BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC DÂN LẬP HẢI PHÒNG

NGUYỄN MẠNH CƯỜNG

NGHIÊN CỨU BÀI TOÁN ĐỘNG LỰC HỌC CỦA HỆ THANH BẰNG PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN LÝ CỰC TRỊ GAUSS

Chuyên ngành: Kỹ thuật Xây dựng Công trình Dân dụng & Công nghiệp

Mã số: 60.58.02.08

LUẬN VĂN THẠC SĨ KỸ THUẬT

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS. TSKH. HÀ HUY CƯƠNG

Hải Phòng, 2017

LỜI CAM ĐOAN

Tên tôi là: Nguyễn Mạnh Cường.

Sinh ngày: 31/01/1985.

Nơi công tác: Thành phố Hạ Long, tỉnh Quảng Ninh.

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các số liệu, kết quả trong luận văn là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Hải Phòng, ngày 19 tháng 11 năm 2017

Tác giả luận văn

Nguyễn Mạnh Cường

LỜI CẢM ƠN

Tác giả luận văn xin trân trọng bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất đối với GS.TSKH Hà Huy Cương vì những ý tưởng khoa học độc đáo, những chỉ bảo sâu sắc về nghiên cứu bài toán động lực học của hệ thanh bằng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss và những chia sẻ về kiến thức cơ học, toán học uyên bác của Giáo sư. Giáo sư đã tận tình giúp đỡ và cho nhiều chỉ dẫn khoa học có giá trị cũng như thường xuyên động viên, tạo mọi điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu hoàn thành luận văn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các nhà khoa học, các chuyên gia trong và ngoài trường Đại học Dân lập Hải phòng đã tạo điều kiện giúp đỡ, quan tâm góp ý cho bản luận văn được hoàn thiện hơn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn các cán bộ, giáo viên của Khoa xây dựng, Phòng đào tạo Đại học và Sau đại học - trường Đại học Dân lập Hải phòng, và các đồng nghiệp đã tạo điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tác giả trong quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Hải Phòng, ngày 19 tháng 11 năm 2017

Tác giả luận văn

Nguyễn Mạnh Cường

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài:

Trong thực tế, phần lớn các công trình xây dựng đều chịu tác dụng của tải trọng động (đặc biệt là đối với các công trình quân sự).Việc tính toán và thiết kế các công trình nói chung (nhất là các công trình cao tầng) không những phải đảm bảo điều kiện bền, cứng, ổn định mà không kém phần quan trọng là phải phân tích phản ứng của công trình khi chịu các nguyên nhân tác dụng động (gió bão, động đất...). Ví dụ như các công trình biển thường xuyên chịu tác động của sóng và gió, các tải trọng đó gây nên trong kết cấu các ứng suất thay đổi theo thời gian. Việc nghiên cứu động lực học công trình chính là nghiên cứu phản ứng của công trình khi chịu tải trọng động.

Bài toán động lực học công trình xác định tần số dao động riêng, dạng dao động riêng, chuyển vị động, nội lực động... của công trình. Từ đó, kiểm tra điều kiện bền, điều kiện cứng và khả năng xảy ra cộng hưởng, nghiên cứu các biện pháp giảm chấn và các biện pháp tránh cộng hưởng. Ngoài ra, bài toán động lực học công trình còn là cơ sở cho việc nghiên cứu nhiều lĩnh vực chuyên sâu khác như:

+ Đánh giá chất lượng công trình bằng các phương pháp động lực học (ngay cả khi công trình chịu tải trọng tĩnh).

+ Bài toán đánh giá tuổi thọ công trình.

+ Bài toán đánh giá khả năng chịu mỏi của công trình.

+ Bài toán ổn định động công trình.

Có nhiều phương pháp giải bài toán động lực học công trình. Trong luận văn này, tác giả sử dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss để giải vì phương pháp này có ưu điểm là: tìm lời giải của một bài toán này trên cơ sở so sánh một cách có điều kiện với lòi giải của một bài toán khác nên cách nhìn bài toán đơn giản hơn. Đặc biệt, nguyên lý cực trị Gauss tỏ ra thuận tiện khi giải các bài toán động lực học của vật rắn biến dạng do nguyên lý này đề cập đến động thái.

Mặt khác, là một giáo viên môn cơ học công trình nên việc tác giả luận văn tìm hiểu nguyên lý cực trị Gauss và vận dụng nó như một phương pháp hoàn toàn mói trong việc tìm lòi giải bài toán động lực học là điều cần thiết.

2. Mục đích nghiên cứu của đề tài:

- Tìm hiểu các phương pháp giải bài toán động lực học đã biết.
- Tìm hiểu cơ sở lý luận, đặc điểm của phương pháp nguyên lý cực trị Gauss.
- ứng dụng của phương pháp cho bài toán động lực học công trình.

3. Giới hạn nghiên cứu: áp dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss để giải một số bài toán động lực học công trình (bài toán đàn hồi tuyến tính, tải trọng tác động là tải trọng điều hoà).

4. Phương pháp nghiên cứu:

- Nghiên cứu về mặt lý thuyết.
- Sử dụng những kiến thức lý thuyết và phần mềm tin học để tính toán các ví dụ.

CHƯƠNG 1 - BÀI TOÁN ĐỘNG LỰC HỌC CÔNG TRÌNH

Thuật ngữ "động” có thể được hiểu đơn giản như là biến đổi theo thời gian [19, tr.l]. Vậy tải trọng động là bất cứ tải trọng nào mà độ lớn, hướng hoặc vị trí thay đổi theo thời gian. Trong quá trình đó, các khối lượng trên công trình được truyền gia tốc nên phát sinh lực quán tính đặt tại các khối lượng. Lực quán tính tác dụng lên công trình gây ra hiện tượng dao động. Dao động đó được biểu thị dưới dạng chuyển vị của kết cấu. Việc tính toán công trình có xét đến lực quán tính xuất hiện trong quá trình dao động được gọi là giải bài toán dao động công trình [10, tr.7].

Phản ứng của kết cấu đối với tải trọng động, nghĩa là các ứng suất và độ võng xuất hiện khi đó, cũng là động (biến thiên theo thời gian). Nói chung, phản ứng của kết cấu đối vói tải trọng động được biểu diễn thông qua chuyển vị của kết cấu. Các đại lượng phản ứng khác có liên quan như nội lực, ứng suất, biến dạng....đều được xác định sau khi có sự phân bố chuyển vị của hệ.

Đôi khi, việc giải quyết bài toán động lực học công trình còn được tiến hành bằng việc đưa vào các hệ số động. Khi đó, nội lực, chuyển vị và mọi tham số của hệ đều được tính toán thông qua hệ số động với các kết quả tính toán tĩnh. Tất cả các đại lượng đó đều là các giá trị cực đại ứng với một thời điểm xác định, không phải là các hàm theo biến thòi gian.

1.1. Đặc trưng cơ bản của bài toán động lực học:

Tải trọng thay đổi theo thời gian nên trạng thái ứng suất - biến dạng của hệ cũng thay đổi theo thời gian. Do đó, bài toán động sẽ không có nghiệm chung duy nhất như bài toán tĩnh. Vì vậy, bài toán động phức tạp và khó khăn hơn nhiều so với bài toán tĩnh. Sự cần thiết phải kể đến lực quán tính là điểm khác biệt cơ bản nhất của bài toán động lực học so với bài toán tĩnh. Ngoài ra, việc xét đến ảnh hưởng của lực cản cũng là một đặc trưng cơ bản phân biệt hai bài toán trên.

1.1.1. Lực cản:

Trong tính toán, đôi khi không xét đến ảnh hưởng của lực cản nhưng lực cản luôn luôn có mặt và tham gia vào quá trình chuyển động của hệ. Lực cản xuất hiện do nhiều nguyên nhân khác nhau và ảnh hưởng của chúng đến quá trình dao động là rất phức tạp. Trong tính toán, đưa ra các giả thiết khác nhau về lực cản, phù hợp với điều kiện thực tế nhất định.

Trong đa số các bài toán dao động công trình, ta thường sử dụng mô hình vật liệu biến dạng đàn nhớt (ma sát nhớt) do nhà cơ học người Đức W.Voigt kiến nghị: xem lực cản tỷ lệ bậc nhất vái vận tốc dao động. Công thức của lực cản: $P_c = Cy$ với c là hệ số tắt dần.

Ngoài ra còn đưa ra một số giả thiết cơ bản sau:

* *Lực cản theo giả thiết Xôrôkin:* là giả thiết về lực cản trong phi đàn hồi. Lực cản trong phi đàn hồi là lực cản tính đến sự tiêu hao năng lượng trong hệ, được biểu thị trong việc làm tổn thất trễ năng lượng biến dạng trong quá trình dao động. Nó không phụ thuộc vào tốc độ biến dạng mà phụ thuộc vào giá trị biến dạng.Trong đó, quan hệ giữa các biến dạng chung (độ võng, góc xoay) với tải trọng ngoài là quan hệ phi tuyến.

Công thức của lực cản: $P_c = i\,\frac{\Psi}{2\pi} P_đ$

trong đó $P_đ$ là lực đàn hồi; P là hệ số tiêu hao năng lượng.

[*Lực đàn hồi (hay lực phục hồi) xuất hiện khi tách hệ khỏi vị trí cân bằng và có xu hướng đưa hệ về vị trí cân bằng ban đầu, tương ứng và phụ thuộc vào chuyển vị động của hệ: $P_đ = P(y)$. Ở các hệ đàn hồi tuyến tính: $P_đ$ - ky với k là hệ sổ cứng (lực gây chuyển vị bằng 1 đơn vị)].*

**Lực cản ma sát khô của Couiomb* (F_{ms}): tỷ lệ với áp lực vuông góc N và có phương ngược với chiều chuyển động.

Công thức của lực cản: $F_{ms} = \mu .N$ (với μ là hệ số ma sát).

Lực cản sẽ làm cho chu kỳ dao dộng dài hơn. Trong thực tế, có những công trình bị cộng hưởng nhưng chưa bị phá hoại ngay vì có hệ số cản khác không. Do còn ảnh hưởng của lực cản nên khi cộng hưởng, các nội lực, chuyển vị động của hệ không phải bằng ∞ mà có trị số lớn hữu hạn.

*1.1.2. **Đặc trưng động của hệ dao động tuyến tính:***

Dao động tuyến tính là dao động mà phương trình vi phân mô tả dao động là phương trình vi phân tuyến tính. Đặc trưng động của hệ dao động tuyến tính bao gồm: khối lượng của hệ, tính chất đàn hồi của hệ (độ cứng, độ mềm), nguồn kích động, tần số dao động (tần số dao động riêng, dạng dao động riêng), hệ số tắt dần...

Bậc tự do của hệ đàn hồi là số thông số hình học độc lập cần thiết để xác định vị trí của hệ tại một thời điểm bất kỳ khi có chuyển động bất kỳ.

Vấn đề xác định các tần số dao động riêng và các dạng dao động riêng của bài toán dao động hệ hữu hạn bậc tự do tương ứng với bài toán xác định các trị riêng và vecto riêng của đại số tuyến tính. Thông thường, để đánh giá một công trình chịu tải trọng động, chúng ta thường đánh giá sơ bộ thông qua tần số dao động riêng thứ nhất và dạng đao động riêng thứ nhất (tần số dao động cơ bản và dạng dao động cơ bản)

1.2. Dao động tuần hoàn - Dao động điều hòa:

Hầu như bất cứ hệ kết cấu nào cũng có thể chịu một dạng tải trọng động nào đó trong suốt quá trình sống của nó (tải trọng tĩnh được xem như dạng đặc biệt của tải trọng động). Các tải trọng được phân thành: tải trọng tuần hoàn và tải trọng không tuần hoàn.

Các tải trọng không tuần hoàn có thể là các tải trọng xung ngắn hạn hoặc có thể là các tải trọng tổng quát dài hạn, các dạng đơn giản hoá có thể dùng được.

Một tải trọng tuần hoàn thể hiện sự biến thiên theo thời gian giống nhau liên tiếp đối với một số lượng lớn chu kỳ. Tải trọng tuần hoàn đơn giản nhất có dạng hình sin (hoặc cosin) và được gọi là điều hoà đơn giản. Nhờ có phân tích Fourier mà bất cứ một tải trọng tuần hoàn cũng có thể được biễu diễn như là một chuỗi các thành phần điều hoà đơn giản. Tải trọng tuần hoàn gây ra dao động tuần hoàn trong kết cấu.

1.2.1. ***Dao động tuần hoàn****:*

Là dao động được lặp lại sau những khoảng thời gian T nhất định. Nếu dao động được biêu diễn bởi hàm số của thời gian y(t) thì bất kỳ dao động tuần hoàn nào cũng phải thỏa mãn: y(t) = y(t+T). Thời gian lặp lại dao động T được gọi là chu kỳ của dao động và nghịch đảo của nó f = 1/T được gọi là tần số.

Dạng đơn giản nhất của dao động tuần hoàn là dao động điều hòa.

1.2.2. ***Dao động điều hòa*****:** thường được mô tả bằng hình chiếu trên một đường thẳng của một điểm di chuyển trên một vòng tròn với vận tốc góc ω. Do đó chuyển vị y được viết: y = A$\sin\omega$t.

Bởi vì dao động lặp lại trong khoảng thời gian 2π nên có mối liên hệ:

$$\omega = 2\pi / \tau = 2\pi f$$

Vận tốc và gia tốc cũng là điều hòa với cùng tần số của dao động nhưng lệch với độ dịch chuyển lần lượt là $\pi/2$ và π:

$= \omega A\sin(\omega t + \pi/2)$

$= -\omega^2 A\sin\omega t$

$= \omega^2 A\sin(\omega t + \pi)$

Vậy: $= -\omega^2 t$

=> gia tốc tỷ lệ với độ dịch chyển.

1.3. Các phương pháp để xây dựng phương trình chuyển động:

Phương trình chuyển động của hệ có thể xây dựng dựa trên cơ sở của phương pháp tĩnh hoặc các nguyên lý biến phân năng lượng. Các biểu thức toán học để xác định các chuyển vị động được gọi là phương trình chuyển động của hệ, nó có thể được biểu thị dưới dạng phương trình vi phân .

1.3.1. Phương pháp tĩnh động học:

[Nội dung nguyên lý D'Alembert đối với cơ hệ: trong chuyển động của cơ hệ, các lực thực sự tác dụng lên chất điểm của hệ gồm nội lực và ngoại lực cùng với các lực quán tính lập thành hệ lực cân bằng]

Dựa trên cơ sở những nguyên tắc cân bằng của tĩnh học có bổ sung thêm lực quán tính viết theo nguyên lý D'Alember, điều kiện cân bằng (tĩnh động) đối với các lực tổng quát viết cho hệ n bậc tự do:

$$\left(Q_k + J_k^*\right)_{k=1..n} = 0$$

trong đó:

Q_k - lực tổng quát của các lực đã cho.

J_k - lực tổng quát của các lực quán tính của các khối lượng, tương ứn với các chuyển vị tổng quát qt.

x_i, y_i, z_i - lực các chuyển vị của khối lượng m_i theo phương các trục toạ độ, biểu diễn thông qua các toạ độ tổng quát q_k.

$x_i = x_i\ (q_1, q_2, ...,q_n)$

$y_i = y_i\ (q_1, q_2, ...,q_n)$

$z_i = z_i\ (q_1, q_2, ...,q_n)$

Cũng có thể viết: $J_k = -M_k q_k$, với M_k là khối lượng quy đổi, tương ứng với chuyển vị tổng quát qk.

1.3.2. Phương pháp năng lượng:

Dựa trên định luật bảo toàn năng lượng, trường hợp bỏ qua các lực ngăn cản chuyển động, ta có: K + U = const.

trong đó:

K - động năng của hệ:

K = $\sum \frac{m_i v_i^2}{2} + \sum \int m_{(z)} dz \frac{v_{(z)}^2}{2}$

U - thế năng của hệ, có thể được biểu thông qua công của các ngoại lực hoặc công của các nội lực (trường hợp hệ phẳng):

U = $\frac{1}{2}\sum P_i \Delta \cos(P_i \Delta_i) + \frac{1}{2}\sum \int dP.\Delta \cos(dP, \Delta)$

Hoặc:

U = $\frac{1}{2}\sum \int \frac{M^2 ds}{\text{EJ}} + \int \frac{N^2 ds}{\text{EF}} + \int \mu \frac{Q^2 ds}{\text{GF}}$

1.3.3. Phương pháp ứng dụng nguyên lý công ảo:

[Nội dung của nguyên lý: điều kiện cần và đủ để một cơ liên hệ lý tưởng giữ và dừng được cân bằng tại một vị trí đã cho là tổng công ảo của tất cả các lực hoạt động tác dụng lên hệ đều bằng không trong di chuyển ảo bất kỳ từ vị trí đã cho:

Nguyên lý được áp dụng như sau: $\delta U_i + \delta T_i = 0$ (i=1$\div n$)

trong đó: δU_i - công khả dĩ của nội lực.

δT_i - công khả dĩ của ngoại lực (gồm lực kích thích, lực cản, lực quán tính).

Trong ba phương pháp đã giới thiệu ở trên, phương pháp tĩnh động đưa ra cách giải quyết đơn giản cho hệ một số bậc tự do. Sự cần thiết phải xem xét các lực liên kết và các biểu đồ vật thể tự do trong phương pháp này dẫn đến những khó khăn đại số đối với những hệ có bậc tự do cao hơn.

Phương pháp năng lượng khắc phục được những khó khăn của phương pháp tĩnh động. Tuy nhiên, nguyên lý năng lượng cùng các toạ độ vật lý chỉ đưa được một phương trình mà điều đó chỉ giới hạn sử dụng cho hệ một bậc tự do.

Nguyên lý công ảo khắc phục được những hạn chế của cả hai phương pháp trên và là một công cụ mạnh đối với hệ nhiều bậc tự do. Tuy nhiên, đây không phải là một thủ tục hoàn toàn có tính vô hướng, trong đó việc xem xét vectơ lực là cần thiết trong việc xác định công ảo [20, tr.215].

1.3.4. *Phương trình Lagrange (phương trình Lagrange loại 2):*

Phương trình Lagrange là một thủ tục hoàn toàn có tính vô hướng, xuất phát từ các đại lượng vô hướng của động năng, thế năng và công được biểu diễn thông qua các toạ độ suy rộng. Ưu điểm nổi bật của các phương trình Lagrange là dạng và số lượng của chúng không phụ thuộc vào số vật thể thuộc cơ hệ và sự chuyển động của các vật thể đó. Hơn nữa, nếu liên kết là lý tưởng thì trong các phương trình Lagrange không có mặt các phản lực liên kết chưa biết.

Giả sử hệ có n bậc tự do và các toạ độ suy rộng của hệ là q_1, q_2, ..., q_n. Phương trình chuyển động Lagrange được viết như sau:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}=Q_i$$

Trong đó: + T và u lần lượt là động năng và thế năng của hệ.

+ Q_i là các lực suy rộng tương ứng với các lực không có thế.

Phương trình chuyển động Lagrange được áp dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khoa học và kỹ thuật, nó được áp dụng với tất cả hệ tuyến tính và phi tuyến.

1.3.5. *Phương pháp ứng dụng nguyên lý Hamiňton:*

[Nguyên lý Hamilton có nội dung như sau: một hệ cơ học chịu tác động của các lực đã biết sẽ có chuyển động (trong tất cả các chuyển động cố thể và cùng điều kiện ở hai đầu của khoảng thời gian) sao cho biến thiên động năng, thế năng và công cơ học của cấc lực không bảo toàn trong khoảng thời gian đang xét bằng không].

Nội dung nguyên lý có thể được biểu thị: $\int_{t_1}^{t_2}(\delta T+\delta U-\delta R)dt=0$

trong đó:

$\delta T,\delta U$ - biến phân động năng và thế năng của hệ.

δR - biến phân công do các lực không bảo toàn (lực kích thích, lực cản) tác dụng lên hệ.

Từ các phương trình chuyển động Lagrange sẽ xây dựng nguyên lý biến phân động học Hamilton và ngược lại. Vì vậy có thể dùng nguyên lý Hamilton để làm cơ sở cho động lực học các hệ holonom.

[Theo ngôn ngữ của G.Hertz: hệ cơ học nào chỉ có những liên kết được biểu diễn dưới dạng hữu hạn (liên kết hình học) gọi là hệ holonom; nếu hệ đó chịu những liên kết biểu diễn bằng phương trình vi phân không khả tích thì gọi là hệ không holonom].

1.4. Dao động của hệ hữu hạn bậc tự do:

1.4.1. Dao động tự do:

Khi hệ chuyển động tự do, vị trí của các khối lượng xác định dạng của hệ tại thòi điểm bất kỳ. Đối với hệ n bậc tự do, các khối lượng có chuyển động phức tạp, gồm n đao động với n tần số ω_i khác nhau. Nói chung, tỉ số giữa các chuyển vị của các khối lượng riêng biệt liên tục thay đổi. Nhưng có thể chọn điều kiện ban đầu sao cho mọi khối lượng chỉ dao động với một tần số ω_i nào đó chọn từ phổ tần số. Những dạng dao động như thế gọi là dạng dao động riêng (hay dạng đao động chính).

Số dạng chính bằng số bậc tự do của hệ. Trong các dạng dao động chính, quan hệ các chuyển vị của các khối lượng là hằng số đối với thời gian. Nếu cho trước các dạng dao động chính thì ta cũng xác định được tần số.

Việc xác định các dạng dao động riêng và tần số dao động riêng đóng vai trò quan trọng trong bài toán dao động của hệ hữu hạn bậc tự do.

1.4.1.1. Các tần số riêng và các dạng dao động riêng:

Phương trình vi phân dao động tự do khồng cản của các khối lượng:

$$MY_{(t)} + KY_{(t)} = 0 \qquad (1.1)$$

với M và K là các ma trận vuông cấp n, thường là ma trận đối xứng.

Nghiệm của (1.1) được tìm dưới dạng:

$$Y_{(t)} = A \sin(\omega t + \varphi) \qquad (1.2)$$

Thay (1.2) vào (1.1) nhận được:

$$[K-\omega^2 M]A = 0 \tag{1.3}$$

Để hệ (1.3) có nghiệm không tầm thường (tức là tồn tại dao động) thì:

$$\left|K-\omega^2 M\right| = 0 \tag{1.4}$$

(1.4) là phương trình đại số bậc n đối với ω^2, được gọi là phương trình tần số (hay phương trình đặc trưng). Các nghiệm ω_i (với i = $1 \div n$) của (1.4) là các tần số riêng. Vectơ bao gồm tất cả các tần số dao động riêng xếp theo thứ tự tăng dần $(\omega_1 < \omega_2 < .... < \omega_n$ được gọi là vectơ tần số dao động riêng (hay phổ tần số:

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ .... \\ \omega_n \end{bmatrix}$$

Thay các ω_i vào (1.3), được hệ phương trình đại số tuyến tính thuần nhất để xác định các thành phần của vectơ riêng A_i.

$$\left[K-\omega_i^2 M\right]A_i = 0 \tag{1.5}$$

Vì (1.5) là hệ phương trình đại số tuyến tính thuần nhất có det các hệ số bằng 0 nên các thành phần của vectơ A_i được xác định sai khác một hằng số nhân, chẳng hạn có thể chọn A_{li} tuỳ ý.

$\omega_{ki} = \dfrac{A_{ki}}{A_{li}}$ và dễ thấy: $\varphi_{li} = 1$

Ma trận vuông Φ biểu thị tất cả các dạng dao động riêng có thể của hệ, được gọi là ma trận các dạng riêng (hay ma trận dạng chính):

$$\Phi\begin{bmatrix} \omega_{11}\omega_{12}.............\omega_{1n} \\ \omega_{12}\omega_{22}............\omega_{2n} \\ .... \\ \omega_{1n}\omega_{n2}.........\omega_{nm} \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

Mỗi một trong các vectơ cột của (1.6) cho ta một dạng dao động riêng của hệ:

$$\omega_i = \begin{bmatrix} \omega_{li} \\ \omega_{2i} \\ .... \\ \omega_{ni} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_{2i} \\ .... \\ \omega_{ni} \end{bmatrix}$$

1.4.1.2. Giải bài toán riêng (eigen problem):

Khi hệ dao động tự do không cản thì bài toán dao động tự do trở thành bài toán riêng tổng quát:

$[K - \omega^2 M]A = 0$ (1.7)

Các tần số (vòng) riêng của dao động (ứng vói các tần số f_i) là các nghiệm $\omega_i (i = 1 \div n)$ của phương trình đặc trưng bậc n:

$[K - \omega^2 M] = 0$ (1.8)

Đặt $X = \lambda = \omega^2$ (1.8) trở thành:

$[K - \lambda M] = 0$ (1.9)

Khi phân tích dạng dao động, ta có bài toán riêng tổng quát:

$K\phi = \lambda M\phi$

trong đó:

$\lambda_1, \lambda_2, ... \lambda_n$ - các trị riêng.

$\varphi_1, \varphi_2 .... \varphi_2$ - các vectơ riêng tương ứng.

$\phi = [\varphi_1, ...\varphi_n]$

Có nhiều phương pháp để giải bài toán riêng [17]:

+ Nhóm 1: các phương pháp lặp vectơ.

$K\varphi_i = \lambda_i M\varphi_i$

+ Nhóm 2: các phương pháp biến đổi.

$\phi^T K\phi = \wedge$

$\phi^T K\phi = I$

trong đó: A = diag(λ_i)

+ Nhóm 3: các kỹ thuật lặp đa thức

p(λ_i) = o trong đó p(λ) = det(K-λM)

+ Nhóm 4: sử dụng đặc tính sturm của các đa thức đặc trưng

$$\begin{cases} p(\lambda) = \det(K - \lambda M) \\ p^{(r)}(\lambda^{(r)}) = \det(K^{(r)} - \lambda^{(r)} M^{(r)}) \end{cases}$$

1.4.1.3. Tính chất trực giao của các dạng chính - Dạng chuẩn:

Tính chất trực giao của các dạng chính thể hiện ở chỗ: công của ngoại lực (hay nội lực) của một dạng chính này trên chuyển vị (hay biến dạng) của một dạng chính khác bằng 0.

Biểu thức biểu thị tính trực giao của các dạng chính có thể viết qua ma trận độ cứng hoặc ma trận khối lượng như sau:

$\varphi_i^T M \varphi_j = 0$ hoặc $\varphi_i^T M \varphi_j = 0$ (với $\omega_i \neq \omega_j$ (1.10)

ở dạng giải tích, biểu thức tính trực giao viết theo ma trận khối lượng như sau: $\sum_{k=1}^{n} m_k y_{ki} y_{kj} = 0$

hoặc có thể biểu thị dưới dạng công của các nội lực:

$$\sum \int \frac{M_i M_j}{\text{EJ}} ds + \sum \int \frac{N_i N_j}{\text{EF}} ds + \sum \int \frac{Q_i Q_j}{\text{GF}} ds = 0$$

Đây là tính chất quan trong trong viẽc giải quyết các bài toán dao động cưỡng bức cũng như dao đồng tư do của hê hữu han bâc tư do.

* *Dạng chuẩn:* là dạng dao động riêng thoả mãn biểu thức: $\omega_i^T M \varphi_j = 1$

Ký hiệu là $\varphi_{i,ch}$

$\varphi_{i,ch} = \frac{1}{2} \varphi_i$ với a $a_i^2 = \omega_i^T M \varphi_i$ (1.11)

Việc đưa các dạng dao động riêng về dạng chuẩn gọi là chuẩn hoá các dạng dao động riêng. Khi các dạng dao động riêng đã được chuẩn hoá, ta viết được điều kiện trực chuẩn như sau:

$$\Phi_{ch}^{T} M \Phi_{ch} = E \text{ hoặc } \Phi_{ch}^{T} K \Phi_{ch} = \Omega \qquad (1.12)$$

Điều kiện trực chuẩn có ý nghĩa quan trọng trong việc rút gọn quá trình tính toán của hệ dao động.

1.4.2. Dao động cưỡng bức của hệ hữu hạn bậc tự do:

Phương trình vi phân dao động của hệ: $MY_{(t)} + CY_{(t)} = P_{(t)}$.

Đây là bài toán phức tạp và hay gặp trong thực tế. Có nhiều phương pháp khác nhau để giải quyết bài toàn này, trong đó phương pháp hay được sử dụng là phương pháp cộng dạng dao động (phương pháp khai triển theo các dạng riêng).

1.4.2.1. Phương pháp khai triển theo các dạng riêng:

Xét hệ hữu hạn bậc tự do chịu lực cưỡng bức và không kể đến lực cản.

a. Phương pháp khai triển tải trọng theo cấc dạng riêng:

Giả sử lực $P_k(t)$ với một giá trị nào đó (bao gồm cả giá trị 0) tác dụng lên khối lượng m_k bất kỳ, lực $P_k(t)$ được khai triển theo các dạng dao động chính dưới dạng các thành phần $P_{ki}(t)$

$$P_k(t) = \sum_{k=1}^{n} P_{ki}(t) = \sum_{k=1}^{n} m_k \varphi_{ki} H_i(t) \text{ với } H_i(t) = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_{ki}(t).\varphi_{ki}}{\sum_{k=1}^{n} m_k \varphi^2{}_{ki}} \qquad (1.13)$$

Tải trọng khai triển theo dạng chính thứ i viết dưới dạng ma trận:

$$P_i = \frac{\omega_i^T P}{\omega_i^T M \omega_i} M\omega_i = \omega_{i,ch}^T PM\omega_{i,ch} \qquad (1.14)$$

Phương pháp này tìm được n hệ lực Pyri) thay cho hệ lực $P_k(t)$. Tương ứng với dạng chính có tần số G)j, ta có các lực $P_H(t)$, P_2j(t), Pni(t) được thể hiện như hình (1.1).

chuyển vị tỉ lệ với các chuyển vị dạng chính thứ i. Vì vậy, hệ chịu tải trọng như thế có thể xem như hệ vói một bậc tự do..

Gọi P_{kh} là ma trận bao gồm các tải trọng khai triển theo các dạng chính:

b. Phương pháp toạ độ tổng quát:

Chuyển vị của hệ có thể phân tích thành tổng của các chuyển vị thành phần ứng với từng dạng dao động chính:

Y(t) = $\sum_{k=1}^{n} y_i(t) = \sum_{k=1}^{n} \varphi$ k=l k=l

với: Z (t) = —-— fp.(T)sinco.(t-T)dx (1.15)

* M.cOi $_0^{J\ '\ s}$

Các đại lượng Zị(t) được gọi là toạ độ tổng quát của hệ, nó chính là các biên độ ứng vổi các dạng chính.

Ma trận các toạ độ tổng quát của hệ:

Z(t) = [Z,(t), **z**$_2$**(t),**...............,Z_n(t)]^T

1.4.2.2. Trình tự tính toán hệ dao động cưỡng bức:

Theo [1, tr.150], hệ hữu hạn bậc tự do dao động cưỡng bức được tính toán theo trình tự sau:

Nếu có một số lượng bất kì các lực P_i(t) được đặt không phải lên các khối lượng th cần phải thay thế chúng bằng các tải trọng P_i(t) như trên hình (1.2).

Các lực P_i^*(t) tác dụng tại các khối lượng sao cho: chuyển vị tĩnh của các khối lượng do chúng gây ra giống như các chuyển vị do các lực P_i(t) đã cho gây ra. Các tải trọng thay thế dựa trên cơ sở các phương trình:

$$\delta_{kl} P_1^*(t) + \delta_{k2} P_2^*(t) + ... + \delta_{kn} P_n^*(t) = \sum_{i=l}^{n} \delta_{kpi} P_i(t)$$

Gọi p_{kh} là ma trận bao gồm các tải trọng khai triển theo các dạng chính.

a. Phương pháp toạ độ tổng quát:

Chuyển vị của hệ có thể phân tích thành tổng của các chuyển vị thành phần ứng với từng dạng dao động chính:

Y(t) = $\sum_{k=l}^{n} Y_i(t) = \sum_{k=l}^{n} \varphi_i Z_1(t)$

với: Z_i (t) = $\frac{1}{M_i\omega_i}\int_0^t P_i(\tau)\sin\varpi_i(t-\tau)d\tau$

Các đại lượng Z_i(t) được gọi là toạ độ tổng quát của hệ, nó chính là các biên độ ứng với các dạng chính.

Ma trận các toạ độ tổng quát của hệ:

$Z(t) = [Z_1,(t),Z_2(t),............... ,Z_n(t)]^T$

b. Trình tự tính toán hệ dao động cưỡng bức:

Theo [1, tr.150], hệ hữu hạn bậc tự do dao động cưỡng bức được tính toán theo trình tự sau:

+ Xác định tán số dao đồng riêng và các dang dao đồng riêng.

+ Khai triển tải trọng theo các dạng dao đồng riêng theo (1.14), hoặc xác định các toạ độ tổng quát ứng vái các dạng riêng theo (1.15).

+ Xác định chuyển vi của hẽ từ kết quả nhân đươc ma trận tải trọng khai triển hoặc ma trận các tọa độ tổng quát.

$Y(t) = M\text{-}^1P_{kh}K_{ai}(t)$ (1.16)

trong đó: K_{ai} (t) - hệ số ảnh hưởng động học theo thời gian của dạng

chính thứ i; $K_{ai}(t) = \frac{1}{\varpi_i}\int_0^t f(\tau).\sin\varpi_i(t-\tau)d\tau$ (1.17)

Hoặc: Y(t)=$\phi.Z(t)$ (1.18)

+ Để xác định nội lực của hệ, cần phải biết lực đàn hồi P_d(t) tương ứng với quá trình dao động của hệ.

Với phương pháp khai triển theo các dạng dao động riêng:

$P_đ(t) = P_{kh}$ (1.19)

trong đó: K;(t) = CD; Jf(T).sinco$_i$(t -x)dx (1.20)

Với phương pháp toạ độ tổng quát: $p_đ(t) = KY(t)$

1.4.2.3. Dao động của hệ chịu tải trong điều hoà

Đa số trường hợp hay gặp trong kỹ thuật, người ta thường đưa tải trọng

P(t) về dạng gần đúng là hàm điều hoà hoặc phân tích theo chuỗi Furie rồi lấy một vài số hạng đầu. Do vậy, việc nghiên cứu dao động với lực kích thích có dạng Psinrt hay Pcosrt là một bài toán cơ bản trong động lực học công trình.

. Dao động cưỡng bức của hệ dưới dạng tổng quát bao gồm hai phần: dao động riêng, dao động vói lực kích thích. Khi dao động chuyển sang giai đoạn ổn định thì phần dao động riêng của hệ không còn, hệ sẽ dao động có chu kỳ cùng với chu kỳ của lực kích thích.

Khi hệ chịu tác dụng của tải trọng điều hoà: p(t) = $\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ ... \\ P_n \end{bmatrix}$ sin rt thì chuyển vị của hệ: Y = GP

Trong đó: G - ma trận giải thức Green: G = $\phi_{ch} D \phi_{ch}^T$

D= diag (S_i) với $S_i = \dfrac{1}{\omega_i^2 - r^2}$

Khi tần số r của lực kích thích bằng một trong các trị số của tần số dao động riêng ϖ_1 thì đều xảy ra hiện tượng cộng hưởng (r = ϖ_1).

Có thể sử dụng phương pháp tĩnh động để xác định các lực quán tính trong hệ. Đối với hệ đối xứng, có thể phân tích tải trọng thành đối xứng và phản xứng để vận dụng cách tính theo nửa hệ hoặc chuyển vị kép.

1.5. Các phương pháp tính gần đúng trong động lực học công trình:

Các phương pháp này dựa trên cơ sở tìm tần số dao động riêng theo phương trình đường đàn hồi được giả định trước, hoặc thay hệ có số bậc tự do lớn bằng hệ số có bậc tự do ít hơn. Các phương pháp cho kết quả tương đối chính xác đối với tần số cơ bản ϖ_1.Thực tế, khi tính toán các công trình, thường người ta chỉ quan tâm đến tần số cơ bản ϖ_1 để kiểm tra điều kiện cộng hưởng.

1.5.1. Phương pháp năng lượng (phương pháp Rayleigh):

Phương pháp này giả thiết trước các dạng dao động và dựa trên cơ sở định luật bảo toàn năng lượng để xác định tần số và dạng dao động riêng tương ứng. Khi hệ dao động tự do không kể đến lực cản, trên cơ *sở* quy luật bảo toàn năng lượng, có thể thiết lập được mối quan hệ: $U_{max} = K_{max}$.

Động năng của hệ tại thời điểm t bất kỳ:

$$K = \sum\int \frac{m_{(z)} v_z^2}{2} dz + \sum \frac{m_{(i)} v_i^2}{2} = \frac{\varpi^2}{2}\left[\sum\int m_z y^2{}_{k(z,t)} dz + \sum m_i y^2{}_{k(z,t)}\right]$$

Thế năng của hệ (khi chỉ xét tới ảnh hưởng của mô men uốn):

$$U = \sum\int \frac{M^2 dz}{2EJ} = \sum\int \frac{EJ}{2}\left[-\frac{\partial^2 y_{k(t,z)}}{\partial z^2}\right]^2 dz \qquad (1.12)$$

Sau khi xác đinh được U_{max} và K_{max}, ta nít ra được:

$$\varpi^2 = \frac{\sum\int EJ\left[\frac{\partial^2 y_{k(t,z)}}{\partial z^2}\right]^2 dz}{\sum\int m_{(z)} y^2{}_{k(t,z)} dz + m_i y^2{}_{k(t,z)}}$$

Nếu biểu thị chuyển vị của hệ khi dao động tự do dưới dạng ma trận:

$Y(t) = L.Z(t) = L.Z_0 \sin \varpi t$

trong đó: L - vectơdạng giả định, Z(t) - biên độ dạng giả định

thì: $\varpi^2 = \frac{L^t Kl}{L^t Ml}$

1.5.2. Phương pháp Bupnop - Galoockin:

Phương pháp Bupnop - Galoockin được xây dựng dựa trên cơ sở nguyên lý Hamilton hoặc nguyên lý chuyển vị khả dĩ.

Với bài toán dao động tự do của dầm, phương trình vi phân của dạng dao động chính thứ j:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[EJ_{(z)} \frac{\partial^2 y_{j(z,t)}}{\partial z^2}\right] - \varpi_j^2 m_{(z)} y_{j(z,t)} = 0$$

Giả thiết nghiệm của (1.21) đã biết và có thể biểu diễn như sau:

$$y_{j(z)} = \sum_{i-l}^{n} a_i \varphi_i(z)$$

Trong đó, a_i là các hằng số chưa biết, các hàm φ_i (z) cần phải chọn sao cho thoả mãn toàn bộ (hoặc một phần) điều kiện biên (động học và tĩnh học) của bài toán.

1.5.3. Phương pháp Lagrange - Ritz:

Phương pháp Lagrange - Ritz được xây dựng trên cơ sở nghiên cứu thế năng toàn phần của hệ

[Nội dung nguyên lý Lagrange được phát biểu như sau trong tất cả các trạng thái khả dĩ, trạng thái cân bằng dưới tác dụng của các lực có thể sẽ tương ứng với trạng thái mà theo đó, thế nâng toàn phần của hệ sẽ có giá trị dừng: $\delta U = 0$

Thế năng biến dạng được biểu diễn dưới dạng công ngoại lực và công nội lực của hệ khi chuyển từ trạng thái biến dạng về trạng thái không biến dạng

$$U= \int_0^1 \frac{EJ_{(z)}}{2}\left[\frac{\partial^2 y_{(z,t)}}{\partial z^2}\right]^2 dz - \int_0^1 q_{(z,t)} y_{(z,t)} dz - \sum P_{i(t)} y_{zi,t)}$$

trong đó: $q_{(z\ t)}$ và $p_{i(t)}$ bao gồm các lực kích thích và lực quán tính do các khối lượng phân bố và tập trung gây ra khi hệ dao động.Với bài toán dao động riêng, giả thiết dạng chính của dao động:

$$y_j(z)= \sum_{i=l}^{n} a_i \varphi_i(Z)$$

Trong đó, các hàm φ_i (z) thoả mãn điều kiện biên động học (còn điều kiện biên tĩnh học đã tự thoả mãn trong các biểu thức thế năng).

Từ điều kiên thế năng của hê có giá tri dừng, ta có: $\frac{\partial U}{\partial a_k} = 0$ (với k = $\overline{1..n}$

Từ đó nhận được n phương trình chính tắc chứa a_1, a_2,..., a_n.

1.5.4. Phương pháp thay thế khối lượng:

Phương pháp này dựa trên cơ sở đơn giản hoá sơ đồ khối lượng: thay thế các khối lượng phần bố và tập trung trên kết cấu thành các khối lượng tập trung với số lượng ít hơn đặt tại một số điểm đặc biệt.

Có thể chia các khối lượng phân bố thành nhiều khoảng, tập trụng các khối lương phân bố trên mỗi khoảng về trọng tâm của nó hoặc phân bố các khối lượng theo nguyên tắc đòn bẩy: khối lượng phân bố trên mỗi đoạn được thay thế bằng hai khối lượng đặt *ở* hai đầu đoạn đó.

1.5.5. Phương phấp khối lượng tương đương:

Phương pháp này được xây dựng trên giả thiết: “ Hai hệ tương đương về động năng thì cùng tương đương về tần số”. Vái phương pháp này, ta phải chọn trước đường đàn hồi y(z) và chỉ tính được tần số thấp nhất của hệ thực

1.5.6. Các phương pháp sô'trong động ịực học công trình:

1.5.6. 1. Phương pháp sai phân:

Là phương pháp giải gần đúng phương trình vi phân của dao động bằng giải hệ phương trình sai phân. Chia hộ thành n phần tử, tại mỗi điểm chia, thay đạo hàm bằng các sai phân để lập phương trình sai phân tương ứng. Kết quả thu được là hệ phương trình đại số tuyến tính với các ẩn số là giá trị nghiệm của phương trình vi phân tại điểm chia và các giá trị nghiệm tại một vài điểm chia lân cận. Phương pháp này cho phép dễ dàng giải bài toán dao động của hệ có các thông số thay đổi: tiết diện, khối lượng, tải trọng...

1 .5.6.2. Phương pháp phần tử hữu hạn:

Hệ được rời rạc hoá thành các phần tử hữu hạn, sau đó xem các phần tử hữu hạn được nối lại với nhau tại một số điểm quy định (thường là đỉnh của mỗi phần tử) gọi là nút và tạo thành lưới phần tử hữu hạn. Tính liên tục về biến dạng của hệ được thể hiện qua chuyển vị, đạo hàm của chuyển vị tại các nút của lưới phần tử hữu hạn.

Số phần tử hữu hạn (hay số lượng ẩn số) là các chuyển vị tại nút của lưới phần tử hữu hạn. Lưới phần tử hữu hạn càng mau thì càng làm việc sát hệ thực và mức độ của kết quả tính càng cao.

Vectơ chuyển vị nút của lưới phần tử hữu hạn: {Ý} = {y_l y_2 y_n}

Hệ phương trình vi phân biểu thị dao động của lưới phần tử hữu hạn có kể đến lực cản đàn nhớt tại thời điểm t bất kỳ:

$$[M]\{y(t)\}+[C]\{Y(t)\}+[K]\{Y(t)\}=\{P(t)\}$$

1.5.6.3. Phương pháp tích phân trực tiếp:

Phương pháp tích phân trực tiếp không những cho phép giải các bài toán dao động tuyến tính mà còn cho phép giải các bài toán dao động phi tuyến phức tạp. Gồm có các phương pháp sau:

+ *Phương pháp gia tốc tuyến tính (Phương pháp Viison):* phương pháp này xem rằng: sự thay đổi của gia tốc chuyển động trong mỗi bước thời gian từ t đến (t+Δt) là tuyến tính.

+ *Phương pháp sai phân trung tâm:* thực chất của phương pháp là chia bước, tích phân trực tiếp hệ phương trình vi phân trong từng khoảng chia Δt (giải bài toán tĩnh trong từng bước chia thời gian Δt nhưng có kể đến lực quán tính và lực cản, đồng thời phương trình cân bằng được giải nhiều lần đối với các điểm chia trong khoảng thời gian dao động).

Giá trị gia tốc của chuyển vị được xem là không đổi trong phạm vi hai bước chia thời gian và được xác định:

$$\{Y(t)\}=\frac{1}{\Delta t^2}\left[\{Y(t-\Delta t\ \}-2\{Y(t\ \}+\{Y(t+\Delta t\}\ \right]$$

+ *Phương phấp gia tốc trung bình không đổi (phương phấp Neimark):*

Phương pháp này giả thiết rằng: ở mỗi bước thời gian Δt, gia tốc chuyển động bằng hằng số và được tính bằng giá trị trung bình hai giá trị đầu và cuối của khoảng .

1.6. Một số nhận xét:

+ Bài toán động lực học công trình nghiên cứu phản ứng của hệ kết cấu khi chịu tải trọng động (mà tải trọng tĩnh chỉ là trường hợp đặc biệt). Có nhiều phương pháp để giải bài toán dao động nhưng có thể nói, các phương pháp đều xuất phát từ nguyên lý năng lượng.

Xuất phát từ điều kiện dừng của phiếm hàm của thế năng toàn phần của hệ: $\delta U = 0$, nếu lấy biến phân của phiếm hàm theo chuyển vị thì ta nhận được các phương trình cân bằng, nếu lấy biến phân của phiếm hàm theo lực thì ta được các phương trình biến dạng.

+ Việc xác định các tần số dao động riêng và các dạng dao động riêng của bài toán dao động (tương ứng với bài toán xác định các trị riêng và vecto riêng của đại số tuyến tính) là một nhiêm vụ quan trọng của bài toán dao động.

Bài toán riêng: [K - λM] A = 0 (với $\lambda = \varpi^2$) tương ứng với việc tìm trị riêng $:\left[K-\lambda M\right]$. Đây là bài toán lổn (đa thức bậc n,với n là bậc tự do của hệ), có nhiều thuật toán để giải nhưng phức tạp. Việc thiết lập ma trận độ cứng K và đưa về dạng ma trận đường chéo là tương đối khó khăn đối với hệ có nhiều bậc tự do.

CHƯƠNG 2 - NGUYÊN LÝ CỰC TRỊ GAUSS (NGUYÊN LÝ CƯỠNG BỨC NHỎ NHẤT) - ÁP DỤNG NGUYÊN LÝ CHO CÁC BÀI TOÁN ĐỘNG LỰC HỌC CÔNG TRÌNH

2.1.Nguyên lý cực trị Gauss (nguyên lý cưỡng bức nhỏ nhất):

Nguyên lý này được nhà toán học người Đức K.F. Gauss phát biểu năm 1829 cho hệ chất điểm, nguyên văn như sau:

Tại mỗi thời điểm, chuyển động của một hệ chất điểm - liên kết tuỳ ý và chịu tác dụng bất kỳ - sẽ xảy ra rất gần với chuyển động mà các chất điểm đó có trong trường hợp chúng được tự do; nghĩa là chuyển động đó xảy ra với một lượng cưỡng bức ít nhất có thể nếu như ta coi độ đo của sự cượng bức là tổng các tích số giữa khối lượng của mỗi chất điểm với bình phương độ lệch của vị trí chất điểm đó so với vị trí mà nó chiếm được nếu như nó được tự do [12, tr.45].

Độ lệch về vị trí của chất điểm thứ i khối lượng mj được nói đến trong nguyên lý Gauss là: $\Delta_I = \delta_I - \frac{F_i}{m_i}$

Trong đó: F_i - véctơ lực tác động vào chất điểm khi có liên kết.

δ_i - véctơ gia tốc chuyển động của chất điểm khi nó được giải phóng khỏi liên kết.

Nếu hệ có n chất điểm, lượng cưỡng bức của hệ (so với chuyển động tự do) là:

$$Z = \sum_i^n m_i \Delta_i^2 = \sum_i^n m_i \left(\delta_i - \frac{F_i}{m_i} \right)^2$$

Theo nguyên lý cực trị Gauss, chuyển động thực của hệ chất điểm sẽ xảy ra ứng với lượng cưỡng bức cực tiểu, nghĩa là với điều kiện:

$$Z \rightarrow \min \ hay \ \delta Z = 0 \qquad (2.1)$$

Biến phân trong (2.1) được lấy với gia tốc, hay còn gọi là biến phân theo kiểu Gauss.

2.2 Sử dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss để giải bài toán cơ học kết cấu:

GS.TSKH. Hà Huy Cương là người đề xuất phương pháp sử dụng nguyên lý cực tri Gauss để giải bài toán cơ học vật rắn biến dạng.

2.2.1 Bài toán dầm chịu uốn thuần tuý:

Xét một dầm chịu uốn thuần tuý có chiều dài 1, độ cứng mặt cắt là EJ_x. Giả thiết vật liệu làm việc trong giới hạn đàn hồi và tuân theo hai giả thiết sau: + Giả thiết về mặt cắt ngang (giả thiết Becnuli): mặt cắt ngang dầm trước và sau khi biến dạng vẫn phẳng và vuông góc với trục dầm.

+ Giả thiết về các thớ dọc: trong quá trình biến dạng, các thớ dọc không ép lên nhau và không đẩy xa nhau.

Từ đó ta có phương trình vi phân gần đúng của đường đàn hồi:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{M_x}{EJ_x}$$

Mômen uốn tại mặt cắt z nào đó được xác định theo công thức:

$$M_x(z) = - EJ_x \frac{d^2y}{dz^2}$$

Liên tưởng đến định luật n Newton:

$$F = - ma$$

Vì vậy, một cách tương tự toán học, có thể xem:

+ Mômen uốn M_x tại mặt cắt đang xét là lực tác dụng.

+ Độ cứng mặt cắt EJ_x của dầm khi uốn là khối lượng.

+ $\frac{d^2y}{dz^2}$ như là gia tốc chuyển động của đầm.

Chọn dầm so sánh (có thể chịu liên kết khác) nhưng giống dầm thực về độ cứng mặt cắt và tải trọng.

Gia tốc của đầm so sánh sẽ là $\frac{d^2y}{dz^2}$ với y_0 là độ vững của đầm so sánh.

Lượng cưỡng bức được việt như sau:

$$Z=\int_0^1 EJ_x\left(\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{d^2y_0}{dz^2}\right)^2 dz \qquad (2.2)$$

hay

$$Z=\int_0^1 \frac{1}{EJ_x}\left(M_x-M_x^0\right)^2 dz \qquad (2.3)$$

trong đó M_x^0 là momen uốn của dầm so sánh.

Chuyển động của dầm đang xét rất gần với chuyển động tự do nếu Z—>min hay $\delta Z = 0$.

* Khi hệ so sánh không có liên kết thì $M_x^0 = 0$, công thức (2.3) được viết lại như sau: $Z=\int_0^1 \frac{1}{EJ_x}(M_x)^2 dz$ (2.4)

hay $Z=\int_0^1 EJ_x\left(\frac{d^2y}{dz^2}\right)^2 dz$ (2.5)

+ Khi trên dầm có lực phân bố đều q trên toàn bộ chiều dài Z_1:

$$Z=\int_0^1 \left[\, EJ_x\left(\frac{d^2y}{dz^2}\right)^2 - 2qy\,\right]dz$$

+ Khi trên dầm có lưjc tập trung P tại vị trí z_1 nào đó:

$$Z=\int_0^1 EJ_x\left(\frac{d^2y}{dz^2}\right)^2 dz - 2Py_{(z1)}$$

+ Khi trên dầm có mômen tập trung M tại vị trí z_2 nào đó:

$$Z=\int_0^1 EJ_x\left(\frac{d^2y}{dz^2}\right)^2 dz - 2M\varphi_{(Z2)}$$

Trong đó (p$_{(z2)}$ là góc xoay tại tiết diện có mômen tập trung. Với giả thiết chuyển vị bé, ta có: (p$_{(z2)}$ = y'$_{(z2)}$.

2.2.2. Bài toán dầm phẳng:

Dầm có các thành phần nội lực là M_x, Qy, N_z. Chuyển vị trong trường hợp uốn là độ võng, độ cứng mặt cắt là EJ_X. Chuyển vị trong trường hợp cắt là sự trượt, độ cứng mặt cắt là GF. Chuyển vị trong trường hợp kéo (hoặc nén) là sự dấn dài (hoặc co ngắn), độ cứng mặt cắt là EF. Kể đến tính chất độc lập tác dụng của các đại lượng trên, ta có lượng cưỡng bức được viết như sau:

$$Z=\int_0^1 \left[\ \frac{1}{EJ_x}(M_x - M_x^0)^2 + \frac{1}{GF}(Q_y - Q_y^0)^2 + \frac{1}{EF}(N_z - N_z^0)^2\ \right]$$

trong đó M_x^0, Q_y^0, N_z^0 là các thành phần nội lực của dầm so sánh.

* Khi hệ so sánh không có liên kết (các thành phần nội lực của hệ so sánh bằng không), công thức (2.9) trở thành:

$$Z=\int_0^1 \left[\frac{1}{EJ_x}(M_x)^2 + \frac{1}{GF}(Q_y)^2 + \frac{1}{EF}(N_z)^2\ \right]^2 dz \qquad (2.10)$$

Nếu tải trọng vuông góc với trục thanh (N_z= 0) thì (2.10) được viết như sau:

CHƯƠNG 3.
TÍNH TOÁN DAO ĐỘNG CỦA KHUNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN LÝ CỰC TRỊ GAUSS

3.1. Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss để giải bài toán động lực học:

Xét một dầm chịu tải trọng động, dầm có chiều dài 1, khối lượng của dầm là $m_{(z)}$, độ cứng mặt cắt là EJ_X.

Phương trình độ võng của dầm có dạng: y = y(z,t) phải thoả mãn điều kiện biên và điều kiện ban đầu (nếu có).

khi dầm chịu tải trọng động thì đề xuất hiện thêm thành phần lực quán tính ngược chiều với gia tốc độ của hệ: $F^{qt} = -m_{(z)}\dfrac{\partial^2 y_{(z,t)}}{\partial t^2}$

Coi lực quán tính cũng như ngoại lực(theo nguyên lý D' Alembert) ta có lượng cưỡng bức do lực quán tính gây ra:

$$Z_{qt} = \int_0^1 2F^{qt} y_{(z,t)} dz$$

Để thuận tiện trong công thức, ta có thể viết lại lượng cưỡng bức do lực quán tính gây ra như sau:

$$Z_{qt} = \int_0^1 2F_{qt} y_{(z,t)} dz \quad \text{với} \quad F^{qt} = m_{(z)}\frac{\partial^2 y_{(z,t)}}{\partial t^2}$$

3.1.1. Bài toán dầm chịu uốn thuần túy:

Xét dầm chịu tải trọng động, dầm có khối lượng phân bố $m_{(z)}$. Khi bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt, ta có dầm chịu uốn thuần tuý.

Chọn hệ so sánh không có liên kết, lượng cưỡng bức được viết như sau:

$$Z = \int_0^1 [\ EJ_x(\frac{\partial^2 y_{(Z,T)}}{\partial z^2})^2 + 2F^{qt} y_{(Z,T)}\ ]dz$$

Chuyển động của dầm đang xét sẽ rất gần với chuyển động tự do nếu như lượng cưỡng bức đạt cực tiểu ($Z \rightarrow \min$) hay $\delta Z = 0$.

3.1.2. Bài toán dầm phẳng:

Xét trường hợp tải trọng tác động vuông góc với trục dầm (N_z= 0). Khi hệ so sánh không có liên kết, lượng cưỡng bức được viết như sau:

$$Z=\int_0^1 [\ \frac{1}{EJ}(M_x)^2+\frac{1}{GF}(Q_y)^2+2F^{qt}y_{(z,t)}\ ]dz \tag{3.1}$$

hay:

$$Z=\int_0^1 \left[EJ_x\left\{\frac{\partial^2 y_{(z,t)}}{\partial z^2}\right\}^2+\frac{1}{GF}\left\{EJ_x\frac{\partial^3 y_{(z,t)}}{\partial z^3}\right\}+2F^{qt}y_{(z,t)}\ \right]dz \tag{3.2}$$

3.2. Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss thiết lập phương trình vi phân dao động cho thanh thẳng:

Xét thanh thẳng có khối lượng phân bố $m_{(z)}$, độ cứng mặt cắt là EJ_x và có liên kết bất kỳ. Hệ so sánh được chọn là một thanh không có liên kết, có khối lượng và độ cứng mặt cắt như thanh đang xét. Theo (2.13) ta có:

$$Z=\int_1^0\left[EJ_x\left(\frac{\partial^3 y_{(z,t)}}{\partial z^2}\right)+2F^{qt}y_{(z,t)}\right]dz$$

Chuyển động thực của thanh đang xét rất gần với chuyển động tự do nếu lượng cưỡng bức cực tiểu (Z$\rightarrow$ min) hay $\delta Z=0$ vậy:

$$\delta Z=\partial\left\{\int_0^1\left[EJ_x(\frac{\partial^2 y_{(z,t)}}{\partial Z^2})+2F^{qt}y_{(z,t)}\right]dz\right\}=0$$

Hay: $\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\left[2EJ_x\left(\dfrac{\partial^2 y_{(z,t)}}{\partial z^2}\right)\right]+2F^{qt}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2}{6Z^2}\left[EJ_x\left(\frac{\partial^2 y_{(z,t)}}{6z^2}\right)\right]+m_{(z)}\frac{\partial^2 y_{(z,t)}}{\partial t^2}=0 \tag{3.3}$$

(3.3) chính là phương trình vi phân của dao động riêng khi không kể lực cản.

* Khi thanh chịu lực phân bố $q_{(z,t)}$

$$Z = \int_0^1 \left[EJ_x \left(\frac{\partial^2 y_{(z,t)}}{\partial z^2} \right) + 2F^{qt} y_{(z,t)} - 2q_{(z,t)} y_{(z,t)} \right] dx \to \min$$

Hay

$$\delta z = \delta \left\{ \int_0^1 \left[EJ_x \left(\frac{\partial^2 y_{(z,t)}}{\partial z^2} \right)^2 + 2F^{qt} y_{(z,t)} - 2q_{(z,t)} y_{(z,t)} \right] dx \right\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[2EJ_x \left(\frac{\partial^2 y_{(z,t)}}{\partial z^2} \right) \right] + 2F^{qt} - 2q_{(z,t)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[EJ_x \left(\frac{\partial^2 y_{(z,t)}}{\partial t^2} \right) \right] + m_{(z)} \frac{\partial^2 y_{(z,t)}}{\partial t^2} = q_{(z,t)} \qquad (3.4)$$

(3.4) chính là phương trình vi phân của dao động cưỡng bức khi không kể lực cản.

* Kết luận: như vậy từ phương pháp sử dụng nguyên lí cực trị Gauss, ta có thể thiết lập được phương trình vi phân của hệ dao động giống như việc áp dụng các phương pháp khác.

3.3. Các bước thực hiện khi tìm tần số dao động riêng và dạng dao động riêng bằng phương pháp nguyên lýcực trị Gauss.

Trong quá trình tính toán, ta không xét đến giai đoạn chuyển tiếp sau khi bỏ lực kích thích và bỏ qua chuyển vị xoay của các khối lượng trong quá trình chúng dao động.

Bước 1: Chọn hệ so sánh:

Hệ "So sánh" là hệ hoàn toàn không có liên kết nhưng có cùng độ cứng mặt cắt và cùng tải trọng với hệ đang xét (hệ đang xét hay còn gọi là hệ cho).

Bước 2: Giả thiết đường độ võng của dầm cần tìm với biểu thức đường độ võng phải thoả mãn điều kiện biên.

Chẳng hạn, biểu thức đường độ võng có thể viết dưới dạng đa thức, chuỗi lượng giác đơn hoặc dạng số phức:

Dạng đa thức:

$$y = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n)\sin \varpi t = (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4) + ...)\sin \varpi t$$

Dạng chuỗi lượng giác đơn: $y = (\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi z}{1} \sin \varpi t$

Dạng số phức: $y = (\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi z}{1})e^{i\varpi t}$

Bước 3: Viết biểu thức lượng cưỡng bức của hệ theo (2.13), (3.1) hoặc (3.2).

Bước 4: Viết các điều kiện về động học thể hiện sự sai khác giữa hệ cho và hệ so sánh. Điều kiện biên chính là các ràng buộc dưới dạng đẳng thức.

Ngoài ra, ta phải đưa thêm ràng buộc, đó là điều kiện có nghiệm (tức là hệ phải có dao động).

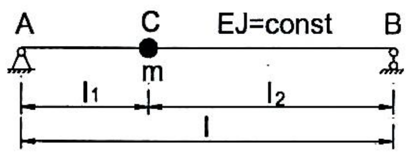
Bước 5: Cực tiểu hoá lượng cưỡng bức.

Đối với bài toán cực trị có các điều kiện ràng buộc, ta sử dụng phương pháp phân tử Langrange để đưa bài toán cực trị không ràng buộc.

Gọi λ_k là nhân tử Langrange để đưa bài toán cực trị có điều kiện ràng buộc (đó là điều kiện có nghiệm, tức là có dao động) về bài toán cực trị không ràng buộc. Sau khi vực tiểu hoá lượng cưỡng bức theo các thành phần cơ bản, nhận được biểu thức λ_k có chứa tần số dao động riêng ϖ

Bước 6: Cho λ_k = 0, nhận được các giá trị tần số dao dộng riêng ϖ. Ứng với các giá trị ϖ, ta có các dạng dao động riêng.

Xét dầm đơn giản có độ đứng EJ = const, khối lượng tập trung m đặt cách gối trái một đoạn là l_1 như hình (3.1). Bỏ qua khối lượng của dầm. Tìm tần số dao động riêng của dầm



Hình 3.1

Viết biểu thức đường độ võng cho các đoạn dưới dạng đa thức như sau:

$$y_1 = (\sum_{i=1}^{4} a_i z^i)\sin \varpi t \qquad \text{(Với } 0 \le z \le 1\text{)}$$

$$y_2 = (\sum_{j=0}^{4} b_j z^j)\sin \varpi t \qquad \text{(Với } 0 \le z \le 1\text{)}$$

Chọn hệ so sánh giống dầm đang xét nhưng hoàn toàn không có liên kết.

Khi không kể đến ảnh hưởng của lực cắt, lượng cưỡng bức được viết như sau:

$$Z = \int_0^{l_1} EJ_x \left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial z^2}\right)^2 dz + \int_0^{l_2} EJ_x \left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial z^2}\right) dz + 2F^{qt} y_{1(l_1,t)} \tag{3.5}$$

Chuyển động thực của dầm cho sẽ rất gần với chuyển động tự do nếu lượng cưỡng bức cực tiểu (hay $\delta Z = 0$).

Dầm cho khác dầm so sánh ở chỗ có các liên kết gối tựa tại hai đầu dầm.

Từ đó ta có các điều kiện ràng buộc:

$$y_{2(z=l_2)} = 0 \to g_1 = (b_0 + b_1 l_1 + b_2 l_2^2 + b_3 l_2^3 + b_4 l_2^4)\sin \varpi t = 0$$

$$y_{1(z=l_1)} = y_{2(z=0)} \to g_2 = (a_1 l_1 + a_2 l_1^2 + a_3 l_1^3 + a_4 l_1^4 - b_0)\sin \varpi t = 0$$

$$\left.\frac{\partial y_1}{\partial z}\right| z = l_1 = \left.\frac{\partial y_2}{\partial z}\right| z = 0 \to g_3 = (a_1 + 2a_2 l_1 + 3a_3 l_1^2 + 4a_4 l_1^3 - b_1)\sin \varpi t = 0$$

Ngoài ra , ta phải kể thêm điều kiện để tồn tại nghiệm (có dao động), nghĩa là khối lượng m phải có chuyển vị. Chuyển vị này có thể có giá trị bất kỳ (khác 0). Cho chuyển vị đó bằng 1, vậy ta có thêm điều kiện ràng buộc.

$$y_{1(z=l_2)} = 1 \to g_1 = (b_0 + b_1 l_2 + b_2 l_2^2 + b_3 l_2^3 + b_4 l_2^4)\sin \varpi t = 0$$

Ta đưa bài toán tìm cực trị của (3.5) có 4 điều kiện ràng buộc về bài toán cực trị không có ràng buộc bằng cách đưa vào các nhân tử Langrange như sau:

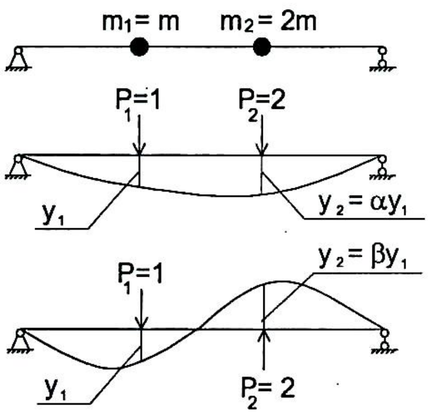
$$Z = \int_0^{l_1} EJ \left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial z^2}\right)^2 dz + \int_0^{l_2} EJ_x \left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial z^2}\right) dz + 2F^{qt} y_{1(l_1,t)} + \sum_{k=1}^{4} \lambda_k g_k \tag{3.6}$$

$Z \to$ min (cực tiểu hoá phiếm hàm với các thành phần cơ bản), ta có hệ phương trình để xác định các đại lượng cần tìm, trong đó có λ_4. Xem lực quán tính F^{qt} như là ngoại lực (theo nguyên lý D'Alembert) nên khi cực tiểu hoá phiếm hàm (3.6) ta không đạo hàm đối với F^{qt}.

Tương tự cách giải thích như trên, λ_4 là phản lực liên kết của gối tại C (vị trí đặt khối lượng m). Mặt khác, tại C không có liên kết gối tựa nên $\lambda_4 = 0$.

3.4. Xác định tần số dao động riêng thông qua dạng dao động riêng:

Với giả thiết đường đàn hồi được viết dưới dạng đa thức hoặc chuỗi lượng giác đơn, ta thấy: $F^{qt} = m\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ Vậy, lực quán tính tỉ lệ với khối lượng m và chuyển vị y.



Hình 3.2

Từ nhận xét này, ta có thể giải bài toán động thông qua bài toán tĩnh. Dựa vào các dạng dao động riêng của hệ và từ bài toán tĩnh, ta tìm được tỉ số chuyển vị giữa các khối lượng.

Khi xét bài toán tĩnh, tại vị trí các khối lượng m, đặt các lực tỉ lệ với các khối lượng theo phương chuyển vị, nhận được kết quả các chuyển vị. Các chuyển vị này tỉ lệ với nhau theo một tỉ số nào đấy, ví dụ như trên hình (3.2). Các chuyển vị tìm được cũng chính là các điều kiện ràng buộc được đưa vào biểu thức lượng cưỡng bức, từ đó xác định được các tần số dao động riêng.

Cách làm này sẽ được thể hiện rõ ở các ví dụ ở mục (3.6).

3.5. Một số kết luận và nhận xét:

+ Nguyên lý cực trị Gauss không phải là nguyên lý năng lượng. Nguyên lý cũng xét điều kiện dừng của phiếm hàm lượng cưỡng bức: $\delta Z = 0$ nhưng lấy biến phân theo gia tốc.

+ Nguyên lý cực trị Gauss có thể hiểu đơn giản là thay vì đi xét hê thực (hay gọi là hệ cho), ta đi xét một hệ khác (gọi là hệ so sánh) hoàn toàn giống hệ cho nhưng không có liên kết. Hai hệ này sẽ chuyển động lại gần nhau khi lượng cưỡng bức cực tiểu.

+ Từ (2.13) và (2.16), nhận thấy: khi giải bài toán động lực học công trình theo phương pháp nguyên lí cực trị Gauss, ta giải trực tiếp đạo hàm cấp hai của đường độ võng trên lượng cưỡng bức (với giả thiết đã biết đường độ võng) mà không cần phải giải phương trình vi phân bậc 4.

+ Khi lấy cực tiểu phiếm hàm biểu diễn lượng cưỡng bức đối với các thành phần cơ bản, ta luôn có thể dẫn biểu thức của nguyên lý đang xét về phương trình cân bằng.

+ Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss phát triển từ nguyên lý cực trị Gauss để đưa ra lời giải cho bài toán cơ học vật rắn biến dạng. Lúc này, gia tốc trong nguyên lý cực trị Gauss chính là đạo hàm cấp hai của đường độ võng.

Hệ so sánh có thể chịu liên kết khác với hệ cho nhưng phải giống hệ cho về tải trọng và độ cứng mặt cắt.

Lượng cưỡng bức thể hiện sự sai khác về liên kết giữa hai hệ: hệ cho và hệ so sánh.

Đối với bài toán động lực học, ta coi lực quán tính như là ngoại lực và viết thêm lượng cưỡng bức do lực quán tính gây ra.

+ Với cách xây dựng bài toán và đưa ra lời giải cho bài toán động như bài toán tĩnh nên sử dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss để giải bài toán động lực học có cách làm và cách nghĩ đơn giản, hoàn toàn mới so với các phương pháp khác.

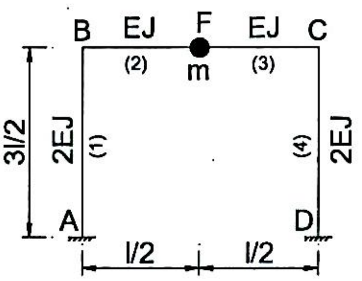
3.6. Các ví dụ tính toán

Bài toán xác định tần số dao động riêng - dạng dao động riêng của khung có một số bậc tự do:

Trong các ví dụ tính toán đều bỏ qua ảnh hưởng của lực cản và không kể đến ảnh hưởng của lực cắt. Các nút khung được xem là tuyệt đối cứng nên góc xoay của các thanh quy tụ vài nút bằng nhau

3.6.1. Ví dụ 1

Cho khung mang khối lượng m như trên hình (3.1). Các thanh BC có độ cứng EJ, các thanh AB và DC có độ cứng 2EJ. Bỏ qua khối lượng của thanh. Tìm tần số dao động riêng của khung



Hình 3.3

Lời giải

Viết biểu thức độ võng cho các đoạn dưới dạng đa thức như sau:

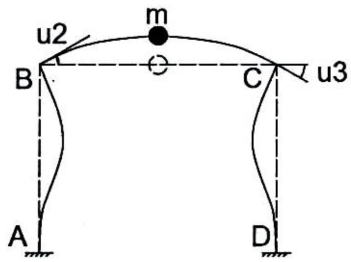
$$y = \left(\sum_{i=2}^{4} a_1 z^i\right)\sin\omega t \ \text{(với } 0 \le z \le \frac{31}{2}\text{)}; \ y_2 = \left(\sum_{j=0}^{4} b_1 z^j\right)\sin\omega t \ \text{(với } 0 \le z \le \frac{1}{2}\text{)};$$

$$y_3 = \left(\sum_{n=0}^{4} c_n z^n\right)\sin\omega t \ \text{(với } 0 \le z \le \frac{1}{2}\text{)}; \ y_4 = \left(\sum_{m=2}^{4} d_m z^m\right)\sin\omega t \ \text{(với } 0 \le z \le \frac{31}{2}\text{)}; \qquad (3.7)$$

Trong đó, các thanh (1), (2) và (3) có gốc toạ độ lần lượt A,B và F. Còn thanh (4) có góc toạ độ tại D. Với việc chọn gốc toạ độ như trên, biểu thức đường độ võng của thanh (1) và (4) thoả mãn điều kịên biên: Tại liên kết ngàm không có chuyển vị và góc xoay.

Dao động của khung xảy ra một trong hai trường hợp như sau:

** Trường hợp 1: Khối lượng m dao động theo phương thẳng đứng (khung dao động đối xứng) như hình vẽ (3.4)*



Hình 3.4

Tại hai nút B và C không có chuyển vị đứng và chuyển vị ngang. Ta có $u_2=u_3$ Chọn dầm so sánh giống dầm cho nhưng không có liên kết. Các điều kiện ràng buộc được viết như sau:

$$g_1 = y_{1(z=\frac{31}{2})} = 0\,;\; g_2 = y_{4(z=\frac{31}{2})} = 0$$

$$g_3 = y_{2(z=0)} = 0\,; g_4 = y_{3(z=\frac{1}{2})} = 0$$

$$g_5 = \frac{\partial y_1}{\partial z}\bigg|_{z=\frac{31}{2}} - \frac{\partial y_2}{\partial z}\bigg|_{z=0} = 0\,;\; g_6 = y_2(z=\frac{1}{2}) - y_{3(z=0)} = 0$$

$$g_7 = \frac{\partial y_1}{\partial z}\bigg|_{z=\frac{1}{2}} - \frac{\partial y_2}{\partial z}\bigg|_{z=\frac{1}{2}} = 0\,; g_8 = \frac{\partial y_1}{\partial z}\bigg|_{z=\frac{1}{2}} - \frac{\partial y_4}{\partial z}\bigg|_{z=\frac{31}{2}} = 0$$

$$g_9 = \frac{\partial y_2}{\partial z}\bigg|_{z=0} - \frac{\partial y_3}{\partial z}\bigg|_{z=\frac{1}{2}} = 0$$

$$;\; g_{10} = y_{2(z=\frac{1}{2})} - 1 = 0 \qquad (3.8)$$

Lượng cưỡng bức được viết như sau:

$$Z = \int_0^{31/2} 2EJx\left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial z^2}\right)^2 dz + \int_0^{1/2} EJx\left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial z^2}\right)^2 dz + \int_0^{1/2} EJx\left(\frac{\partial^2 y_3}{\partial z^2}\right)^2 dz +$$
$$+ \int_0^{1/2} 2EJx\left(\frac{\partial^2 y_4}{\partial z^2}\right)^2 dz + 2F^{qt} y_{2(1/2,t)} + \sum_{k=1}^{10} \lambda_k g_k \qquad (3.9)$$

Thay (3.7) và (3.8) vào (3.9), nhận được biểu thức lượng cưỡng bức Z. Cho Z→min, ta có hệ phương trình:

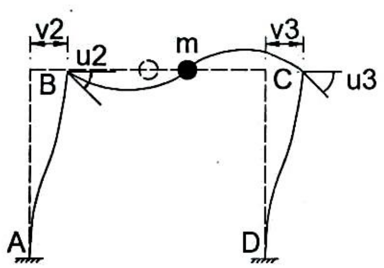
$$\frac{\partial Z}{\partial a_1}=0;\ \frac{\partial Z}{\partial a_j}=0;\ \frac{\partial Z}{\partial c_n}=0;\ \frac{\partial Z}{\partial d_m}=0;\ \frac{\partial Z}{\partial \lambda_k}=0; \qquad (3.10)$$

(i=2÷4; j=0÷4; n=0÷4;m=2÷4;k=1÷10)

Sau khi đã tìm cực trị của phiếm hàm Z theo các hệ số b_j, thay $F^{qt}=-m\omega^2 y_{2(1/2,t)}$ vào các phương trình (3.9)

Giải hệ phương trình tuyến tính (3.9). Từ két quả tính toán, cho λ_{10}=0 ta có: $\omega=\frac{8}{7}\sqrt{\frac{105EJ}{\mathrm{ml}^3}}=11{,}71\sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}$

** Trường hợp 2: Khối lượng m dao động theo phương ngang (khung dao động đối xứng) như trên hình vẽ (3.5)*



Hình 3.5

Ta thấy tại điểm nút B và C có chuyển vị ngang và góc xoay bằng nhau (v2=u3;u2=u3) tại vị trí có khối lượng m không có chuyển vị đứng

Chọn dầm so sánh giốn dầm cho nhưng không có liên kết. Các điều kiện ràng buộc được viết như sau:

$$g_1=y_{2(z=\frac{11}{2})}=0;\ g_2=y_{3(z=0)}=0\ g_3=\frac{\partial y_1}{\partial z}\bigg|_{z=\frac{31}{2}}-\frac{\partial y_2}{\partial z}\bigg|_{z=0}$$

$$g\ =\frac{\partial y_2}{\partial z}\bigg|_{z=\frac{1}{2}}-\frac{\partial y_3}{\partial z}\bigg|_{z=0}=0\ g_5=\frac{\partial y_3}{\partial z}\bigg|_{z=\frac{1}{2}}-\frac{\partial y_4}{\partial z}\bigg|_{z=\frac{31}{2}}=0;$$

$$g_6=\frac{\partial y_2}{\partial z}\bigg|_{z=0}-\frac{\partial y_3}{\partial z}\bigg|_{z=\frac{1}{2}}=0\ g_7=y_{1(z=\frac{31}{2})}+y_{4(z=\frac{31}{2})}=0; \qquad (3.11)$$

; $g_{10} = y_{1(z=\frac{31}{2})} - 1 = 0$

Lượng cưỡng bức được viết như sau:

$$Z = \int_0^{31/2} 2EJx\left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial z^2}\right)^2 dz + \int_0^{1/2} EJx\left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial z^2}\right)^2 dz + \int_0^{1/2} EJx\left(\frac{\partial^2 y_3}{\partial z^2}\right)^2 dz +$$
$$+ \int_0^{31/2} 2EJx\left(\frac{\partial^2 y_4}{\partial z^2}\right)^2 dz + 2F^{qt} y_{2(31/2,t)} + \sum_{k=1}^{8} \lambda_k g_k \qquad (3.12)$$

Thay (3.7) và (3.10) vào (3.11), nhận được biểu thức lượng cưỡng bức Z. Cho Z$\rightarrow$min, ta có hệ phương trình:

$$\frac{\partial Z}{\partial a_i} = 0; \frac{\partial Z}{\partial b_j} = 0; \frac{\partial Z}{\partial c_n} = 0; \frac{\partial Z}{\partial d_m} = 0; \frac{\partial Z}{\partial \lambda_k} = 0; \qquad (3.13)$$

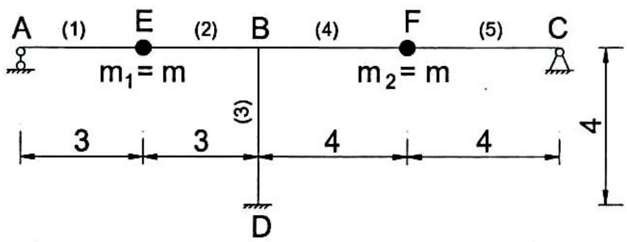
(i=2÷4; j=0÷4; n=0÷4;m=2÷4;k=1÷8)

Sau khi đã tìm cực trị của phiếm hàm Z theo các hệ số a_j, thay $F^{qt} = -m\omega^2 y_{2(31/2,t)}$ vào các phương trình (3.13)

Giải hệ phương trình tuyến tính (3.13). Từ kết quả tính toán, cho cho λ_8=0 ta có: $\omega = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{EJ}{\mathrm{ml}^3}} = 2{,}667\sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}$

3.6.2. Ví dụ 2

Cho khung mang các khối lượng m_1=m_2=m như trên hình (3.12). Khung có độ cứng EJ=const. Bỏ qua khối lượng của các thanh. Tìm các tần số dao động riêng của khung và các dạng dao động riêng tương ứng.



Hình 3.6

Lời giải

Viết biểu thức đường võng cho các đoạn dưới dạng đa thức như sau:

Dao động của khung xảy ra một trong hai trường hợp như sau:

$$y_1 = \left(\sum_{i=2}^{4} a_1 z^i\right)\sin \omega t \ (\text{với } 0 \le z \le 3);\ y_2 = \left(\sum_{j=0}^{4} b_1 z^j\right)\sin \omega t\ (\text{với } 0 \le z \le 3);$$

$$y_3 = \left(\sum_{n=0}^{4} c_n z^n\right)\sin \omega t \ (\text{với } 0 \le z \le 4);\ y_4 = \left(\sum_{m=2}^{4} d_m z^m\right)\sin \omega t\ (\text{với } 0 \le z \le 4);$$

$$y_5 = \left(\sum_{v=1}^{4} e_v z^v\right)\sin \omega t\ (\text{với } 0 \le z \le 4); \qquad (3.14)$$

Trong đó, các thanh (1), (2) và (4) có gốc toạ độ lần lượt A,E và B. Thanh (3) có góc toạ độ tại D và thanh (5) có gốc toạ độ tại C. Với việc chọn gốc toạ độ như trên, biểu thức đường độ võng của thanh (1), (3)và (5) thoả mãn điều kiện biên: Tại ngàm D không có chuyển vị và góc xoay, tại gối A và C không có chuyển vị. Tại nút B khôn có chuyển vị, góc xoay của các thanh quy tụ vào nút đều bằng nhau.

Chọn dầm so sánh giống dầm cho nhưng không có liên kết. Các điều kiện ràng buộc được viết như sau:

$$g_1 = y_{1(z=3)} - y_{2(z=0)} = 0;\ g_2 = \frac{\partial y_1}{\partial z}\Big|_{z=3} - \frac{\partial y_2}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0$$

$$g_3 = y_{4(z=4)} - y_{5(z=4)} = 0;\ g_4 = \frac{\partial y_4}{\partial z}\Big|_{z=4} + \frac{\partial y_5}{\partial z}\Big|_{z=4} = 0$$

$$g_5 = \frac{\partial y_1}{\partial z}\Big|_{z=3} - \frac{\partial y_3}{\partial z}\Big|_{z=4} = 0;\ g_6 = \frac{\partial y_2}{\partial z}\Big|_{z=3} - \frac{\partial y_4}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0\ g_7 = y_{3(z=4)} = 0$$

$$g_8 = y_{2(z=3)} = 0\ g_9 = y_{4(z=0)} = 0;\ g_{10} = y_{2(z=\frac{1}{2})} - 1 = 0 \qquad (3.14)$$

Lượng cưỡng bức được viết như sau:

$$Z=\int_0^3 EJx\left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial z^2}\right)^2 dz+\int_0^3 EJx\left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial z^2}\right)^2 dz+\int_0^4 EJx\left(\frac{\partial^2 y_3}{\partial z^2}\right)^2 dz+$$
$$+\int_0^4 2EJx\left(\frac{\partial^2 y_4}{\partial z^2}\right)^2 dz+\int_0^4 2EJx\left(\frac{\partial^2 y_4}{\partial z^2}\right)^2 dz+2F_1^{qt}y_{1(3,t)}+2F_1^{qt}y_{4(4,t)}+\sum_{k=1}^{10}\lambda_k g_k \tag{3.15}$$

Thay (3.32) và (3.33) vào (3.34), nhận được biểu thức lượng cưỡng bức Z. Cho Z$\rightarrow$min, ta có hệ phương trình:

$$\frac{\partial Z}{\partial a_i}=0;\ \frac{\partial Z}{\partial b_j}=0;\ \frac{\partial Z}{\partial c_n}=0;\ \frac{\partial Z}{\partial d_m}=0;\ \frac{\partial Z}{\partial e_v}=0;\ \frac{\partial Z}{\partial \lambda_k}=0; \tag{3.16}$$

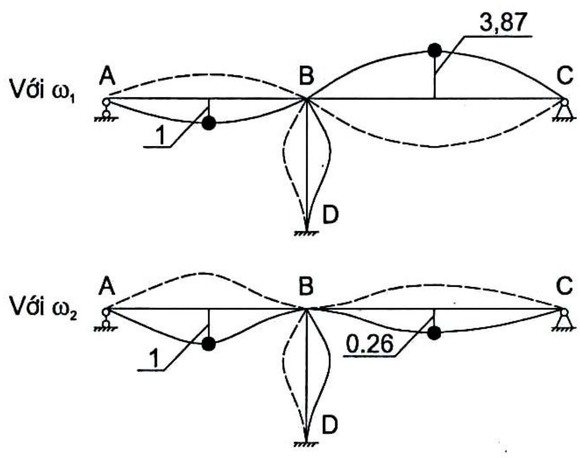
(i=2÷4; j=0÷4; n=0÷4; m=2÷4;v=1÷4; k=1÷10)

Sau khi đã tìm cực trị của phiếm hàm Z theo các hệ số a_j, và $d_m$thay $F^{qt}=-m\omega^2 y_{1(3,t)}, F^{qt}=-m\omega^2 y_{41(4,t)}$vào các phương trình (3.16)

Giải hệ phương trình tuyến tính (3.35). Từ kết quả tính toán, cho λ_{10}=0 ta có: $\omega_1=\frac{1}{168}\sqrt{\frac{2EJ}{ml^3}(4085-\sqrt{3139705}}=0,045\sqrt{\frac{EJ}{m}}$

$$\omega_2=\frac{1}{168}\sqrt{\frac{2EJ}{ml^3}(4085-\sqrt{3139705}}=0,644\sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

Thay các giá trị a_i, b_j, c_n và d_m tương ứng với các giá trị ω vào (3.14) ta có các dạng dao động riêng của hệ. Các dạng dao động riêng của hệ. Các dạng dao động riêng được thể hiện ở hình (3.13).



Hình 3.7

* Nhận xét: Đối với bài toán khung càng phức tạp thì cách làm này tỏ ra đơn giản vì ta không cần xét đến bậc siêu tĩnh của hệ.Điều quan trọng là viết đúng các điều kiện biên.

Bài toán xác định tần số dao động riêng của dầm có vô số bậc tự do:

3.6.3. Ví dụ 3

Cho dầm khối lượng m phân bố đều và tiết diện không đổi như trên hình (3.14). Xác định các tần số dao động riêng của dầm.

Lời giải

Viết biểu thức đường độ võng của dầm dưới dạng chuỗi lượng giác đơn như sau:

$$y = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi z}{1}\right)\sin\omega t \qquad (3.17)$$

Dễ dàng thấy (3.36) thoả mãn điều kiện biên: Tại các gối liên kết không có chuyển vị:

Ta có:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = -\frac{\pi^2}{1^2}\sum_{n=1}^{\infty}(n^2 a_n \sin\frac{n\pi z}{1})\sin\omega t \qquad (3.18)$$

$$f_{qt} = m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -m\omega^2(\sum_{n=1}^{\infty}(n\ a_n \sin\frac{n\pi z}{1})\sin\omega$$

Chọn dầm so sánh giống dầm cho nhưng không có liên kết. Khi không kể đến ảnh hưởng của lực cắt, lượng cưỡng bức được viết như sau:

$$Z = \int_0^1 \left\{EJ_x\left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right)^2 2f_{qt}y\right\}dz \qquad (3.19)$$

Thay (3.36) vào (3.38):

$$Z = \int_0^1 \left\{EJ_x\left(\frac{\pi^2}{1^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2 a_n \sin\frac{n\pi z}{1}\right)\sin\omega t\right)^2 + 2f_{qt}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi z}{1}\right)\sin\omega t\right\}dz$$

$$= EJ_x \frac{\pi^4}{1^4}\sin^2\omega t\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2 a_n \sin\frac{n\pi t}{1}\right)^2 dz + 2\sin\omega t\int_0^1 f_{qt}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi t}{1}\right)dz \qquad (3.20)$$

Ta thấy:

$$\int_0^1 \sin^2\frac{n\pi t}{1}dz = \frac{1}{2} \text{ với n = 1,2,3.....)}$$

$$\int_0^1 \sin\frac{n\pi t}{1}.\sin\frac{m\pi z}{1}dz = \frac{(m.\sin n\pi.\cos m\pi.\sin m\pi)}{(n^2 - m^2)} = 0$$

(Với n≠m) (3.21)

Khai triển (3.19) và dựa vào kết quả (3.20), (3.21), nhận được biểu thức sau:

$$Z = EJ_x \frac{\pi^4}{1^4}\sin^2\omega t.\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n^4 a_n^2 + 2\sin\omega t.\int_0^1\left(f_{qt}\sum_{i=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi z}{1}\right)dz$$

Cho Z -> min, hay: $\frac{\partial z}{\partial a_n} = 0$ với n= (1-∞) nhận được hệ gồm n phương trình. Ứng với mỗi giá trị của n, ta có phương trình:

$$EJ_x \frac{\pi^4}{1^4}\sin^2\omega t.\frac{1}{2}2n^4 a_n + 2\sin\omega t.\int_0^1\left(f_{qt}\sin\frac{n\pi z}{1}\right)dz \qquad (3.22)$$

Thay f_{qt} vào (3.42):

$$EJ_x \frac{\pi^4}{1^4}\sin^2\omega t\frac{1}{2}.2n^4 a_n - 2m\omega^2\sin^2\omega t\int_0^1 a_n \sin^2\frac{n\pi z}{1}dz = 0$$

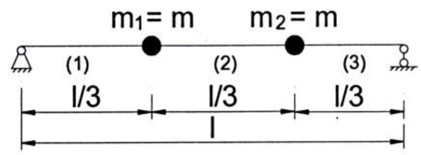
$$EJ_x \frac{\pi^4}{1^4}{}^2\omega t\frac{1}{2}.2n^4 a_n - 2m\omega^2\sin^2\omega t.\frac{1}{2}a_n = 0$$

$$\to \omega_n = \frac{n^2\pi^2}{1^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

3.7. Tìm tần số dao động riêng từ dạng dao động riêng:

3.7.1. Ví dụ 4

Cho dầm đơn giản có độ cứng EJ=const, hai khối lượng m_1=m_2 =m đặt tại các vị trí như hình vẽ (3.15). Bỏ qua khối lượng của dầm. Tìm tần số dao động riêng của dầm.



Hình 3.15

Lời giải:

Viết biểu thức đường độ vòng cho các đoạn dưới dạng đa thức sau:

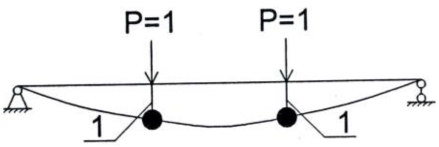
y1= $\left(\sum_{i=1}^{4} a_i z^i\right)\sin\omega t$; y2= $\left(\sum_{j=1}^{4} b_i z^i\right)\sin\omega t$; y3 = $\left(\sum_{n=0}^{4} c_n z^n\right)\sin\omega t$

(Với $0 \le z \le \frac{1}{3}$) (3.23)

Từ bài toán tính ta thấy:

+ Trường hợp (a):

Dạng động riêng thứ nhất được thể hiện như hình vẽ (3.8). Các khối lượng m_1 và m_2 có chuyển vị cùng chiều và có trị số bằng nhau. Vậy tỉ số giữa các chuyển vị này bằng



1. Tần số dao động riêng là ω_1

Hình 3.8

Chọn dầm so sánh giống dầm cho nhưng không có liên kết. Từ đó có các điều kiện ràng buộc:

g1= $y_{3(z=\frac{1}{3})} = 0$; g2= $y_{1(z=\frac{1}{3})} - y_{2(z=0)} = 0$; g3 = $\left.\frac{\partial y1}{\partial z}\right|_{z=\frac{1}{3}} - \left.\frac{\partial y2}{\partial z}\right|_{z=\frac{1}{3}}$ =0

g4=y$_{2\left(z=\frac{1}{3}\right)} - y_{3(z=0)} = 0; g5 = \left.\frac{\partial y3}{\partial z}\right|_{z=\frac{1}{3}} - \left.\frac{\partial y2}{\partial z}\right|_{z=0} = 0$ (3.24)

Các điều kiện ràng buộc (3.24) cũng chính là điều kiện biên của (3.23). Ngoài ra, ta đã biết nếu khối lượng m_1 có chuyển vị bằng một khối lượng m_2 cũng có chuyển vị bằng 1.

$$\begin{cases} y_{1\left(z=\frac{1}{3}\right)}=1 \\ y_{2\left(z=\frac{1}{3}\right)=1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} g6 = y_{1\left(z=\frac{1}{3}\right)}-1=0 \\ g7 = y_{2\left(z=\frac{1}{3}\right)}-1=0 \end{cases}$$

Lượng cưỡng bức được viết như sau:

$$Z=\sum_{v=1}^{3}\int^{\frac{1}{3}} \text{EJ} \times\left(\frac{\partial Y_V}{\partial Z^2}\right)dz+2F_1^{qt}y_{1(1/3,t)}+\sum_{k=1}^{7}\lambda_k g_k \qquad (3.25)$$

Cho Z -> min, ta có hệ phương trình:

$$\frac{\partial z}{\partial a_i}=0;\ \frac{\partial z}{\partial b_j}=0;\ \frac{\partial z}{\partial c_n}=0;\quad \frac{\partial z}{\partial c_n}=0;\ \frac{\partial Z}{\partial \lambda_k}=0$$

(i=1÷4; j = 0 ÷ 4; n = 0 ÷ 4; k = 1 ÷ 7) (3.26)

Sau khi đã tìm cực trị của phím hàm Z theo các hệ số a_i và b_j, ta thay:

$F_1^{qt}=-m\omega_1^2 y_{1(z=\frac{1}{3})}$; $F_2^{qt}=-m\omega_1^2 y_{2(z=\frac{1}{3})}$ vào các phương trình (3.26).

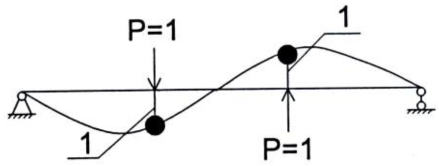
Giải hệ phương trình (3.26). Từ kết quả tính toán có được:

$$\lambda_6=\lambda_7=\frac{2.\left(5m\omega_1^2 1^3-162EJ\right)}{51^3} \qquad (3.27)$$

$$\lambda_6=0 \Rightarrow \omega_1=\sqrt{\frac{162EJ}{5\text{ml}^3}}$$

+ Trường hợp (b):

Dạng động riêng thứ hai được thể hiện như hình vẽ (3.9). Các khối lượng m_1 và m_2 chuyển vị ngược chiều và có trị số bằng -1. Tần số dao động riêng là ω_2.



Hình 3.9

Với các bước làm tương tự như ở trường hợp (a) nhưng các điều kiện ràng buộc được viết lại như sau:

$$\begin{cases} y_{1(z=\frac{1}{3})}=1 \\ y_{1(z=\frac{1}{3})}=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} g_6 = y_{1(z=\frac{1}{3})}-1=0 \\ g_7 = y_{2(z=\frac{1}{3})}+1=0 \end{cases}$$

Từ kết quả tính toán ta có được:

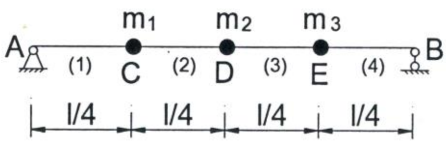
$$\lambda_6 = \lambda_7 = \frac{2.(m\omega_2^2 l^3 - 486EJ)}{l^3} \tag{3.28}$$

$$\lambda_6 = 0 \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{486EJ}{\mathrm{ml}^3}}$$

* Nhận xét: các biểu thức (3.48) và (3.49) là các phương trình bậc 2 đối với ω. Trong khi biểu thức (3.7) của ví dụ (3.1.1) lại là các phương trình bậc 4 đối với ω. Vậy, phương pháp này có cách nhìn và cách làm đơn giản hơn.

3.7.2. Ví dụ 5

Cho dầm đơn giản có độ cứng EJ = const, các khối lượng $m_1 = m_2 = m_3 = m$ đặt tại các vị trí như hình vẽ (3.18). Bỏ qua khối lượng của dầm. Tìm tần số giao động riêng của dầm



Hình 3.10

Lời giải:

* *Xét bài toán tĩnh:*

Viết biểu thức đàn hồi cho các đoạn dưới dạng đa thức sau:

$$y_1 = (\sum_{i=1}^{4} a_i z^i); \quad y_2 = (\sum_{j=0}^{4} b_j z^j); \quad y_3 = (\sum_{n=0}^{4} c_n z^n); \quad y_4 = (\sum_{m=1}^{4} d_m z^m); \tag{3.29}$$

Trong đó, các đoạn 1,2 và đoạn 3 có gốc toạ độ lần lượt tại A,C và D. Còn đoạn 4 có gốc toạ độ tại B. Với việc chọn gốc toạ độ như trên, đường độ võng của đoạn 1 và 4 thoả mãn điều kiện biên tại gối liên kết: gối A và B không có chuyển vị đứng.

Chọn hệ so sánh giống dầm cho nhưng không có liên kết. Điều kiện biên viết cho các đoạn và điều kiện ràng buộc như sau:

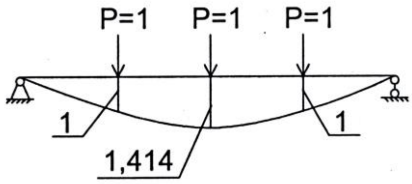
$$g_1 = y_{1(z=\frac{1}{4})} - y_{2(z=2)} = 0; \qquad g_2 = \left.\frac{dy_1}{dz}\right|_{z=\frac{1}{4}} - \left.\frac{dy_2}{dz}\right|_{z=0} = 0$$

$$g_2 = y_{2(z=\frac{1}{4})} - y_{3(z=0)} = 0; \qquad g_4 = \left.\frac{dy_2}{dz}\right|_{z=\frac{1}{4}} - \left.\frac{dy_3}{dz}\right|_{z=0} = 0$$

$$g_3 = y_{3(z=\frac{1}{4})} - y_{4(z=\frac{1}{4})} = 0 \;; \qquad g_6 = \left.\frac{dy_3}{dz}\right|_{z=\frac{1}{4}} + \left.\frac{dy_4}{dz}\right|_{z=0} = 0 \qquad (3.30)$$

- Trường hợp (a):

Dạng dao động của hệ như ở hình (3.11). Vậy, các lực tập trung P = 1 đặt tại các vị trí có các khối lượng như hình vẽ.



Hình 3.11

Lượng cưỡng bức được viết như sau:

$$Z = \sum_{i=1}^{n}\int_0^{1/4} \mathrm{EJ}_x\left(\frac{d^2y_i}{dz^2}\right)^2 dz + 2y_{1\left(z=\frac{1}{4}\right)} = 2y_{2\left(z=\frac{1}{4}\right)} + 2y_{3(z=\frac{1}{4})} + \sum_{k=1}^{6}\lambda_k g_k \qquad (3.31)$$

Cho Z -> min, ta có hệ phương trình:

$$\frac{\partial Z}{\partial a_i} = 0 \;; \; \frac{\partial Z}{\partial b_j} = 0; \; \frac{\partial Z}{\partial c_n} = 0 \;; \; \frac{\partial Z}{\partial d_m} = 0 \;; \; \frac{\partial Z}{\partial \lambda_k} = 0 \qquad (3.32)$$

$$\left(i = 1 \div 4;\, j = 0 \div 4; n = 0 \div 4; m = 1 \div 4; k = 1 \div 6\right)$$

Từ đó nhận được các kết quả:

$$a_1 = \frac{5l^2}{32EJ}; a_2 = 0; a_3 = \frac{1}{4EJ}; a_4 = 0; b_0 = \frac{-9l^3}{256EJ}; b_1 = \frac{-7l^2}{64EJ}$$

$$b_2 = \frac{3l}{16EJ}; b_3 = \frac{1}{12EJ}; b_4 = 0; c_0 = \frac{-19l^3}{384EJ}; c_1 = 0; c_2 = \frac{1}{4EJ};$$

$$c_3 = \frac{-1}{12EJ}; c_4 = 0$$

Phương trình đường đàn hồi của dầm:

$$y_1(z) = \frac{-5l^2}{32EJ} z + \frac{1}{4EJ} z^3$$

$$y_2(z) = \frac{-9l^3}{256EJ} - \frac{7l^2}{64EJ} z + \frac{3l}{16EJ} z^2 + \frac{1}{12EJ} z^3$$

$$y_3(z) = \frac{-19l^3}{384EJ} + \frac{1}{4EJ} z^2 - \frac{1}{12EJ} z^3$$

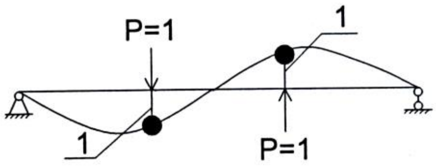
Chuyển vị tại các điểm C, D, E:

$$y_c = y_{1\left(z=\frac{1}{4}\right)} = \frac{-9l^3}{256EJ}; y_D = y_{3(z=0)} = -\frac{19l^3}{384EJ}; y_{3\left(z=\frac{1}{4}\right)} = \frac{-9l^3}{256EJ}$$

Vậy ta có tỉ số chuyển vị giữa các vị trí đặt các khối lượng. Nếu m_1 và m_3 có chuyển vị = 1 thì m_2 có chuyển vị = 1,41. Ta có dạng dao động riêng thứ nhất ứng với tần số dao động riêng ω_1.

- *Trường hợp (b)*

Dạng dao động của hệ như hình (3.12). Các lực tập trung P = 1 đặt tại các vị trí có khối lượng như hình vẽ. Như vậy chuyển vị của khối lượng m_1 và m_3 là như nhau.

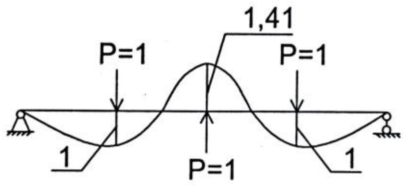


Hình 3.12

Còn khối lượng m_2 không có chuyển vị.

- *Trường hợp (c)*

Dạng dao động của hệ như trên hình (3.13). Như vậy, các lực tập trung P được đặt như hình vẽ.



Hình 3.13

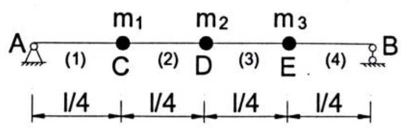
Khi không kể đến ảnh hưởng của lực cắt, lượng cưỡng bức được viết như sau:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{1/4} EJ_x \left(\frac{d^2 y_i}{dz^2} \right)^2 dz + 2y_{1\left(z=\frac{1}{4}\right)} - 2\left(-y_{2\left(z=\frac{1}{4}\right)} \right) + 2y_{3\left(z=\frac{1}{4}\right)} + \sum_{k=1}^{6} \lambda_k g_k \qquad (3.33)$$

Biểu thức (3.33) hoàn toàn giống (3.31) nên ta có tỉ số chuyển vị giữa các khối lượng như hình (3.13).

<u>* Xét bài toán động:</u>

Viết biểu thức đường độ võng cho các đoạn dưới dạng đa thức như sau:



$$y_1 = \left(\sum_{i=1}^{4} a_i z^i \right) \sin \omega t; \quad y_2 = \left(\sum_{j=0}^{4} b_j z^j \right) \sin \omega t;$$

$$y_3 = \left(\sum_{n=0}^{4} c_n z^n \right) \sin \omega t; \quad y_4 = \left(\sum_{m=1}^{4} d_m z^m \right) \sin \omega t; \quad (3.34)$$

Chọn hệ so sánh giống dầm cho nhưng không có liên kết. Điều kiện biên viết cho các đoạn và điều kiện ràng buộc như sau:

$$g_1 = y_{1(z=1/4)} - y_{2(z=0)} = 0; g_2 = \left.\frac{\partial y_1}{\partial z}\right|_{z=\frac{1}{4}} - \left.\frac{\partial y_2}{\partial z}\right|_{z=0} = 0;$$

$$g_3 = y_{2(z=1/4)} - y_{3(z=0)} = 0; g_4 = \left.\frac{\partial y_2}{\partial z}\right|_{z=\frac{1}{4}} - \left.\frac{\partial y_3}{\partial z}\right|_{z=0} = 0;$$

$$g_5 = y_{3(z=1/4)} - y_{4(z=0)} = 0; g_6 = \left.\frac{\partial y_3}{\partial z}\right|_{z=\frac{1}{4}} - \left.\frac{\partial y_4}{\partial z}\right|_{z=0} = 0; \qquad (3.35)$$

Khi không kể ảnh hưởng đến lực cắt, lượng cưỡng bức được viết như sau:

$$Z = \sum_{v=1}^{4} \int_0^{1/4} EJ_x \left(\frac{\partial^2 y_v}{\partial Z^2} \right)^2 dz + 2F_1^{qt}.y_{1\left(\frac{1}{4}t\right)} + 2F_2^{qt}.y_{2\left(\frac{1}{4}t\right)} + 2F_3^{qt}.y_{3\left(\frac{1}{4}t\right)} + \sum_{k=1}^{9} \lambda_k.g_k \qquad (3.36)$$

Các điều kiện ràng buộc (3.35) cũng chính là điều kiện biên của (3.34). Ngoài ra, ta đã biết tỉ lệ chuyển vị của các khối lượng m_1, m_2, m_3. Từ đó, có thêm ba điều kiện ràng buộc:

* Trường hợp (a):

$$g_7 = y_{1(z=\frac{1}{4})} - 1 = 0 \;\; ; \;\; g_8 = y_{2(z=\frac{1}{4})} - 1{,}41 = 0 \;\; ; \;\; g_9 = y_{3(z=\frac{1}{4})} - 1 = 0 \qquad (3.37)$$

Thay (3.34), (3.35), (3.37) vào (3.36), nhận được biểu thức lượng cưỡng bức Z. Cho Z -> min , ta có hệ phương trình:

$$\frac{\partial Z}{\partial a_i} = 0 \;\; ; \;\; \frac{\partial Z}{\partial b_j} = 0 \;\; ; \;\; \frac{\partial Z}{\partial c_n} = 0 \;\; ; \;\; \frac{\partial Z}{\partial d_m} = 0 \;\; ; \;\; \frac{\partial Z}{\partial \lambda_k} = 0$$

$$(i = 1 \div 4 \;\; ; \;\; j = 0 \div 4 \;\; ; \;\; n = 0 \div 4 \;\; ; \;\; m = 1 \div 4 \;\; ; \;\; k = 1 \div 9) \qquad (3.38)$$

Sau khi đã tìm cực trị của phím hàm Z theo các thành phần cơ bản, ta thay: $F_1^{qt} = -m\omega^2 y_{1\left(\frac{1}{4}t\right)}$; $F_2^{qt} = -m\omega^2 y_{2\left(\frac{1}{4}t\right)}$; $F_3^{qt} = -m\omega^2 y_{3\left(\frac{1}{4}t\right)}$ vào các phương trình trong (3.38).

Giải hệ phương trình tuyến (3.38). Từ kết quả tính toán, nhận được:

$$\lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8$$

$$\lambda_6 = 0 \rightarrow \omega = \omega_1 \approx 4{,}94\sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}$$

* Trường hợp (b):

$$g_7 = y_{1\left(z=\frac{1}{4}\right)} - 1 = 0 \;\; ; \;\; g_8 = y_{2\left(z=\frac{1}{4}\right)} = 0 \;\; ; \;\; g_9 = y_{3\left(z=\frac{1}{4}\right)} + 1 = 0 \qquad (3.39)$$

Thay (3.34), (3.35), (3.39) vào (3.37) nhận được biểu thức lực cưỡng bức Z. Các bước tiến hành giống trường hợp (a) , Từ kết quả tính toán nhận được: $\lambda_7 = \lambda_9$; $\lambda_8 = 0$

$$\lambda_7 = 0 \rightarrow \omega = \omega_2 \approx 19{,}6\sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}$$

* Trường hợp (c):

$$g_7 = y_{1(z=\frac{1}{4})} - 1 = 0 \;\; ; \;\; g_8 = y_{2(z=\frac{1}{4})} + 1{,}41 = 0 \;\; ; \;\; g_9 = y_{3(z=\frac{1}{4})} - 1 = 0 \qquad (3.40)$$

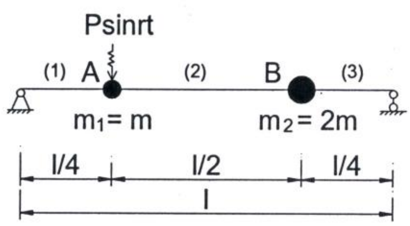
Thay (3.34), (3.35), (3.39) vào (3.36), nhận được biểu thức lượng cưỡng bức Z. Từ kết qủa tính toán, nhận được: $\lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9$

$$\lambda_7 = 0 \rightarrow \omega = \omega_3 \approx 41{,}6\sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}$$

3.8. Bài toán dao động cướng bức của hệ hữu hạn bậc tự do:

3.8.1. Ví dụ: 6

Cho dầm đàn hồi mang hai khối lượng tập trung m_1 = m = 1800kg ; m_2 = 2m (bỏ qua khối lượng của dầm). Dầm có EJ = 150.10^6 Nm^2, chiều dài l = 12(m). Tác dụng lên khối lượng m_1 lực điều hoà có biên độ P=18KN, tần số vòng r=108 (s^{-1}). Hãy xác định chuyển vị và nội lực động của dầm.



Hình 3.22

Lời giải:

* Xác định tần số riêng và dạng dao động riêng:

Viết biểu thức đường độ vòng cho các đoạn dưới dạng đa thức như sau:

$$y_1 = \left(\sum_{i=1}^{4} a_i z^i\right)\sin\omega t \;;\; y_2 = \left(\sum_{j=1}^{4} b_j z^j\right)\sin\omega t \;;\; y_3 = \left(\sum_{n=1}^{4} a_n z^n\right)\sin\omega t \qquad (3.41)$$

Các điều kiện ràng buộc:

$$g_1 = y_{3(z=\frac{1}{4})} = 0 \;:\; g_2 = y_{1(z=\frac{1}{4})} - y_{2(z=0)} = 0 \;;\; g_3 = \left.\frac{\partial y_1}{\partial z}\right|_{z=\frac{1}{4}} - \left.\frac{\partial y_2}{\partial z}\right|_{z=0} \;;$$

$$g_4 = y_{2(z=\frac{1}{4})} - y_{3(z=0)} = 0 \;;\; g_5 = \left.\frac{\partial y_2}{\partial z}\right|_{z=\frac{1}{2}} - \left.\frac{\partial y_3}{\partial z}\right|_{z=0} \;;\; g_6 = y_{1(z=\frac{1}{4})} - 1 = 0 \qquad (3.42)$$

Chọn hệ so sánh giống dầm cho nhưng không có liên kết. Lượng cưỡng bức được viết như sau:

$$\text{Z}=\int_0^{1/4} E\text{J}_x\left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial z^2}\right)^2 dz + \int_0^{1/2} E\text{J}_x\left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial z^2}\right)^2 dz + \int_0^{1/4} E\text{J}_x\left(\frac{\partial^2 y_3}{\partial z^2}\right)^2 dz + 2F_1^{qt} y_{1(1/4't)} + 2F_2^{qt} y_{2(1/2't)} + \sum_{k=1}^{6} \lambda_k g_k \quad (3.43)$$

Cho Z -> min , ta có hệ phương trình:

$$\frac{\partial Z}{\partial a_i} = 0 \;;\; \frac{\partial Z}{\partial b_j} = 0 \;;\; \frac{\partial Z}{\partial c_n} = 0 \;;\; \frac{\partial Z}{\partial \lambda_k} = 0 \qquad (3.44)$$

$(i = 1 \div 4;\; j = 0 \div 4 \;;\; n = 0 \div 4;\; k = 1 \div 6)$

Sau khi đã tìm cực trị của phím Z theo các hệ số a_i và b_j, ta thay:

$$F_1^{qt} = -m_1\omega^2 y_{1(1/4,y)} = -m\omega^2 y_{1(1/4,t)} \;;\; F_2^{qt} = -m_2\omega^2 y_{2(1/2,t)} = -2m\omega^2 y_{2(1/2,t)}$$

vào các phương trình (3.35).

Giải hệ phương trình tuyến tính (3.35), xác định được các hệ số chưa biết a_i, b_j, c_n và các phân tử Lagrange λ_k.

Từ kết quả tính toán ta có được, cho $\lambda_6 = 0$, có kết quả như sau:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{6mlEJ(27 - \sqrt{473})}{ml^2}} \approx 5{,}613\sqrt{\frac{\text{EJ}}{\text{ml}^3}}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{6mlEJ(27 + \sqrt{473})}{ml^2}} \approx 17{,}102\sqrt{\frac{\text{EJ}}{\text{ml}^3}}$$

Thay các giá trị a_i, b_j, c_n tìm được vào (3.41) ta có: khi khối lượng m_1 dao động với biên độ bằng 1 thì khối lượng m_2 dao động với biên độ bằng

$$\left(1+\frac{24EJ - m\omega^2 l^3}{-108EJ + m\omega^2 l^3}\right)$$

Thay các giá trị EJ, m và l đã cho, ta có:

Vecto tần số dao động riêng: $\omega = \begin{bmatrix} 38,98 \\ 118,76 \end{bmatrix}$ (s^{-1})

Ma trận các dạng chính: $\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1,099 & -0,455 \end{bmatrix}$

Chuẩn hoá các dạng dao động riêng theo (1.11):

+ Tính các hệ số a_1:

$$a_1^{\,2} = \varphi_1^T M \varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1,099 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1,099 \end{bmatrix} = 3,4156m$$

$$\Rightarrow a_1 = 1,8481\sqrt{m}$$

$$a_{02}^2 = \varphi_2^T \,\mathrm{M}\, \varphi_2 = \begin{bmatrix} 1 & -0,455 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -0,455 \end{bmatrix} = 1,41405m$$

$$\Rightarrow a_2 = 1,891\sqrt{m}$$

+ Dạng chuẩn được xác định:

$$\varphi_{1,ch} = \frac{1}{1,8481\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1,099 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5411 \\ 0,5946 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}}$$

$$\varphi_{2,ch} = \frac{1}{1,1891\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 1 \\ -0,455 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8946 \\ -0,3826 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}}$$

Ma trận dạng chuẩn:

$$\phi_{ch} = \begin{bmatrix} 0,5411 & 0,8409 \\ 0,5946 & -0,3826 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}}$$

* *Xác định tải trọng khai triển theo các dạng riêng* : Dựa vào (1.14), ta có:

$P_1 = \varphi_{1,ch}^T P M \varphi_{1,ch}$

$$= \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0,5411 & 0,5946 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5411 \\ 0,5946 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}} = \begin{bmatrix} 0,707 \\ 0,644 \end{bmatrix} P$$

$P_2 = \varphi_{2,ch}^T P M \varphi_{2,ch}$

$$= \frac{1}{\sqrt{m}}\begin{bmatrix}0{,}5411 & 0{,}5946\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m & 0\\0 & 2m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}8409\\-0{,}3826\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{m}} = \begin{bmatrix}0{,}707\\-0{,}644\end{bmatrix}P$$

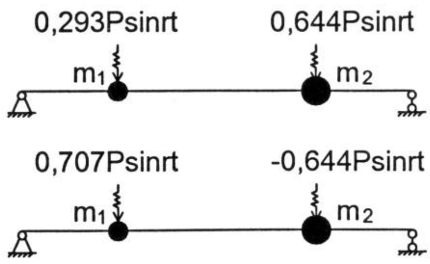
Vậy $P_{kh}=\begin{bmatrix}0{,}293 & 0{,}707\\0{,}644 & -0{,}644\end{bmatrix}$P

Tải trọng khai triển theo các dạng riêng được thể hiện ở hình (3.23).

** Xác định chuyển vị động của hệ;*

Các phần tử của ma trận các hệ số ảnh hưởng động học được tính theo (1.17):

$$K_{ai}\ (t) = \frac{1}{\omega_i}\int_0^t \sin r\tau . \sin\omega_i \sin\omega_i (t-\tau) d\tau = \frac{\sin rt}{\omega_i^2}$$



Hình 3.23

Ma trận các hệ số ảnh hưởng động học như sau:

$$K_{ai}\ (t) = \begin{bmatrix}-9{,}8575\\40{,}9846\end{bmatrix}10^{-5}\sin rt$$

Chuyển vị của hệ được tính theo (1.18):

$$Y(t)=M^{-1}P_{kh}K_{ai(t)} = m\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}293 & 0{,}707\\0{,}644 & -0{,}644\end{bmatrix}P\begin{bmatrix}-9{,}8575\\40{,}9846\end{bmatrix}10^{-5}\sin rt$$

$$= \begin{bmatrix}26{,}0879\\-16{,}3712\end{bmatrix}mP.10^{-5}\sin rt = \begin{bmatrix}8{,}453\\-5{,}304\end{bmatrix}\sin rt \quad \text{(mm)}$$

* Xác định lực đàn hồi:

Theo (1.20) ta có: $K_i(t) = \omega_i\int_0^t \sin r\tau . \sin\varpi_i (t-\tau)d\tau = \frac{\varpi_i^2 \sin rt}{\varpi_i^2 - r^2}$ (3.45)

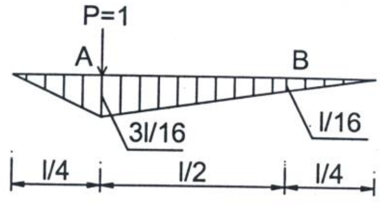
Thay các giá trị ϖ_i và r vào (3.45) nhận được ma trận:

$$K_i(t) = \begin{bmatrix}-14{,}98\\578{,}04\end{bmatrix}10^{-2}\sin rt$$

Lực đàn hồi được ước tính theo (1.21):

$$P_d = P_{kh}K_i(t) = \begin{bmatrix}0{,}293 & 0{,}707\\0{,}644 & -0{,}644\end{bmatrix}P\begin{bmatrix}-14{,}98\\578{,}04\end{bmatrix}10^{-2}\sin rt = \begin{bmatrix}4{,}043\\-3{,}819\end{bmatrix}P\sin rt$$

* Xác định nội lực động: Từ biểu đồ trên hình (3.24), M_A do P = 1 đặt lần lượt tại A và tại B gây ra là: $M_{A,1}$ = 31/16 và $M_{A,2}$ = 1/16.



Hình 3.24

Mômen uốn tại A:

$$M_A(t) = \begin{bmatrix} \frac{31}{16} & \frac{1}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4{,}043 \\ -3{,}819 \end{bmatrix} P \sin rt$$

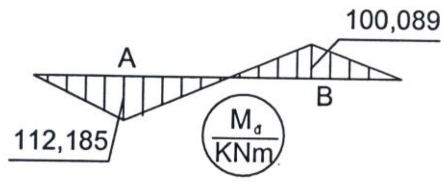
= 112,185 sin rt (KNm)

Mômen uốn tại B:

$$M_B(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & \frac{31}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4{,}043 \\ -3{,}819 \end{bmatrix} P \sin rt$$

= - 100,089 sin rt (KNm)

Biểu đồ mônmen động như hình (3.25)



Hình 3.25

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

*** Kết luận:**

Tác giả đã xây dựng được các bước tiến hành để xác định tần số dao động riêng và dạng dao động riêng của hệ dao động.

Khi sử dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss vào bài toán động lực học, đã tìm được tần số riêng và dạng dao động riêng của cơ hệ.

Bằng việc tìm hiểu và áp dụng tính toán cho các bài toán cụ thể của hệ dầm, khung có một số bậc tự do hoặc vô số bậc tự do và có các liên kết khác nhau, tác giả đã chứng tỏ được sự đúng đắn và hiệu quả của phương pháp này. Các kết quả nhận được phù hợp với những kết quả đã có khi giải bằng các phương pháp khác.

Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss xây dựng và đưa ra lời giải cho bài toán động như bài toán tĩnh, do đó có cách nhìn đơn giản và tỏ ra có hiệu quả đối với các bài toán động lực học.

*** Kiến nghị:**

Có thể sử dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss như một phương pháp mới trong giảng dạy và học tập, nghiên cứu.

Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss mở ra một hướng mới về thực nghiệm, thay vì thí nghiệm trên cấu kiện này (hệ cho) thì có thể tiến hành thí nghiệm trên cấu kiện khác (hệ so sánh). Việc cực tiểu hoá lượng cưỡng bức cho phép đi đến kết quả thí nghiệm đối với cấu kiện phải xét.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Phạm Đình Ba, Nguyễn Văn Hội, *Giáo trình động lực học công trình,* Học viện kỹ thuật quân sự, Hà nội, 1994.

[2] Hà Huy Cương, *Phương pháp nguyên lý cực Gauss,* Tạp chí Khoa học và kỹ thuật, IV/2005 Tr. 112-118.

[3] Ninh Quang Hải, *Cơ học lý thuyết*Nhà xuất bản Xây dựng, Hà nội, 1999.

[4] Trần Thị Kim Huế, *Phương pháp nguyên lí cực trị Gauss đối với các bài toán cơ học kết cấu,* Luận văn thạc sĩ kỹ thuật, Hà nội, 2005.

[5] Nguyên Văn Khang, *Dao động kỹ thuật,* Nhà xuất bản Khoa học và kỹ thuật, Hà nội, 1998.

[6] Nguyễn Xuân Hùng, *Động lực học công trình biển,* Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật, Hà nội, 1999.

[7] Vũ Đình Lai, Nguyễn Xuân Lựu, Bùi Đình Nghi, *Sức bền vật* Nhà xuất bản Giao thông vận tải, Hà nội, 2002.

[8] Nguyễn Văn Liên, Đinh Trọng Bằng, Nguyễn Phương Thành, *Sức bền vật liệu,* Nhà xuất bản Xây dựng, Hà nội, 2003.

[9] Nguyên Văn Liên, Nguyễn Phương Thành, *xử lý dữ động để xác định dao động các công trình,* Tạp chí Xây dựng, 11/2001 Tr. 48 56.

[10] Nguyễn Văn Phượng, *Động lực học công trình,* Nhà xuất bản Khoa học và kỹ thuật.

[11] Hoàng Như Sáu, *Tính toán kết cấu xây dựng bằng phương pháp sai phân hữu hạn, biến phân và hỗn hợp sai phân hữu hạn biến phân,* Nhà xuất bản Xây dựng, Hà nội, 1982.

[12] Nguyễn Phương Thành, *Nghiên cứu trạng thái ứng suất biến dạng tấm nhiều lớp chịu tải trọng động có xét lực ma sát ở các mặt tiếp xúc,* Luận án tiến sĩ khoa học, Hà nội, 2002.

[13] Nguyễn Phương Thành, *Nghiên cứu phản ứng động tấm nhiều lớp có xét lực ma sát ở các mặt tiếp xúc*, Tạp chí Khoa học và Công nghệ, Trung tâm Khoa học tự nhiên và Công nghệ Quốc gia, Tập XXXI - 2001 - 2, Tr. 48 - 56.

[14] Lều Thọ Trình, *Cơ học kết cấu, Tập* **I-hệ tĩnh** *định*, Nhà xuất bản Khoa học và kỹ thuật, Hà nội, 2003.

[15] Lều Thọ Trình, *Cơ học kết cấu, Tập II- Hệ siêu tĩnh,* Nhà xuất bản Khoa học và kỹ thuật, Hà nội, 2003.

[16] Lều Thọ Trình, *ổn đinh và động lực học công trình*, Nhà xuất bản Khoa học và kỹ thuật.

[17] Nguyễn Văn Vượng, *Lý thuyết đàn hồi ứng dụng*, Nhà xuất bản Giáo dục, Hà nội, 1999.

[18] Bath K.J, *Numerical methods in finite elements analysis,* Prentice Hall, INC, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.

[19] William T.Thomson, *Theory of Vibratỉon with Applications*, Stanley Thornes

[20] Ray W.Clough, Joseph Penzien, *Dynamics of structures.*

[21] Ha Huy Cuong, Nguyen Phuong Thanh, *Application du principe d' obligation minimale dans la résolution des problèmes de la mécanique des fluỉds,* Structures and Interactions, Nha Trang, Vietnam August 14 - 18. 2000, p. 693 - 702.