

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC DÂN LẬP HẢI PHÒNG**

NGUYỄN MẠNH HÙNG

**TÍNH TOÁN KHUNG PHẪNG CHỊU UỐN
CÓ XÉT ĐẾN BIẾN DẠNG TRƯỢT NGANG**

Chuyên ngành: **Kỹ thuật Xây dựng Công trình Dân dụng & Công nghiệp**

Mã số: **60.58.02.08**

LUẬN VĂN THẠC SĨ KỸ THUẬT

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS.TSKH. HÀ HUY CƯỜNG

Hải Phòng, 2017

LỜI CAM ĐOAN

Tên tôi là: Nguyễn Mạnh Hùng

Sinh ngày: 23/10/1981

Nơi công tác: Công ty Cổ phần sản xuất và thương mại Hạ Long

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các số liệu, kết quả trong luận văn là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Hải Phòng, ngày 15 tháng 11 năm 2017

Tác giả luận văn

Nguyễn Mạnh Hùng

LỜI CẢM ƠN

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành đối với GS.TSKH. Hà Huy Cương đã tận tình giúp đỡ, hướng dẫn và đưa ra nhiều ý kiến quý báu, cũng như tạo điều kiện thuận lợi, cung cấp tài liệu và động viên tác giả trong quá trình học tập, nghiên cứu hoàn thành luận văn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các nhà khoa học, các chuyên gia trong và ngoài trường Đại học Dân lập Hải Phòng đã tạo điều kiện giúp đỡ, quan tâm góp ý cho bản luận văn được hoàn thiện hơn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn các cán bộ, giáo viên của Khoa xây dựng, Phòng đào tạo Đại học và Sau đại học - trường Đại học Dân lập Hải Phòng, và các đồng nghiệp đã tạo điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tác giả trong quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Hải Phòng, ngày 15 tháng 11 năm 2017

Tác giả

Nguyễn Mạnh Hùng

MỤC LỤC

LỜI CAM ĐOAN	i
LỜI CẢM ƠN	iii
MỤC LỤC	iv
MỞ ĐẦU	1
Đối tượng, phương pháp và phạm vi nghiên cứu của đề tài	1
Mục đích nghiên cứu của đề tài	1
Nhiệm vụ nghiên cứu của đề tài.....	1
CHƯƠNG 1.CÁC PHƯƠNG PHÁP XÂY DỰNG VÀ GIẢI BÀI TOÁN CƠ HỌC KẾT CẤU	3
1.1. Phương pháp xây dựng bài toán cơ học	3
1.1.1. Phương pháp xây dựng phương trình vi phân cân bằng phân tử	3
1.1.2. Phương pháp năng lượng	7
1.1.3. Nguyên lý công ảo	10
1.1.4. Phương trình Lagrange:.....	12
1.2. Bài toán cơ học kết cấu và các phương pháp giải.....	14
1.2.1. Phương pháp lực	15
1.2.2. Phương pháp chuyển vị.....	15
1.2.3. Phương pháp hỗn hợp và phương pháp liên hợp	16
1.2.4. Phương pháp phần tử hữu hạn	16
1.2.5. Phương pháp sai phân hữu hạn	17
1.2.6. Phương pháp hỗn hợp sai phân – biến phân	17
CHƯƠNG 2.LÝ THUYẾT DẦM CÓ XÉT ĐẾN BIẾN DẠNG TRƯỢT NGANG	18
2.1. Lý thuyết dầm Euler – Bernoulli	18
2.1.1. Dầm chịu uốn thuần túy phẳng.....	18
2.1.2. Dầm chịu uốn ngang phẳng.....	22

2.2. Lý thuyết dầm có xét biến dạng trượt ngang	30
CHƯƠNG 3. TÍNH TOÁN KHUNG PHẪNG CHỊU UỐN CÓ XÉT ĐẾN BIẾN DẠNG TRƯỢT NGANG.....	36
3.1. Bài toán khung có xét biến dạng trượt ngang - Lời giải bán giải tích	36
3.2. Các ví dụ tính toán khung	37
KẾT LUẬN	53
KIẾN NGHỊ VỀ NHỮNG NGHIÊN CỨU TIẾP THEO.....	54
Danh mục tài liệu tham khảo	Error! Bookmark not defined.

MỞ ĐẦU

Trong những công trình xây dựng hiện nay, người ta thường dùng các kết cấu có chiều cao tiết diện lớn như cột, dầm chuyển, sàn chuyển làm nhiệm vụ tiếp nhận tải trọng từ các tầng bên trên truyền xuống cột và xuống móng. Kết cấu dầm chuyển có đặc điểm là chiều cao tiết diện rất lớn so với chiều dài của chúng, do đó việc nghiên cứu nội lực và chuyển vị của các bài toán cơ học kết cấu nói chung và các bài toán cơ học kết cấu có dạng cột ngắn và dầm cao nói riêng có tầm quan trọng đặc biệt, đòi hỏi phải nghiên cứu đầy đủ cả về mặt lý thuyết và thực nghiệm.

Cho đến nay, các đường lối xây dựng bài toán kết cấu chịu uốn thường không kể đến ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang do lực cắt gây ra hoặc có kể đến nhưng do cách đặt vấn đề và cách chọn ẩn chưa thật chính xác nên đã gặp rất nhiều khó khăn mà không tìm được kết quả của bài toán một cách chính xác và đầy đủ.

Đối tượng, phương pháp và phạm vi nghiên cứu của đề tài

Trong luận văn này, tác giả sử dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss để xây dựng và giải bài toán khung chịu uốn có xét đến biến dạng trượt ngang, chịu tác dụng của tải trọng tĩnh.

Do sự cần thiết của việc nghiên cứu nội lực và chuyển vị của kết cấu chịu uốn có xét đến biến dạng trượt, mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu của đề tài này là:

Mục đích nghiên cứu của đề tài

“Tính toán khung chịu uốn có xét đến biến dạng trượt ngang”

Nhiệm vụ nghiên cứu của đề tài

1. Tìm hiểu và giới thiệu các phương pháp xây dựng và các phương pháp giải bài toán cơ học kết cấu hiện nay.

2. Giới thiệu lý thuyết xét biên dạng trượt đối với bài toán kết cấu dầm chịu uốn với việc dùng hai hàm chưa biết là hàm độ võng y và hàm lực cắt Q .
3. Tính toán khung chịu uốn có xét đến biên dạng trượt ngang, chịu tác dụng của tải trọng tĩnh.
4. Lập chương trình máy tính điện tử cho các bài toán nêu trên.

CHƯƠNG 1.

CÁC PHƯƠNG PHÁP XÂY DỰNG VÀ GIẢI

BÀI TOÁN CƠ HỌC KẾT CẤU

Trong chương này trình bày các phương pháp truyền thống để xây dựng các bài toán cơ học nói chung; giới thiệu bài toán cơ học kết cấu (bài toán tĩnh) và các phương pháp giải thường dùng hiện nay.

1.1. Phương pháp xây dựng bài toán cơ học

Bốn phương pháp chung để xây dựng bài toán cơ học kết cấu được trình bày dưới đây. Dùng lý thuyết dầm chịu uốn để minh họa.

1.1.1. Phương pháp xây dựng phương trình vi phân cân bằng phân tố

Phương trình vi phân cân bằng được xây dựng trực tiếp từ việc xét các điều kiện cân bằng lực của phân tố được tách ra khỏi kết cấu. Trong sức bền vật liệu khi nghiên cứu dầm chịu uốn ngang sử dụng các giả thiết sau:

- Trục dầm không bị biến dạng nên không có ứng suất.
- Mặt cắt thẳng góc với trục dầm sau khi biến dạng vẫn phẳng và thẳng góc với trục dầm (giả thiết Euler–Bernoulli).
- Không xét lực nén giữa các thớ theo chiều cao của dầm

Với giả thiết thứ ba thì chỉ có ứng suất pháp σ_x và các ứng suất tiếp σ_{xz} , σ_{zx} tác dụng lên phân tố dầm (hình 1.3), ứng suất pháp σ_z bằng không. Hai giả thiết thứ ba và thứ nhất dẫn đến trục dầm chỉ có chuyển vị thẳng đứng $y(x)$ và nó được gọi là đường độ võng hay đường đàn hồi của dầm. Giả thiết thứ nhất xem chiều dài trục dầm không thay đổi khi bị võng đòi hỏi độ võng của dầm là nhỏ so với chiều cao dầm, $y_{\max} / h \leq 1/5$. Với giả thiết thứ hai thì biến dạng trượt do ứng suất tiếp gây ra không được xét trong tính độ võng của dầm như trình bày dưới đây. Giả thiết này chỉ đúng khi tỉ lệ $h/l \leq 1/5$. Chuyển vị ngang u của điểm nằm ở độ cao z so với trục dầm bằng

$$u = -z \frac{dy}{dx}$$

Biến dạng và ứng suất xác định như sau

$$\varepsilon_x = -z \frac{d^2 y}{dx^2}; \sigma_{xx} = -Ez \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Momen tác dụng lên trục dầm:

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} -Ebz^2 \frac{d^2 y}{dx^2} dz = -\frac{Ebh^3}{12} \frac{d^2 y}{dx^2}$$

hay $M = EJ\chi$ (1.7)

trong đó: $EJ = \frac{Ebh^3}{12}$, $\chi = -\frac{d^2 y}{dx^2}$

EJ được gọi là độ cứng uốn của dầm; χ là độ cong của đường đàn hồi và sẽ được gọi là biến dạng uốn; b là chiều rộng dầm. Để đơn giản trình bày, ở đây chỉ dùng trường hợp dầm có tiết diện chữ nhật.

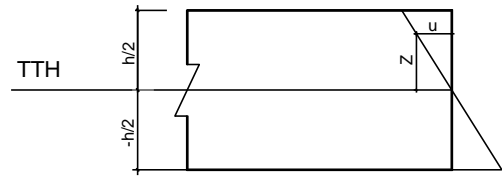
Cách tính nội lực momen ở trên không xét đến biến dạng trượt do các ứng suất tiếp gây ra. Tổng các ứng suất tiếp σ_{zx} trên mặt cắt sẽ cho ta lực cắt Q

tác dụng lên trục dầm:
$$Q = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{zx} dz$$

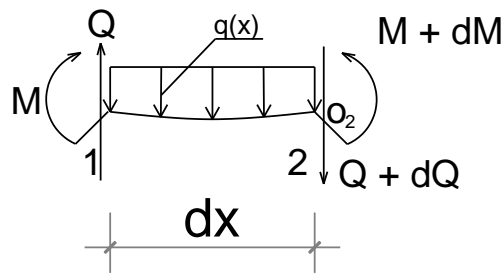
Biểu thức của ứng suất tiếp σ_{zx} trong tích phân trên sẽ trình bày sau.

Nhờ các giả thiết nêu trên, thay cho trạng thái ứng suất trong dầm, ta chỉ cần nghiên cứu phương trình cân bằng của các nội lực M và Q tác dụng lên trục dầm.

Xét phân tố dx của trục dầm chịu tác dụng của các lực M, Q và ngoại lực phân bố q, hình 1.3. Chiều dương của M, Q và q trên hình vẽ tương ứng với chiều dương của độ võng hướng xuống dưới.



Hình 1.2. Phân tố dầm



Hình 1.3. Xét cân bằng phân tố

Lấy tổng momen đối với điểm O_2 , bỏ qua các vô cùng bé bậc cao ta có

$$\frac{dM}{dx} - Q = 0 \quad (1.8)$$

Lấy tổng hình chiếu các lực lên trục thẳng đứng:

$$\frac{dQ}{dx} + q = 0 \quad (1.9)$$

Phương trình (1.8) là phương trình liên hệ giữa momen uốn và lực cắt, phương trình (1.9) là phương trình cân bằng lực cắt Q và ngoại lực phân bố q . Đó là hai phương trình xuất phát (hai phương trình đầu tiên) của phương pháp cân bằng phân tố. Lấy đạo hàm phương trình (1.8) theo x rồi cộng với phương trình (1.9), ta có phương trình dẫn xuất sau

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + q = 0 \quad (1.10)$$

Thay M xác định theo (1.7) vào (1.10) nhận được phương trình vi phân xác định đường đàn hồi của thanh

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = q \quad (1.11)$$

Phương trình (1.11) được giải với các điều kiện biên của y và các đạo hàm đến bậc ba của y (4 điều kiện), hai điều kiện biên tại mỗi đầu cuối thanh. Các điều kiện biên thường dùng như sau

a) Liên kết khớp tại $x=0$:

Chuyển vị bằng không, $y|_{x=0} = 0$, momen uốn $M = 0$, suy ra $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0$

b) Liên kết ngàm tại $x=0$:

Chuyển vị bằng không, $y|_{x=0} = 0$, góc xoay bằng không, $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = 0$

c) không có gối tựa tại $x=0$:

Momen uốn $M = 0$, suy ra $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0$; lực cắt $Q=0$, suy ra $\frac{d^3 y}{dx^3} \Big|_{x=0} = 0$

Các điều kiện tại $x=l$ cũng lấy tương tự như trên.

Bây giờ tìm hiểu sự phân bố ứng suất tiếp σ_{xz} trên chiều dày h của dầm.

Trước tiên viết phương trình cân bằng ứng suất trên trục x như sau

$$-\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \quad \text{hay} \quad \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = -Ez \frac{d^3 y}{dx^3}$$

Tích phân phương trình trên theo z : $\sigma_{xz} = -\frac{Ez^2}{2} \frac{d^3 y}{dx^3} + C(x)$

Hàm $C(x)$ xác định từ điều kiện ứng suất tiếp bằng không tại mặt trên và mặt

dưới dầm, $z = \pm \frac{h}{2}$. Ta có: $C(x) = \frac{Eh^2}{8} \frac{d^3 y}{dx^3}$

Ứng suất tiếp phân bố trên mặt cắt dầm có dạng

$$\sigma_{xz} = -\frac{E}{8} \frac{d^3 y}{dx^3} (4z^2 - h^2)$$

Đó là hàm parabol bậc hai. Ứng suất tiếp lớn nhất tại trục dầm ($z=0$) có giá trị bằng

$$\sigma_{xz} \Big|_{z=0} = \frac{Eh^2}{8} \frac{d^3 y}{dx^3}$$

Tích phân hàm ứng suất tiếp theo chiều cao dầm rồi nhân với chiều rộng b ta có lực cắt Q tác dụng lên phần trái của dầm

$$Q = \frac{Ebh^3}{12} \frac{d^3 y}{dx^3}$$

Ứng suất tiếp trung bình trên chiều cao dầm bằng: $\sigma_{xz}^{tb} = \frac{Eh^2}{12} \frac{d^3 y}{dx^3}$

Tỉ lệ giữa ứng suất tiếp max tại trục dầm và ứng suất trung bình $\alpha=1.5$.

1.1.2. Phương pháp năng lượng

Năng lượng của cơ hệ bao gồm động năng T và thế năng Π . Động năng được xác định theo khối lượng và vận tốc chuyển động, còn thế năng Π bao gồm thế năng biến dạng và công của các trường lực, phụ thuộc vào chuyển vị. Trường lực là lực có thế như lực trọng trường. Các lực ngoài tác dụng lên cơ hệ là lực không thế.

Đối với hệ bảo toàn, năng lượng là không đổi

$$T + \Pi = \text{const} \quad (1.12)$$

Do đó tốc độ thay đổi năng lượng phải bằng không

$$\frac{d}{dt}(T + \Pi) = 0 \quad (1.13)$$

Ta xét bài toán tĩnh, $T=0$, do đó

$$\Pi = \text{const} \quad (1.14)$$

Thế năng Π có thể biểu thị qua ứng suất và nội lực cũng có thể biểu thị qua chuyển vị và biến dạng. Vì vậy ta có hai nguyên lý biến phân năng lượng sau:

Nguyên lý thế năng biến dạng cực tiểu

Khi phương trình cân bằng được biểu thị qua ứng suất hoặc nội lực và do đó thế năng biến dạng cũng biểu thị qua ứng suất hoặc nội lực ta có nguyên lý thế năng biến dạng cực tiểu, nguyên lý Castiliano (1847-1884). Nguyên lý phát biểu như sau:

Trong tất cả các trạng thái cân bằng lực có thể thì trạng thái cân bằng thực xảy ra khi thế năng biến dạng là cực tiểu.

Trạng thái cân bằng lực có thể là trạng thái mà các lực tác dụng lên phân tử thỏa mãn các phương trình cân bằng. Ta viết nguyên lý dưới dạng sau:

$$\Pi(F) \rightarrow \min$$

Với ràng buộc là các phương trình cân bằng viết dưới dạng lực.

Đối với dầm ta có:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EJ} dx \rightarrow \min \quad (1.15)$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q \quad (1.16)$$

Nội lực cần tìm mômen uốn là hàm phân bố theo chiều dài dầm $M(x)$ và phải thỏa mãn các điều kiện liên kết ở hai đầu thanh (được xác định ở hai đầu thanh). Đây là bài toán cực trị có ràng buộc. Bằng cách dùng thừa số Lagrange $\lambda(x)$ đưa về bài toán không ràng buộc sau:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EJ} dx + \int_0^l \lambda(x) \left[\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right] dx \rightarrow \min \quad (1.17)$$

$\lambda(x)$ là thừa số Lagrange và cũng là ẩn của bài toán. Theo phép tính biến phân từ phiếm hàm (1.17) ta nhận được hai phương trình sau (phương trình Euler–Lagrange).

$$M = -EJ \frac{d^2 \lambda}{dx^2} \quad (1.18)$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q \quad (1.19)$$

$\lambda(x)$ có thứ nguyên là chuyển vị cho nên phương trình (1.18) biểu thị quan hệ giữa M và chuyển vị. Thế (1.18) vào (1.19) ta có

$$EJ \frac{d^4 \lambda}{dx^4} = q \quad (1.20)$$

$\lambda(x)$ là độ võng của dầm và phương trình (1.20) là phương trình vi phân cân bằng của dầm viết theo chuyển vị nhận được ở trên.

Nguyên lý công bù cực đại

Khi dùng ẩn là các chuyển vị và biến dạng thì có nguyên lý công bù cực đại.

Trong tất cả các chuyển vị động học có thể (khả dĩ) thì chuyển vị thực là chuyển vị có công bù cực đại.

Chuyển vị động học có thể là chuyển vị thỏa mãn các phương trình liên hệ giữa chuyển vị và biến dạng và thỏa mãn các điều kiện biên. Công bù bằng tích của ngoại lực và chuyển vị trừ đi năng lượng biến dạng.

$$[\text{Công ngoại lực} - \text{thế năng biến dạng}] \rightarrow \max$$

Với ràng buộc là các phương trình liên hệ giữa chuyển vị và biến dạng.

Lấy ví dụ đối với dầm chịu uốn, ta có

$$\int_0^l qy dx - \frac{1}{2} \int_0^l EJ \chi^2 dx \rightarrow \max(1.21)$$

Với ràng buộc:

$$\chi = -\frac{d^2y}{dx^2}(1.22)$$

χ là biến dạng uốn cũng là độ cong của đường độ võng. Tích phân thứ nhất trong (1.21) là công toàn phần của ngoại lực (không có hệ số $\frac{1}{2}$), tích phân thứ hai là thế năng biến dạng biểu thị qua biến dạng uốn.

Thay χ từ (1.22) vào (1.21), ta có

$$\int_0^l qy dx - \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left(-\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx \rightarrow \max(1.23)$$

Thay dấu của (1.23) ta có

$$\frac{1}{2} \int_0^l EJ \left(-\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx - \int_0^l qy dx \rightarrow \min(1.24)$$

Khi y có giá trị xác định tại hai đầu mút dầm thì điều kiện cần để biểu thức (1.24) cực tiểu là phương trình Euler sau

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = q \quad (1.25)$$

Phương trình (1.25) là phương trình vi phân cân bằng của dầm chịu uốn. Nguyên lý công bù cực đại dưới dạng biểu thức (1.24) được sử dụng rộng rãi trong tính toán công trình theo phương pháp phần tử hữu hạn.

1.1.3. Nguyên lý công ảo

Nguyên lý công ảo được sử dụng rất rộng rãi trong cơ học. Theo K.F. Gauss(1777-1855) thì mọi nguyên lý trong cơ học hoặc trực tiếp hoặc gián tiếp đều rút ra từ nguyên lý chuyển vị ảo.

Xét cơ hệ chất điểm ở trạng thái cân bằng ta có

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0, \quad (1.26)$$

$\sum X; \sum Y; \sum Z$: là tổng hình chiếu của tất cả các lực tác dụng lên ba trục của hệ tọa độ Đề các. Ta viết biểu thức sau:

$$\sum X \delta U + \sum Y \delta V + \sum Z \delta W = 0, \quad (1.27)$$

ở đây xem các $\delta U; \delta V; \delta W$; là thừa số bất kỳ.

Từ (1.26) ta có (1.27) và ngược lại từ (1.27) ta sẽ nhận được (1.26) bởi vì các $\delta U; \delta V; \delta W$; là những thừa số bất kỳ. Bây giờ ta xem $\delta U; \delta V; \delta W$; là các biến phân của các chuyển vị ảo theo ba chiều của hệ tọa độ vuông góc. Chuyển vị ảo là chuyển vị bé do nguyên nhân bất kỳ bên ngoài nào đó gây ra. Các chuyển vị ảo này phải thỏa mãn các điều kiện liên kết của hệ.

Khi có chuyển vị ảo thì vị trí của các lực tác dụng trên hệ có thể thay đổi nhưng phương chiều và độ lớn của nó vẫn giữ nguyên không đổi. Như vậy, các chuyển vị ảo $\delta U; \delta V; \delta W$ là các đại lượng độc lập với lực tác dụng và từ hai biểu thức (1.26) và (1.27) ta có nguyên lý công ảo:

Nếu như tổng công của các lực tác dụng của hệ thực hiện trên các chuyển vị ảo bằng không thì hệ ở trạng thái cân bằng.

Đối với hệ đàn hồi(hệ biến dạng) thì ngoài ngoại lực còn có nội lực. Vấn đề đặt ra ở đây là cách tính công của nội lực như thế nào.

Trước hết ta cần phải đưa thêm yêu cầu đối với chuyển vị ảo như sau:

Các chuyển vị ảo phải thỏa mãn các liên hệ giữa chuyển vị và biến dạng.

Nếu các chuyển vị có biến dạng $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$; $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$; ...thì biến phân các chuyển

vị ảo δu ; δv ; δw cũng phải có các biến dạng ảo tương ứng:

$$\frac{\partial}{\partial x} \delta u; \frac{\partial}{\partial y} \delta v; \dots$$

Thông thường công của nội lực(hoặc ứng suất) được tính qua thể năng biến dạng. Khi có các chuyển vị ảo δU ; δV ; δW ; thì thể năng biến dạng Π sẽ thay đổi bằng đại lượng biến phân $\delta \Pi$. Do đó nguyên lý chuyển vị ảo đối với hệ biến dạng được viết như sau:

$$\delta \Pi - \sum X \delta U - \sum Y \delta V - \sum Z \delta W = 0, \quad (1.28)$$

Các đại lượng biến phân trong (1.28) đều là chuyển vị ảo cho nên nếu xem nội lực (ứng suất) trong quá trình chuyển vị ảo cũng không đổi thì dấu biến phân trong (1.28) có thể viết lại như sau:

$$\delta [\Pi - \sum XU - \sum YV - \sum ZW] = 0 \quad (1.29)$$

Hai biểu thức (1.28) và (1.29) dưới dạng chi tiết hơn được trình bày trong [30, Tr.261].

$$\delta \int_0^l \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 - qy \right] dx = 0 \quad \text{hay} \quad \int_0^l \delta \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 - qy \right] dx = 0 \quad (1.30)$$

Phương trình Euler của (1.30) như sau: $EJ \frac{d^4 y}{dx^4} - q = 0$

1.1.4. Phương trình Lagrange:

Phương trình Lagrange là phương trình vi phân của chuyển động được biểu thị qua các tọa độ tổng quát (các chuyển vị tổng quát).

Gọi T là động năng và Π là thế năng của hệ, các q_i là các chuyển vị tổng quát và Q_i là các lực tổng quát thì phương trình Lagrange có dạng:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i, \quad (i=1, 2, 3, \dots, n) \quad (1.31)$$

trong đó: $\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial t}$ là vận tốc chuyển động. Đối với mỗi chuyển vị q_i sẽ có một phương trình Lagrange. Động năng T trong tọa độ tổng quát là hàm của vận tốc và có thể là hàm của cả chuyển vị tổng quát.

Thế năng toàn phần của hệ bao gồm thế năng biến dạng và thế năng của lực có thế (lực trọng trường là lực có thế). Q_i là lực không thế có thể được hiểu là các lực ngoài tác dụng lên hệ (lực tổng quát). Áp dụng phương trình Lagrange để xây dựng phương trình chuyển động của dầm chịu uốn như sau:

Gọi y_i là chuyển vị (tổng quát) của điểm i của dầm và q_i là lực tác dụng tại điểm i của dầm và m_i là khối lượng.

Động năng của dầm

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m \dot{y}_i^2 \quad \text{trong } \textcircled{\text{a}}: \quad \dot{y}_i = \frac{\partial y_i}{\partial t} \quad (1.32)$$

Thế năng biến dạng của dầm chịu uốn

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} EJ \left(\frac{\partial^2 y_i}{\partial x^2} \right)_i^2 \quad (1.33)$$

Dấu tổng lấy cho tất cả các điểm i của dầm. Phương trình Lagrange đối với dầm có dạng

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial y_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} = q_i, \quad (1.34)$$

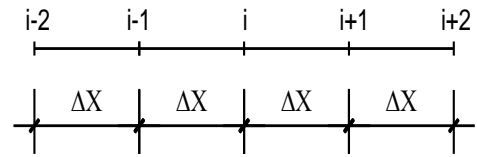
Ta tính hai thành phần đầu của phương trình (1.34)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \right) = \frac{\partial}{\partial t} m_i \dot{y}_i = m_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} = m_i \ddot{y}_i \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y_i} = 0$$

Để tính thế năng biến dạng có thể dùng phương pháp sai phân hữu hạn, hình 1.5.

Bởi vì độ võng y_i của dầm chỉ có mặt trong biểu thức thế năng biến dạng của ba điểm liên tiếp $i-1$, i và $i+1$, cho nên chỉ cần tính thế năng biến dạng của dầm (1.33) cho ba điểm này, Δx là khoảng cách giữa các điểm.



Hình 1.4. Bước sai phân

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} EJ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_i &= \frac{1}{2} EJ \left(\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{\Delta x^2} \right)^2 \\ \frac{1}{2} EJ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{i-1} &= \frac{1}{2} EJ \left(\frac{y_{i-2} - 2y_{i-1} + y_i}{\Delta x^2} \right)^2 \\ \frac{1}{2} EJ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{i+1} &= \frac{1}{2} EJ \left(\frac{y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}}{\Delta x^2} \right)^2 \end{aligned} \right\} (1.36)$$

Tổng cộng ba phương trình trên cho ta thế năng của dầm để tính y_i . Ta tính $\frac{\partial \Pi}{\partial y_i}$ của phương trình (1.34).

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} &= EJ \left(\frac{-2y_{i-1} + 4y_i - 2y_{i+1} + y_{i-2} - 2y_{i-1} + y_i + y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}}{\Delta x^4} \right) \\ &= EJ \left(\frac{y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}}{\Delta x^4} \right) = EJ \frac{\Delta_i^4}{\Delta x^4} \Big|_i \end{aligned} \right\} \quad (1.37)$$

Biểu thức (1.37) biểu thị sai phân hữu hạn của $EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \Big|_i$.

Cộng (1.35) và (1.37) nhận được phương trình Lagrange đối với chuyển vị y_i

$$m \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \Big|_i = q_i \quad (1.38)$$

Điểm i là bất kỳ nên nhận được phương trình vi phân cân bằng của dầm

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = q \quad (1.39)$$

Đối với bài toán tĩnh $T=0$ ta có: $EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = q$ (1.40)

Phương pháp sử dụng phương trình Lagrange để nhận được phương trình vi phân của đường độ võng của dầm trình bày ở đây là của tác giả.

Ở trên trình bày bốn phương pháp chung để xây dựng bài toán cơ, lấy bài toán dầm chịu uốn làm ví dụ để biết cách sử dụng chúng và để thấy bốn đường lối đó là tương đương nhau nghĩa là đều dẫn về phương trình vi phân cân bằng của hệ.

1.2. Bài toán cơ học kết cấu và các phương pháp giải

Bài toán cơ học kết cấu nhằm xác định nội lực và chuyển vị của hệ thanh, tấm, vỏ dưới tác dụng của các loại tải trọng, nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức,... và được chia làm hai loại:

- Bài toán tĩnh định: là bài toán có cấu tạo hình học bất biến hình và đủ liên kết tựa với đất, các liên kết sắp xếp hợp lý, chịu các loại tải trọng. Để xác định nội lực và chuyển vị chỉ cần dùng các phương trình cân bằng tĩnh học là đủ;

- Bài toán siêu tĩnh: là bài toán có cấu tạo hình học bất biến hình và thừa liên kết (nội hoặc ngoại) chịu các loại tải trọng, nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức,... Để xác định nội lực và chuyển vị ngoài các phương trình cân bằng ta còn phải bổ sung các phương trình biến dạng.

Nếu tính đến tận ứng suất, có thể nói rằng mọi bài toán cơ học vật rắn biến dạng nói chung và bài toán cơ học kết cấu nói riêng đều là bài toán siêu tĩnh.

Đã có nhiều phương pháp để giải bài toán siêu tĩnh. Hai phương pháp truyền thống cơ bản là phương pháp lực và phương pháp chuyển vị. Khi sử dụng chúng thường phải giải hệ phương trình đại số tuyến tính. Số lượng các phương trình tùy thuộc vào phương pháp phân tích. Từ phương pháp chuyển vị ta có hai cách tính gần đúng hay được sử dụng là H. Cross và G. Kani. Từ khi xuất hiện máy tính điện tử, người ta bổ sung thêm các phương pháp số khác như: Phương pháp phần tử hữu hạn; Phương pháp sai phân hữu hạn...

1.2.1. Phương pháp lực

Trong hệ siêu tĩnh ta thay các liên kết thừa bằng các lực chưa biết, còn giá trị các chuyển vị trong hệ cơ bản tương ứng với vị trí và phương của các lực ẩn số do bản thân các lực đó và do các nguyên nhân bên ngoài gây ra bằng không. Từ điều kiện này ta lập được hệ các phương trình đại số tuyến tính, giải hệ này ta tìm được các ẩn số và từ đó suy ra các đại lượng cần tìm.

1.2.2. Phương pháp chuyển vị

Khác với phương pháp lực, phương pháp chuyển vị lấy chuyển vị tại các nút làm ẩn. Những chuyển vị này phải có giá trị sao cho phản lực tại các liên kết đặt thêm vào hệ do bản thân chúng và do các nguyên nhân bên ngoài gây ra bằng không. Lập hệ phương trình đại số tuyến tính thỏa mãn điều kiện này và giải hệ đó ta tìm được các ẩn, từ đó xác định các đại lượng còn lại. Hệ cơ bản

trong phương pháp chuyển vị là duy nhất và giới hạn giải các bài toán phụ thuộc vào số các phần tử mẫu có sẵn.

1.2.3. Phương pháp hỗn hợp và phương pháp liên hợp

Phương pháp hỗn hợp, phương pháp liên hợp là sự kết hợp song song giữa phương pháp lực và phương pháp chuyển vị. Trong phương pháp này ta có thể chọn hệ cơ bản theo phương pháp lực nhưng không loại bỏ hết các liên kết thừa mà chỉ loại bỏ các liên kết thuộc bộ phận thích hợp với phương pháp lực; hoặc chọn hệ cơ bản theo phương pháp chuyển vị nhưng không đặt đầy đủ các liên kết phụ nhằm ngăn cản toàn bộ các chuyển vị nút mà chỉ đặt các liên kết phụ tại các nút thuộc bộ phận thích hợp với phương pháp chuyển vị. Trường hợp đầu hệ cơ bản là siêu tĩnh, còn trường hợp sau hệ cơ bản là siêu động.

Trong cả hai cách nói trên, bài toán ban đầu được đưa về hai bài toán độc lập: Một theo phương pháp lực và một theo phương pháp chuyển vị.

1.2.4. Phương pháp phần tử hữu hạn

Thực chất của phương pháp phần tử hữu hạn là rời rạc hóa bản thân kết cấu (chia kết cấu thành một số phần tử có kích thước hữu hạn). Các phần tử liền kề liên hệ với nhau bằng các phương trình cân bằng và các phương trình liên tục.

Để giải quyết bài toán cơ học kết cấu, có thể tiếp cận phương pháp này bằng đường lối trực tiếp, suy diễn vật lý hoặc đường lối toán học, suy diễn biến phân. Tuy nhiên bằng cách nào đi chăng nữa thì kết quả thu được là một ma trận (độ cứng hoặc độ mềm). Ma trận đó được xây dựng dựa trên cơ sở cực trị hóa phiếm hàm biểu diễn năng lượng. Trong phạm vi mỗi phần tử riêng biệt, các hàm chuyển vị được xấp xỉ gần đúng theo một dạng nào đó, thông thường là các đa thức.

1.2.5. Phương pháp sai phân hữu hạn

Phương pháp sai phân hữu hạn cũng là thay thế hệ liên tục bằng mô hình rời rạc, song hàm cần tìm (hàm mang đến cho phép hàm giá trị dừng), nhận những giá trị gần đúng tại một số hữu hạn điểm của miền tích phân, còn giá trị các điểm trung gian sẽ được xác định nhờ một phương pháp tích phân nào đó.

Phương pháp này cho lời giải số của phương trình vi phân về chuyển vị và nội lực tại các điểm nút. Thông thường ta phải thay đạo hàm bằng các sai phân của hàm tại các nút. Phương trình vi phân của chuyển vị hoặc nội lực được viết dưới dạng sai phân tại mỗi nút, biểu thị quan hệ của chuyển vị tại một nút và các nút lân cận dưới tác dụng của ngoại lực.

1.2.6. Phương pháp hỗn hợp sai phân – biến phân

Kết hợp phương pháp sai phân với phương pháp biến phân ta có một phương pháp linh động hơn: Hoặc là sai phân các đạo hàm trong phương trình biến phân hoặc là sai phân theo một phương và biến phân theo một phương khác (đôi với bài toán hai chiều).

CHƯƠNG 2.

LÝ THUYẾT DÀM CÓ XÉT ĐẾN BIẾN DẠNG TRƯỢT NGANG

Trong chương này trước tiên trình bày lý thuyết dầm thông thường, lý thuyết dầm Euler - Bernoulli, sau đó giới thiệu lý thuyết dầm có xét biến dạng trượt ngang và phương pháp nghiên cứu nội lực và chuyển vị của hệ dầm chịu uốn có xét biến dạng trượt ngang.

2.1. Lý thuyết dầm Euler – Bernoulli

Dầm chịu uốn là cấu kiện có kích thước tiết diện nhỏ hơn nhiều lần so với chiều dài của nó, trên mặt cắt ngang dầm tồn tại hai thành phần nội lực là mômen uốn M và lực cắt Q . Tải trọng tác dụng lên dầm nằm trong mặt phẳng có chứa đường trung bình của dầm và thẳng góc với trục dầm. Dưới đây ta xét hai trường hợp dầm chịu uốn thuần túy phẳng và uốn ngang phẳng.

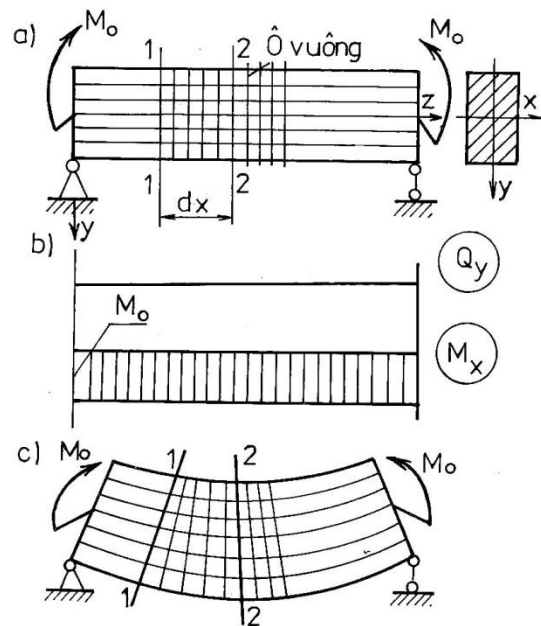
2.1.1. Dầm chịu uốn thuần túy phẳng

Dầm chịu uốn thuần túy phẳng là dầm mà trên mọi mặt cắt ngang dầm chỉ có một thành phần nội lực là mômen uốn nằm trong mặt phẳng quán tính chính trung tâm.

Ứng suất trên mặt cắt ngang

Giả sử dầm có mặt cắt ngang hình chữ nhật ($b \times h$) chịu uốn thuần túy như, hình 2.1a. Ta tiến hành thí nghiệm sau:

Trước khi dầm chịu lực ta vạch lên mặt ngoài dầm những đường thẳng song song và vuông góc với trục dầm tạo nên những ô vuông, hình 2.1a. Sau khi dầm biến dạng, hình 2.1c, ta thấy rằng những đường song song với trục dầm trở thành những đường cong, những đường thẳng vuông góc với trục dầm vẫn thẳng và vuông góc với trục dầm. Từ đó người ta đưa ra hai giả thiết sau đây:



Hình 2.1. Dầm chịu uốn thuần túy

- Mặt cắt ngang dầm ban đầu phẳng và vuông góc với trục dầm, sau biến dạng vẫn phẳng và vuông góc với trục dầm (giả thiết về mặt cắt ngang, giả thiết Bernoulli).
- Trong quá trình biến dạng các thớ dọc của dầm không ép lên nhau và không đẩy xa nhau (giả thiết về các thớ dọc).

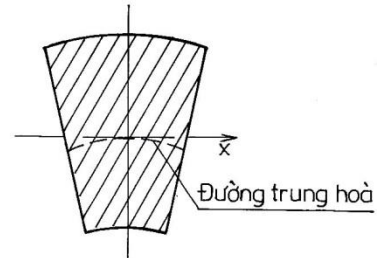
Ngoài ra khi tính toán dầm ta còn dựa vào các giả thiết sau:

- Vật liệu có tính chất liên tục, đồng nhất và đẳng hướng
- Biến dạng của vật thể là biến dạng đàn hồi và đàn hồi tuyệt đối.
- Biến dạng của vật thể do ngoại lực gây ra là nhỏ so với kích thước của chúng.
- Tuân theo nguyên lý độc lập tác dụng

Từ hình 2.1c, ta nhận thấy rằng: khi dầm bị uốn thì các thớ trên co lại, các thớ dưới giãn ra. Do vậy khi chuyển từ thớ co sang thớ giãn sẽ có thớ không co, không giãn. Thớ này gọi là thớ trung hòa. Tập hợp các thớ trung hòa gọi là

lớp trung hòa, giao của lớp trung hòa với mặt cắt ngang gọi là đường trung hòa. Nếu ta xét một mặt cắt ngang nào đó của dầm thì sau khi bị uốn nó sẽ cho hình dạng như hình 2.2.

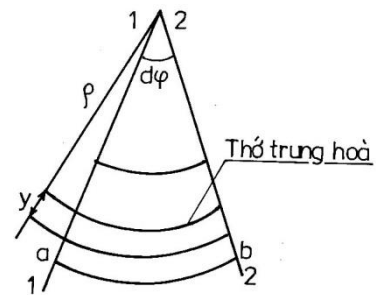
Đường trung hòa của mặt cắt ngang là một đường cong. Vì chuyển vị của các điểm trên mặt cắt ngang của dầm là bé, nên ta coi rằng hình dáng mặt cắt ngang dầm không thay đổi sau khi biến dạng.



Hình 2.2. Mặt cắt ngang dầm

Khi đó đường trung hòa của mặt cắt ngang là đường thẳng và giả sử lấy trục ox trùng với đường trung hòa.

Xét biến dạng của đoạn dầm dz được cắt ra khỏi dầm bằng hai mặt cắt 1-1 và 2-2. Sau biến dạng hai mặt cắt này làm với nhau một góc $d\varphi$ và thớ trung hòa có bán kính cong là ρ (hình 2.3). Theo tính chất của thớ trung hòa ta có:



Hình 2.3. Hai mặt cắt sau khi uốn

$$dz = \rho d\varphi \quad (2.1)$$

Ta xét biến dạng của thớ ab cách thớ trung hòa một khoảng là y , ta có:

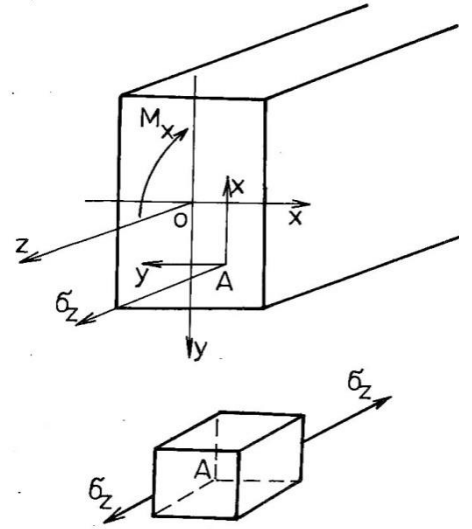
$$\overline{ab_t} = dz = \rho d\varphi; \quad \overline{ab_s} = dz = (\rho + y)d\varphi \quad (2.2)$$

Từ (2.2) ta suy ra:

$$\varepsilon_z = \frac{\overline{ab_s} - \overline{ab_t}}{\overline{ab_t}} = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi}; \quad (2.3)$$

Xét ứng suất tại điểm bất kỳ $A(x,y)$ trên mặt cắt ngang nào đó của dầm (hình 2.4a). Trong đó trục oy là trục đối xứng của mặt cắt ngang, trục ox trùng với đường trung hòa của mặt cắt ngang.

Ta tách ra tại A một phân tử hình hộp bằng các mặt cắt song song với các mặt tọa độ (hình 2.4b). Khi đó theo giả thiết thứ nhất thì góc của phân tử sau biến dạng không đổi, nên ta suy ra trên các mặt của phân tử không có ứng suất tiếp. Mặt khác theo giả thiết thứ hai thì trên các mặt của phân tử song song với trục Z không có ứng suất pháp, nghĩa là $\sigma_x = \sigma_y = 0$. Do vậy trên các mặt của phân tử chỉ có ứng suất pháp σ_z và theo định luật Hooke ta có:



Hình 2.4. Phân tử A

$$\sigma_z = E\varepsilon_z = E \frac{y}{\rho}; \quad (2.4)$$

Dầm chịu uốn thuần túy nên ta có

$$N_z = \int_F \sigma_z dF = 0 \quad (2.5)$$

$$M_x = \int_F \sigma_z y dF = 0 \quad (2.6)$$

Thay (2.4) vào (2.5) ta được

$$N_z = \int_F E \frac{y}{\rho} dF = \frac{E}{\rho} \int_F y dF = 0 = \frac{E}{\rho} S_x = 0 \quad (2.7)$$

$S_x = 0$ nghĩa là ox là trục quán tính chính trung tâm. Vì y là trục đối xứng nên suy ra oxy là trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt ngang. Thay (2.4) vào (2.6) ta được:

$$M_x = \int_F \sigma_z y dF = \frac{E}{\rho} \int_F E \frac{y^2}{\rho} dF = \frac{E}{\rho} J_x \quad (2.8)$$

Suy

ra:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x} \quad (2.9)$$

EJ_x là độ cứng của dầm khi uốn. Thay (2.9) vào (2.4) ta có:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{EJ_x} y \quad (2.10)$$

Từ công thức (2.10) ta có các nhận xét:

- Luật phân bố của σ_z trên mặt cắt ngang dầm là bậc nhất đối với y .
- Những điểm trên mặt cắt ngang có cùng tung độ y (nghĩa là những điểm nằm trên đường thẳng song song với trục trung hòa x) sẽ có trị số bằng nhau và nó tỉ lệ với khoảng cách từ các điểm đó tới trục trung hòa.
- Những điểm nằm trên trục trung hòa $y=0$ có trị số $\sigma_z = 0$. Những điểm xa trục trung hòa nhất sẽ có trị số ứng suất lớn nhất và bé nhất.

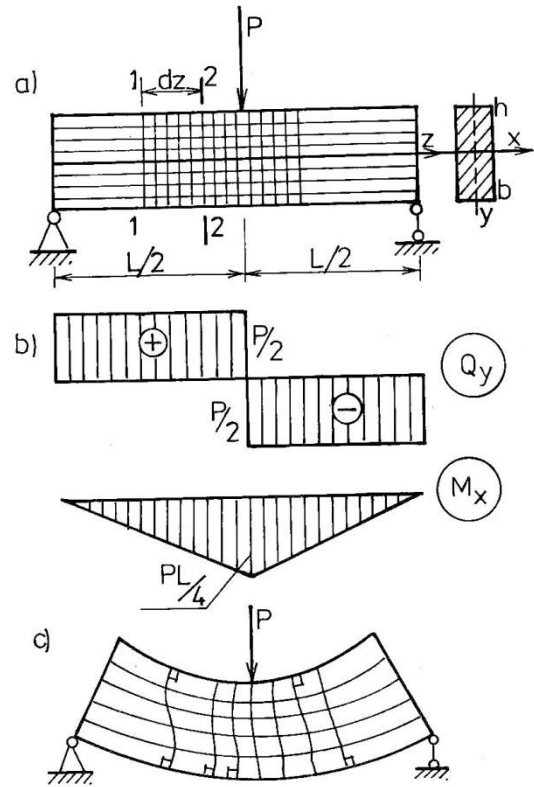
2.1.2. Dầm chịu uốn ngang phẳng

Dầm chịu uốn ngang phẳng là dầm mà các mặt cắt ngang của nó có các thành phần nội lực là lực cắt Q_y và mômen uốn M_x nằm trong mặt phẳng quán tính chính trung tâm của dầm.

Ứng suất trên mặt cắt ngang

Xét dầm chịu uốn ngang phẳng như trên hình 2.5a. Ta quan sát thí nghiệm sau:

Trước khi dầm chịu lực ta vạch lên mặt ngoài dầm những đường thẳng song song và vuông góc với trục dầm tạo. Sau khi dầm biến dạng ta thấy rằng những đường thẳng song song với trục dầm trở thành những đường cong nhưng vẫn còn song song với trục dầm, những đường thẳng vuông góc với trục dầm không còn thẳng và vuông góc với trục dầm nữa hình 2.5c.

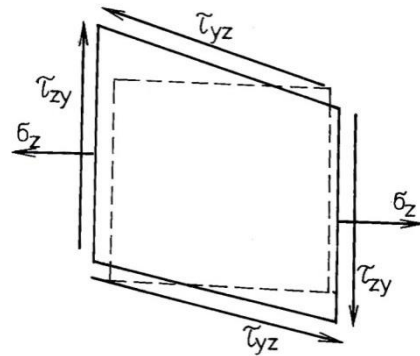


Hình 2.5. Dầm chịu uốn ngang phẳng

Điều đó chứng tỏ mặt cắt ngang dầm sau biến dạng bị vênh đi. Nếu tại điểm A bất kỳ của dầm ta tách ra một phân tố bằng các mặt song song với các mặt tọa độ thì sau khi biến dạng các góc vuông của phân tố không còn vuông nữa, nghĩa là phân tố có biến dạng góc. Suy ra trên các mặt phân tố sẽ có ứng suất tiếp.

Trong lý thuyết đàn hồi người ta đã chứng minh được rằng trên các mặt của phân tố có các ứng suất sau:

$\sigma_y, \sigma_z, \tau_{zy}, \tau_{yz}$. Nhưng thực tế cho thấy rằng ứng suất pháp σ_y , rất bé so với các thành phần khác nên ta bỏ qua, nghĩa là khi dầm chịu uốn ngang phẳng thì trên mặt cắt ngang dầm có hai thành phần ứng suất là: ứng suất pháp σ_z , và ứng suất tiếp hình 2.6.



Hình 2.6. Phân bố dầm chịu uốn ngang phẳng

a. Ứng suất pháp σ_z :

Trong mục trước nhờ giả thiết Bernoulli về mặt cắt ngang phẳng ta đã đưa tới công thức tính ứng suất pháp σ_z trên mặt cắt ngang dầm là:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{EJ_x} y \quad (2.11)$$

Trong trường hợp dầm bị uốn ngang phẳng thì sau biến dạng mặt cắt ngang dầm bị vênh đi, nghĩa là không còn phẳng nữa. Như vậy mọi lập luận để đưa tới công thức (2.11) để tính ứng suất pháp σ_z không phù hợp nữa. Tuy nhiên trong lý thuyết đàn hồi người ta đã chứng minh được rằng đối với dầm chịu uốn ngang phẳng ta vẫn có thể dùng công thức (2.11) để tính ứng suất σ_z mà sai số không lớn lắm.

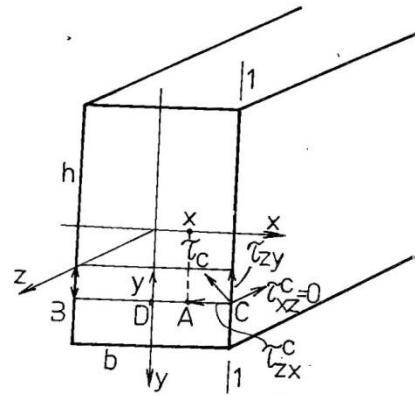
b. Ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang dầm chịu uốn ngang phẳng (công thức Durapski):

Giả sử có dầm mặt cắt ngang là hình chữ nhật hẹp ($b < h$) chịu uốn ngang phẳng hình 2.7.

Ta xét ứng suất tiếp tại điểm bất kỳ $A(x,y)$ trên mặt cắt ngang 1-1 nào đó của dầm. Qua điểm A ta kẻ đường thẳng song song với trục ox cắt biên của mặt cắt tại B và C , cắt trục oy tại D . Trước hết ta xét ứng suất tiếp tại B,C và D .

Ứng suất tiếp tại C là τ_c , giả sử có phương bất kỳ trong 1-1.

Phân τ_c thành hai thành phần: τ_{zx}^c và τ_{zy}^c . Nhưng theo định luật đối ứng của ứng suất tiếp thì ta có: $\tau_{zx}^c = \tau_{xz}^c = 0$ ($\tau_{xz}^c = 0$ vì mặt bên dầm theo giả thiết không có tải trọng tác dụng) hình 2.7.



Hình 2.7.

Do vậy $\tau_c = \tau_{zy}^c$ có phương song song với oy. Do tính chất đối xứng ta suy ra $\tau_B = \tau_{zy}^B = \tau_{zy}^C$.

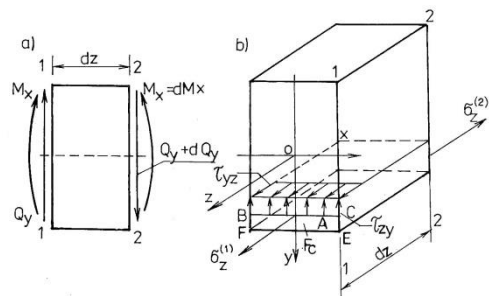
Cũng do tính chất đối xứng và giả thiết hình chữ nhật hẹp nên $\tau_D = \tau_{yz}^D = \tau_{yz}^C$.

Do giả thiết hình chữ nhật hẹp nên $CD=b/2$ càng nhỏ mà ứng suất tiếp tại C và D chỉ có phương y. Do vậy ta suy ra là ứng suất tiếp tại A chỉ có phương y: $\tau_A = \tau_{yz}^A$. Đồng thời:

$$\tau_{yz}^A = \frac{\tau_{yz}^C + \tau_{yz}^D}{2} = \tau_{yz}^C = \tau_{yz}^D$$

Như vậy ứng suất tiếp của các điểm trên đường thẳng BC qua A chỉ có phương y và trị số bằng nhau. Nghĩa là ứng suất tiếp trên BC phân bố đều với cường độ là τ_{zy} . Để tính τ_{zy} ta cắt một đoạn dầm dz bằng hai mặt cắt 1-1 và 2-2, hình 2.8.

Sau đó cắt đoạn dầm dz bằng một mặt phẳng qua điểm A song song với trục Z. Mặt phẳng này chia đoạn dầm dz ra làm hai phần. Nếu gọi $BC = bc$ và dt



(BCEF)=Fc thì từ điều kiện cân bằng của phần dưới của đoạn dz hình...ta suy ra:

Hình 2.8.

$$\sum Z = \int_{Fc} \sigma_z^{(1)} dF - \int_{Fc} \sigma_z^{(2)} dF + \tau_{yz} bcdZ = 0$$

Mặt khác ta lại có

$$\sigma_z^{(1)} = \frac{M_x}{J_x} y \quad (a)$$

$$\sigma_z^{(2)} = \frac{M_x + dM_x}{J_x} y \quad (b)$$

Thay (b) vào (a) ta được:

$$\begin{aligned} \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \frac{1}{bc \cdot dz} \left[\int_{Fc} \frac{M_x + dM_x}{J_x} y dF - \int_{Fc} \frac{M_x}{J_x} y dF \right] = \\ &= \frac{1}{J_x \cdot bc} \frac{dM_x}{dz} \int_{Fc} y dF \end{aligned} \quad (c)$$

$$\text{Ta có: } \frac{dM_x}{dz} = Q_y; \int_{Fc} y dF = S_x^c \quad (d)$$

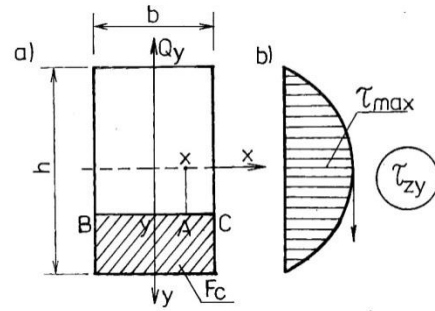
S_x^c : gọi là mômen tĩnh của phần diện tích Fc đối với trục x. Thay (d) vào (c) ta suy ra:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^c}{J_x \cdot bc} \quad (2.12)$$

Trong đó bc gọi là bề rộng của mặt cắt ngang qua điểm cần tính ứng suất A. Công thức (2.12) gọi là công thức Durapski. Từ công thức này và theo điều kiện cân bằng của phần thanh ở trên ta suy ra là τ_{yz} cùng chiều với trục z, τ_{zy} cùng chiều với Q_y . Nghĩa là dấu của τ_{zy} và Q_y như nhau. Do vậy ở đây chỉ cần tính trị số của τ_{zy} theo (2.12) còn dấu của nó được xác định từ biểu đồ lực cắt Q_y .

c. Luật phân bố ứng suất tiếp τ_{zy} đối với mặt cắt hình chữ nhật:

Giả sử mặt cắt ngang dầm chịu uốn ngang phẳng là hình chữ nhật bề rộng b , chiều cao h . Ta đi tìm luật phân bố của ứng suất tiếp τ_{zy} đối với mặt cắt nếu lực cắt tại mặt cắt này là Q_y .



Hình 2.9.

Ta xét điểm bất kỳ $A(x,y)$ trên mặt cắt, ta có $bc=BC=b$.

$$S_x^c = \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot b \left[y + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y\right) \right] = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

Suy ra: $\tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^c}{J_x \cdot bc} = \frac{Q_y \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{J_x \cdot b} = \frac{Q_y}{2J_x} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$ (2.13)

Từ (2.13) ta nhận thấy rằng: Luật phân bố τ_{zy} trên mặt cắt là parabol bậc hai đối với y . Với $y=0$ (những điểm nằm trên trục trung hòa ox) thì:

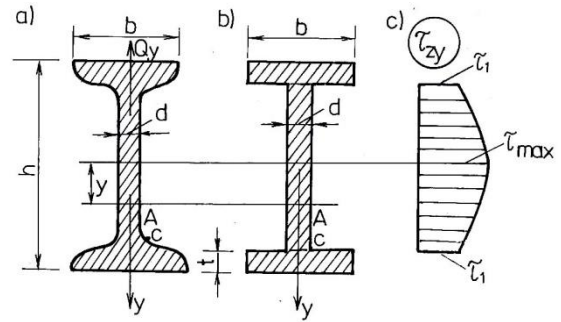
$$\tau_{zy}(0) = \tau_{max} = \frac{Q_y h^2}{8J_x} = \frac{3Q_y}{2F}$$
 (2.14)

$$y = \pm \frac{h}{2} \text{ thì } \tau_{zy} = 0$$

Từ đó ta có thể vẽ được biểu đồ τ_{zy} cho mặt cắt như, hình 2.9b.

d. Luật phân bố ứng suất tiếp τ_{zy} đối với mặt cắt hình chữ I:

Xét dầm chịu uốn ngang phẳng có mặt cắt ngang hình chữ I hình 2.10. Để đơn giản ta có thể coi mặt cắt bao gồm ba hình chữ nhật ghép lại: Hình chữ nhật long rộng d , cao $(h-2t)$ và hai hình chữ nhật đế rộng b cao t , hình 2.10b.



Hình 2.10.

Thực tế cho thấy ứng suất tiếp do Q_y gây ra ở phần đế rất bé so với phần lòng. Do vậy ở đây ta chỉ xét sự phân bố ứng suất tiếp τ_{yz} ở phần lòng mặt cắt chữ I mà thôi.

Ta xét điểm bất kỳ $A(x,y)$ thuộc lòng ta có: $bc = d \cdot S_x^c = S_x - \frac{1}{2} dy^2$

$$\text{Suy ra: } \tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^c}{J_x \cdot bc} = \frac{Q_y (S_x - \frac{1}{2} dy^2)}{J_x \cdot d} \quad (2.15)$$

Từ (2.15) ta nhận thấy rằng: Luật phân bố τ_{zy} của phần lòng mặt cắt chữ I là parabol bậc hai đối với y . Với $y=0$ (những điểm nằm trên trục trung hòa ox) thì:

$$\tau_{zy}(0) = \tau_{max} = \frac{Q_y S_x}{J_x \cdot bc} \quad (2.16)$$

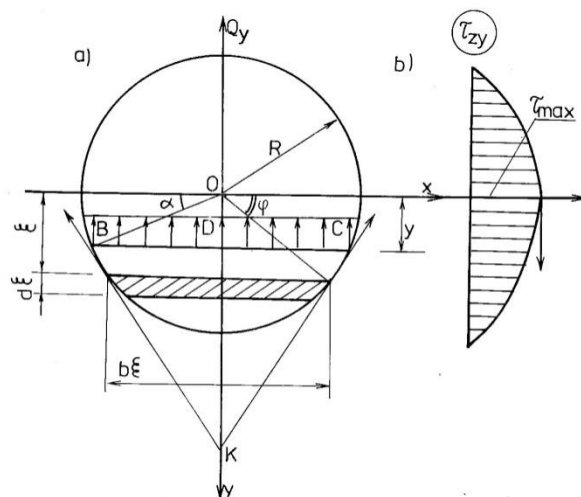
Đối với điểm C tiếp giáp giữa lòng và đế của chữ I, nhưng thuộc phần lòng thì ta có: $y_c = \frac{h}{2} - t$ Từ đó ta có:

$$\tau_c = \tau_1 = \tau_{zy} \left(\frac{h}{2} - t \right) = \frac{Q_y \left[S_x - \frac{1}{2} d \left(\frac{h}{2} - t \right)^2 \right]}{J_x \cdot d} \quad (2.17)$$

Biểu đồ τ_{zy}^1 của phần lòng mặt cắt chữ I được vẽ trên, hình 2.10c.

e. **Luật phân bố ứng suất tiếp τ_{zy} đối với mặt cắt hình tròn:**

Xét dầm chịu uốn ngang phẳng có mặt cắt ngang hình tròn bán kính R , và lực cắt trên mặt cắt này là Q_y , hình 2.11. Ta xét ứng suất tiếp trên đường BC song song với trục ox và cách ox một khoảng bằng y . Ta thấy rằng tại các điểm biên B,C ứng suất tiếp τ tiếp tuyến với chu vi hình tròn và do đối xứng thì ứng suất tiếp tại D có phương y .



Hình 2.11.

Ta thừa nhận rằng ứng suất tiếp tại các điểm khác nhau trên BC có phương qua điểm K đồng thời thành phần song song oy của chúng là bằng nhau, nghĩa là thành phần τ_{zy} phân bố đều trên BC, hình 2.11a. Ta đi tìm luật phân bố của τ_{zy} . Ta có:

$$bc = 2R \cdot \cos\alpha$$

$$\begin{aligned} S_x^c &= \int_{Fc} \rho dF = \int_y^R \rho b dF = \int_{\alpha}^{\pi/2} R \sin\varphi \cdot 2R \cos\varphi \cdot d(R \sin\varphi) \\ &= 2R^3 \int_{\alpha}^{\pi/2} \cos^2\varphi \cdot \sin\varphi d(\varphi) = -2R^3 \int_{\alpha}^{\pi/2} \cos^2\varphi d(\cos\varphi) = \frac{2}{3} R^3 \cos^3\alpha \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } \tau_{zy} = \frac{Q_y \frac{2}{3} R^3 \cos^3\alpha}{J_x \cdot 2R \cos\alpha} = \frac{Q_y R^2 \cos^3\alpha}{3J_x} = \frac{Q_y R^2 (1 - \sin^2\alpha)}{3J_x}$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y (R^2 - y^2)}{3J_x} \quad (2.18)$$

Biểu đồ τ_{zy} được vẽ trên hình 2.11b, trong đó:

$$\tau_{zy}(0) = \tau_{max} = \frac{Q_y R^2}{3J_x} = \frac{4Q_y}{3\pi R^2} = \frac{4Q_y}{3F} \quad (2.19)$$

Biểu đồ τ_{zy} của mặt cắt hình tròn được vẽ trên, hình 2.11b.

2.2. Lý thuyết dầm có xét biến dạng trượt ngang

Lý thuyết xét biến dạng trượt trong dầm do Timoshenko đưa ra và thường được gọi là lý thuyết dầm Timoshenko. Khi xây dựng lý thuyết này vẫn sử dụng giả thiết tiết diện phẳng của lý thuyết dầm thông thường, tuy nhiên do có biến dạng trượt, trục dầm sẽ xoay đi một góc φ không còn thẳng góc với tiết diện dầm nữa.

Lý thuyết xét biến dạng trượt được dùng phổ biến trong phương pháp phần tử hữu hạn hiện nay là dùng hàm độ võng y và hàm góc xoay θ do momen uốn gây ra là hai hàm chưa biết. Trong trường hợp này biến dạng trượt tại trục trung hòa được xác định như sau, ví dụ như [28, trg 5].

$$\gamma = \frac{dy}{dx} - \theta \quad (2.20)$$

Từ đó ta có các công thức xác định M và Q

$$\begin{aligned} M &= -EJ \left(\frac{d\theta}{dx} \right) \\ Q &= \frac{GF}{\alpha} \left[-\frac{dy}{dx} + \theta \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

Trong các công thức trên EJ là độ cứng uốn, GF là độ cứng cắt của tiết diện, G là môđun trượt của vật liệu, F là diện tích tiết diện, α là hệ số xét sự phân bố không đều của ứng suất tiếp trên chiều cao tiết diện.

Các tác giả [28, trg 5] cho rằng khi môđun trượt $G \rightarrow \infty$ thì từ (2.21) suy ra

$$\theta = \frac{dy}{dx} \quad (2.22)$$

nghĩa là trở về lý thuyết dầm không xét biến dạng trượt: Góc xoay của đường độ võng là do mômen gây ra. Theo tác giả, lập luận trên không đúng bởi vì khi thỏa mãn phương trình (2.22) thì từ phương trình (2.21) suy ra lực cắt $Q = 0$,

dẫn về trường hợp uốn thuần túy của dầm. Vì lý do đó nên lý thuyết xét biến dạng trượt dùng y và θ làm ẩn không hội tụ về lý thuyết dầm thông thường và khi áp dụng vào bài toán tấm, nó cũng không hội tụ về lý thuyết tấm thông thường (lý thuyết tấm Kierchhoff, [28, trg 71],[25, trg 404]. Phương hướng chung để khắc phục thiếu sót vừa nêu là bổ sung thêm các nút xét lực cắt Q trong các phần tử dầm hoặc phần tử tấm [25,26, 28] hoặc dùng phần tử có hàm dạng là đa thức bậc thấp (bậc nhất) [31, trg 126]. Vấn đề tìm phần tử có hàm dạng không bị hiện tượng biến dạng trượt bị khóa, shear locking, vẫn đang được tiếp tục nghiên cứu,[32]. Tình hình chung hiện nay về lý thuyết xét biến dạng trượt trong dầm và tấm là như trên.

Khác với các tác giả khác, trong [19, 20] lý thuyết xét biến dạng trượt được xây dựng trên cơ sở hai hàm chưa biết là hàm độ võng y và hàm lực cắt Q . Trong trường hợp này biến dạng trượt xác định theo

$$\gamma = \frac{\alpha Q}{GF} \quad (2.23)$$

α là hệ số xét sự phân bố không đều của ứng suất cắt tại trục dầm.

Góc xoay do momen uốn sinh ra bằng hiệu giữa góc xoay đường độ võng với góc xoay do lực cắt gây ra.

$$\theta = \frac{dy}{dx} - \gamma = \frac{dy}{dx} - \frac{\alpha Q}{GF} \quad (2.24)$$

Momen uốn sẽ bằng

$$M = -EJ \frac{d\theta}{dx} = EJ \left(-\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right) \quad (2.25)$$

Biến dạng uốn χ

$$\chi = -\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \quad (2.26)$$

Dựa trên lý thuyết này ta sẽ xây dựng phương trình cân bằng và các điều kiện biên của dầm như sau. Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss ta viết phiếm hàm lượng cưỡng bức (chuyển động) như sau: (giả sử dầm có lực phân bố đều q).

$$Z = \int_0^l M\chi dx + \int_0^l Q\gamma dx - \int_0^l qy dx \rightarrow \text{Min} \quad (2.27)$$

Các hàm độ võng y , hàm biến dạng trượt γ và hàm biến dạng uốn χ là các đại lượng biến phân, nghĩa là điều kiện cần và đủ để hệ ở trạng thái cân bằng là

$$\delta Z = \int_0^l M\delta\chi dx + \int_0^l Q\delta\gamma dx - \int_0^l q\delta y dx = 0$$

$$\text{Hay } Z = \int_0^l M\delta \left[-\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right] dx + \int_0^l Q\delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] dx - \int_0^l q\delta[y] dx = 0 \quad (2.28)$$

Trong phương trình tích phân (2.28) hai đại lượng cần tìm là $y(x)$ và $Q(x)$ do đó có thể tách ra thành hai phương trình sau:

$$\int_0^l M\delta \left[-\frac{d^2y}{dx^2} \right] dx - \int_0^l q\delta[y] dx = 0 \quad (2.29)$$

$$\int_0^l M\delta \left[\frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right] dx + \int_0^l Q\delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] dx = 0 \quad (2.30)$$

Lấy tích phân từng phần phương trình (2.29)

$$\begin{aligned} \int_0^l M\delta \left[-\frac{d^2y}{dx^2} \right] dx &= - \int_0^l M d \left(\delta \left[\frac{dy}{dx} \right] \right) dx \\ &= -M\delta \left[\frac{dy}{dx} \right] \Big|_0^l + \int_0^l \frac{dM}{dx} \delta \left[\frac{dy}{dx} \right] dx \end{aligned}$$

Tích phân từng phần thành phần cuối của biểu thức trên ta có

$$\int_0^l M \delta \left[-\frac{d^2 y}{dx^2} \right] dx = -M \delta \left[\frac{dy}{dx} \right] \Big|_0^l + \frac{dM}{dx} \delta[y] \Big|_0^l - \int_0^l \frac{d^2 M}{dx^2} \delta[y] dx$$

Phương trình (2.29) sau khi lấy tích phân từng phần có dạng

$$-M \delta \left[\frac{dy}{dx} \right] \Big|_0^l + \frac{dM}{dx} \delta[y] \Big|_0^l - \int_0^l \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) \delta[y] dx = 0 \quad (2.31)$$

Bởi vì các đại lượng $\delta[y]$ và $\delta \left[\frac{dy}{dx} \right]$ là nhỏ và bất kỳ nên từ (2.31) ta có

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + q = 0 \quad (2.31a)$$

$$-M \delta \left[\frac{dy}{dx} \right] \Big|_0^l = 0 \quad (2.31b)$$

$$\frac{dM}{dx} \delta[y] \Big|_0^l = 0 \quad (2.31c)$$

Tích phân từng phần phương trình (2.30):

$$\begin{aligned} \int_0^l M \delta \left[\frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right] dx &= \int_0^l M d \left(\delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] \right) dx \\ &= M \left(\delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] \right) \Big|_0^l - \int_0^l \frac{dM}{dx} \delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] dx \end{aligned}$$

Sau khi lấy tích phân từng phần

$$M \left(\delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] \right) \Big|_0^l + \int_0^l \left(-\frac{dM}{dx} + Q \right) \delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] dx = 0 \quad (2.32)$$

Bởi vì biến phân $\delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right]$ là nhỏ và bất kỳ nên từ (2.13) ta có

$$-\frac{dM}{dx} + Q = 0 \quad (2.32a)$$

$$M \delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] \Big|_0^l = 0 \quad (2.32b)$$

Sử dụng công thức (2.6), hai phương trình vi phân cân bằng của dầm (2.31a) và (2.32a) có dạng.

$$EJ \left[\frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{\alpha}{GF} \frac{d^3 Q}{dx^3} \right] = q \quad (2.33a)$$

$$EJ \left[\frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{\alpha}{GF} \frac{d^2 Q}{dx^2} \right] = Q \quad (2.34a)$$

Phương trình (2.33a) và (2.34a) có thể viết lại dưới dạng

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{\alpha h^2}{6} \frac{d^3 Q}{dx^3} = q \quad (2.33b)$$

$$EJ \frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{\alpha h^2}{6} \frac{d^2 Q}{dx^2} = Q \quad (2.34b)$$

Để nhận được các điều kiện biên của dầm thì kết hợp (2.31b) và (2.32b) ta có

$$M\delta \left[-\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha Q}{GF} \right] \Big|_0^l = 0 \quad (2.35)$$

Chú ý tới phương trình (2.32a), phương trình (2.31c) viết lại như sau

$$Q\delta[y] \Big|_0^l = 0 \quad (2.36)$$

Tóm lại, lý thuyết xét biến dạng trượt cho ta hai phương trình vi phân (2.33) và (2.34) đối với hai hàm y và Q : phương trình (2.33) là phương trình vi phân cân bằng giữa nội lực và ngoại lực, phương trình (2.34) là phương trình liên hệ giữa mômen uốn và lực cắt. Các phương trình (2.35) và (2.36) là các điều kiện biên ở hai đầu thanh.

Ta xét điều kiện biên (2.35)

Nếu như tại $x=0$ hoặc $x=l$, góc xoay θ do mômen uốn gây ra có biến phân

$$\delta\theta = \delta \left[-\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha Q}{GF} \right] \Big|_0^l \neq 0 \quad \text{thì } M \Big|_0^l = 0$$

\rightarrow liên kết khớp (2.37a)

Nếu như góc xoay θ không có biến phân

$$\delta\theta = \delta \left[-\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha Q}{GF} \right] \Big|_0^l = 0 \text{ thì } M|_0^l \text{ bất kỳ}$$

\rightarrow liên kết ngàm (2.37b)

Đối với điều kiện (2.36), nếu như chuyển vị y tại $x=0$ hoặc $x=l$ có biến phân.

$$\delta[y]|_0^l \neq 0 \text{ thì } Q|_0^l = 0,$$

\rightarrow không có gối tựa (2.37c)

Nếu như $\delta[y]|_0^l = 0$ thì $Q|_0^l$ bất kỳ, \rightarrow liên kết gối tựa (2.37d)

Khi không xét biến dạng trượt, $G \rightarrow \infty$ hoặc $h \rightarrow 0$ thì các phương trình (2.33) và (2.34) cũng như các phương trình về điều kiện biên (2.35) và (2.36) hoặc (2.37) đều dẫn về lý thuyết dầm Euler- Bernoulli. Cho nên có thể nói lý thuyết xét biến dạng trượt nêu trên (xem hàm y và hàm Q là hai hàm chưa biết) là lý thuyết đầy đủ về dầm.

Cuối cùng cần lưu ý rằng khi xét tính liên tục về góc xoay giữa hai đoạn dầm là nói đến tính liên tục của góc xoay do mômen gây ra xác định theo công thức (2.24), không phải liên tục của góc xoay $\frac{dy}{dx}$.

Hệ số α

Hệ số α là hệ số tập trung ứng suất cắt tại trục dầm.

Đối với tiết diện chữ nhật $\alpha=1.5$, đối với tiết diện tròn $\alpha=4/3$. Tuy nhiên khi xét biến dạng trượt các trị trên thay đổi tương ứng bằng 1.2 và 1.11 [23, trg 132, 52, trg 492]. Trong tính toán sau này tác giả dùng hệ số $\alpha=1.2$ đối với tiết diện chữ nhật. Phương pháp chung để xác định hệ số α là cân bằng tổng theo chiều cao dầm công của ứng suất cắt thực hiện trên biến dạng trượt tương ứng với công lực cắt thực hiện trên biến dạng trượt tại trục dầm, vấn đề này đã được nhiều tác giả nghiên cứu [23] [25, trg 400].

CHƯƠNG 3.

TÍNH TOÁN KHUNG PHẪNG CHỊU UỐN CÓ XÉT ĐẾN BIẾN DẠNG TRƯỢT NGANG

Để làm sáng tỏ nội dung phương pháp, trong chương này tác giả trình bày các ví dụ tính toán cụ thể như tính toán các khung một tầng một nhịp, khung một tầng hai nhịp, chịu các loại tải trọng khác nhau.

3.1. Bài toán khung có xét biến dạng trượt ngang - Lời giải bán giải tích

Khung là kết cấu làm việc chịu uốn. Các đại lượng biến phân theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss là biến dạng và chuyển vị cho nên để tính khung trước tiên cần giả định dạng đường độ võng của các đoạn của khung, (thí dụ, theo đa thức) hoặc rời rạc đường độ võng theo phương pháp phần tử hữu hạn hoặc theo phương pháp sai phân hữu hạn. Như vậy, khi giải trực tiếp phiếm hàm lượng cưỡng bức Z thì các ẩn của bài toán là:

- các hệ số của hàm xấp xỉ (ví dụ, của đa thức xấp xỉ) hoặc
- chuyển vị tại các điểm của sai phân hữu hạn hoặc
- chuyển vị và góc xoay tại hai nút của phần tử hữu hạn

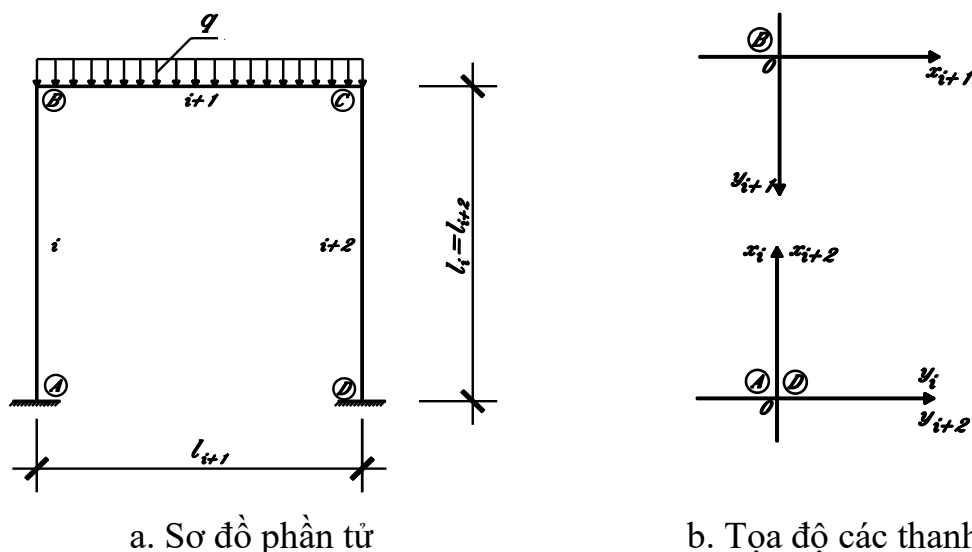
sẽ là các đại lượng biến phân (các biến độc lập) của bài toán.

Gọi $y_i(x)$ là đường độ võng của đoạn thứ i nào đó của khung với trục x trùng với trục dầm, EJ_i là độ cứng uốn của nó, χ_i là biến dạng uốn. Theo (2.25, 2.26) viết cho đoạn thứ i của khung, ta có:

$$EJ_i = \frac{Ebh^3}{12}, \chi_i = -\frac{d^2 y_i}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_i}{dx}, M_i = EJ_i \cdot \chi_i = EJ_i \left(-\frac{d^2 y_i}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_i}{dx} \right) \quad (3.1)$$

ở đây E là môđun đàn hồi vật liệu dầm, b và h là chiều rộng và chiều cao tiết diện đoạn dầm. Tại điểm nối đoạn i và đoạn $(i+1)$ chuyển vị và góc xoay hai đoạn phải bằng nhau (điều kiện liên tục), tại gối tựa chuyển vị bằng không, nếu

là ngàm thì góc xoay cũng bằng không (hình 3.1). Đối với khung, cần xét thêm các chuyển vị tại nút khung. Trên hình (3.1) giới thiệu sơ đồ phần tử, nút khung phẳng một nhịp, một tầng, và tọa độ của các thanh. Do chỉ xét momen uốn và lực cắt trong thanh nên chỉ cần xét một chuyển vị ngang tại đầu cột tầng một và hai chuyển vị xoay tại hai nút của khung.



Hình 3.1 Sơ đồ phần tử, nút và tọa độ các đoạn thanh của khung

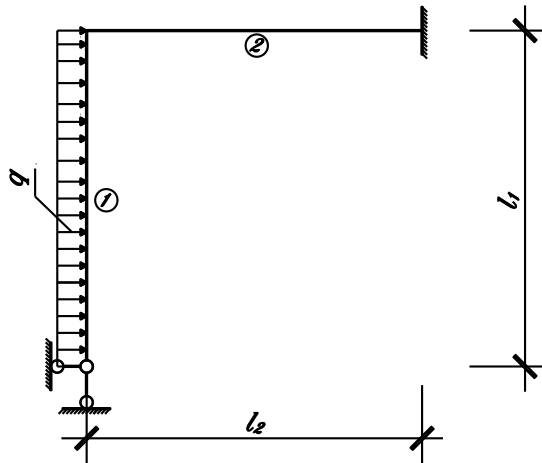
Biết được quan hệ (3.7a) thì dễ dàng xây dựng bài toán kết cấu chịu uốn có xét biến dạng trượt theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss.

Khi giải bài toán cụ thể cần xét điều kiện động học của khung. Do xem lực cắt Q là đại lượng chưa biết nên ngoài việc giả thiết đường độ võng y của các đoạn khung, cần giả thiết dạng phân bố lực cắt Q . Những ví dụ trình bày dưới đây nhằm minh họa cho phương pháp xét biến dạng trượt theo phương pháp của biểu thức (2.27).

3.2. Các ví dụ tính toán khung

Ví dụ 3.1: Khung hai thanh, hình 3.2.

Xác định nội lực và chuyển vị của khung chịu tải trọng như hình 3.2, độ cứng uốn $EJ = \text{Const}$. Tiết diện dầm chữ nhật, có chiều cao h , hệ số ứng suất trượt $\alpha = 1.2$.



Hình 3.2. Khung siêu tĩnh bậc 2

a. Lời giải bán giải tích

Chia khung thành hai đoạn, đoạn một thẳng đứng, đoạn hai nằm ngang tọa độ các thanh như hình 3.1b, các đoạn có chiều dài tương ứng là $l_1 = l_2 = l$. Giả thiết đường độ võng y_1, y_2 , và đường lực cắt Q_1, Q_2 , của khung có dạng đa thức như sau:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4; & Q_1 &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 \\ y_2 &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4; & Q_2 &= d_0 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3 + d_4x^4 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Trong đó: $a_i(i=1\div 4)$, $b_i(i=0\div 4)$, $c_i(i=0\div 4)$, $d_i(i=0\div 4)$, là các ẩn của bài toán. Theo các biểu thức từ (2.23) đến (2.26) tính được: Biến dạng trượt γ_1, γ_2 ; góc xoay θ_1, θ_2 ; biến dạng uốn χ_1, χ_2 , và momen uốn M_{x1}, M_{x2} , tương ứng với các đoạn 1 và 2, cụ thể là:

$$\gamma_i = \frac{\alpha Q_i}{GF}; \quad \theta_i = \frac{dy_i}{dx} - \gamma_i = \frac{dy_i}{dx} - \frac{\alpha Q_i}{GF}; \quad \text{với } (i=1\div 2)$$

$$\chi_i = -\frac{d^2 y_i}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_i}{dx}; \quad M_{xi} = -EJ\chi_i = EJ \left(-\frac{d^2 y_i}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_i}{dx} \right)$$

Trong đó: α là hệ số xét sự phân bố không đều của ứng suất cắt tại trục dầm; GF là độ cứng cắt của dầm

$$GF = \frac{E}{2} F = \frac{6EJ}{h^2}$$

Lượng cường bức theo (2.27) được viết như sau:

$$Z = \int_0^{l_1} M_{x_1} \chi_1 dx + \int_0^{l_1} Q_1 \gamma_1 dx - \int_0^{l_1} q y_1 dx + \int_0^{l_2} M_{x_2} \chi_2 dx + \int_0^{l_2} Q_2 \gamma_2 dx \rightarrow \text{Min (b)}$$

Hàm độ võng y_i phải thoả mãn các điều kiện ràng buộc sau:

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= EJ \left(-\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_1}{dx} \right) \Big|_{x=0} = 0; \quad g_2 = y_1 \Big|_{x=l_1}; \\ g_3 &= \left(\frac{dy_1}{dx} - \frac{\alpha Q_1}{GF} \right) \Big|_{x=l_1} = \left(\frac{dy_2}{dx} - \frac{\alpha Q_2}{GF} \right) \Big|_{x=0}; \quad g_4 = \left(\frac{dy_2}{dx} - \frac{\alpha Q_2}{GF} \right) \Big|_{x=l_2}; \quad g_5 = y_2 \Big|_{x=l_2}; \end{aligned} \right\} \text{(c)}$$

Đưa bài toán tìm cực trị (b) với các ràng buộc (c) về bài toán cực trị không ràng buộc bằng cách xây dựng phiếm hàm mở rộng Lagrange F như sau:

$$F = Z + \sum_{k=1}^5 \lambda_k g_k \rightarrow \text{Min} \quad \text{(d)}$$

với $\lambda_k (k=1 \div 5)$ là các thừa số Lagrange cũng là các ẩn của bài toán. Như vậy có tổng cộng 24 ẩn $a_i (i=1 \div 4)$, $b_i (i=0 \div 4)$, $c_i (i=0 \div 4)$, $d_i (i=0 \div 4)$, và 5 thừa số λ_i). Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss xem các biến dạng uốn là độc lập với mômen tác dụng cho nên điều kiện cực trị của phiếm hàm mở rộng F là:

$$\left. \begin{aligned} h_i &= \int_0^{l_1} [M_{x_1}] \frac{\partial}{\partial a_i} (\chi_1) dx + \frac{\partial}{\partial a_i} \sum_{k=1}^5 (g_k \lambda_k) - \int_0^{l_1} [q] \frac{\partial}{\partial a_i} (y_1) dx = 0; \quad a_i (i=1, 2, 3, 4) \\ f_i &= \int_0^{l_1} [M_{x_1}] \frac{\partial}{\partial b_i} (\chi_1) dx + \frac{\partial}{\partial b_i} \sum_{k=1}^5 (g_k \lambda_k) + \int_0^{l_1} [Q_1] \frac{\partial}{\partial b_i} (\gamma_1) dx = 0; \quad b_i (i=0, 1, 2, 3, 4) \\ k_i &= \int_0^{l_2} [M_{x_2}] \frac{\partial}{\partial c_i} (\chi_2) dx + \frac{\partial}{\partial c_i} \sum_{k=1}^5 (g_k \lambda_k) = 0; \quad c_i (i=0, 1, 2, 3, 4) \\ t_i &= \int_0^{l_2} [M_{x_2}] \frac{\partial}{\partial d_i} (\chi_2) dx + \frac{\partial}{\partial d_i} \sum_{k=1}^5 (g_k \lambda_k) + \int_0^{l_2} [Q_2] \frac{\partial}{\partial d_i} (\gamma_2) dx = 0; \quad d_i (i=0, 1, 2, 3, 4) \end{aligned} \right\} \text{(d1)}$$

nhận được 24 phương trình bậc nhất để xác định 24 ẩn số. Giải các phương trình trên ta nhận được kết quả tính đường độ võng y_i và lực cắt Q_i với 5 tỉ lệ $\frac{h}{l}$ như sau:

Bảng 1: So sánh độ võng lớn nhất tại điểm giữa nhịp thanh 1 của khung, hình 3.2, trường hợp không kể và có kể tới ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang.

Tỉ số h/l	y_{\max} của dầm khi không kể tới ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang	y_{\max} của dầm khi có kể tới ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang	Chênh lệch độ võng (%)
1/100	$0.0086 \frac{ql^4}{EJ}$	$0.0086 \frac{ql^4}{EJ}$	0
1/10	$0.0086 \frac{ql^4}{EJ}$	$0.0089 \frac{ql^4}{EJ}$	3.3707
1/5	$0.0086 \frac{ql^4}{EJ}$	$0.0097 \frac{ql^4}{EJ}$	11.3402
1/3	$0.0086 \frac{ql^4}{EJ}$	$0.0118 \frac{ql^4}{EJ}$	27.1186

Bảng 2: So sánh mômen uốn tại điểm nút giữa thanh 1 và 2 của khung, hình 3.2, khi không kể và có kể tới ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang.

Tỉ số h/l	M_{\min} của nút khung khi không kể tới ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang	M_{\min} của nút khung khi có kể tới ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang	Chênh lệch mômen (%)
1/100	$-0.0714ql^2$	$-0.0714ql^2$	0
1/10	$-0.0714ql^2$	$-0.0706ql^2$	1.1204
1/5	$-0.0714ql^2$	$-0.0684ql^2$	4.2016
1/3	$-0.0714ql^2$	$-0.0639ql^2$	10.5042

Từ kết quả tính thấy rằng mô men uốn tại nút khung thay đổi từ 1.12% đến 10.5% tương ứng với tỉ lệ h/l của tiết diện thay đổi từ 1/10 đến 1/3, Q tại nút khung chỉ thay đổi khoảng từ 0.14% đến 1.31%. Đối với ví dụ tính khung xét biên dạng trượt này không làm thay đổi nhiều nội lực mo-men, chỉ làm thay đổi lực cắt và đường độ võng của dầm lần lượt là từ 1.68% đến 16.1% đối với lực cắt và từ 3.37% đến 27.11% đối với độ võng tương ứng với các tỉ lệ h/l=1/10 đến h/l=1/3.

$$y_1(x) = 0.0298 \frac{ql^3}{EJ} x - 10^{-7} \frac{ql^2}{EJ} x^2 - 0.0714 \frac{ql}{EJ} x^3 - \frac{1}{24} \frac{q}{EJ} x^4$$

$$M_1(x) = 0.4286qlx - \frac{1}{2}qx^2$$

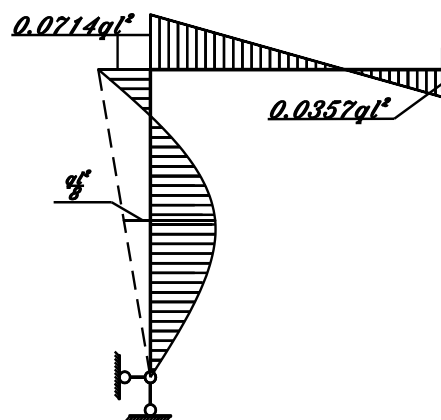
$$Q_1(x) = 0.4286ql - qx$$

$$y_2(x) = -0.0179 \frac{ql^3}{EJ} x + 0.0357 \frac{ql^2}{EJ} x^2 - 0.0179 \frac{ql}{EJ} x^3$$

$$M_2(x) = -0.0714ql^2 + 0.107qx^2$$

$$Q_2(x) = 0.1071ql$$

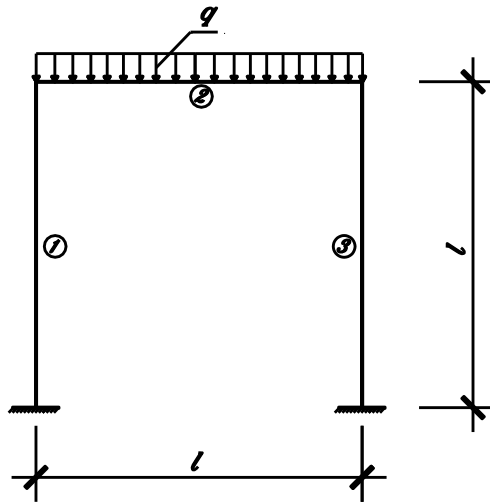
Khi không xét biến dạng trượt (cho h/l=1/1000), ta có biểu đồ mô men uốn của khung, hình 3.3.



Hình 3.3. Biểu đồ M

Ví dụ 3.2. Khung một tầng một nhịp, hình 3.4.

Xác định nội lực và chuyển vị của khung một tầng một nhịp chịu tải trọng như hình 3.4, độ cứng uốn $EJ=Const$. Tiết diện dầm chữ nhật, có chiều cao h , hệ số ứng suất trượt $\alpha = 1.2$.



Hình 3.4. Khung một tầng một nhịp

a. Lời giải bán giải tích

Chia khung thành ba đoạn, đoạn một và đoạn ba thẳng đứng, đoạn hai nằm ngang tọa độ các thanh như hình 3.1b, các đoạn có chiều dài tương ứng là $l_1 = l_2 = l_3 = l$.

Giả thiết đường độ võng y_1, y_2, y_3 , và đường lực cắt Q_1, Q_2, Q_3 , của khung có dạng đa thức như sau:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4; & Q_1 &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 \\ y_2 &= c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4; & Q_2 &= d_0 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3 + d_4x^4 \\ y_3 &= e_2x^2 + e_3x^3 + e_4x^4; & Q_3 &= n_0 + n_1x + n_2x^2 + n_3x^3 + n_4x^4 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Trong đó: $a_i(i=2\div 4)$, $b_i(i=0\div 4)$, $c_i(i=1\div 4)$, $d_i(i=0\div 4)$, $e_i(i=2\div 4)$, $n_i(i=0\div 4)$, là các ẩn của bài toán. Theo các biểu thức từ (2.23) đến (2.26) tính được: Biến dạng trượt $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$; góc xoay $\theta_1, \theta_2, \theta_3$; biến dạng uốn χ_1, χ_2, χ_3 và momen uốn M_{x1}, M_{x2}, M_{x3} , tương ứng với các đoạn 1, 2 và 3, cụ thể là:

$$\gamma_i = \frac{\alpha Q_i}{GF}; \quad \theta_i = \frac{dy_i}{dx} - \gamma_i = \frac{dy_i}{dx} - \frac{\alpha Q_i}{GF}; \quad \text{với } (i=1\div 3)$$

$$\chi_i = -\frac{d^2 y_i}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_i}{dx}; \quad M_{xi} = -EJ\chi_i = EJ \left(-\frac{d^2 y_i}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_i}{dx} \right)$$

Trong đó: α là hệ số xét sự phân bố không đều của ứng suất cắt tại trục dầm; GF là độ cứng cắt của dầm

$$GF = \frac{E}{2} F = \frac{6EJ}{h^2}$$

Lượng cưỡng bức theo (2.27) được viết như sau:

$$Z = \int_0^{l_1} M_{x_1} \chi_1 dx + \int_0^{l_1} Q_1 \gamma_1 dx + \int_0^{l_2} M_{x_2} \chi_2 dx + \int_0^{l_2} Q_2 \gamma_2 dx - \int_0^{l_2} qy_2 dx \rightarrow Min \text{ (b)}$$

Hàm độ võng y_i phải thoả mãn các điều kiện ràng buộc sau:

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= \left(\frac{dy_1}{dx} - \frac{\alpha Q_1}{GF} \right) \Big|_{x=l_1} = \left(\frac{dy_2}{dx} - \frac{\alpha Q_2}{GF} \right) \Big|_{x=0} \\ g_2 &= \left(\frac{dy_2}{dx} - \frac{\alpha Q_2}{GF} \right) \Big|_{x=l_2} = \left(\frac{dy_3}{dx} - \frac{\alpha Q_3}{GF} \right) \Big|_{x=l_3} \\ g_3 &= y_2 \Big|_{x=l_2}; \quad g_4 = y_1 \Big|_{x=l_1} = y_3 \Big|_{x=l_3}; \end{aligned} \right\} \text{ (c)}$$

Đưa bài toán tìm cực trị (b) với các ràng buộc (c) về bài toán cực trị không ràng buộc bằng cách xây dựng phiếm hàm mở rộng Lagrange F như sau:

$$F = Z + \sum_{k=1}^4 \lambda_k g_k \rightarrow Min \quad \text{(d)}$$

với $\lambda_k (k=1 \div 4)$ là các thừa số Lagrange cũng là các ẩn của bài toán. Như vậy có tổng cộng 29 ẩn $a_i (i=2 \div 4)$, $b_i (i=0 \div 4)$, $c_i (i=1 \div 4)$, $d_i (i=0 \div 4)$, $e_i (i=2 \div 4)$, $n_i (i=0 \div 4)$, và 4 thừa số λ_i). Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss xem các biến dạng uốn là độc lập với mômen tác dụng cho nên điều kiện cực trị của phiếm hàm mở rộng F là:

$$\left. \begin{aligned}
h_i &= \int_0^{l_1} [M_{x1}] \frac{\partial}{\partial a_i} (\chi_1) dx + \frac{\partial}{\partial a_i} \sum_{k=1}^4 (g_k \lambda_k) = 0; \quad a_i (i = 2, 3, 4) \\
f_i &= \int_0^{l_1} [M_{x1}] \frac{\partial}{\partial b_i} (\chi_1) dx + \frac{\partial}{\partial b_i} \sum_{k=1}^4 (g_k \lambda_k) + \int_0^{l_1} [Q_1] \frac{\partial}{\partial b_i} (\gamma_1) dx = 0; \\
&\quad b_i (i = 0, 1, 2, 3, 4) \\
h_{2i} &= \int_0^{l_2} [M_{x2}] \frac{\partial}{\partial c_i} (\chi_2) dx + \frac{\partial}{\partial c_i} \sum_{k=1}^4 (g_k \lambda_k) - \int_0^{l_2} [q] \frac{\partial}{\partial c_i} (y_1) dx = 0; \quad c_i (i = 1, 2, 3, 4) \\
f_{2i} &= \int_0^{l_2} [M_{x2}] \frac{\partial}{\partial d_i} (\chi_2) dx + \frac{\partial}{\partial d_i} \sum_{k=1}^4 (g_k \lambda_k) + \int_0^{l_2} [Q_2] \frac{\partial}{\partial d_i} (\gamma_2) dx = 0; \quad d_i (i = 0, 1, 2, 3, 4) \\
k_i &= \int_0^{l_3} [M_{x3}] \frac{\partial}{\partial e_i} (\chi_3) dx + \frac{\partial}{\partial e_i} \sum_{k=1}^4 (g_k \lambda_k) = 0; \quad e_i (i = 2, 3, 4) \\
t_i &= \int_0^{l_3} [M_{x3}] \frac{\partial}{\partial n_i} (\chi_3) dx + \frac{\partial}{\partial n_i} \sum_{k=1}^4 (g_k \lambda_k) + \int_0^{l_3} [Q_3] \frac{\partial}{\partial n_i} (\gamma_3) dx = 0; \quad a_i (i = 0, 1, 2, 3, 4)
\end{aligned} \right\} (e)$$

nhận được 29 phương trình bậc nhất để tìm 29 ẩn số. Giải các phương trình trên ta nhận được kết quả tính đường độ võng y_i và lực cắt Q_i với 5 tỉ lệ $\frac{h}{l}$ như sau:

Bảng 3: Mô men uốn tại các đầu thanh 1, 2 và 3.

Tỉ số h/l	M_{11}	$M_{12} = M_{21} = M_{22}$	$M_{2\frac{1}{2}}$	M_{31}	M_{32}
1/100	$0.0277ql^2$	$-0.0555ql^2$	$0.0695ql^2$	$-0.0277ql^2$	$0.0555ql^2$
1/10	$0.0252ql^2$	$-0.0549ql^2$	$0.0701ql^2$	$-0.0252ql^2$	$0.0549ql^2$
1/5	$0.0196ql^2$	$-0.0534ql^2$	$0.0716ql^2$	$-0.0196ql^2$	$0.0534ql^2$

1/3	$0.0128ql^2$	$-0.0512ql^2$	$0.0738ql^2$	$-0.0128ql^2$	$0.0512ql^2$
-----	--------------	---------------	--------------	---------------	--------------

Bảng 4: So sánh độ võng lớn nhất tại điểm giữa nhịp thanh 2 của khung, hình 3.4: không kể và có kể tới ảnh hưởng của biến dạng trượt do lực cắt gây ra.

Tỉ số h/l	y_{\max} của dầm khi không kể tới ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang	y_{\max} của dầm khi có kể tới ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang	Chênh lệch độ võng (%)
1/100	$0.0061 \frac{ql^4}{EJ}$	$0.0061 \frac{ql^4}{EJ}$	0
1/10	$0.0061 \frac{ql^4}{EJ}$	$0.0064 \frac{ql^4}{EJ}$	4.6875
1/5	$0.0061 \frac{ql^4}{EJ}$	$0.0072 \frac{ql^4}{EJ}$	15.2777
1/3	$0.0061 \frac{ql^4}{EJ}$	$0.0092 \frac{ql^4}{EJ}$	33.6956

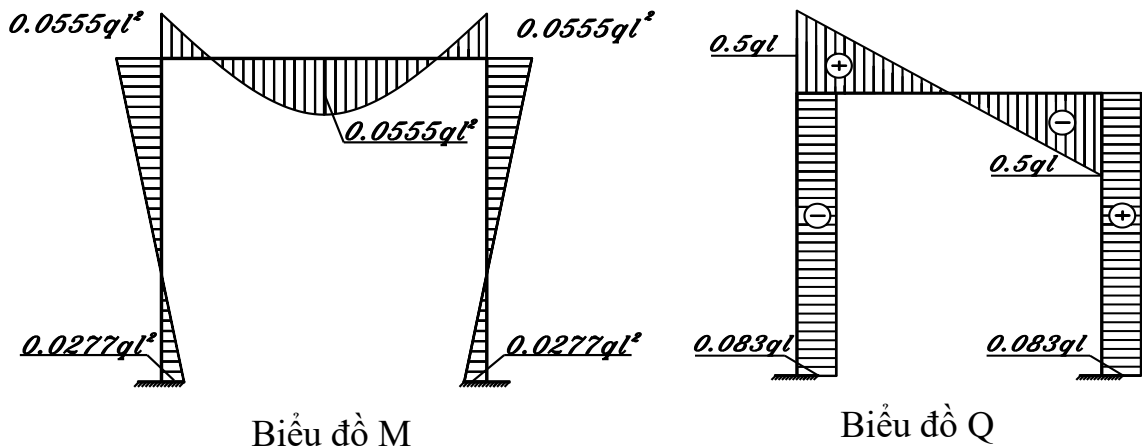
Bảng 5: So sánh mômen uốn tại điểm nút giữa thanh đứng và thanh ngang của khung, hình 3.4: không kể và có kể tới ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang.

Tỉ số h/l	M_{\min} của nút khung khi không kể tới ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang	M_{\min} của nút khung khi có kể tới ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang	Chênh lệch mômen (%)
1/100	$-0.0555ql^2$	$-0.0555ql^2$	0
1/10	$-0.0555ql^2$	$-0.0549ql^2$	1.081

1/5	$-0.0555ql^2$	$-0.0534ql^2$	3.783
1/3	$-0.0555ql^2$	$-0.0512ql^2$	7.747

Từ kết quả tính thấy rằng mô men uốn tại nút khung thay đổi từ 1.081% đến 7.747% tương ứng với tỉ lệ h/l của tiết diện thay đổi từ 1/10 đến 1/3. Đối với ví dụ tính khung xét biến dạng trượt này không làm thay đổi nhiều nội lực mô-men, chỉ làm thay đổi đường độ võng của dầm lần lượt là từ 4.68% đến 33.69% tương ứng với các tỉ lệ $h/l=1/10$ đến $h/l=1/3$.

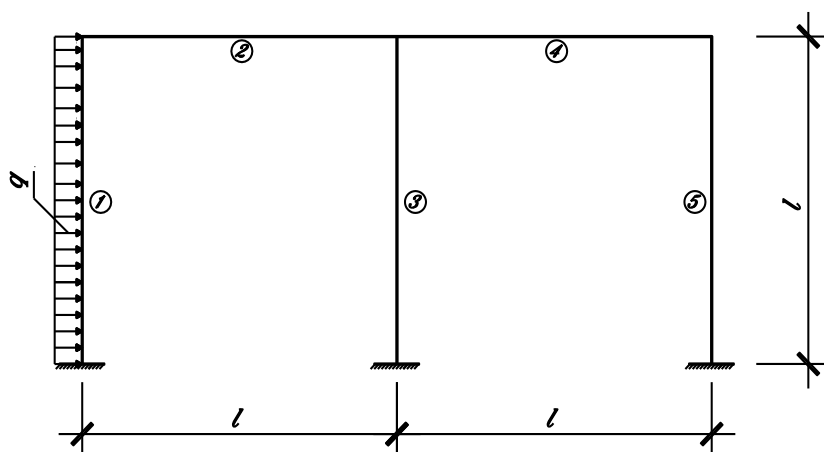
Khi không xét biến dạng trượt (cho $h/l=1/1000$), ta có biểu đồ mô men uốn của khung một tầng một nhịp như hình 3.5:



Hình 3.5. Biểu đồ M và Q

Ví dụ 3.3. Khung một tầng hai nhịp

Xác định nội lực và chuyển vị của khung siêu tĩnh một tầng hai nhịp chịu tải trọng như hình 3.6, độ cứng uốn $EJ=Const$. Tiết diện dầm chữ nhật, có chiều cao h , hệ số ứng suất trượt $\alpha = 1.2$.



Hình 3.6. Khung siêu tĩnh bậc sáu

Chia khung thành năm đoạn, đoạn một, ba và năm thẳng đứng, đoạn hai và bốn nằm ngang tọa độ các thanh như hình 2.6b, các đoạn có chiều dài tương ứng là $l_1=l_2=l_3=l_4=l_5=l$.

Giả thiết đường độ võng y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 , và đường lực cắt Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 , của khung có dạng đa thức như sau:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4; & Q_1 &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 \\ y_2 &= c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4; & Q_2 &= d_0 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3 + d_4x^4 \\ y_3 &= e_2x^2 + e_3x^3 + e_4x^4; & Q_3 &= n_0 + n_1x + n_2x^2 + n_3x^3 + n_4x^4 \\ y_4 &= j_1x + j_2x^2 + j_3x^3 + j_4x^4; & Q_4 &= w_0 + w_1x + w_2x^2 + w_3x^3 + w_4x^4 \\ y_5 &= i_2x^2 + i_3x^3 + i_4x^4; & Q_5 &= v_0 + v_1x + v_2x^2 + v_3x^3 + v_4x^4 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Trong đó: $a_i(i=2\div 4)$, $b_i(i=0\div 4)$, $c_i(i=1\div 4)$, $d_i(i=0\div 4)$, $e_i(i=2\div 4)$, $n_i(i=0\div 4)$, $j_i(i=1\div 4)$, $w_i(i=0\div 4)$, $i_i(i=2\div 4)$, $v_i(i=0\div 4)$, là các ẩn của bài toán. Theo các biểu thức từ (2.23) đến (2.26) tính được: Biến dạng trượt $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$; góc xoay $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$; biến dạng uốn $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5$ và momen uốn $M_{x1}, M_{x2}, M_{x3}, M_{x4}, M_{x5}$, tương ứng với các đoạn 1, 2, 3, 4 và 5, cụ thể là:

$$\gamma_i = \frac{\alpha Q_i}{GF}; \quad \theta_i = \frac{dy_i}{dx} - \gamma_i = \frac{dy_i}{dx} - \frac{\alpha Q_i}{GF}; \quad \text{với } (i=1\div 5)$$

$$\chi_i = -\frac{d^2 y_i}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_i}{dx}; \quad M_{xi} = -EJ\chi_i = EJ \left(-\frac{d^2 y_i}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_i}{dx} \right)$$

Trong đó: α là hệ số xét sự phân bố không đều của ứng suất cắt tại trục dầm; GF là độ cứng cắt của dầm

$$GF = \frac{E}{2} F = \frac{6EJ}{h^2}$$

Lượng cưỡng bức theo (2.8) được viết như sau:

$$Z = \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{l_1} M_{x1} \chi_1 dx + \int_0^{l_1} Q_1 \gamma_1 dx - \int_0^{l_1} qy_1 dx + \int_0^{l_2} M_{x2} \chi_2 dx + \int_0^{l_2} Q_2 \gamma_2 dx + \\ + \int_0^{l_3} M_{x3} \chi_3 dx + \int_0^{l_3} Q_3 \gamma_3 dx + \int_0^{l_4} M_{x4} \chi_4 dx + \int_0^{l_4} Q_4 \gamma_4 dx \end{array} \right\} \rightarrow Min \quad (b)$$

Hàm độ võng y_i phải thoả mãn các điều kiện ràng buộc sau:

$$\left. \begin{array}{l} g_1 = \left(\frac{dy_1}{dx} - \frac{\alpha Q_1}{GF} \right) \Big|_{x=l_1} = \left(\frac{dy_2}{dx} - \frac{\alpha Q_2}{GF} \right) \Big|_{x=0} ; \quad g_5 = y_1 \Big|_{x=l_1} = y_3 \Big|_{x=l_3} ; \\ g_2 = \left(\frac{dy_2}{dx} - \frac{\alpha Q_2}{GF} \right) \Big|_{x=l_2} = \left(\frac{dy_3}{dx} - \frac{\alpha Q_3}{GF} \right) \Big|_{x=l_3} ; \quad g_6 = y_3 \Big|_{x=l_3} = y_5 \Big|_{x=l_5} \\ g_3 = \left(\frac{dy_3}{dx} - \frac{\alpha Q_3}{GF} \right) \Big|_{x=l_3} = \left(\frac{dy_4}{dx} - \frac{\alpha Q_4}{GF} \right) \Big|_{x=0} ; \quad g_7 = y_2 \Big|_{x=l_2} ; \\ g_4 = \left(\frac{dy_4}{dx} - \frac{\alpha Q_4}{GF} \right) \Big|_{x=l_4} = \left(\frac{dy_5}{dx} - \frac{\alpha Q_5}{GF} \right) \Big|_{x=l_5} ; \quad g_8 = y_4 \Big|_{x=l_4} = 0 \end{array} \right\} \quad (c)$$

Đưa bài toán tìm cực trị (b) với các ràng buộc (c) về bài toán cực trị không ràng buộc bằng cách xây dựng phiếm hàm mở rộng Lagrange F như sau:

$$F = Z + \sum_{k=1}^8 \lambda_k g_k \rightarrow Min \quad (d)$$

với $\lambda_k (k=1 \div 8)$ là các thừa số Lagrange cũng là các ẩn của bài toán. Như vậy có tổng cộng 49 ẩn $a_i (i=2 \div 4)$, $b_i (i=0 \div 4)$, $c_i (i=1 \div 4)$, $d_i (i=0 \div 4)$, $e_i (i=2 \div 4)$, $n_i (i=0 \div 4)$, $j_i (i=1 \div 4)$, $w_i (i=0 \div 4)$, $i_i (i=2 \div 4)$, $v_i (i=0 \div 4)$, và 8 thừa số λ_i . Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss xem các biến dạng uốn là độc lập với mômen tác dụng cho nên điều kiện cực trị của phiếm hàm mở rộng F là:

$$\left. \begin{aligned}
h_i &= \int_0^{l_1} [M_{x1}] \frac{\partial}{\partial a_i} (\chi_1) dx + \frac{\partial}{\partial a_i} \sum_{k=1}^{11} (g_k \lambda_k) - \int_0^{l_1} [q] \frac{\partial}{\partial a_i} (y_1) dx = 0; \quad a_i (i = 2, 3, 4) \\
f_i &= \int_0^{l_1} [M_{x1}] \frac{\partial}{\partial b_i} (\chi_1) dx + \frac{\partial}{\partial b_i} \sum_{k=1}^{11} (g_k \lambda_k) + \int_0^{l_1} [Q_1] \frac{\partial}{\partial b_i} (\gamma_1) dx = 0; \quad b_i (i = 0, 1, 2, 3, 4) \\
h_{2i} &= \int_0^{l_2} [M_{x2}] \frac{\partial}{\partial c_i} (\chi_2) dx + \frac{\partial}{\partial c_i} \sum_{k=1}^{11} (g_k \lambda_k) = 0; \quad c_i (i = 1, 2, 3, 4) \\
f_{2i} &= \int_0^{l_2} [M_{x2}] \frac{\partial}{\partial d_i} (\chi_2) dx + \frac{\partial}{\partial d_i} \sum_{k=1}^{11} (g_k \lambda_k) + \int_0^{l_2} [Q_2] \frac{\partial}{\partial d_i} (\gamma_2) dx = 0; \quad d_i (i = 0, 1, 2, 3, 4) \\
k_{3i} &= \int_0^{l_3} [M_{x3}] \frac{\partial}{\partial e_i} (\chi_3) dx + \frac{\partial}{\partial e_i} \sum_{k=1}^{11} (g_k \lambda_k) = 0; \quad e_i (i = 2, 3, 4) \\
t_{3i} &= \int_0^{l_3} [M_{x3}] \frac{\partial}{\partial n_i} (\chi_3) dx + \frac{\partial}{\partial n_i} \sum_{k=1}^{11} (g_k \lambda_k) + \int_0^{l_3} [Q_3] \frac{\partial}{\partial n_i} (\gamma_3) dx = 0; \quad n_i (i = 0, 1, 2, 3, 4)
\end{aligned} \right\} \text{(d1)}$$

$$\left. \begin{aligned}
h_{4i} &= \int_0^{l_4} [M_{x4}] \frac{\partial}{\partial j_i} (\chi_4) dx + \frac{\partial}{\partial j_i} \sum_{k=1}^{11} (g_k \lambda_k) = 0; \quad j_i (i = 1, 2, 3, 4) \\
f_{4i} &= \int_0^{l_4} [M_{x4}] \frac{\partial}{\partial w_i} (\chi_4) dx + \frac{\partial}{\partial w_i} \sum_{k=1}^{11} (g_k \lambda_k) + \int_0^{l_4} [Q_4] \frac{\partial}{\partial w_i} (\gamma_4) dx = 0; \quad i_i (i = 0, 1, 2, 3, 4) \\
k_{5i} &= \int_0^{l_5} [M_{x5}] \frac{\partial}{\partial i_i} (\chi_5) dx + \frac{\partial}{\partial i_i} \sum_{k=1}^{11} (g_k \lambda_k) = 0; \quad i_i (i = 2, 3, 4) \\
t_{5i} &= \int_0^{l_5} [M_{x5}] \frac{\partial}{\partial v_i} (\chi_5) dx + \frac{\partial}{\partial v_i} \sum_{k=1}^{11} (g_k \lambda_k) + \int_0^{l_5} [Q_5] \frac{\partial}{\partial v_i} (\gamma_5) dx = 0; \quad w_i (i = 0, 1, 2, 3, 4)
\end{aligned} \right\} \text{(d2)}$$

nhận được 49 phương trình bậc nhất để xác định 49 ẩn số. Giải các phương trình trên ta nhận được kết quả tính đường độ võng y_i và lực cắt Q_i với 5 tỉ lệ

$\frac{h}{l}$ như sau:

Bảng 6: Chuyển vị tại giữa dưng 1 và thanh ngang 2, 4.

Tỉ số h/l	$y_{\frac{1}{2}}$	$y_{\frac{2}{2}}$	$y_{\frac{4}{2}}$
1/100	$0.0110 \frac{ql^4}{EJ}$	$-0.000732 \frac{ql^4}{EJ}$	$-0.00057 \frac{ql^4}{EJ}$
1/10	$0.0132 \frac{ql^4}{EJ}$	$-0.000766 \frac{ql^4}{EJ}$	$-0.000634 \frac{ql^4}{EJ}$
1/5	$0.0179 \frac{ql^4}{EJ}$	$-0.000779 \frac{ql^4}{EJ}$	$-0.000782 \frac{ql^4}{EJ}$
1/3	$0.0264 \frac{ql^4}{EJ}$	$-0.000707 \frac{ql^4}{EJ}$	$-0.0011 \frac{ql^4}{EJ}$

Bảng 7: Mô men uốn tại các ngàm chân cột 1, 3 và 5.

Tỉ số h/l	M_{11}	M_{31}	M_{51}
1/100	-0.1835	-0.0885	-0.0794
1/10	-0.1769	-0.0879	-0.0792
1/5	-0.1614	-0.0852	-0.0773
1/3	-0.1387	-0.0777	-0.0712

Bảng 8: Mô men uốn tại các nút khung

Tỉ số h/l	$M_{12} = M_{21}$	M_{22}	M_{32}	M_{41}	M_{42}	M_{52}
1/100	0.0156	-0.0274	0.0756	0.0482	-0.0573	0.0573
1/10	0.0169	-0.0290	0.0791	0.0501	-0.0600	0.0600
1/5	0.0212	-0.0335	0.0881	0.0546	-0.0667	0.0667
1/3	0.0311	-0.0424	0.1037	0.0613	-0.0777	0.0777

Bảng 9: So sánh độ võng lớn nhất tại điểm giữa của thanh số 1 trong hai trường hợp: không kể và có kể tới ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang

Tỉ số h/l	y_{\max} của dầm khi không kể tới ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang	y_{\max} của dầm khi có kể tới ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang	Chênh lệch độ võng (%)
1/100	$0.0110 \frac{ql^4}{EJ}$	$0.0110 \frac{ql^4}{EJ}$	0
1/10	$0.0110 \frac{ql^4}{EJ}$	$0.0132 \frac{ql^4}{EJ}$	16.6666
1/5	$0.0110 \frac{ql^4}{EJ}$	$0.0179 \frac{ql^4}{EJ}$	38.5474
1/3	$0.0110 \frac{ql^4}{EJ}$	$0.0264 \frac{ql^4}{EJ}$	58.3333

Bảng 10: So sánh mômen tại điểm chân cột 1 của khung một tầng hai nhịp trong hai trường hợp: không kể và có kể tới ảnh hưởng của biến dạng trượt.

Tỉ số h/l	M_{\min} của dầm khi không kể tới ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang	M_{\min} của dầm khi có kể tới ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang	Chênh lệch mômen (%)
1/100	-0.1835	-0.1835	0
1/10	-0.1835	-0.1769	3.5967
1/5	-0.1835	-0.1614	12.0435
1/3	-0.1835	-0.1387	24.4141

Từ kết quả tính thấy rằng mô men uốn trong trường hợp này thay tương đối lớn khi ta thay đổi tỉ lệ h/l của tiết diện, M thay đổi khoảng từ 3.59% đến 24.41%.

Đường độ võng của cột 1 thay đổi rất lớn từ 16.66% đến 58.33% tương ứng với các tỉ lệ $h/l=1/10$ đến $h/l=1/3$. Khi không xét biến dạng trượt (cho $h/l=1/1000$), ta có:

$$y_1 = 0.0918 \frac{ql^2}{EJ} x^2 - 0.1165 \frac{ql}{EJ} x^3 + 0.0417 \frac{q}{EJ} x^4$$

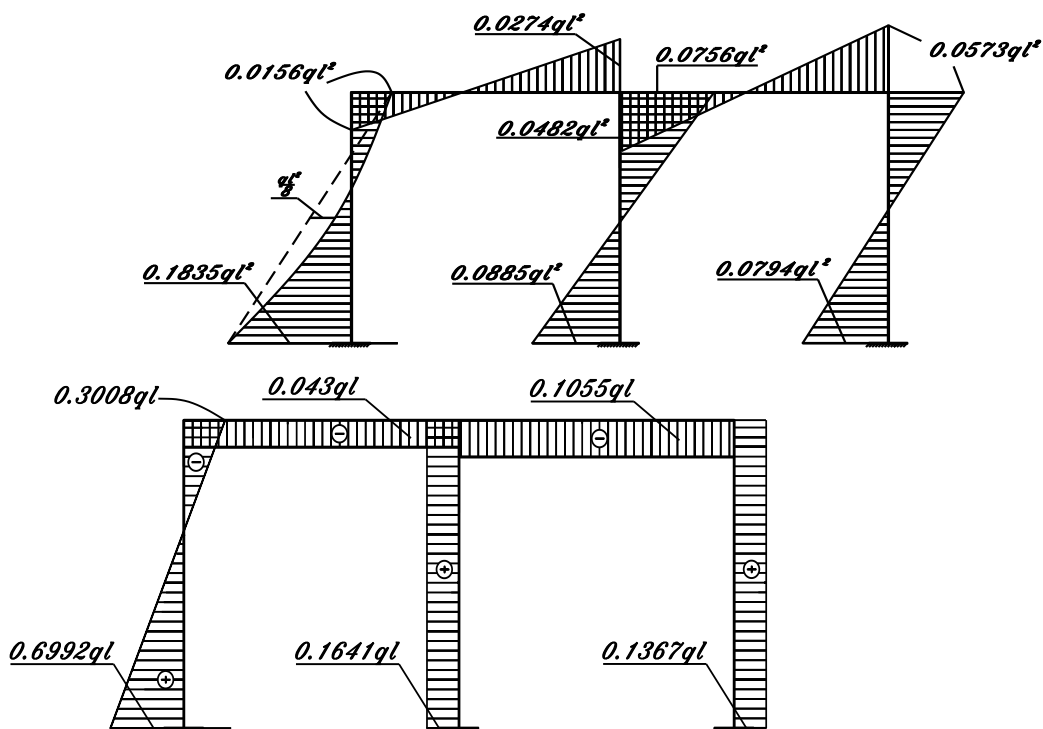
$$y_2 = 0.000651 \frac{ql^3}{EJ} x - 0.0078 \frac{ql^2}{EJ} x^2 + 0.0072 \frac{ql}{EJ} x^3$$

$$y_3 = 0.0443 \frac{ql^2}{EJ} x^2 - 0.0273 \frac{ql}{EJ} x^3 + 0.000000619 \frac{q}{EJ} x^4$$

$$y_4 = 0.0065 \frac{ql^3}{EJ} x - 0.0241 \frac{ql^2}{EJ} x^2 + 0.0176 \frac{ql}{EJ} x^3$$

$$y_5 = 0.0397 \frac{ql^2}{EJ} x^2 - 0.0228 \frac{ql}{EJ} x^3 + 0.000000555 \frac{q}{EJ} x^4$$

biểu đồ mô men uốn và lực cắt của khung một tầng hai nhịp như hình 2.7:



Hình 3.7. Biểu đồ M và Q

KẾT LUẬN

Qua kết quả nghiên cứu từ các chương, chương 1 đến chương 3 đối với bài toán khung chịu uốn (bài toán tĩnh), có xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang. Tác giả rút ra các kết luận sau:

1. Khi kể tới ảnh hưởng của biến dạng trượt, nội lực và chuyển vị của khung chịu uốn đã có sự thay đổi đáng kể. Lượng thay đổi này phụ thuộc vào tỉ số chiều cao tiết diện/chiều dài dầm, phụ thuộc vào hình thức liên kết và cách đặt tải trọng. Khung có bậc siêu tĩnh càng lớn, có tỉ lệ h/l càng lớn thì nội lực và chuyển vị thay đổi càng nhiều. Các khung đặt tải không đối xứng, liên kết không giống nhau tại hai đầu thì chịu ảnh hưởng của biến dạng trượt nhiều hơn các khung chịu tải trọng đối xứng và có liên kết đối xứng.
2. Đã xác định được đường đàn hồi cho hệ khung có các điều kiện biên khác nhau. Từ đó xác định được nội lực mômen uốn, lực cắt của hệ khung khi có kể đến biến dạng trượt ngang. Trong trường hợp không xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang (trường hợp tỉ số $h/l=1/1000$), kết quả về nội lực và chuyển vị đều trùng khớp với kết quả nhận được khi giải bằng các phương pháp hiện có.
3. Mô men uốn và lực cắt của hệ khung khi xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt có thể tăng hoặc giảm so với khi không xét biến dạng trượt phụ thuộc vào vị trí tiết diện, từng loại bài toán, điều kiện biên và tải trọng cũng như tỉ lệ h/l . Độ võng của các đoạn khung trong hai trường hợp có xét và không xét biến dạng trượt ngang thay đổi rất lớn, có trường hợp độ võng của khung khi xét biến dạng trượt tăng từ 9.8% đến 56.1% so với khi không xét biến dạng trượt tương ứng với các tỉ lệ $h/l=1/10$ đến $h/l=1/3$.

KIẾN NGHỊ VỀ NHỮNG NGHIÊN CỨU TIẾP THEO

1. Dùng lý thuyết đầy đủ về dầm, dầm có xét biến dạng trượt với hai hàm ẩn là hàm độ võng y và hàm lực cắt Q đã trình bày trong đề tài làm cơ sở để xây dựng và giải các bài toán kết cấu chịu uốn khác như kết cấu tấm, vỏ.
2. Dùng các kết quả tính toán nội lực và chuyển vị, theo lý thuyết dầm có xét biến dạng trượt để đưa vào thiết kế các công trình.
3. Qua kết quả nghiên cứu thấy rằng, với việc sử dụng lý thuyết đầy đủ về dầm và dùng phương pháp Nguyên lý cực trị Gauss có thể xây dựng bài toán cơ học kết cấu một cách dễ dàng. Vì vậy, nên xét biến dạng trượt trong mọi trường hợp.

DANH MỤC TÀI LIỆU THAM KHẢO

I. TIẾNG VIỆT

- [1] Hà Huy Cương (2005), *Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss*, Tạp chí Khoa học và kỹ thuật, IV/ Tr. 112 ÷118.
- [2] Nguyễn Văn Liên, Nguyễn Phương Thành, Đinh Trọng Bằng (2003), *Giáo trình sức bền vật liệu*, Nhà xuất bản xây dựng, tái bản lần thứ 3, 330 trang.
- [3] Nguyễn Phương Thành (2002), *Nghiên cứu trạng thái ứng suất – biến dạng tấm nhiều lớp chịu tải trọng động có xét lực ma sát ở các mặt tiếp xúc*, Luận án tiến sỹ kỹ thuật.
- [4] Vương Ngọc Lưu (2002), *Nghiên cứu trạng thái ứng suất – Biến dạng của tấm sàn Sandwich chịu tải trọng tĩnh và động*, Luận án tiến sỹ kỹ thuật.
- [5] Trần Hữu Hà (2006), *Nghiên cứu bài toán tương tác giữa cọc và nền dưới tác dụng của tải trọng*, Luận án tiến sỹ kỹ thuật.
- [6] Phạm Văn Trung (2006), *Phương pháp mới Tính toán hệ dầm và mái treo*, Luận án tiến sỹ kỹ thuật.
- [7] Vũ Hoàng Hiệp (2007), *Nghiên cứu trạng thái ứng suất – biến dạng của dầm nhiều lớp chịu tải trọng tĩnh và động*, Luận án tiến sỹ kỹ thuật, Hà Nội.
- [8] Nguyễn Văn Đạo (2001), *Cơ học giải tích*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 337 trang.
- [9] Nguyễn Văn Đạo, Trần Kim Chi, Nguyễn Dũng (2005), *Nhập môn Động lực học phi tuyến và chuyển động hỗn độn*. Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.
- [10] Lều Thọ Trình, Đỗ Văn Bình (2006), *Giáo trình ổn định công trình*, Nhà xuất bản Khoa học kỹ thuật.
- [11] Võ Hoàng Hiệp (2008), *Tính kết cấu có xét đến biến dạng trượt*, Tạp chí XD số 7.
- [12] Đoàn Văn Duẩn, Nguyễn Phương Thành (2007), *Phương pháp mới tính toán ổn định của thanh*, Tạp chí Xây dựng số 12 (Tr41-Tr44).

- [13] Đoàn Văn Duẩn (2007), *Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss đối với các bài toán ổn định công trình*, Luận văn thạc sỹ kỹ thuật.
- [14] Đoàn Văn Duẩn (2008), Phương pháp mới tính toán ổn định của khung, Tạp chí Xây dựng số 01 (Tr35-Tr37).
- [15] Đoàn Văn Duẩn (2008), *Nghiên cứu ổn định uốn dọc của thanh có xét biến dạng trượt*, Tạp chí Xây dựng số 12 (Tr33-Tr37).
- [16] Đoàn Văn Duẩn (2009), Phương pháp nghiên cứu ổn định tổng thể của dàn, Tạp chí Xây dựng số 03 (Tr86-Tr89).
- [17] Đoàn Văn Duẩn (2010), *Phương pháp phân tử hữu hạn nghiên cứu ổn định uốn dọc của thanh*, Tạp chí kết cấu và công nghệ xây dựng, số 5, Quý IV (Tr30-Tr36).
- [18] Đoàn Văn Duẩn (2011), *Nghiên cứu ổn định đàn hồi của thanh và hệ thanh*, Luận án Tiến sỹ kỹ thuật.
- [19] Đoàn Văn Duẩn (2012), *Phương pháp mới tính toán dầm mềm*, Tạp chí kết cấu và công nghệ xây dựng số 09-II (Tr56-Tr61).
- [20] Đoàn Văn Duẩn (2014), *Phương pháp chuyển vị cưỡng bức giải bài toán trị riêng và véc tơ riêng*, Tạp chí xây dựng số 11 (Tr82-Tr84).
- [21] Đoàn Văn Duẩn (2015), *Phương pháp mới nghiên cứu ổn định động lực học của thanh*, Tạp chí xây dựng số 01 (Tr86-Tr88).
- [22] Đoàn Văn Duẩn (2015), *Bài toán cơ học kết cấu dưới dạng tổng quát*, Tạp chí xây dựng số 02 (Tr59-Tr61).
- [23] Trần Thị Kim Huệ (2005), *Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss đối với các bài toán cơ học kết cấu*, Luận văn thạc sỹ kỹ thuật.
- [24] Nguyễn Thị Liên (2006), *Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss đối với các bài toán động lực học công trình*, Luận văn thạc sỹ kỹ thuật.
- [25] Vũ Thanh Thủy (2009), *Xây dựng bài toán dầm khi xét đầy đủ hai thành phần nội lực momen và lực cắt*. Tạp chí xây dựng số 4.

[26] Vũ Thanh Thủy (2009), *Dao động tự do của dầm khi xét ảnh hưởng của lực cắt*. Tạp chí xây dựng số 7.

[27] Timoshenko C.P, Voinăpki- Krige X, (1971), *Tám và vỏ*. Người dịch Phạm Hồng Giang, Vũ Thành Hải, Đoàn Hữu Quang, Nxb Khoa học và kỹ thuật, Hà Nội.

II. TIẾNG PHÁP

[28] Robert L’Hermite (1974), *Flambage et Stabilité – Le flambage élastique des pièces droites*, Édition Eyrolles, Paris.

III. TIẾNG ANH

[29] Stephen P. Timoshenko-Jame M. Gere (1961), *Theory of elastic stability*, McGraw-Hill Book Company, Inc, New york – Toronto – London, 541 Tr.

[30] William T. Thomson (1998), *Theory of Vibration with Applications* (Tái bản lần thứ 5). Stanley Thornes (Publishers) Ltd, 546 trang.

[31] Klaus – Jurgen Bathe (1996), *Finite Element procedures*. Part one, Prentice – Hall International, Inc, 484 trang.

[32] Klaus – Jurgen Bathe (1996), *Finite Element procedures*. Part two, Prentice – Hall International, Inc, 553 trang.

[33] Ray W. Clough, Joseph Penzien (1993), *Dynamics of Structures* (Tái bản lần thứ 2), McGraw-Hill Book Company, Inc, 738 trang.

[34] O.C. Zienkiewicz-R.L. Taylor (1991), *The finite element method* (four edition) Volume 2, McGraw-Hill Book Company, Inc, 807 trang.

[35] G. Korn-T. Korn (1961), *Mathematical Handbook for scientists and Engineers*, McGraw-Hill, New york (Bản dịch tiếng Nga, G. Shapiro chủ biên, Nhà xuất bản Nauka-Moscow, 1964).

[36] Stephen P. Timoshenko-J. Goodier (1970), *Theory of elasticity*, McGraw-Hill, New york (Bản dịch tiếng Nga, G. Shapiro chủ biên, Nhà xuất bản Nauka-Moscow, 1979), 560 trang.

- [37] D.R.J. Owen, E.Hinton (1986), *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*, Pineridge Press Lt.
- [38] Lars Olovsson, Kjell Simonsson, Mattias Unosson (2006), *Shear locking reduction in eight-node tri-linear solid finite elements*, J. ‘Computers @ Structures’,84, trg 476-484.
- [39] C.A.Brebbia, J.C.F.Telles, L.C.Wrobel(1984), *Boundary Element Techniques. Theory and Applications in Engineering*. Nxb Springer – Verlag.(Bản dịch tiếng Nga, 1987).
- [40] Chopra Anil K (1995). *Dynamics of structures*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New – Jersey 07632.
- [41] Wilson Edward L. Professor Emeritus of structural Engineering University of California at Berkeley (2002). *Three – Dimensional Static and Dynamic Analysis of structures*, Inc. Berkeley, California, USA. Third edition, Reprint January.
- [42] Wilson, E. L., R. L. Taylor, W. P. Doherty and J. Ghaboussi (1971). “*Incompatible Displacement Models*”, Proceedings, ORN Symposium on “Numerical and Computer Method in Structural Mechanics”. University of Illinois, Urbana. September. Academic Press.
- [43] Strang, G (1972). “*Variational Crimes in the Finite Element Method*” in “The Mathematical Foundations of the Finite Element Method”. P.689 -710 (ed. A.K. Aziz). Academic Press.
- [44] Irons, B. M. and O. C. Zienkiewicz (1968). “*The isoparametric Finite Element System – A New Concept in Finite Element Analysis*”, Proc. Conf. “Recent Advances in Stress Analysis”. Royal Aeronautical Society. London.
- [45] Kolousek Vladimir, DSC Professor, Technical University, Pargue (1973). *Dynamics in engineering structures*. Butter worths London.

- [46] Felippa Carlos A (2004). *Introduction of finite element methods*. Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures University of Colorado Boulder, Colorado 80309-0429, USA, Last updated Fall.
- [47] Wang C.M, Reddy J.N, Lee K.H.(2000), *Shear deformable beams and plates – Relationships with Classical Solutions*. ELSEVIER, Amsterdam – Lausanne- New York – Oxford –Shannon – Singapore – Tokyo.
- [48] Barbero Ever J, Department of Mechanics & Aerospace Engineering, West Virginia University, USA (1999), *Introduction to Composite Materials Design*. Taylor and Francis.
- [49] Decolon C (2002). *Analysis of Composite Structures*. Hermes Penton, Ltd, UK.
- [50] Fu-le Li, ZHI-zhong Sun, Corresponding author, Department of Mathematics, Shoutheast University, Nanjing 210096, PR China (2007). *A finite difference scheme for solving the Timoshenko beam equations with boundary feedback*. Journal of Computational and applied Mathematics 200, 606 – 627, Elsevier press. Available online at www.sciencedirect.com.
- [51] Khaji N., Corresponding author, Shafiei M., Civil Engineering Department Tarbiat Modares University, P. O. Box 14155-4838, Tehran, Iran ((2009)). *Closed - form solutions for crack detection problem of Timoshenko beams with various boundary conditions*. International Journal of Mechanical Sciences 51, 667-681. Contents lists available at Science Direct journal homepage: www.elsevier.com/locate/ijmecsci.
- [52] Antes H. Institute of Applied Mechanics, University Carolo Wilhelmina, D-38023 Braunschweig, Germany (2003). *Fundamental solution and integralequations for Timoshenko beams*. Computers and Structures 81, 383-396. Pergamon press. Available online at www.sciencedirect.com.

[53] Nguyen Dinh Kien (2007). *Free Vibration of prestress Timoshenko beams resting on elastic foundation. Viet nam Journal of Mechanics, VAST, Vol.29, No. 1, pp. 1-12.*

[54] Grawford F (1974). *Waves, Berkeley physics course, volume 3. McGraw – hill Book Company.*

IV. TIẾNG NGA

[55] М□□А. Айзерман (1980), *Классическая механика, Москва.*

[56] Киселев В. А (1969). *Строительная механика - Специальный курс. Стройздат, Москва.*

[57] П. С. Полак (1959), *Вариационные принципы механики, Москва.*

[58] Киселев В. А (1980). *Строительная механика - Специальный курс. Стройздат, Москва.*

[59] А. А. Чирас (1989), *Строительная механика, Стройздат, Москва.*

[60] Г. КАУДЕРЕР (1961), *НЕЛИНЕЙНАЯ МЕХАНИКА, МОСКВА.*