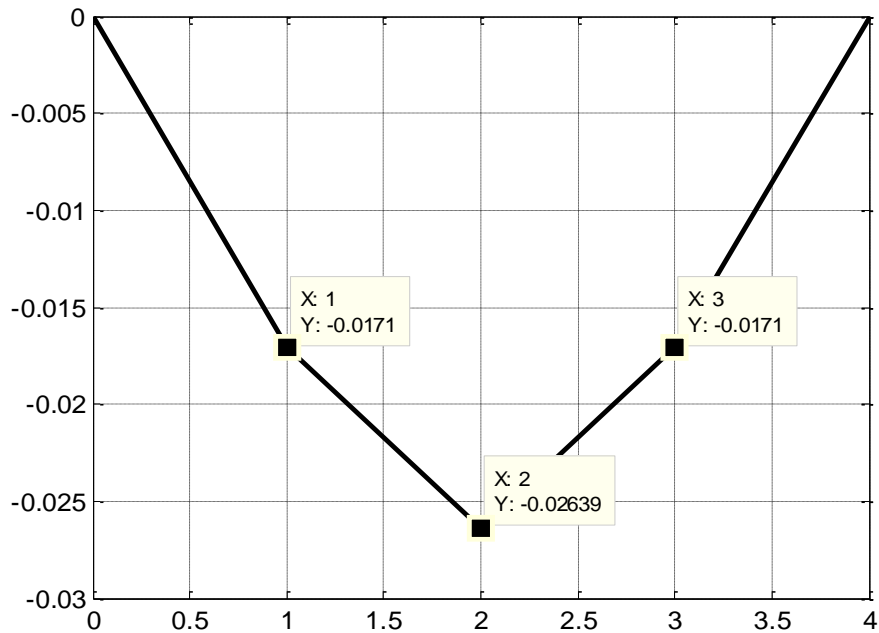
Hình 3.10b. Biểu đồ mômen

Nhận xét kết quả trên:

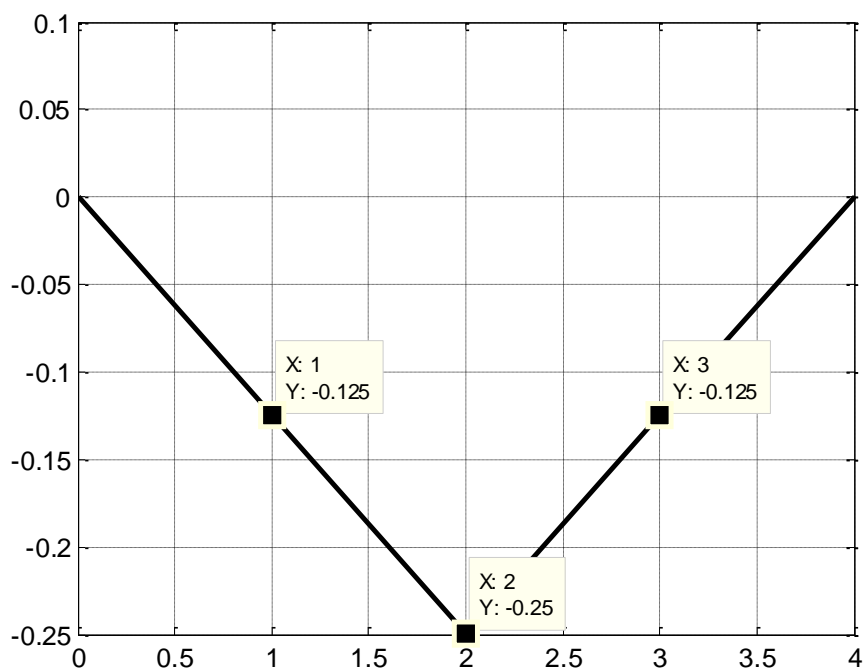
Khi $h=l/1000$ (không kể đến ảnh hưởng của biến dạng trượt) chia dầm thành 4 phần tử ta nhận được kết quả mômen hoàn toàn trùng khớp và lực cắt gần trùng với kết quả theo lời giải giải tích.

Khi $h=l/3$ (kể đến ảnh hưởng của biến dạng trượt) chia cột và dầm thành 4 phần tử ta nhận được kết quả như sau, so sánh với kết quả theo lời giải giải tích ta nhận được sai số theo bảng sau:

Dưới đây lần là đường độ võng và biểu đồ mômen uốn của cột và dầm khi $h=l/3$



Hình 3.11a. Đường độ võng



Hình 3.11b. Biểu đồ mômen

BẢNG SO SÁNH CHUYỂN VỊ TẠI CÁC TIẾT DIỆN DẦM

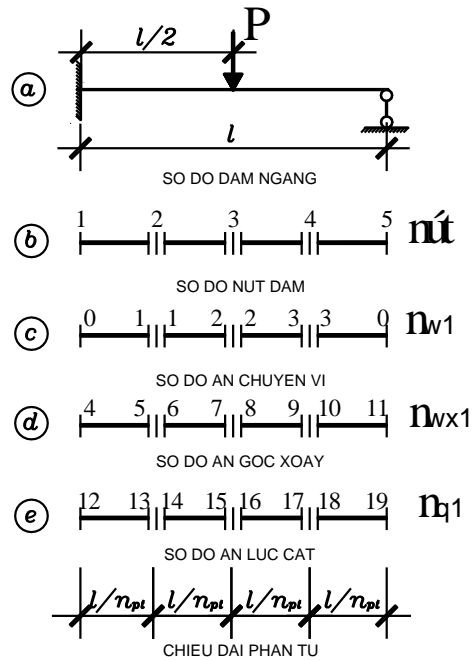
Các tiết diện của cột 1 và dầm 2	$h=l/1000$ Không xét biến dạng trượt	$h=l/3$ Có xét biến dạng trượt	Chênh lệch % giữa không và có xét biến dạng trượt ngang
1/4 dầm	0,0143	0,0171	19,580
Giữa dầm	0,0208	0,0263	26,442
3/4 dầm	0,0143	0,0171	19,580

Đối với bài toán tĩnh định nội lực trong hai trường hợp có xét và không xét biến dạng trượt là như nhau, hay nói cách khác việc xét biến dạng trượt không làm thay đổi nội lực trong dầm tĩnh định. Nhưng độ võng thay đổi tương đối lớn, lớn nhất tại giữa dầm độ chênh lệch giữa hai trường hợp có và không xét biến dạng trượt là trên 26%.

Ví dụ 3.2.2. Dầm đầu ngàm - đầu khớp, hình 3.12.

Xác định nội lực và chuyển vị của dầm chịu lực như hình 3.12, độ cứng uốn $EJ = \text{const}$.

Rời rạc hóa kết cấu dầm ra thành n_{pt} phần tử. Các nút của phần tử phải trùng với vị trí đặt lực tập trung, hay vị trí thay đổi tiết diện, chiều dài các phần tử có thể khác nhau.



Hình 3.12. Dầm đầu ngàm - đầu khớp

Mỗi phần tử có 6 ẩn $w_1, w_2, \theta_1, \theta_2, q_1, q_2$ (lần lượt là, hai ẩn chuyển vị, hai ẩn góc xoay và hai ẩn lực cắt tại hai đầu mỗi phần tử) vậy nếu n_{pt} phần tử rời rạc thì tổng cộng có $6 \times n_{pt}$ ẩn.

Nhưng vì cần đảm bảo liên tục giữa các chuyển vị là chuyển vị của nút cuối phần tử thứ e bằng chuyển vị của nút đầu phần tử thứ $(e + 1)$ nên số ẩn của thanh sẽ nhỏ hơn $6 \times n_{pt}$. Khi giải ta chỉ cần đảm bảo điều kiện liên tục của chuyển vị còn điều kiện liên tục về góc xoay được xét bằng cách đưa vào các điều kiện ràng buộc. Ví dụ dầm trong (ví dụ 3.2.2, hình 3.12a) ta chia thành 4 phần tử (hình 3.12b).

Khi chia dầm thành 4 phần tử thì số nút dầm sẽ là 5, thứ tự từ trái sang phải là [1, 2, 3, 4, 5] (hình 3.12b), số ẩn chuyển vị $n_{w1} = 3$, thứ tự từ trái sang phải là [1, 2, 3] (hình 3.12c), ở đây ẩn chuyển vị tại hai đầu dầm bằng không, ẩn góc xoay $n_{wx1} = 8$, thứ tự từ trái sang phải là [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11] (hình 3.12d), ẩn lực cắt $n_{q1} = 8$, thứ tự từ trái sang phải là [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19] (hình 3.12e).

Như vậy, tổng cộng số ẩn là 19 ẩn $< 4 \times 6 = 24$ ẩn. Gọi ma trận n_{w1} là ma trận chuyển vị có kích thước $n_{w1}(n_{pt}, 2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ẩn số là chuyển vị tại hai đầu nút của các phần tử (hình 3.12c).

Các phần dầm:

$$\begin{aligned}
nw1(1,:) &= [0 \quad 1]; \\
nw1(2,:) &= [1 \quad 2]; \\
nw1(3,:) &= [2 \quad 3]; \\
nw1(4,:) &= [3 \quad 0]
\end{aligned}
\quad
nw1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Gọi ma trận $nwx1$ là ma trận chuyển vị góc xoay có kích thước $nwx1(n_{pt}, 2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ẩn số là góc xoay tại nút của các phần tử (hình 3.12d).

$$\begin{aligned}
nwx1(1,:) &= [4 \quad 5]; \\
nwx1(2,:) &= [6 \quad 7]; \\
nwx1(3,:) &= [8 \quad 9]; \\
nwx1(4,:) &= [10 \quad 11]
\end{aligned}
\quad
nwx1 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \\ 8 & 9 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$$

Gọi ma trận $nq1$ là ma trận lực cắt có kích thước $nq1(n_{pt}, 2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ẩn số là lực cắt tại hai đầu nút của các phần tử (hình 3.12e).

$$\begin{aligned}
nq1(1,:) &= [12 \quad 13]; \\
nq1(2,:) &= [14 \quad 15]; \\
nq1(3,:) &= [16 \quad 17]; \\
nq1(4,:) &= [18 \quad 19]
\end{aligned}
\quad
nq1 = \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 14 & 15 \\ 16 & 17 \\ 18 & 19 \end{bmatrix}$$

Sau khi biết ẩn số (chính) thực của dầm ta có thể xây dựng độ cứng tổng thể của dầm (có rất nhiều cách ghép nối phần tử khác nhau, tùy vào trình độ lập trình của mỗi người nên tác giả không trình bày chi tiết cách ghép nối các phần tử lại để được ma trận độ cứng của toàn dầm và có thể xem trong code mô đun chương trình của tác giả).

Nếu bài toán có $nw1$ ẩn số chuyển vị thẳng của dầm và $nwx1$ ẩn số góc xoay của dầm, $nq1$, ẩn số lực cắt của dầm thì ma trận độ cứng tổng thể của dầm là K có kích thước (nxn) , $K(n,n)$ với $n=(nw1+nwx1+nq1)$. Như ở ví dụ 3.2.2, $n=19$. Bây giờ xét điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử.

Điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử được viết như sau:

$$\left(\frac{dy_i}{dx} - \frac{\alpha Q_i}{GF} \right) \Big|_{nút2} - \left(\frac{dy_{i+1}}{dx} - \frac{\alpha Q_{i+1}}{GF} \right) \Big|_{nút1} = 0 \quad (a)$$

Đối với dầm, ta có:

$$\left. \begin{aligned} \delta\lambda_1 \left[\left(\frac{dy_{11}}{dx} - \frac{\alpha Q_{11}}{GF} \right) \Big|_{nút2} - \left(\frac{dy_{12}}{dx} - \frac{\alpha Q_{12}}{GF} \right) \Big|_{nút1} \right] &= 0 \\ \delta\lambda_2 \left[\left(\frac{dy_{12}}{dx} - \frac{\alpha Q_{12}}{GF} \right) \Big|_{nút2} - \left(\frac{dy_{13}}{dx} - \frac{\alpha Q_{13}}{GF} \right) \Big|_{nút1} \right] &= 0 \\ \delta\lambda_3 \left[\left(\frac{dy_{13}}{dx} - \frac{\alpha Q_{13}}{GF} \right) \Big|_{nút2} - \left(\frac{dy_{14}}{dx} - \frac{\alpha Q_{14}}{GF} \right) \Big|_{nút1} \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Gọi k_1 là góc xoay tại nút 2 của phần tử trước, k_2 là góc xoay tại nút 1 của phần tử sau thì ta có các hệ số trong ma trận độ cứng K:

$$k(n+i, k_1) = \frac{2}{\Delta x}; \quad k(n+i, k_2) = -\frac{2}{\Delta x} \quad (i=1 \div k) \quad (d)$$

$$k(k_1, n+i) = \frac{2}{\Delta x}; \quad k(k_2, n+i) = -\frac{2}{\Delta x} \quad (i=1 \div k) \quad (e)$$

Nếu có hai phần tử thì có một điều kiện về góc xoay, có n_{pt} phần tử thì có $(2n_{pt} - 1)$ điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử.

Điều kiện biên được viết như sau:

- Tại đầu trái dầm là ngàm nên có góc xoay bằng không:

$$\delta\lambda_4 \left(\left[\frac{dy_{11}}{dx} - \frac{\alpha Q_{11}}{GF} \right] \Big|_{nút1} \right) = 0 \quad (f)$$

- Tại đầu phải dầm có mômen bằng không:

$$\delta\lambda_5 \left(\left[-\frac{d^2 y_{14}}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_{14}}{dx} \right] \Big|_{nút2} \right) = 0 \quad (g)$$

Trong đó $\lambda_k (k=1 \div 5)$ cũng là ẩn số của bài toán (có k ẩn số λ), do đó tổng số ẩn số của bài toán lúc đó là $(n+k)$, do đó ma trận độ cứng của phần tử lúc này cũng phải thêm k dòng và k cột như vậy kích thước của ma trận độ cứng là $K(n+k, n+k)$. Chẳng hạn trong ví dụ này, ta có $n=19, k=5$ và tổng số ẩn của bài toán là $n+k=19+5=24$

ẩn. Trong trường hợp này ta xác định được kích thước của ma trận độ cứng tổng thể là: $K[24 \times 24]$.

Như vậy cuối cùng ta sẽ thiết lập được hệ phương trình:

$$[K]\{\Delta\} = \{F\} \quad (h)$$

Hệ phương trình (h) là hệ phương trình cơ bản của phương pháp phần tử hữu hạn

trong đó: $\{F\} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$; $\{\Delta\} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix}$ là ẩn số của bài toán

} so – hang = n
} so – hang = k

Trong ví dụ 3.2.1 khi chia thành ra thành 4 phần tử, ta có:

- Ma trận độ cứng phần tử $[K_e(6 \times 6)]$, như sau: $h=1/1000$

$$[K]_e = \begin{bmatrix} 768.0000 & -768.0000 & 96.0000 & 96.0000 & 0 & 0 \\ -768.0000 & 768.0000 & -96.0000 & -96.0000 & 0 & 0 \\ 96.0000 & -96.0000 & 16.0000 & 8.0000 & -0.0000 & 0.0000 \\ 96.0000 & -96.0000 & 8.0000 & 16.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0 & 0 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & 0 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

- Ma trận độ cứng toàn dầm $[K]$:

Ghép nối các ma trận độ cứng phần tử $[K_e]$ vào hệ tọa độ chung, ta được ma trận độ cứng tổng thể của toàn kết cấu $[K(24 \times 24)]$, ở đây không trình bày vì kích thước ma trận quá lớn.

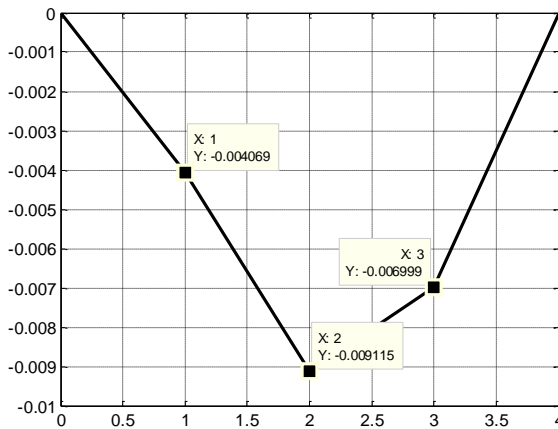
- Véc tơ lực nút $\{F\}$: Trong ví dụ này là véc tơ 1 cột 24 dòng, như sau:

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_{11} \\ Q_{12} \\ Q_{13}^{\text{trái}} \\ Q_{13}^{\text{phải}} \\ Q_{14} \\ Q_{15} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.6875 \\ 0.6875 \\ 0.6875 \\ -0.3125 \\ -0.3125 \\ -0.3125 \end{Bmatrix} \times ql$$

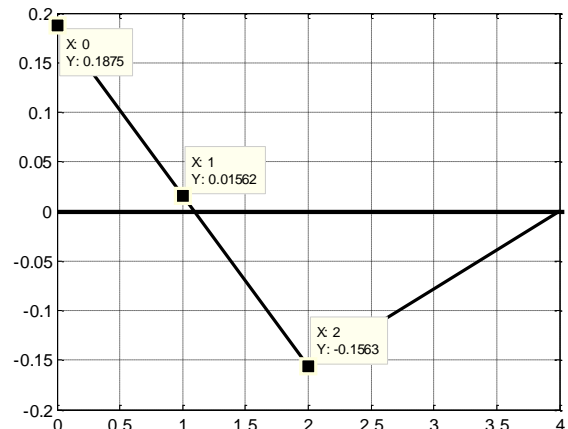
Mômen uốn của dầm:

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{12} \\ M_{13} \\ M_{14} \\ M_{15} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0156 \\ 0.1563 \\ 0.0781 \\ 0.1875 \\ 0.0000 \end{Bmatrix} \times Pl$$

Dưới đây lần là đường độ võng và biểu đồ moomen uốn của dầm



Hình 3.13a. Đường độ võng



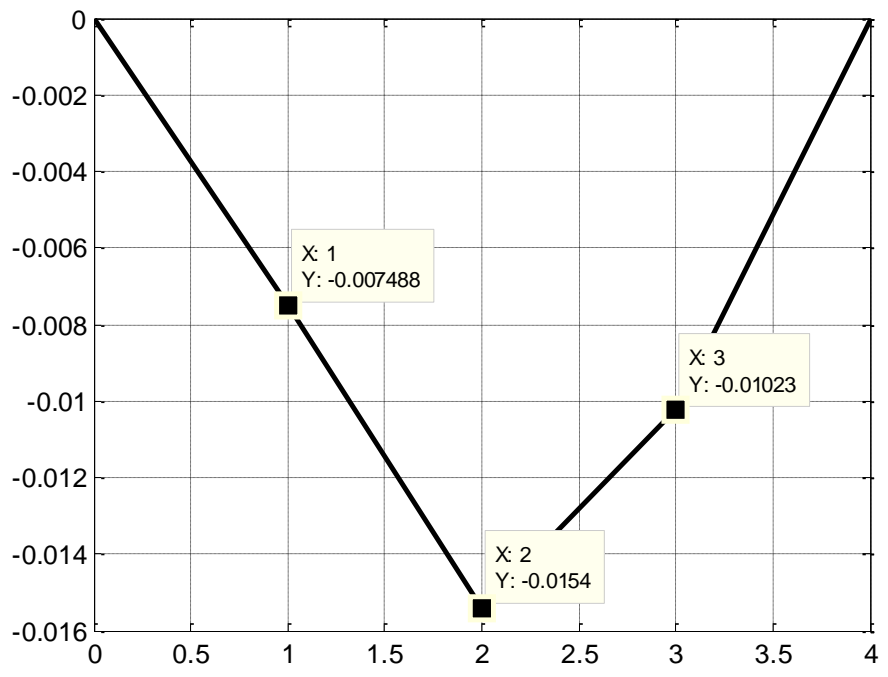
Hình 3.13b. Biểu đồ mômen

Nhận xét kết quả trên:

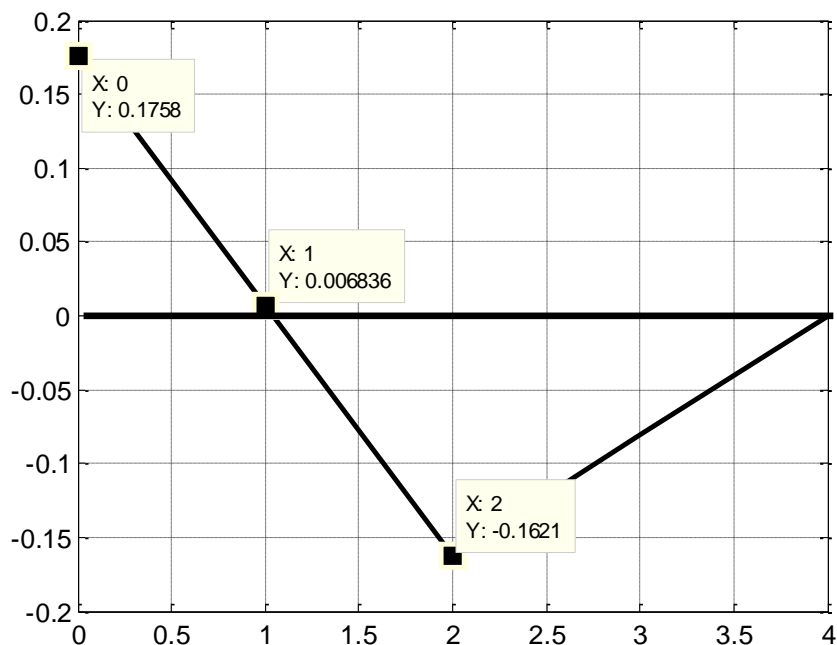
Khi $h=1/1000$ (không kể đến ảnh hưởng của biến dạng trượt) chia dầm thành 4 phần tử ta nhận được kết quả mômen và lực cắt gần trùng với kết quả theo lời giải giải tích.

Khi $h=1/3$ (kể đến ảnh hưởng của biến dạng trượt) chia cột và dầm thành 4 phần tử ta nhận được kết quả như sau, so sánh với kết quả theo lời giải giải tích ta nhận được sai số theo bảng dưới đây:

Dưới đây lần là đường độ võng và biểu đồ mômen uốn của cột và dầm khi $h=1/3$



Hình 3.14a. Đường độ võng



Hình 3.14b. Biểu đồ mômen

BẢNG SO SÁNH MÔMEN UỐN TẠI CÁC TIẾT DIỆN DẦM

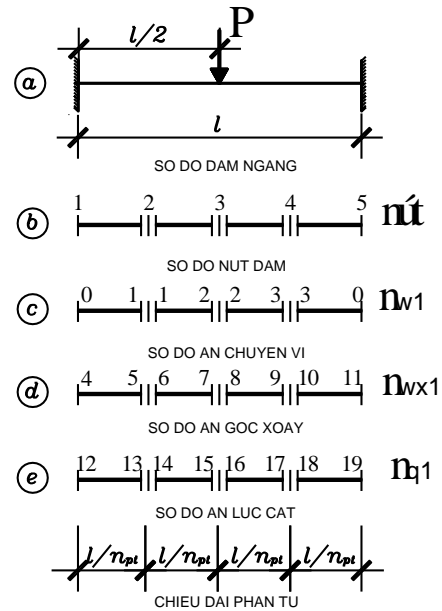
Các tiết diện của cột 1 và dầm 2	$h=l/1000$ Không xét biến dạng trượt	$h=l/3$ Có xét biến dạng trượt	Chênh lệch % giữa không và có xét biến dạng trượt ngang
Đầu dầm	-0,1875	-0,1758	6,240
1/4 dầm	-0,0156	-0,0068	56,410
Giữa dầm	0,1563	0,1621	3,710

Đối với bài toán siêu tĩnh hai đầu liên kết không đối xứng nội lực trong hai trường hợp có xét và không xét biến dạng trượt ngang thay đổi rất lớn, chẳng hạn khi xét biến dạng trượt ngang ($h=l/3$) nội lực tại 1/4 nhịp dầm tăng hơn 1,5 lần (ở đây là 56%) so với khi không xét biến dạng trượt ngang ($h=l/1000$).

Ví dụ 3.2.3. Dầm hai đầu ngàm, hình 3.15.

Xác định nội lực và chuyển vị của dầm chịu lực như hình 3.15, độ cứng uốn $EJ = \text{const}$.

Rời rạc hóa kết cấu dầm ra thành n_{pt} phần tử. Các nút của phần tử phải trùng với vị trí đặt lực tập trung, hay vị trí thay đổi tiết diện, chiều dài các phần tử có thể khác nhau.



Hình 3.15. Dầm hai đầu ngàm

Mỗi phần tử có 6 ẩn $w_1, w_2, \theta_1, \theta_2, q_1, q_2$ (lần lượt là, hai ẩn chuyển vị, hai ẩn góc xoay và hai ẩn lực cắt tại hai đầu mỗi phần tử) vậy nếu n_{pt} phần tử rời rạc thì tổng cộng có $6n_{pt}$ ẩn.

Nhưng vì cần đảm bảo liên tục giữa các chuyển vị là chuyển vị của nút cuối phần tử thứ e bằng chuyển vị của nút đầu phần tử thứ $(e + 1)$ nên số ẩn của thanh sẽ nhỏ hơn $6n_{pt}$. Khi giải ta chỉ cần đảm bảo điều kiện liên tục của chuyển vị còn điều kiện liên tục về góc xoay được xét bằng cách đưa vào các điều kiện ràng buộc. Ví dụ dầm trong (ví dụ 3.2.3, hình 3.15a) ta chia thành 4 phần tử (hình 3.15b).

Khi chia dầm thành 4 phần tử thì số nút dầm sẽ là 5, thứ tự từ trái sang phải là [1, 2, 3, 4, 5] (hình 3.15b), số ẩn chuyển vị $n_{w1} = 3$, thứ tự từ trái sang phải là [1, 2, 3] (hình 3.15c), ở đây ẩn chuyển vị tại hai đầu dầm bằng không, ẩn góc xoay $n_{wx1} = 8$, thứ tự từ trái sang phải là [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11] (hình 3.15d), ẩn lực cắt $n_{q1} = 8$, thứ tự từ trái sang phải là [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19] (hình 3.15e).

Như vậy, tổng cộng số ẩn là 19 ẩn $< 4 \times 6 = 24$ ẩn. Gọi ma trận n_{w1} là ma trận chuyển vị có kích thước $n_{w1}(n_{pt}, 2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ẩn số là chuyển vị tại hai đầu nút của các phần tử (hình 3.15c).

Các phần dầm:

$$\begin{aligned}
nw1(1,:) &= [0 \quad 1]; \\
nw1(2,:) &= [1 \quad 2]; \\
nw1(3,:) &= [2 \quad 3]; \\
nw1(4,:) &= [3 \quad 0]
\end{aligned}
\quad
nw1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Gọi ma trận $nwx1$ là ma trận chuyển vị góc xoay có kích thước $nwx1(n_{pt}, 2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ẩn số là góc xoay tại nút của các phần tử (hình 3.15d).

$$\begin{aligned}
nwx1(1,:) &= [4 \quad 5]; \\
nwx1(2,:) &= [6 \quad 7]; \\
nwx1(3,:) &= [8 \quad 9]; \\
nwx1(4,:) &= [10 \quad 11]
\end{aligned}
\quad
nwx1 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \\ 8 & 9 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$$

Gọi ma trận $nq1$ là ma trận lực cắt có kích thước $nq1(n_{pt}, 2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ẩn số là lực cắt tại hai đầu nút của các phần tử (hình 3.15e).

$$\begin{aligned}
nq1(1,:) &= [12 \quad 13]; \\
nq1(2,:) &= [14 \quad 15]; \\
nq1(3,:) &= [16 \quad 17]; \\
nq1(4,:) &= [18 \quad 19]
\end{aligned}
\quad
nq1 = \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 14 & 15 \\ 16 & 17 \\ 18 & 19 \end{bmatrix}$$

Sau khi biết ẩn số (chính) thực của dầm t ta có thể xây dựng độ cứng tổng thể của khung (có rất nhiều cách ghép nối phần tử khác nhau, tùy vào trình độ lập trình của mỗi người nên tác giả không trình bày chi tiết cách ghép nối các phần tử lại để được ma trận độ cứng của toàn dầm và có thể xem trong code mô đun chương trình của tác giả).

Nếu bài toán có $nw1$ ẩn số chuyển vị thẳng của dầm và $nwx1$ ẩn số góc xoay của dầm, $nq1$, ẩn số lực cắt của dầm thì ma trận độ cứng tổng thể của dầm là K có kích thước $(n \times n)$, $K(n, n)$ với $n = (nw1 + nwx1 + nq1)$. Như ở ví dụ 3.2.3, $n = 19$. Bây giờ xét điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử.

Điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử được viết như sau:

$$\left(\frac{dy_i}{dx} - \frac{\alpha Q_i}{GF} \right) \Big|_{nút2} - \left(\frac{dy_{i+1}}{dx} - \frac{\alpha Q_{i+1}}{GF} \right) \Big|_{nút1} = 0 \quad (a)$$

Đối với dầm, ta có:

$$\left. \begin{aligned} \delta\lambda_1 \left[\left(\frac{dy_{11}}{dx} - \frac{\alpha Q_{11}}{GF} \right) \Big|_{nút2} - \left(\frac{dy_{12}}{dx} - \frac{\alpha Q_{12}}{GF} \right) \Big|_{nút1} \right] &= 0 \\ \delta\lambda_2 \left[\left(\frac{dy_{12}}{dx} - \frac{\alpha Q_{12}}{GF} \right) \Big|_{nút2} - \left(\frac{dy_{13}}{dx} - \frac{\alpha Q_{13}}{GF} \right) \Big|_{nút1} \right] &= 0 \\ \delta\lambda_3 \left[\left(\frac{dy_{13}}{dx} - \frac{\alpha Q_{13}}{GF} \right) \Big|_{nút2} - \left(\frac{dy_{14}}{dx} - \frac{\alpha Q_{14}}{GF} \right) \Big|_{nút1} \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Gọi k_1 là góc xoay tại nút 2 của phần tử trước, k_2 là góc xoay tại nút 1 của phần tử sau thì ta có các hệ số trong ma trận độ cứng K:

$$k(n+i, k_1) = \frac{2}{\Delta x}; \quad k(n+i, k_2) = -\frac{2}{\Delta x} \quad (i=1 \div k) \quad (d)$$

$$k(k_1, n+i) = \frac{2}{\Delta x}; \quad k(k_2, n+i) = -\frac{2}{\Delta x} \quad (i=1 \div k) \quad (e)$$

Nếu có hai phần tử thì có một điều kiện về góc xoay, có n_{pt} phần tử thì có $(2n_{pt} - 1)$ điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử.

Điều kiện biên được viết như sau:

- Tại đầu trái dầm là ngàm có góc xoay bằng không:

$$\delta\lambda_4 \left(\left[\frac{dy_{11}}{dx} - \frac{\alpha Q_{11}}{GF} \right] \Big|_{nút1} \right) = 0 \quad (f)$$

- Tại đầu phải dầm là ngàm có góc xoay bằng không:

$$\delta\lambda_5 \left(\left[\frac{dy_{14}}{dx} - \frac{\alpha Q_{14}}{GF} \right] \Big|_{nút2} \right) = 0 \quad (g)$$

Trong đó $\lambda_k (k=1 \div 5)$ cũng là ẩn số của bài toán (có k ẩn số λ), do đó tổng số ẩn số của bài toán lúc đó là $(n+k)$, do đó ma trận độ cứng của phần tử lúc này cũng phải thêm k dòng và k cột như vậy kích thước của ma trận độ cứng là $K(n+k, n+k)$. Chẳng hạn trong ví dụ này, ta có $n=19, k=5$ và tổng số ẩn của bài toán là $n+k=19+5=24$

ẩn. Trong trường hợp này ta xác định được kích thước của ma trận độ cứng tổng thể là: $K[24 \times 24]$.

Như vậy cuối cùng ta sẽ thiết lập được hệ phương trình:

$$[K]\{\Delta\} = \{F\} \quad (h)$$

Hệ phương trình (h) là hệ phương trình cơ bản của phương pháp phần tử hữu hạn

trong đó: $\{F\} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$; $\{\Delta\} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix}$ là ẩn số của bài toán

} so – hang = n
} so – hang = k

Trong ví dụ 3.2.3 khi chia thành ra thành 4 phần tử, ta có:

- Ma trận độ cứng phần tử $[K_e(6 \times 6)]$, như sau: $h=1/1000$

$$[K]_e = \begin{bmatrix} 768.0000 & -768.0000 & 96.0000 & 96.0000 & 0 & 0 \\ -768.0000 & 768.0000 & -96.0000 & -96.0000 & 0 & 0 \\ 96.0000 & -96.0000 & 16.0000 & 8.0000 & -0.0000 & 0.0000 \\ 96.0000 & -96.0000 & 8.0000 & 16.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0 & 0 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & 0 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

- Ma trận độ cứng toàn dầm $[K]$:

Ghép nối các ma trận độ cứng phần tử $[K_e]$ vào hệ tọa độ chung, ta được ma trận độ cứng tổng thể của toàn kết cấu $[K(24 \times 24)]$, ở đây không trình bày vì kích thước ma trận quá lớn.

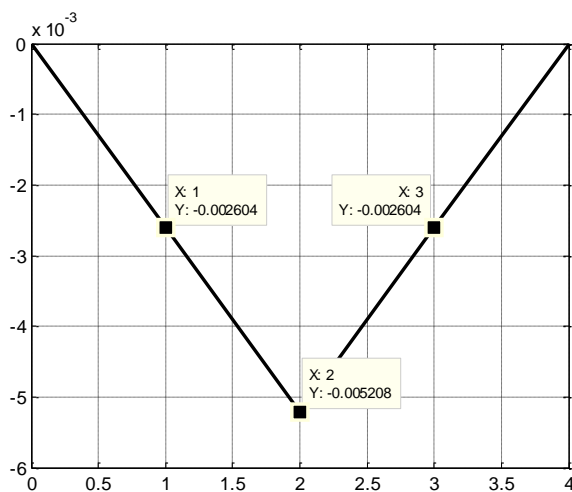
- Véc tơ lực nút $\{F\}$: Trong ví dụ này là véc tơ 1 cột 24 dòng, như sau:

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_{11} \\ Q_{12} \\ Q_{13}^{\text{trai}} \\ Q_{13}^{\text{phai}} \\ Q_{14} \\ Q_{15} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5000 \\ 0.5000 \\ 0.5000 \\ -0.5000 \\ -0.5000 \\ -0.5000 \end{Bmatrix} \times ql$$

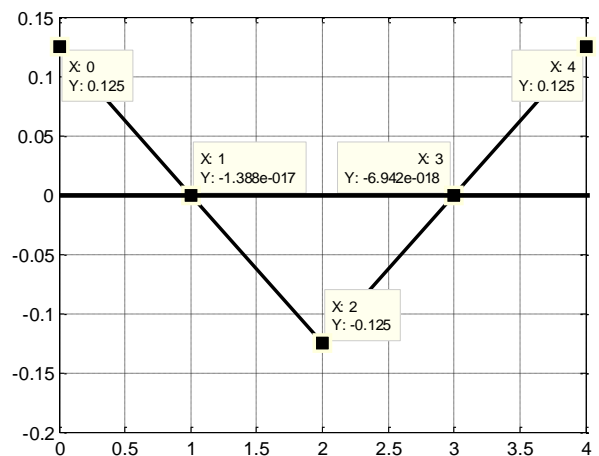
Mômen uốn của dầm:

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{12} \\ M_{13} \\ M_{14} \\ M_{15} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.1250 \\ 0.0000 \\ 0.1250 \\ 0.0000 \\ -0.1250 \end{Bmatrix} \times Pl$$

Dưới đây lần là đường độ võng và biểu đồ mômen uốn của dầm



Hình 3.16a. Đường độ võng



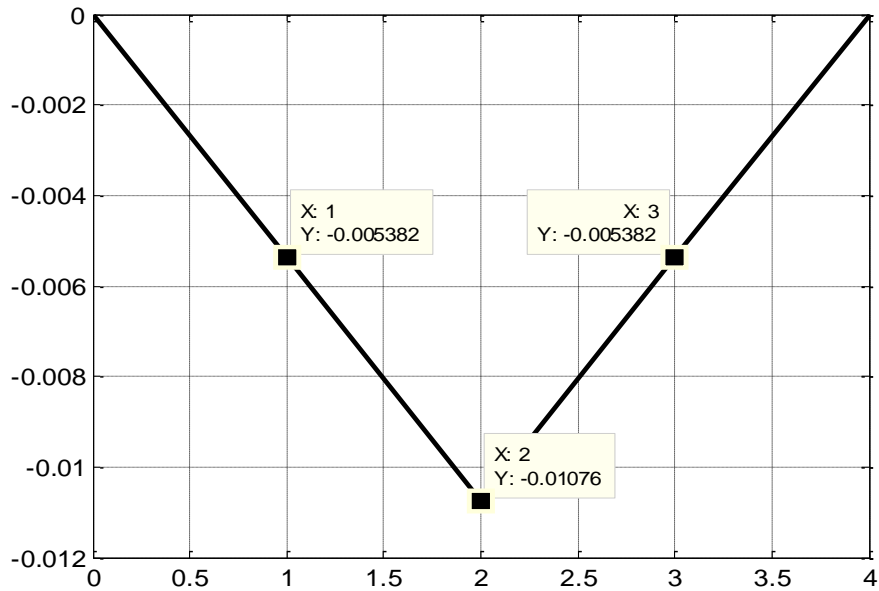
Hình 3.16b. Biểu đồ mômen

Nhận xét kết quả trên:

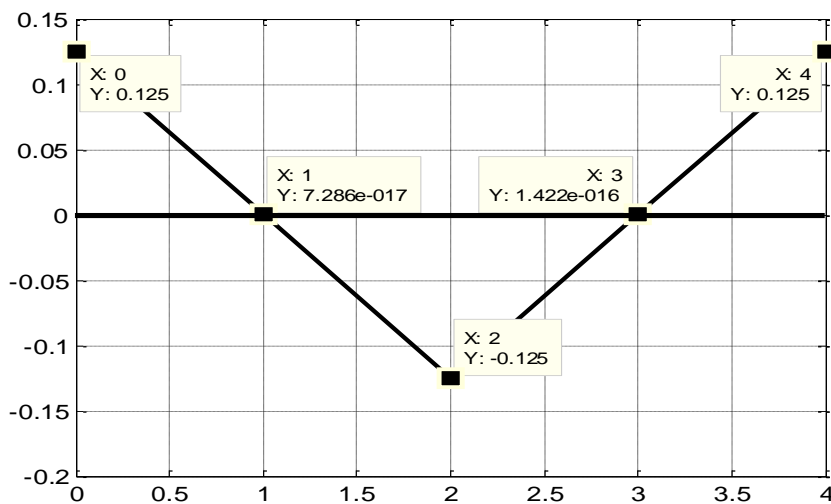
Khi $h=1/1000$ (không kể đến ảnh hưởng của biến dạng trượt) chia dầm thành 4 phần tử ta nhận được kết quả mômen hoàn toàn trùng khớp và lực cắt gần trùng với kết quả theo lời giải giải tích.

Khi $h=1/3$ (kể đến ảnh hưởng của biến dạng trượt) chia cột và dầm thành 4 phần tử ta nhận được kết quả như sau, so sánh với kết quả theo lời giải giải tích ta nhận được sai số theo bảng sau:

Dưới đây lần là đường độ võng và biểu đồ mômen uốn dầm khi $h=1/3$



Hình 3.17a. Đường độ võng



Hình 3.17b. Biểu đồ mômen

Nhưng vì cần đảm bảo liên tục giữa các chuyển vị là chuyển vị của nút cuối phần tử thứ e bằng chuyển vị của nút đầu phần tử thứ $(e + 1)$ nên số ần của thanh sẽ nhỏ hơn $6 \times n_{pt}$. Khi giải ta chỉ cần đảm bảo điều kiện liên tục của chuyển vị còn điều kiện liên tục về góc xoay được xét bằng cách đưa vào các điều kiện ràng buộc. Ví dụ dầm trong (ví dụ 3.2.4, hình 3.18a) ta chia thành 4 phần tử (hình 3.18b).

Khi chia dầm thành 4 phần tử thì số nút dầm sẽ là 5, thứ tự từ trái sang phải là [1, 2, 3, 4, 5] (hình 3.18b), số ần chuyển vị $nw1=3$, thứ tự từ trái sang phải là [1, 2, 3, 4] (hình 3.18c), ở đây ần chuyển vị tại đầu trái dầm bằng không, ần góc xoay $nwx1=8$, thứ tự từ trái sang phải là [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12] (hình 3.18d), ần lực cắt $nq1=8$, thứ tự từ trái sang phải là [13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20] (hình 3.18e).

Như vậy, tổng cộng số ần là $20 \text{ ần} < 4 \times 6 = 24 \text{ ần}$. Gọi ma trận $nw1$ là ma trận chuyển vị có kích thước $nw1(n_{pt}, 2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ần số là chuyển vị tại hai đầu nút của các phần tử (hình 3.18c).

Các phần dầm:

$$nw1(1,:) = [0 \quad 1];$$

$$nw1(2,:) = [1 \quad 2];$$

$$nw1(3,:) = [2 \quad 3];$$

$$nw1(4,:) = [3 \quad 4]$$

$$nw1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Gọi ma trận $nwx1$ là ma trận chuyển vị góc xoay có kích thước $nwx1(n_{pt}, 2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ần số là góc xoay tại nút của các phần tử (hình 3.18d).

$$nwx1(1,:) = [5 \quad 6];$$

$$nwx1(2,:) = [7 \quad 8];$$

$$nwx1(3,:) = [9 \quad 10];$$

$$nwx1(4,:) = [11 \quad 12]$$

$$nwx1 = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$$

Gọi ma trận $nq1$ là ma trận lực cắt có kích thước $nq1(n_{pt}, 2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ần số là lực cắt tại hai đầu nút của các phần tử (hình 3.18e).

$$\begin{aligned}
nq1(1,:) &= [13 \quad 14]; \\
nq1(2,:) &= [15 \quad 16]; \\
nq1(3,:) &= [17 \quad 18]; \\
nq1(4,:) &= [19 \quad 20]
\end{aligned}
\qquad
nq1 = \begin{bmatrix} 13 & 14 \\ 15 & 16 \\ 17 & 18 \\ 19 & 20 \end{bmatrix}$$

Sau khi biết ẩn số (chính) thực của dầm ta có thể xây dựng độ cứng tổng thể của dầm (có rất nhiều cách ghép nối phần tử khác nhau, tùy vào trình độ lập trình của mỗi người nên tác giả không trình bày chi tiết cách ghép nối các phần tử lại để được ma trận độ cứng của toàn dầm và có thể xem trong code mô đun chương trình của tác giả).

Nếu bài toán có $nw1$ ẩn số chuyển vị thẳng của dầm và $nwx1$ ẩn số góc xoay của dầm, $nq1$, ẩn số lực cắt của dầm thì ma trận độ cứng tổng thể của dầm là K có kích thước (nxn) , $K(n,n)$ với $n=(nw1+nwx1+nq1)$. Như ở ví dụ 3.2.4, $n=20$. Bây giờ xét điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử.

Điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử được viết như sau:

$$\left(\frac{dy_i}{dx} - \frac{\alpha Q_i}{GF} \right) \Big|_{nut2} - \left(\frac{dy_{i+1}}{dx} - \frac{\alpha Q_{i+1}}{GF} \right) \Big|_{nut1} = 0 \tag{a}$$

Đối với dầm, ta có:

$$\left. \begin{aligned}
\delta \lambda_1 \left[\left(\frac{dy_{11}}{dx} - \frac{\alpha Q_{11}}{GF} \right) \Big|_{nut2} - \left(\frac{dy_{12}}{dx} - \frac{\alpha Q_{12}}{GF} \right) \Big|_{nut1} \right] &= 0 \\
\delta \lambda_2 \left[\left(\frac{dy_{12}}{dx} - \frac{\alpha Q_{12}}{GF} \right) \Big|_{nut2} - \left(\frac{dy_{13}}{dx} - \frac{\alpha Q_{13}}{GF} \right) \Big|_{nut1} \right] &= 0 \\
\delta \lambda_3 \left[\left(\frac{dy_{13}}{dx} - \frac{\alpha Q_{13}}{GF} \right) \Big|_{nut2} - \left(\frac{dy_{14}}{dx} - \frac{\alpha Q_{14}}{GF} \right) \Big|_{nut1} \right] &= 0
\end{aligned} \right\} \tag{b}$$

Gọi k_1 là góc xoay tại nút 2 của phần tử trước, k_2 là góc xoay tại nút 1 của phần tử sau thì ta có các hệ số trong ma trận độ cứng K :

$$k(n+i, k_1) = \frac{2}{\Delta x}; \quad k(n+i, k_2) = -\frac{2}{\Delta x} \quad (i=1 \div k) \tag{d}$$

$$k(k_1, n+i) = \frac{2}{\Delta x}; \quad k(k_2, n+i) = -\frac{2}{\Delta x} \quad (i=1 \div k) \tag{e}$$

Nếu có hai phần tử thì có một điều kiện về góc xoay, có n_{pt} phần tử thì có $(2n_{pt} - 1)$ điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử.

Điều kiện biên được viết như sau:

- Tại đầu trái dầm là ngàm nên có góc xoay bằng không:

$$\delta\lambda_4 \left(\left[\begin{array}{c} -\frac{dy_{11}}{dx} + \frac{\alpha Q_{11}}{GF} \end{array} \right]_{nut1} \right) = 0 \quad (f)$$

- Tại đầu phải dầm là đầu tự do nên có mômen và lực cắt bằng không:

$$\delta\lambda_5 \left(\left[\begin{array}{c} -\frac{d^2 y_{14}}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_{14}}{dx} \end{array} \right]_{nut2} \right) = 0 \quad (g)$$

$$\delta\lambda_6 \left(\left[\begin{array}{c} -\frac{d^3 y_{14}}{dx^3} + \frac{\alpha}{GF} \frac{d^2 Q_{14}}{dx^2} \end{array} \right]_{nut2} \right) = 0 \quad (h)$$

Trong đó $\lambda_k (k=1 \div 6)$ cũng là ẩn số của bài toán (có k ẩn số λ), do đó tổng số ẩn số của bài toán lúc đó là $(n+k)$, do đó ma trận độ cứng của phần tử lúc này cũng phải thêm k dòng và k cột như vậy kích thước của ma trận độ cứng là $K(n+k, n+k)$. Chẳng hạn trong ví dụ này, ta có $n=20$, $k=6$ và tổng số ẩn của bài toán là $n+k=20+6=26$ ẩn. Trong trường hợp này ta xác định được kích thước của ma trận độ cứng tổng thể là: $K[26 \times 26]$.

Như vậy cuối cùng ta sẽ thiết lập được hệ phương trình:

$$[K]\{\Delta\} = \{F\} \quad (h)$$

Hệ phương trình (h) là hệ phương trình cơ bản của phương pháp phần tử hữu hạn, hệ phương trình (h) gồm 26 phương trình, 26 ẩn.

trong đó: $\{F\} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$; $\{\Delta\} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix}$ là ẩn số của bài toán

Note: The image shows a matrix with two groups of rows. The first group has 'n' rows with values F1 to Fn. The second group has 'k' rows with values 0 to 0. The displacement vector Delta has 2n + k components: delta1, delta1, ..., delta_n, lambda1, lambda2, ..., lambda_k.

Trong ví dụ 3.2.1 khi chia thành ra thành 4 phần tử, ta có:

- **Ma trận độ cứng phần tử $[K_e(6 \times 6)]$, như sau: $h=l/1000$**

$$[K]_e = \begin{bmatrix} 768.0000 & -768.0000 & 96.0000 & 96.0000 & 0 & 0 \\ -768.0000 & 768.0000 & -96.0000 & -96.0000 & 0 & 0 \\ 96.0000 & -96.0000 & 16.0000 & 8.0000 & -0.0000 & 0.0000 \\ 96.0000 & -96.0000 & 8.0000 & 16.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0 & 0 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & 0 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

- **Ma trận độ cứng toàn dầm $[K]$:**

Ghép nối các ma trận độ cứng phần tử $[K_e]$ vào hệ tọa độ chung, ta được ma trận độ cứng tổng thể của toàn kết cấu $[K(26 \times 26)]$, ở đây không trình bày vì kích thước ma trận quá lớn.

- **Véc tơ lực nút $\{F\}$:** Trong ví dụ này là véc tơ 1 cột 26 dòng, như sau:

Kết quả chuyển vị, góc xoay tại các nút:

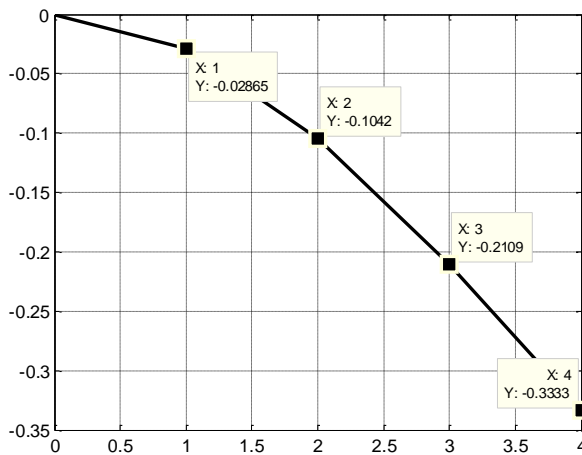
$$\{W\} = \begin{Bmatrix} W_{12} \\ W_{13} \\ W_{14} \\ W_{15} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0133 \\ 0.0449 \\ 0.0850 \\ 0.1276 \end{Bmatrix} \times ql^4 \quad ; \quad \{\varphi\} = \begin{Bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{12} \\ \varphi_{13} \\ \varphi_{14} \\ \varphi_{15} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0000 \\ 0.2188 \\ 0.3750 \\ 0.4688 \\ 0.5000 \end{Bmatrix} \times ql^3$$

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_{11} \\ Q_{12} \\ Q_{13} \\ Q_{14} \\ Q_{15} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 1.0000 \\ 1.0000 \\ 1.5000 \\ 0 \end{Bmatrix} \times ql$$

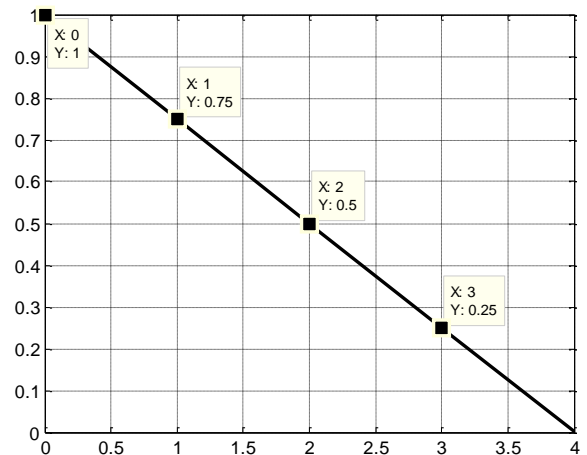
Mômen uốn của dầm:

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{12} \\ M_{13} \\ M_{14} \\ M_{15} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.0000 \\ -0.7500 \\ -0.5000 \\ -0.2500 \\ 0.0000 \end{Bmatrix} \times Pl$$

Dưới đây lần là đường độ võng và biểu đồ moomen uốn của dầm



Hình 3.19a. Đường độ võng



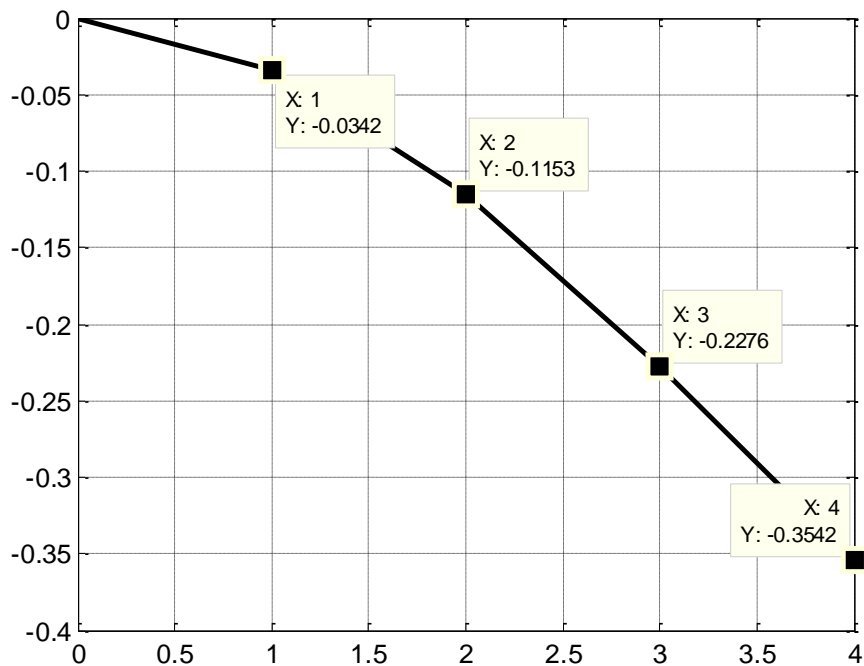
Hình 3.19b. Biểu đồ mômen

Nhận xét kết quả trên:

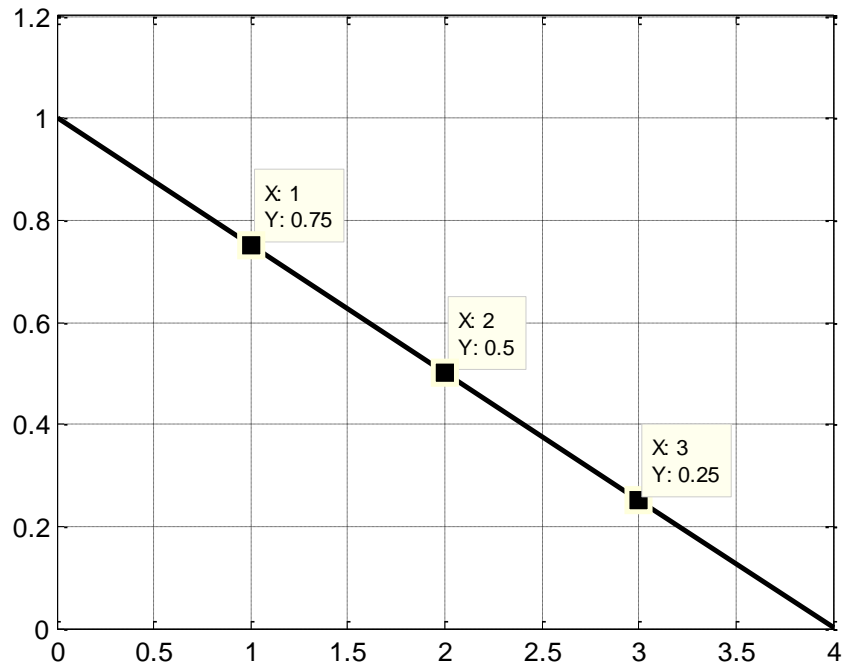
Khi $h=l/1000$ (không kể đến ảnh hưởng của biến dạng trượt) chia dầm thành 4 phần tử ta nhận được kết quả mômen hoàn toàn trùng khớp và lực cắt gần trùng với kết quả theo lời giải giải tích.

Khi $h=l/3$ (kể đến ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang) chia dầm thành 4 phần tử ta nhận được kết quả như sau, so sánh với kết quả theo lời giải giải tích ta nhận được sai số theo bảng dưới đây:

Dưới đây lần là đường độ võng và biểu đồ mômen uốn của cột và dầm khi $h=l/3$



Hình 3.20a. Đường độ võng



Hình 3.20b. Biểu đồ mômen

BẢNG SO SÁNH ĐỘ VĨNG TẠI CÁC TIẾT DIỆN DÀM

Các tiết diện của cột 1 và dầm 2	$h=l/1000$ Không xét biến dạng trượt	$h=l/3$ Có xét biến dạng trượt	Chênh lệch % giữa không và có xét biến dạng trượt ngang
1/4 dầm	0,0286	0,0342	19,580
Giữa dầm	0,1042	0,1153	10,652
3/4 dầm	0,2109	0,2276	7,918
Đầu tự do	0,3333	0,3542	6,270

Đối với bài toán tĩnh định nội lực trong hai trường hợp có xét và không xét biến dạng trượt là như nhau, hay nói cách khác việc xét biến dạng trượt không làm thay đổi nội lực trong dầm tĩnh định. Nhưng độ võng của dầm thay đổi tương đối lớn, thay đổi tới 19,580% tại tiết diện 1/4 nhịp đầu dầm.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

KẾT LUẬN

Qua kết quả nghiên cứu từ các chương, chương 1 đến chương 3 đối với bài toán dầm chịu uốn có xét đến biến dạng trượt ngang. Tác giả rút ra các kết luận sau:

1. Trình bày được các đường lối xây dựng bài toán cơ học nói chung trong đó có bài toán cơ học kết cấu. Trình bày phương pháp phần tử hữu hạn đối với bài toán cơ học kết cấu.
2. Đã trình bày được bài toán dầm chịu uốn theo lý thuyết dầm Euler - Bernoulli. Xây dựng được phương trình vi phân cân bằng của dầm chịu tải trọng phân bố đều. Trình bày lý thuyết dầm có xét đến biến dạng trượt ngang.
3. Bằng phương pháp phần tử hữu hạn, tác giả đã xác định được nội lực và chuyển vị của các dầm đơn chịu tải trọng tập trung có các điều kiện biên khác nhau. Kết quả về nội lực và chuyển vị đều trùng khớp với kết quả nhận được khi giải bằng các phương pháp hiện có nếu ta rời rạc hóa kết cấu thành nhiều phần tử.
4. Khi rời rạc hóa kết cấu với số phần tử càng nhiều thì kết quả càng tiệm cận tới kết quả chính xác nhận được từ phương pháp giải tích. Đối với bài toán dầm chịu tải trọng tập trung thì để đạt được chuyển vị chính xác chỉ cần chia dầm thành từ 4 đến 6 phần tử, để tìm nội lực chính xác cần chia dầm thành từ 4 đến 16 phần tử.
5. Khi xét đến biến dạng trượt ngang nội lực trong các bài toán tĩnh định không thay đổi, nhưng độ võng thay đổi rất lớn, ở ví dụ 3.2.4. độ võng thay đổi tới trên 36%, nội lực trong các bài toán siêu tĩnh có hai đầu liên kết đối xứng, tải trọng đối xứng không thay đổi, nội lực trong các bài toán siêu tĩnh có liên kết hai đầu không đối xứng thay đổi rất lớn, chẳng hạn trong ví dụ 3.2.2. khi ($h=l/3$) mômen tại 1/4 nhịp đầu dầm tăng lên gần 2 lần (91%) so với trường hợp không xét biến dạng trượt ngang ($h=l/1000$).
6. Đối với bài toán siêu tĩnh hai đầu liên kết không đối xứng nội lực trong hai trường hợp có xét và không xét biến dạng trượt ngang thay đổi rất lớn, chẳng hạn khi xét biến dạng trượt ngang ($h=l/3$) nội lực tại 1/4 nhịp dầm tăng hơn 1,5 lần (ở đây là 56%) so với khi không xét biến dạng trượt ngang ($h=l/1000$).

7. Đối với bài siêu tĩnh có liên kết hai đầu đối xứng nội lực trong hai trường hợp có xét và không xét biến dạng trượt ngang là như nhau, hay nói cách khác việc xét biến dạng trượt không làm thay đổi nội lực trong dầm siêu tĩnh có tải trọng và liên kết đối xứng. Nhưng chuyển vị thay đổi rất lớn, cụ thể với dầm hai đầu ngàm, tại tiết diện $1/4$ đầu dầm tăng hơn 103% và tiết diện giữa dầm tăng hơn 105%.

KIẾN NGHỊ

Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn để giải các bài toán khác như: Dầm, khung, dàn, tấm, vỏ....

Danh mục tài liệu tham khảo

I. TIẾNG VIỆT

- [1] Hà Huy Cương (2005), *Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss*, Tạp chí Khoa học và kỹ thuật, IV/ Tr. 112 ÷118.
- [2] Nguyễn Văn Liên, Nguyễn Phương Thành, Đinh Trọng Bằng (2003), *Giáo trình Sức bền vật liệu*, Nhà xuất bản xây dựng, tái bản lần thứ 3, 330 trang.
- [3] Phạm Văn Trung (2006), *Phương pháp mới Tính toán hệ dây và mái treo*, Luận án Tiến sỹ kỹ thuật.
- [4] Nguyễn Văn Đạo (2001), *Cơ học giải tích*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà nội, 337 trang.
- [5] Nguyễn Văn Đạo, Trần Kim Chi, Nguyễn Dũng (2005), *Nhập môn Động lực học phi tuyến và chuyển động hỗn độn*. Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà nội.
- [6] Đoàn Văn Duẩn (2007), *Phương pháp nguyên lý Cực trị Gauss đối với các bài toán ổn định công trình*, Luận văn thạc sỹ kỹ thuật.
- [7] Đoàn Văn Duẩn (2010), *Phương pháp phần tử hữu hạn nghiên cứu ổn định uốn dọc của thanh*, Tạp chí kết cấu và Công nghệ xây dựng, số 05, Quý IV(Tr30-Tr36).
- [8] Đoàn Văn Duẩn (2011), *Nghiên cứu ổn định đàn hồi của thanh và hệ thanh*, Luận án Tiến sỹ kỹ thuật.
- [9] Đoàn Văn Duẩn (2012), *Phương pháp mới tính toán dây mềm*, Tạp chí kết cấu và công nghệ Xây dựng số 09, Quý II (Tr56-Tr61).
- [10] Đoàn Văn Duẩn (2014), *Phương pháp chuyển vị cưỡng bức giải bài toán trị riêng và véc tơ riêng*, Tạp chí Xây dựng số 11 (Tr82-Tr84).
- [11] Đoàn Văn Duẩn (2015), *Bài toán cơ học kết cấu dưới dạng tổng quát*, Tạp chí Xây dựng số 02 (Tr59-Tr61).
- [12] Đoàn Văn Duẩn (2015), *Phương pháp so sánh nghiên cứu nội lực và chuyển vị của hệ dầm*, Tạp chí Xây dựng số 11 (Tr56-Tr58).
- [13] Đoàn Văn Duẩn (2015), *Tính toán kết cấu khung chịu uốn bằng phương pháp so sánh*, Tạp chí Xây dựng số 12 (Tr62-Tr64).

[14] Trần Thị Kim Huế (2005), *Phương pháp nguyên lý Cực trị Gauss đối với các bài toán cơ học kết cấu*, Luận văn thạc sỹ kỹ thuật.

[15] Nguyễn Thị Liên (2006), *Phương pháp nguyên lý Cực trị Gauss đối với các bài toán động lực học công trình*, Luận văn thạc sỹ kỹ thuật.

[16] Timoshenko C.P, Voinópki- Krige X, (1971), *Tám và Vô*. Người dịch, Phạm Hồng Giang, Vũ Thành Hải, Đoàn Hữu Quang, Nxb Khoa học và kỹ thuật, Hà Nội.

II. TIẾNG PHÁP

[17] Robert L’Hermite (1974), *Flambage et Stabilité – Le flambage élastique des pièces droites*, édition Eyrolles, Paris.

III. TIẾNG ANH

[18] Stephen P.Timoshenko-Jame M.Gere (1961), *Theory of elastic stability*, McGraw-Hill Book Company, Inc, New york – Toronto – London, 541 Tr.

[19] William T.Thomson (1998), *Theory of Vibration with Applications* (Tái bản lần thứ 5). Stanley Thornes (Publishers) Ltd, 546 trang.

[20] Klaus – Jurgen Bathe (1996), *Finite Element procedures*. Part one, Prentice – Hall International, Inc, 484 trang.

[21] Klaus – Jurgen Bathe (1996), *Finite Element procedures*. Part two, Prentice – Hall International, Inc, 553 trang.

[22] Ray W.Clough, Joseph Penzien(1993), *Dynamics of Structures* (Tái bản lần thứ 2), McGraw-Hill Book Company, Inc, 738 trang.

[23] O.C. Zienkiewicz-R.L. Taylor (1991), *The finite element method* (four edition) Volume 2, McGraw-Hill Book Company, Inc, 807 trang.

[24] G.Korn-T.Korn (1961), *Mathematical Handbook for sientists and Engineers*, McGraw-Hill, New york (Bản dịch tiếng Nga, I.Bramovich chủ biên, Nhà xuất bản Nauka-Moscow, 1964).

- [25] Stephen P. Timoshenko-J. Goodier (1970), *Theory of elasticity*, McGraw-Hill, New York (Bản dịch tiếng Nga, G. Shapiro chủ biên, Nhà xuất bản Nauka-Moscow, 1979), 560 trang.
- [26] D.R.J. Owen, E.Hinton (1986), *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*, Pineridge Press Lt.
- [27] Lars Olovsson, Kjell Simonsson, Mattias Unosson (2006), *Shear locking reduction in eight-node tri-linear solid finite elements*, J. ‘Computers @ Structures’, 84, trg 476-484.
- [28] C.A. Brebbia, J.C.F. Telles, L.C. Wrobel (1984), *Boundary Element Techniques. Theory and Applications in Engineering*. Nxb Springer – Verlag. (Bản dịch tiếng Nga, 1987).
- [29] Chopra Anil K (1995). *Dynamics of structures*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New – Jersey 07632.
- [30] Wilson Edward L. Professor Emeritus of structural Engineering University of California at Berkeley (2002). *Three – Dimensional Static and Dynamic Analysis of structures*, Inc. Berkeley, California, USA. Third edition, Reprint January.
- [31] Wilson, E. L., R. L. Taylor, W. P. Doherty and J. Ghaboussi (1971). “*Incompatible Displacement Models*”, Proceedings, ORN Symposium on “Numerical and Computer Method in Structural Mechanics”. University of Illinois, Urbana. September. Academic Press.
- [32] Strang, G (1972). “*Variational Crimes in the Finite Element Method*” in “The Mathematical Foundations of the Finite Element Method”. P.689 -710 (ed. A.K. Aziz). Academic Press.
- [33] Irons, B. M. and O. C. Zienkiewicz (1968). “*The isoparametric Finite Element System – A New Concept in Finite Element Analysis*”, Proc. Conf. “Recent Advances in Stress Analysis”. Royal Aeronautical Society. London.
- [34] Kolousek Vladimir, DSC Professor, Technical University, Pargue (1973). *Dynamics in engineering structures*. Butter worths London.

[35] Felippa Carlos A (2004). *Introduction of finite element methods*. Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures University of Colorado Boulder, Colorado 80309-0429, USA, Last updated Fall.