BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC DÂN LẬP HẢI PHÒNG

-------------*--------------**

NGUYỄN QUỐC BẢO

NGHIÊN CỨU NỘI LỰC VÀ CHUYỂN VỊ CỦA KẾT CẤU BẰNG PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN LÝ CỰC TRỊ GAUSS

Chuyên ngành: **Kỹ thuật Xây dựng Công trình Dân dụng & Công nghiệp**

Mã số: **60.58.02.08**

LUẬN VĂN THẠC SỸ KỸ THUẬT

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS.TSKH. HÀ HUY CƯƠNG

Hải Phòng, 2015

LỜI CẢM ƠN

Trước hết, tôi xin được tỏ lòng biết ơn và gửi lời cám ơn chân thành nhất đến GS.TSKH Hà Huy Cương, người trực tiếp hướng dẫn luận văn, đã tận tình chỉ bảo và hướng dẫn tôi tìm ra hướng nghiên cứu, tiếp cận thực tế, tìm kiếm tài liệu, xử lý và phân tích số liệu, giải quyết vấn đề nội lực và chuyển vị của kết cấu bằng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, nhờ đó tôi mới có thể hoàn thành luận văn cao học của mình. Ngoài ra, trong quá trình học tập, nghiên cứu và thực hiện đề tài tôi còn nhận được nhiều sự quan tâm, góp ý, hỗ trợ quý báu của quý thầy cô, đồng nghiệp, bạn bè và người thân.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến: Cha mẹ và những người thân trong gia đình đã hỗ trợ, tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong suốt thời gian qua và đặc biệt trong thời gian tôi theo học khóa thạc sỹ tại trường Đại học Dân lập Hải Phòng. Quý thầy cô Khoa Xây dựng và quý thầy cô Khoa Sau đại học - Trường Đại học Dân lập Hải Phòng đã truyền đạt cho tôi những kiến thức bổ ích trong suốt hai năm học vừa qua.

Tôi xin chân thành cảm ơn bạn bè, đồng nghiệp của Tôi đang công tác tại Công ty cổ phần tư vấn thiết kế công trình xây dựng Hải Phòng đã động viên, khích lệ, tạo điều kiện và giúp đỡ Tôi trong suốt quá trình thực hiện và hoàn thành luận văn này.

Xin trân trọng cảm ơn!

Tác giả luận văn.

Nguyễn Quốc Bảo

MỞ ĐẦU

Bài toán cơ học kết cấu hiện nay nói chung được xây dựng theo bốn đường lối đó là: Phương pháp xây dựng phương trình vi phân cân bằng phân tố; Phương pháp năng lượng; Phương pháp nguyên lý công ảo và Phương pháp sử dụng trực tiếp phương trình Lagrange. Các phương pháp giải gồm có: Phương pháp được coi là chính xác như, phương pháp lực; Phương pháp chuyển vị; Phương pháp hỗn hợp; Phương pháp liên hợp và các phương pháp gần đúng như, phương pháp phần tử hữu hạn; phương pháp sai phân hữu hạn; phương pháp hỗn hợp sai phân - biến phân.

Phương pháp Nguyên lý cực trị Gauss được đề xuất bởi GS. TSKH Hà Huy Cương đối với cơ hệ vật rắn biến dạng, là phương pháp được xây dựng dựa trên Nguyên lý cực trị Gauss đối với cơ hệ chất điểm của K.F Gauss (1777 - 1855). Phương pháp sử dụng nguyên lý cực trị Gauss để giải các bài toán cơ học vật rắn biến dạng có ưu điểm là: có cách nhìn đơn giản, có khả năng tìm lời giải của một bài toán này trên cơ sở so sánh (một cách có điều kiện) với lời giải có sẵn của một bài toán khác.

Đối tượng, phương pháp và phạm vi nghiên cứu của đề tài

Trong luận văn này, tác giả sử dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss nói trên để xây dựng và giải các bài toán cơ học kết cấu, chịu tác dụng của tải trọng tĩnh.

Do sự cần thiết của việc nghiên cứu nội lực và chuyển vị của kết cấu, mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu của luận văn này là:

Mục đích nghiên cứu của đề tài

"Nghiên cứu nội lực và chuyển vị của kết cấu
bằng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss"

Nhiệm vụ nghiên cứu của đề tài

1. Tìm hiểu và giới thiệu các phương pháp xây dựng và các phương pháp giải bài toán cơ học kết cấu hiện nay.

2. Trình bày Phương pháp Nguyên lý cực trị Gauss do GS. TSKH. Hà Huy Cương đề xuất, với các ứng dụng trong cơ học môi trường liên tục nói chung và cơ học vật rắn biến dạng nói riêng.
3. Áp dụng Phương pháp Nguyên lý cực trị Gauss để xây dựng và giải các bài toán kết cấu, chịu tác dụng của tải trọng tĩnh.
4. Lập chương trình máy tính điện tử cho các bài toán nêu trên.

Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài nghiên cứu

Việc tìm hiểu và ứng dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss có ý nghĩa về mặt khoa học và thực tiễn tính toán công trình.

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đề tài *"Nghiên cứu nội lực và chuyển vị của kết cấu bằng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss"* là công trình nghiên cứu của bản thân tôi, được thực hiện dưới sự hướng dẫn khoa học của GS.TSKH Hà Huy Cương. Các số liệu điều tra, kết quả nghiên cứu nêu trong luận văn là trung thực và chưa từng được công bố trong bất kỳ tài liệu nào khác.

Tác giả luận văn.

Nguyễn Quốc Bảo

DANH MỤC KÝ HIỆU

KÝ HIỆU	ĐẠI LƯỢNG
T	Động năng
Π	Thế năng
E	Môdun đàn hồi
$C(x)$	Phiếm hàm mở rộng
G	Môdun trượt
$2G$	Độ cứng của biến dạng
J	Mô men quán tính tiết diện
EJ	Độ cứng uốn của tiết diện dầm
M	Mômen uốn
N	Lực dọc
P	Lực tập trung
Q	Lực cắt
q	Ngoại lực phân bố tác dụng lên dầm
m	Khối lượng chất điểm
τ	Ứng suất tiếp
σ	Ứng suất pháp
ε	Biến dạng trượt
$\lambda(x)$	Độ võng của dầm

ε	Biến dạng của vật liệu
δ	Biến phân
r_i	Véc tơ tọa độ
α	Đại lượng Ten xơ
G	Modun trượt
θ	Biến dạng thể tích
χ	Biến dạng uốn (độ cong đường đàn hồi)
μ, λ	Hệ số Lamé
ν	Hệ số Poisson
u	Chuyển vị theo trục x
Z	Lượng cưỡng bức
D	Độ cứng uốn
$D(1-\nu)$	Độ cứng xoắn

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1.

CÁC PHƯƠNG PHÁP XÂY DỰNG VÀ CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN CƠ HỌC KẾT CẤU

Trong chương này trình bày các phương pháp truyền thống để xây dựng các bài toán cơ học nói chung; giới thiệu bài toán cơ học kết cấu (bài toán tĩnh) và các phương pháp giải thường dùng hiện nay.

1. Phương pháp xây dựng bài toán cơ học

Bốn phương pháp chung để xây dựng bài toán cơ học kết cấu được trình bày dưới đây. Dùng lý thuyết dầm chịu uốn để minh họa.

1.1. Phương pháp xây dựng phương trình vi phân cân bằng phân tố

Phương trình vi phân cân bằng được xây dựng trực tiếp từ việc xét các điều kiện cân bằng lực của phân tố được tách ra khỏi kết cấu. Trong sức bền vật liệu khi nghiên cứu dầm chịu uốn ngang sử dụng các giả thiết sau:

- Trục dầm không bị biến dạng nên không có ứng suất.
- Mặt cắt thẳng góc với trục dầm sau khi biến dạng vẫn phẳng và thẳng góc với trục dầm (giả thiết Euler–Bernoulli).
- Không xét lực nén giữa các thớ theo chiều cao của dầm

Với giả thiết thứ ba thì chỉ có ứng suất pháp σ_x và các ứng suất tiếp σ_{xz}, σ_{zx} tác dụng lên phân tố dầm (hình 1.3), ứng suất pháp σ_z bằng không. Hai giả thiết thứ ba và thứ nhất dẫn đến trục dầm chỉ có chuyển vị thẳng đứng y(x) và nó được gọi là đường độ võng hay đường đàn hồi của dầm. Giả thiết thứ nhất xem chiều dài trục dầm không thay đổi khi bị võng đòi hỏi độ võng của dầm là nhỏ so với chiều cao dầm, $y_{max} / h \leq 1/5$. Với giả thiết thứ hai thì biến dạng trượt do ứng suất tiếp gây ra không được xét trong tính độ võng của dầm như trình bày dưới đây. Giả thiết này chỉ đúng khi tỉ lệ $h/l \leq 1/5$. Chuyển vị ngang u của điểm nằm ở độ cao z so với trục dầm bằng

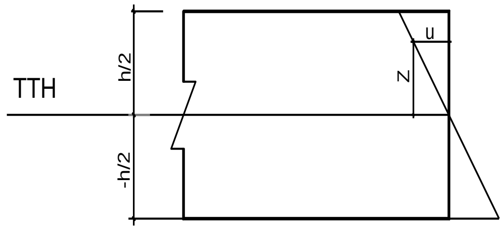
$$u = -z\frac{dy}{dx}$$

Biến dạng và ứng suất xác định như sau

$$\varepsilon_x = -z\frac{d^2y}{dx^2}\,;\ \sigma_{xx} = -Ez\frac{d^2y}{dx^2}$$

Momen tác dụng lên trục dầm:

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} -Ebz^2\frac{d^2y}{dx^2}dz = -\frac{Ebh^3}{12}\frac{d^2y}{dx^2}$$



Hình 1.2. Phân tố dầm

hay $$M = EJ\chi \qquad (1.7)$$

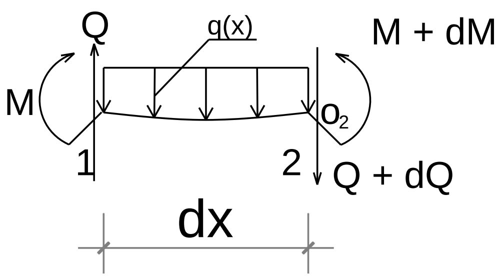
trong đó: $$EJ = \frac{Ebh^3}{12}\ ,\ \chi = -\frac{d^2y}{dx^2}$$

EJ được gọi là độ cứng uốn của dầm; χ là độ cong của đường đàn hồi và sẽ được gọi là biến dạng uốn; b là chiều rộng dầm. Để đơn giản trình bày, ở đây chỉ dùng trường hợp dầm có tiết diên chữ nhật.

Cách tính nội lực momen ở trên không xét đến biến dạng trượt do các ứng suất tiếp gây ra. Tổng các ứng suất tiếp σ_{zx} trên mặt cắt sẽ cho ta lực cắt Q tác dụng lên trục dầm: $$Q = \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{zx}dz$$

Biểu thức của ứng suất tiếp σ_{zx} trong tích phân trên sẽ trình bày sau.

Nhờ các giả thiết nêu trên, thay cho trạng thái ứng suất trong dầm, ta chỉ cần nghiên cứu phương trình cân bằng của các nội lực M và Q tác dụng lên trục dầm. Xét phân tố dx của trục dầm chịu tác dụng của các lực M,Q và ngoại lực phân bố q, hình 1.3. Chiều dương của M, Q và q trên hình vẽ tương ứng với chiều dương của độ võng hướng xuống dưới.



Hình 1.3. Xét cân bằng phân tố

Lấy tổng momen đối với điểm O_2, bỏ qua các vô cùng bé bậc cao ta có

$$\frac{dM}{dx} - Q = 0 \qquad (1.8)$$

Lấy tổng hình chiếu các lực lên trục thẳng đứng:

$$\frac{dQ}{dx} + q = 0 \qquad (1.9)$$

Phương trình (1.8) là phương trình liên hệ giữa momen uốn và lực cắt, phương trình (1.9) là phương trình cân bằng lực cắt Q và ngoại lực phân bố q. Đó là hai phương trình xuất phát (hai phương trình đầu tiên) của phương pháp cân bằng phân tố. Lấy đạo hàm phương trình (1.8) theo x rồi cộng với phương trình (1.9), ta có phương trình dẫn xuất sau

$$\frac{d^2M}{dx^2} + q = 0 \qquad (1.10)$$

Thay M xác định theo (1.7) vào (1.10) nhận được phương trình vi phân xác định đường đàn hồi của thanh

$$EJ\frac{d^4y}{dx^4} = q \qquad (1.11)$$

Phương trình (1.11) được giải với các điều kiện biên của y và các đạo hàm đến bậc ba của y (4 điều kiện), hai điều kiện biên tại mỗi đầu cuối thanh.

Các điều kiện biên thường dùng như sau

a) Liên kết khớp tại x=0:

Chuyển vị bằng không, $y\big|_{x=0} = 0$, momen uốn $M = 0$, suy ra $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0} = 0$

b) Liên kết ngàm tại x=0:

Chuyển vị bằng không, $y\big|_{x=0} = 0$, góc xoay bằng không, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0$

c) không có gối tựa tại x=0:

Momen uốn $M = 0$, suy ra $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0} = 0$; lực cắt Q=0, suy ra $\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{x=0} = 0$

Các điều kiện tại x=l cũng lấy tương tự như trên.

Bây giờ tìm hiểu sự phân bố ứng suất tiếp σ_{zx} trên chiều dày h của dầm.

Trước tiên viết phương trình cân bằng ứng suất trên trục x như sau

$$-\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}=0 \quad \text{hay} \qquad \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}=\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}=-Ez\frac{d^3 y}{dx^3}$$

Tích phân phương trình trên theo z: $\sigma_{xz}=-\frac{Ez^2}{2}\frac{d^3 y}{dx^3}+C(x)$

Hàm $C(x)$ xác định từ điều kiện ứng suất tiếp bằng không tại mặt trên và mặt dưới dầm, $z=\pm\frac{h}{2}$. Ta có: $C(x)=\frac{Eh^2}{8}\frac{d^3 y}{dx^3}$

Ứng suất tiếp phân bố trên mặt cắt dầm có dạng

$$\sigma_{xz}=-\frac{E}{8}\frac{d^3 y}{dx^3}\left(4z^2-h^2\right)$$

Đó là hàm parabol bậc hai.Ứng suất tiếp lớn nhất tại trục dầm (z=0) có giá trị bằng

$$\sigma_{xz}\Big|_{z=0}=\frac{Eh^2}{8}\frac{d^3 y}{dx^3}$$

Tích phân hàm ứng suất tiếp theo chiều cao dầm rồi nhân với chiều rộng b ta có lực cắt Q tác dụng lên phần trái của dầm

$$Q=\frac{Ebh^3}{12}\frac{d^3 y}{dx^3}$$

Ứng suất tiếp trung bình trên chiều cao dầm bằng: $\sigma_{xz}^{tb}=\frac{Eh^2}{12}\frac{d^3 y}{dx^3}$

Tỉ lệ giữa ứng suất tiếp max tại trục dầm và ứng suất trung bình α=1.5.

1.2. Phương pháp năng lượng

Năng lượng của cơ hệ bao gồm động năng T và thế năng Π. Động năng được xác định theo khối lượng và vận tốc chuyển động, còn thế năng Π bao gồm thế năng biến dạng và công của các trường lực, phụ thuộc vào chuyển vị. Trường lực là lực có thế như lực trọng trường. Các lực ngoài tác dụng lên cơ hệ là lực không thế.

Đối với hệ bảo toàn, năng lượng là không đổi

$$T+\Pi=\text{const} \tag{1.12}$$

Do đó tốc độ thay đổi năng lượng phải bằng không

$$\frac{d}{dt}(T + \Pi) = 0 \qquad (1.13)$$

Ta xét bài toán tĩnh, T=0, do đó

$$\Pi = \text{const} \qquad (1.14)$$

Thế năng Π có thể biểu thị qua ứng suất và nội lực cũng có thể biểu thị qua chuyển vị và biến dạng. Vì vậy ta có hai nguyên lý biến phân năng lượng sau:

Nguyên lý thế năng biến dạng cực tiểu

Khi phương trình cân bằng được biểu thị qua ứng suất hoặc nội lực và do đó thế năng biến dạng cũng biểu thị qua ứng suất hoặc nội lực ta có nguyên lý thế năng biến dạng cực tiểu, nguyên lý Castiliano (1847-1884). Nguyên lý phát biểu như sau:

Trong tất cả các trạng thái cân bằng lực có thể thì trạng thái cân bằng thực xảy ra khi thế năng biến dạng là cực tiểu.

Trạng thái cân bằng lực có thể là trạng thái mà các lực tác dụng lên phân tố thỏa mãn các phương trình cân bằng. Ta viết nguyên lý dưới dạng sau:

$$\Pi(F) \to \min$$

Với ràng buộc là các phương trình cân bằng viết dưới dạng lực.

Đối với dầm ta có:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EJ}dx \ \to min \qquad (1.15)$$

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q \qquad (1.16)$$

Nội lực cần tìm mômen uốn là hàm phân bố theo chiều dài dầm M(x) và phải thỏa mãn các điều kiện liên kết ở hai đầu thanh (được xác định ở hai đầu thanh). Đây là bài toán cực trị có ràng buộc. Bằng cách dùng thừa số Lagrange $\lambda(x)$ đưa về bài toán không ràng buộc sau:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EJ}dx + \int_0^l \lambda(x)\left[\frac{d^2M}{dx^2} + q\right]dx \ \to min \qquad (1.17)$$

$\lambda(x)$ là thừa số Lagrange và cũng là ẩn của bài toán. Theo phép tính biến phân từ phiếm hàm (1.17) ta nhận được hai phương trình sau (phương trình Euler–Lagrange).

$$M = -EJ\frac{d^2\lambda}{dx^2} \qquad (1.18)$$

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q \qquad (1.19)$$

$\lambda(x)$ có thứ nguyên là chuyển vị cho nên phương trình (1.18) biểu thị quan hệ giữa M và chuyển vị. Thế (1.18) vào (1.19) ta có

$$EJ\frac{d^4\lambda}{dx^4} = q \qquad (1.20)$$

$\lambda(x)$ là độ võng của dầm và phương trình (1.20) là phương trình vi phân cân bằng của dầm viết theo chuyển vị nhận được ở trên.

<u>Nguyên lý công bù cực đại</u>

Khi dùng ẩn là các chuyển vị và biến dạng thì có nguyên lý công bù cực đại.

Trong tất cả các chuyển vị động học có thể (khả dĩ) thì chuyển vị thực là chuyển vị có công bù cực đại.

Chuyển vị động học có thể là chuyển vị thỏa mãn các phương trình liên hệ giữa chuyển vị và biến dạng và thỏa mãn các điều kiện biên. Công bù bằng tích của ngoại lực và chuyển vị trừ đi năng lượng biến dạng.

[Công ngoại lực – thế năng biến dạng]→max

Với ràng buộc là các phương trình liên hệ giữa chuyển vị và biến dạng.

Lấy ví dụ đối với dầm chịu uốn, ta có

$$\int_0^l qydx - \frac{1}{2}\int_0^l EJ\,\chi^2\,dx \to \max \qquad (1.21)$$

Với ràng buộc:

$$\chi = -\frac{d^2y}{dx^2} \qquad (1.22)$$

χ là biến dạng uốn cũng là độ cong của đường độ võng. Tích phân thứ nhất trong (1.21) là công toàn phần của ngoại lực (không có hệ số ½), tích phân thứ hai là thế năng biến dạng biểu thị qua biến dạng uốn.

Thay χ từ (1.22) vào (1.21), ta có

$$\int_0^l qydx - \frac{1}{2}\int_0^l EJ\left(-\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx \rightarrow \max \tag{1.23}$$

Thay dấu của (1.23) ta có

$$\frac{1}{2}\int_0^l EJ\left(-\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx - \int_0^l qydx \rightarrow \min \tag{1.24}$$

Khi y có giá trị xác định tại hai đầu mút dầm thì điều kiện cần để biểu thức (1.24) cực tiểu là phương trình Euler sau

$$EJ\frac{d^4y}{dx^4} = q \tag{1.25}$$

Phương trình (1.25) là phương trình vi phân cân bằng của dầm chịu uốn. Nguyên lý công bù cực đại dưới dạng biểu thức (1.24) được sử dụng rộng rãi trong tính toán công trình theo phương pháp phần tử hữu hạn.

1.3. Nguyên lý công ảo

Nguyên lý công ảo được sử dụng rất rộng rãi trong cơ học. Theo K.F. Gauss (1777-1855) thì mọi nguyên lý trong cơ học hoặc trực tiếp hoặc gián tiếp đều rút ra từ nguyên lý chuyển vị ảo.

Xét cơ hệ chất điểm ở trạng thái cân bằng ta có

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0, \tag{1.26}$$

$\sum X; \sum Y; \sum Z$: là tổng hình chiếu của tất cả các lực tác dụng lên ba trục của hệ toạ độ Đề các. Ta viết biểu thức sau:

$$\sum X\delta U + \sum Y\delta V + \sum Z\delta W = 0, \tag{1.27}$$

ở đây xem các $\delta U; \delta V; \delta W;$ là các thừa số bất kỳ.

Từ (1.26) ta có (1.27) và ngược lại từ (1.27) ta sẽ nhận được (1.26) bởi vì các $\delta U; \delta V; \delta W;$ là những thừa số bất kỳ. Bây giờ ta xem $\delta U; \delta V; \delta W;$ là các biến phân của các chuyển vị ảo theo ba chiều của hệ toạ độ vuông góc. Chuyển vị ảo là chuyển vị bé do nguyên nhân bất kỳ bên ngoài nào đó gây ra. Các chuyển vị ảo này phải thoả mãn các điều kiện liên kết của hệ.

Khi có chuyển vị ảo thì vị trí của các lực tác dụng trên hệ có thể thay đổi nhưng phương chiều và độ lớn của nó vẫn giữ nguyên không đổi. Như vậy, các chuyển vị ảo $\delta U; \delta V; \delta W$ là các đại lượng độc lập với lực tác dụng và từ hai biểu thức (1.26) và (1.27) ta có nguyên lý công ảo:

Nếu như tổng công của các lực tác dụng của hệ thực hiện trên các chuyển vị ảo bằng không thì hệ ở trạng thái cân bằng.

Đối với hệ đàn hồi (hệ biến dạng) thì ngoài ngoại lực còn có nội lực. Vấn đề đặt ra ở đây là cách tính công của nội lực như thế nào.

Trước hết ta cần phải đưa thêm yêu cầu đối với chuyển vị ảo như sau:

Các chuyển vị ảo phải thoả mãn các liên hệ giữa chuyển vị và biến dạng. Nếu như các chuyển vị có biến dạng $\varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y}; \ldots$ thì biến phân các chuyển vị ảo $\delta u; \delta v; \delta w$ cũng phải có các biến dạng ảo tương ứng:

$$\frac{\partial}{\partial x}\delta u; \frac{\partial}{\partial y}\delta v; \ldots.$$

Thông thường công của nội lực (hoặc ứng suất) được tính qua thế năng biến dạng. Khi có các chuyển vị ảo $\delta U; \delta V; \delta W;$ thì thế năng biến dạng Π sẽ thay đổi bằng đại lượng biến phân $\delta\Pi$. Do đó nguyên lý chuyển vị ảo đối với hệ biến dạng được viết như sau:

$$\delta\Pi - \sum X\delta U - \sum Y\delta V - \sum Z\delta W = 0, \qquad (1.28)$$

Các đại lượng biến phân trong (1.28) đều là chuyển vị ảo cho nên nếu xem nội lực (ứng suất) trong quá trình chuyển vị ảo cũng không đổi thì dấu biến phân trong (1.28) có thể viết lại như sau:

$$\delta\left[\Pi - \sum XU - \sum YV - \sum ZW\right] = 0 \qquad (1.29)$$

Hai biểu thức (1.28) và (1.29) dưới dạng chi tiết hơn được trình bày trong [30, Tr.261].

$$\delta\int_0^l \left[\frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - qy\right]dx = 0 \qquad \text{hay} \qquad \int_0^l \delta\left[\frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - qy\right]dx = 0$$

(1.30)

Phương trình Euler của (1.30) như sau: $EJ\dfrac{d^4y}{dx^4} - q = 0$

1.4. Phương trình Lagrange:

Phương trình Lagrange là phương trình vi phân của chuyển động được biểu thị qua các toạ độ tổng quát (các chuyển vị tổng quát).

Gọi T là động năng và Π là thế năng của hệ, các q_i là các chuyển vị tổng quát và Q_i là các lực tổng quát thì phương trình Lagrange có dạng:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_{i,}\ \text{(i=1,2,3......,n)} \qquad (1.31)$$

trong đó: $\dot{q}_i = \dfrac{\partial q_i}{\partial t}$ là vận tốc của chuyển động. Đối với mỗi chuyển vị q_i sẽ có một phương trình Lagrange. Động năng T trong toạ độ tổng quát là hàm của vận tốc và có thể là hàm của cả chuyển vị tổng quát.

Thế năng toàn phần của hệ bao gồm thế năng biến dạng và thế năng của lực có thế (lực trọng trường là lực có thế). Q_i là lực không thế có thể được hiểu là các lực ngoài tác dụng lên hệ (lực tổng quát). Áp dụng phương trình Lagrange để xây dựng phương trình chuyển động của dầm chịu uốn như sau:

Gọi y_i là chuyển vị (tổng quát) của điểm i của dầm và q_i là lực tác dụng tại điểm i của dầm và m_i là khối lượng.

Động năng của dầm

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m\dot{y}_i^{\,2} dx \quad \text{trong đó:} \quad \dot{y}_i = \frac{\partial y_i}{\partial t} \qquad (1.32)$$

Thế năng biến dạng của dầm chịu uốn

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} EJ\left(\frac{\partial^2 y_i}{\partial x^2}\right)_i^2 \qquad (1.33)$$

Dấu tổng lấy cho tất cả các điểm i của dầm. Phương trình Lagrange đối với dầm có dạng

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} = q_{i,} \qquad (1.34)$$

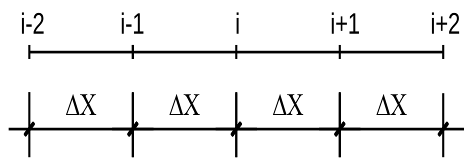
Ta tính hai thành phần đầu của phương trình (1.34)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i}\right) = \frac{\partial}{\partial t} m_i \dot{y}_i = m_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} = m_i \ddot{y}_i \tag{1.35}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y_i} = 0$$

Để tính thế năng biến dạng có thể dùng phương pháp sai phân hữu hạn, hình 1.5.

Bởi vì độ võng y_i của dầm chỉ có mặt trong biểu thức thế năng biến dạng của ba điểm liên tiếp i-1, i và i+1, cho nên chỉ cần tính thế năng biến dạng của dầm (1.33) cho ba điểm này, Δx là khoảng cách giữa các điểm.



Hình 1.4. Bước sai phân

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{2}EJ\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_i^2 &= \frac{1}{2}EJ\left(\frac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{\Delta x^2}\right)^2 \\
\frac{1}{2}EJ\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{i-1}^2 &= \frac{1}{2}EJ\left(\frac{y_{i-2}-2y_{i-1}+y_i}{\Delta x^2}\right)^2 \\
\frac{1}{2}EJ\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{i+1}^2 &= \frac{1}{2}EJ\left(\frac{y_i-2y_{i+1}+y_{i+2}}{\Delta x^2}\right)^2
\end{aligned}\right\} \tag{1.36}$$

Tổng cộng ba phương trình trên cho ta thế năng của dầm để tính y_i. Ta tính $\frac{\partial \Pi}{\partial y_i}$ của phương trình (1.34).

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial y_i} &= EJ\left(\frac{-2y_{i-1}+4y_i-2y_{i+1}+y_{i-2}-2y_{i-1}+y_i+y_i-2y_{i+1}+y_{i+2}}{\Delta x^4}\right) \\
&= EJ\left(\frac{y_{i-2}-4y_{i-1}+6y_i-4y_{i+1}+y_{i+2}}{\Delta x^4}\right) = EJ\left.\frac{\Delta_i^4}{\Delta x^4}\right|_i
\end{aligned}\right\} \tag{1.37}$$

Biểu thức (1.37) biểu thị sai phân hữu hạn của $EJ\left.\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\right|_i$.

Cộng (1.35) và (1.37) nhận được phương trình Lagrange đối với chuyển vị y_i

$$m\frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} + EJ\left.\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\right|_i = q_i \tag{1.38}$$

Điểm i là bất kỳ nên nhận được phương trình vi phân cân bằng của dầm

$$m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=q \tag{1.39}$$

Đối với bài toán tĩnh T=0 ta có: $EJ\dfrac{d^4 y}{dx^4}=q$ (1.40)

Phương pháp sử dụng phương trình Lagrange để nhận được phương trình vi phân của đường độ võng của dầm trình bày ở đây là của tác giả.

Ở trên trình bày bốn phương pháp chung để xây dựng bài toán cơ, lấy bài toán dầm chịu uốn làm ví dụ để biết cách sử dụng chúng và để thấy bốn đường lối đó là tương đương nhau nghĩa là đều dẫn về phương trình vi phân cân bằng của hệ.

CHƯƠNG 2.
PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN LÝ CỰC TRỊ GAUSS

Trong chương 1 đã trình bày bốn đường lối xây dựng bài toán cơ học và các phương pháp giải hiện nay thường dùng trong các giáo trình, tài liệu trong và ngoài nước. Khác với chương 1, chương này trình bày nguyên lý Gauss, sau đó trình bày phương pháp mới dựa trên nguyên lý cực trị Gauss để xây dựng và giải các bài toán cơ học dưới dạng tổng quát, chủ yếu là của cơ hệ vật rắn biến dạng. Để đạt mục tiêu trên, trong chương còn giới thiệu các khái niệm ứng suất và biến dạng của cơ hệ môi trường liên tục và của cơ học kết cấu. Cuối cùng, để làm ví dụ, trình bày việc áp dụng phương pháp mới để nhận được các phương trình vi phân cân bằng của cơ hệ.

2.1. Nguyên lý cực trị Gauss

Năm 1829 nhà toán học người Đức K.F. Gauss đã đưa ra nguyên lý sau đây đối với cơ hệ chất điểm [1,tr. 171]:

"*Chuyển động thực của hệ chất điểm có liên kết tùy ý chịu tác động bất kì ở mỗi thời điểm xảy ra một cách phù hợp nhất có thể với chuyển động của hệ đó khi hoàn toàn tự do, nghĩa là chuyển động thực xảy ra với lượng cưỡng bức tối thiểu nếu như số đo lượng cưỡng bức lấy bằng tổng các tích khối lượng chất điểm với bình phương độ lệch vị trí chất điểm so với vị trí khi chúng hoàn toàn tự do*".

Gọi m_i là khối lượng chất điểm, A_i là vị trí của nó, B_i là vị trí sau thời đoạn vô cùng bé do tác động lực ngoài và do vận tốc ở đầu thời đoạn gây ra, C_i là vị trí có thể (bị ràng buộc bởi liên kết) thì lượng cưỡng bức được viết như sau:

$$Z = \sum_i m_i \left(\overline{B_i C_i}\right)^2 \rightarrow Min \qquad (2.1)$$

Dấu tổng trong (2.1) lấy theo số chất điểm.

Sử dụng nguyên lý vận tốc ảo và nguyên lý D 'Alembert, xét hệ ở trạng thái cân bằng và cho rằng có lực với độ lớn tỉ lệ với độ dài $\overline{B_i C_i}$ tác dụng theo chiều từ C_i đến B_i, Gauss đã chứng minh nguyên lý của mình [1,tr. 172] .

Để có thể sử dụng nguyên lý Gauss cần biết đại lượng biến phân của nó. Theo [1,tr. 889], Gibbs (năm 1879) và Appell (năm 1899) đi từ các lập luận khác nhau đều nhận được nguyên lý Gauss và chỉ ra rằng đại lượng biến phân của nguyên lý này là gia tốc. Điều này có nghĩa là:

$$\delta r_i = 0\ ; \quad \delta \dot{r}_i = 0\ ; \quad \delta \ddot{r}_i \neq 0 \tag{2.2}$$

ở đây δ là kí hiệu biến phân (lấy vi phân khi cố định thời gian), r_i , $\dot{r}_i$ và $\ddot{r}_i$ lần lượt là vectơ toạ độ, vectơ vận tốc và vectơ gia tốc của điểm i. Chuyển dịch của chất điểm của hệ có liên kết dưới tác dụng của lực F_i sau thời đoạn dt tính theo công thức sau đây:

$$r_i + \dot{r}_i dt + \frac{1}{2}\ddot{r}_i dt^2 \tag{2.3}$$

Vì $\delta r_i = 0$ và $\delta \dot{r}_i = 0$ nên chuyển dịch của chất điểm hoàn toàn tự do (có thể hình dung ở đầu thời đoạn dt liên kết được giải phóng nhưng vẫn giữ lực tác dụng) sau thời đoạn dt là :

$$r_i + \dot{r}_i dt + \frac{1}{2}\frac{F_i}{m_i} dt^2 \tag{2.4}$$

Hiệu của (2.4) và (2.3) cho ta độ lệch vị trí của chất điểm có liên kết so với vị trí của nó khi hoàn toàn tự do.

Có thể xem dt là hằng thì lượng cưỡng bức Z theo (2.1) được viết dưới dạng lực như sau (với độ chính xác bằng thừa số $dt^4 / 4$) :

$$Z = \sum_i m_i \left(\frac{F_i}{m_i} - \ddot{r}_i \right)^2 \rightarrow Min \tag{2.5}$$

hoặc

$$Z = \sum_i \frac{1}{m_i} (F_i - m_i \ddot{r}_i)^2 \rightarrow Min \tag{2.5a}$$

Khi tính lượng cưỡng bức theo (2.5) cần xem gia tốc là đại lượng biến phân (biến phân kiểu Gauss theo cách nói của Boltzmann). Như vậy, phương pháp tìm cực tiểu của các bài toán cơ học được xây dựng theo nguyên lý (2.5) không thể là bất kỳ mà phải là (khi không có ràng buộc nào khác):

$$\frac{\partial Z}{\partial \ddot{r}_i} = 0 \qquad (2.6)$$

Điều kiện (2.6) sẽ cho ta phương trình cân bằng. Thật vậy, áp dụng (2.6) vào (2.5) ta nhận được phương trình cân bằng của hệ (ở đây lực tác dụng bằng lực quán tính). Appell và Boltzmann (năm 1897) còn cho biết nguyên lý Gauss đúng cho hệ liên kết holonom và cả hệ liên kết không holonom [1,tr. 890].

Nguyên lý Gauss (2.1) hoặc (2.5) có dạng của phương pháp bình phương tối thiểu là phương pháp cũng do Gauss đưa ra và được dùng rộng rãi trong toán học hiện đại, trong giải tích cũng như trong lời giải số. Có lẽ vì vậy nguyên lý Gauss thu hút sự chú ý của nhiều nhà khoa học, thí dụ, Hertz (năm 1894) dựa trên ý tưởng lượng cưỡng bức đưa ra nguyên lý đường thẳng nhất (đường có độ cong nhỏ nhất) hoặc Prigogine (năm 1954) và Gyarmati (năm 1965) đã xây dựng được lượng cưỡng bức của các quá trình không hồi phục trong nhiệt động lực học [2].

Các tài liệu giáo khoa về cơ học thường giới thiệu nguyên lý Gauss dưới dạng (2.5) là dạng dùng được để tính toán. Nhưng nguyên lý (2.5) với đại lượng biến phân là gia tốc chỉ là một biểu thị của nguyên lý Gauss (2.1) bởi vì đại lượng biến phân trong cơ học còn có thể là chuyyển vị và vận tốc như trình bày sau đây.

2.2. Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss

Trong bài viết của mình Gauss nêu nhận xét rằng *nguyên lý vận tốc ảo biến vấn đề tĩnh học thành vấn đề toán học thuần tuý, còn nguyên lý* D'Alembert *đưa bài toán động lực học về bài toán tĩnh học và mọi nguyên lý của cơ học hoặc nhiều hoặc ít đều có thể trực tiếp rút ra từ hai nguyên lý trên.* Dưới đây trình bày phương pháp dựa trên nguyên lý chuyển vị ảo để nhận được biểu thức (2.1) của nguyên lý Gauss.

Xét hệ chất điểm có liên kết tuỳ ý ở một thời điểm bất kì nào đó có nghĩa là phải đưa lực quán tính f_i của hệ tại thời điểm đó tác dụng lên hệ. Đối với hệ hoàn toàn tự do lực quán tính f_{0i} của nó bằng với ngoại lực (chỉ số '0' ở chân kí tự chỉ rằng kí tự đó thuộc hệ so sánh, trường hợp này là hệ hoàn toàn tự do có cùng khối lượng và cùng chịu tác dụng lực ngoài giống như hệ có liên kết). Như vậy, các lực tác dụng lên hệ có liên kết gồm các lực $f_i = m_i \ddot{r}_i$ và các lực $f_{0i} = m_i \ddot{r}_{0i}$ (thay cho ngoại lực). Theo nguyên lý chuyển vị ảo đối với liên kết giữ (liên kết dưới dạng đẳng thức) và không giữ (liên kết dưới dạng bất đẳng thức) điều kiện cần và đủ để hệ ở trạng thái cân bằng là [1,tr. 887] :

$$\sum_i \left(f_i - f_{0i}\right)\delta r_i \le 0 \qquad (2.7)$$

Biểu thức (2.7) cũng được Fourier (năm 1798) và Ostrogradsky (năm 1838) độc lập đưa ra.

Có thể nhận xét ngay rằng phần trong ngoặc đơn của (2.7) biểu thị lực tác dụng lên hệ nên phải bằng không để hệ ở trạng thái cân bằng.

Trong biểu thức (2.7) cần xem các chuyển vị r_i độc lập đối với lực tác dụng. Cho nên từ (2.7) có thể viết:

$$Z = \sum_i \left(f_i - f_{0i}\right) r_i \to Min \qquad (2.8)$$

Trong (2.8) r_i là các biến độc lập cần tìm để bảo đảm cho Z cực tiểu. Vì chuyển vị r_{0i} của hệ hoàn toàn tự do đã biết nên biểu thức (2.8) tương đương với các biểu thức dưới đây:

$$Z = \sum_i \left(f_i - f_{0i}\right)\left(r_i - r_{0i}\right) \to Min \qquad (2.8a)$$

hoặc

$$Z = \sum_i m_i \left[\frac{f_i}{m_i} - \ddot{r}_{0i}\right]\left(r_i - r_{0i}\right) \to Min \qquad (2.8b)$$

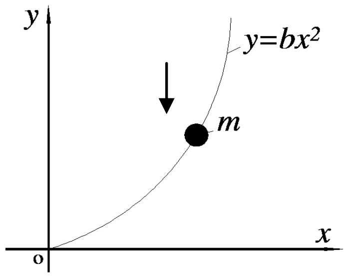
Dễ dàng nhận thấy (2.8b) là tích của khối lượng m_i với bình phương độ lệch vị trí chất điểm và do đó Z xác định theo (2.8) là lượng cưỡng bức của nguyên lý Gauss (với độ chính xác bằng thừa số $dt^2/2$). So với (2.5), lượng cưỡng bức Z xác định theo (2.8) biểu thị đầy đủ và rõ ràng tư tưởng của nguyên lý Gauss thể hiện ở chỗ, thứ nhất, nó cho phép so sánh hệ có liên kết với hệ hoàn toàn tự do, thứ hai, đại lượng không biết (đại lượng biến phân) trong (2.8) là chuyển vị giống như trong

(2.1). Cực tiểu của (2.8) cần và phải được tìm từ điều kiện (khi không có các ràng buộc nào khác):

$$\frac{\partial Z}{\partial r_i} = 0 \tag{2.9}$$

Điều kiện (2.9) áp dụng vào (2.8) cho ta phương trình cân bằng của cơ hệ.

<u>Ví dụ 1</u> Ví dụ này lấy từ [3,tr. 64]. Viết phương trình chuyển động của khối lượng m chạy trên đường cong y= bx^2 trong mặt phẳng (xy), không có lực ma sát, dưới tác dụng của trường gia tốc g (Hình 1.1).



Hình 1.1

Các lực tác dụng lên khối lượng m bao gồm: lực quán tính theo chiều y, lực trọng trường theo chiều âm của y, lực quán tính theo x. Chọn hệ so sánh là hệ có cùng khối lượng m nằm trong trường gia tốc g nhưng hoàn toàn tự do. Lượng cưỡng bức được viết theo (2.8) như sau:

$$Z = (m\ddot{y} + mg)y + (m\ddot{x})x \quad \rightarrow \quad Min \tag{a}$$

Thế $y = bx^2$ vào (a) ta có

$$Z = (m\ddot{y} + mg)bx^2 + (m\ddot{x})x \quad \rightarrow \quad Min \tag{b}$$

Xem chuyển vị x là biến độc lập và từ điều kiện $\frac{\partial Z}{\partial x} = 0$ nhận được:

$$2bx\ddot{y} + 2bgx + \ddot{x} = 0 \tag{c}$$

Thay $\ddot{y} = 2bx\ddot{x} + 2b\dot{x}^2$ vào (c) nhận được phương trình chuyển động của khối lượng m

$$(4b^2x^2 + 1)\ddot{x} + 4b^2x\dot{x}^2 + 2bgx = 0 \tag{d}$$

Phương trình (d) là kết quả cần tìm.

Như nhận xét của Gauss nêu trên, có thể nói biểu thức (2.7) đã biến vấn đề tĩnh học (cân bằng lực) thành vấn đề toán học thuần tuý. Thật vậy, nếu ta dùng gia tốc là đại lượng biến phân thì tương tự như (2.7) có thể viết

$$\sum_i (f_i - f_{0i})\,\delta \ddot{r}_i \leq 0 \tag{2.10}$$

với điều kiện gia tốc $\ddot{r}_I$ là đại lượng độc lập đối với lực tác dụng.

Từ (1.10) có thể viết

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i})\,\ddot{r}_i \rightarrow Min \tag{2.11}$$

Trong (2.11) cần xem gia tốc $\ddot{r}_i$ là đại lượng biến phân để bảo đảm cho Z cực tiểu. Vì gia tốc $\ddot{r}_{0i}$ của hệ hoàn toàn tự do đã biết nên biểu thức (2.11) tương đương với các biểu thức dưới đây:

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i})(\ddot{r}_i - \ddot{r}_{0i}) \rightarrow Min \tag{2.11a}$$

hoặc

$$Z = \sum_i m_i\left(\frac{f_i}{m_i} - \ddot{r}_{0i}\right)(\ddot{r}_i - \ddot{r}_{0i}) \rightarrow Min$$

$$Z = \sum_i m_i.(\ddot{r}_i - \ddot{r}_{0i})^2 \rightarrow Min \tag{2.11b}$$

Ta thấy (2.11b) trùng với (2.5). Các gia tốc $\ddot{r}_i$ phải thỏa mãn các liên kết nếu có và điều kiện cực tiểu của (2.11) là biểu thức (2.6).

Ví dụ 2 . Làm lại ví dụ 1 (Hình 1) theo nguyên lí (2.5) hoặc biểu thức (2.11)

Khối lượng m vừa chuyển động theo x, vừa chuyển động theo y, nhưng do có liên kết $y= bx^2$ nên chỉ có một bậc tự do, thí dụ là x. Các lực tác dụng lên m bao gồm: Lực quán tính theo chiều y, lực trọng trường theo chiều âm của y, lực quán tính theo x. Lượng cưỡng bức Z viết theo (2.5) là:

$$Z = m\left(\frac{mg}{m} + \ddot{y}\right)^2 + m\ddot{x}^2 \rightarrow Min \tag{a}$$

Lấy đạo hàm ràng buộc $y=bx^2$ theo thời gian hai lần ta có :

$$\ddot{y} = 2bx\ddot{x} + 2b\dot{x}^2 \qquad \text{(b)}$$

Thay $\ddot{y}$ trong (a) bằng (b), nhận được

$$Z = (g + 2bx\ddot{x} + 2b\dot{x}^2)^2 + \ddot{x}^2 \quad \rightarrow \quad Min \qquad \text{(c)}$$

Xem gia tốc $\ddot{x}$ là biến độc lập và từ điều kiện $\partial Z / \partial \ddot{x} = 0$ ta có phương trình chuyển động của khối lượng m như sau :

$$(4b^2x^2 + 1)\ddot{x} + 4b^2x\dot{x}^2 + 2bgx = 0 \qquad \text{(d)}$$

Phương trình (d) là kết quả cần tìm.

Tương tự, cũng có thể dùng vận tốc $\dot{r}_i$ là đại lượng biến phân, khi đó lượng cưỡng bức Z được viết :

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i})\, \dot{r}_i \quad \rightarrow \quad Min \qquad (2.12)$$

với điều kiện vận tốc $\dot{r}_i$ là biến độc lập và thoả mãn các liên kết nếu có. Trong trường hợp này điều kiện cực tiểu của nguyên lý(2.12) sẽ là (khi không có ràng buộc nào khác) :

$$\frac{\partial Z}{\partial \dot{r}_i} = 0 \qquad (2.13)$$

Làm lại bài toán của ví dụ 1 với đại lượng biến phân là vận tốc (biểu thức 2.12) cũng cho ta kết quả đúng đắn.

Tóm lại, các nguyên lý (2.5) hoặc (2.11) với đại lượng biến phân là gia tốc độc lập đối với lực tác dụng, nguyên lý (2.8) với đại lượng biến phân là chuyển vị độc lập đối với lực tác dụng và nguyên lý (2.12) với đại lượng biến phân là vận tốc độc lập đối với lực tác dụng đã biến phương trình cân bằng lực (vấn đề cơ học) thành các bài toán toán học thuần tuý và có thể được phát biểu như sau : *Chuyển động thực của cơ hệ xảy ra khi lượng cưỡng bức Z*

xác định theo (2.5) thì được tìm theo gia tốc , điều kiện (2.6)

xác định theo (2.8) thì được tìm theo chuyển vị, điều kiện (2.9)

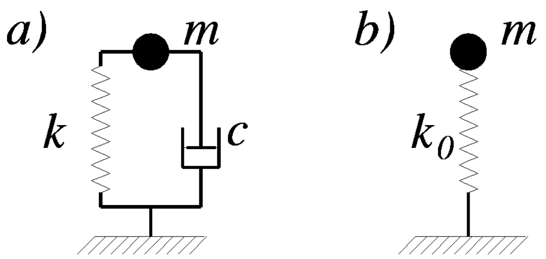
xác định theo (2.12) thì được tìm theo vận tốc, điều kiện (2.13) *là cực tiểu.*

Đương nhiên, các đại lượng biến phân gia tốc, chuyển vị và vận tốc phải thỏa mãn các điều kiện liên kết của hệ.

Để có thể áp dụng cho cả các bài toán tĩnh của môi trường liên tục ta sẽ dùng nguyên lý (2.8) với đại lượng biến phân là chuyển vị và điều kiện cực tiểu là (2.9). Nguyên lí (2.5) không cho phép giải các bài toán tĩnh. Do đó, cách trình bày nguyên lý Gauss dưới dạng này đã hạn chế việc sử dụng nguyên lý trong cơ học.

Có thể mở rộng nguyên lý Gauss bằng cách so sánh hệ cần tính với hệ có liên kết tuỳ ý chịu tác dụng của lực giống như hệ cần tính mà lời giải của nó đã biết. Khi đó thay cho lực ngoài ta dùng lực liên kết và lực quán tính của hệ so sánh với dấu ngược lại để tác động lên hệ cần tính. Điều này là hiển nhiên bởi vì ngoại lực luôn cân bằng với nội lực. Xét ví dụ minh họa sau

Ví dụ 3 Hệ cần tính là khối lượng m có liên kết lò xo độ cứng k và liên kết nhớt với hệ số nhớt c chịu tác dụng lực p(t) (Hình 2.2). Xét dao động thẳng đứng u(t) của m so với vị trí cân bằng tĩnh của nó. Bài toán có một bậc dao động tự do. Ta chọn hệ so sánh có khối lượng m_0 và liên kết lò xo độ cứng k_0 cùng chịu lực p(t) (Hình 2.2.b).



Hình 2.2 a) Hệ cần tính; b) Hệ so sánh.

Dao động $u_0(t)$ của hệ so sánh (so với vị trí cân bằng tĩnh của nó) xác định từ phương tình cân bằng sau :

$$m_0\ddot{u}_0 + k_0u_0 = p(t) \tag{a}$$

Lực tác dụng lên khối lượng m gồm có: lực quán tính $m\ddot{u}$, lực cản lò xo ku, lực cản nhớt $c\dot{u}$ và lực p(t) được thay bằng nội lực của hệ so sánh. Lượng cưỡng bức theo (2.8) viết được:

$$Z = (m\ddot{u} + c\dot{u} + ku - m_0\ddot{u}_0 - k_0u_0)u \quad \rightarrow \quad Min \tag{b}$$

Phần trong dấu ngoặc đơn của (b) biểu thị lực tác dụng và theo nguyên lý chuyển vị (2.8) cần xem chuyển vị u là biến độc lập đối với lực tác dụng thì từ điều kiện $\partial Z/\partial u = 0$ nhận được phương trình cân bằng của hệ cần tính

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = m_0\ddot{u}_0 + k_0u_0 \tag{c}$$

hay chú ý tới (a) ta có

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \tag{d}$$

Nhìn vào (c) và (d) thấy rằng thay cho việc giải phương trình vi phân cân bằng (d) của hệ cần tính ta có thể giải phương trình (c) ứng với từng thời điểm. Vế phải của (c) có thể là nghiệm riêng hoặc nghiệm cơ bản (trường hợp p(t) là xung đơn vị) của (d) hoặc, một cách tổng quát, là thể hiện của p(t) trên hệ bất kì nào khác (lời giải của hệ bất kì khi chịu tác động của p(t)). Nhận xét này rất hữu ích bởi vì nó cho ta một phương pháp nữa để giải các phương trình vi phân phức tạp, đặc biệt là đối với các bài toán có điều kiện biên ở vô hạn hoặc là khi giải bằng số.

Lượng cưỡng bức Z theo (b) có thể viết dưới dạng sau:

$$Z = Z1 + Z2 + Z3 \quad \rightarrow \quad Min \tag{e}$$

$$Z1 = \frac{1}{k}(ku - k_0u_0)^2, \quad Z2 = 2c\dot{u}u, \quad Z3 = 2m(\ddot{u} - \ddot{u}_0)u \tag{f}$$

Ở đây Z1 viết dưới dạng bình phương tối thiểu. Vì Z1 được viết dưới dạng bình phương tối thiểu nên các đại lượng Z2 và Z3 phải nhân với hệ số 2. Các biểu thức lượng cưỡng bức (b) và (e), (f) là tương đương.

Những nhận xét rút ra từ ví dụ minh họa nêu trên áp dụng đúng cho bất kì hệ nào khác.

Trình bày trên cho thấy có thể dùng hệ có liên kết bất kì để làm hệ so sánh cho nên có thể mở rộng biểu thức (2.8) như sau :

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i})\, r_i \quad \to \quad Min \tag{2.14}$$

với f_i là nội lực bao gồm lực quán tính và lực liên kết nếu có của hệ cần tính, f_{0i} là nội lực và lực liên kết đã biết của hệ so sánh bất kỳ chịu tác dụng lực ngoài giống như hệ cần tính.

Chú ý rằng khi sử dụng biểu thức (2.14) cần xem chuyển vị r_i là đại lượng độc lập đối với lực và phải thỏa mãn các điều kiện liên kết nếu có. Bởi vì cực tiểu của lượng cưỡng bức Z phải được tìm theo (2.9) (khi không có các ràng buộc nào khác) nghĩa là phải giải phương trình cân bằng của cơ hệ nên bài toán luôn có nghiệm và nghiệm là duy nhất

Phương pháp của nguyên lý (2.14) cho phép dùng hệ so sánh bất kì. Đại lượng biến phân của (2.14) là chuyển vị, điều kiện cực tiểu của nó là biểu thức (2.9). Phương pháp này do GS. TSKH Hà Huy Cương đề xuất và được gọi là phương pháp nguyên lý cực trị Gauss.

Biểu thức (2.7) trong các giáo trình cơ học thường mang dấu bằng, nghĩa là chỉ xét trường hợp liên kết giữ và khi đó từ (2.7) sẽ nhận được nguyên lý công ảo. Có thể nói biểu thức (2.7) với dấu nhỏ thua hoặc bằng là sự khác biệt cơ bản giữa nguyên lý cơ học của Gauss với cơ học dựa trên nguyên lý công ảo hiện dùng.

2.3. Cơ hệ môi trường liên tục: ứng suất và biến dạng

Trong mục này trình bày phương pháp nguyên lý Gauss đối với cơ hệ môi trường liên tục. Muốn vậy cần biết khái niệm ứng suất và biến dạng của môi trường liên tục. Để trình bày gọn dưới đây dùng các đại lượng tenxơ với cách hiểu như sau [4 ,tr.196]:

$$a_i a_i = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$a_{kk} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

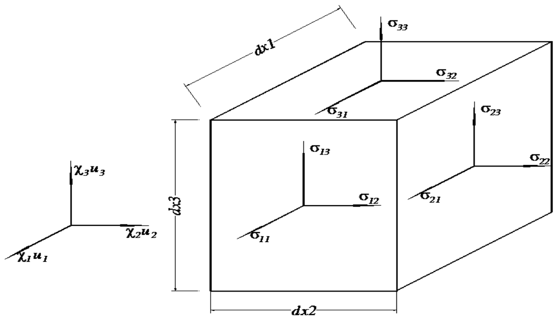
và hệ số Kronecker

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{khi} \quad i = j$$

$$\delta_{ij} = 0 \quad \text{khi} \quad i \neq j$$

với $i = 1,2,3$; $j = 1,2,3$; $k = 1,2,3$ đối với không gian 3 chiều.

Có thể nói đối tượng nghiên cứu của cơ hệ môi trườngliên tục trong toạ độ vuông góc là phân tố khối chữ nhật (ba chiều, kích thước vô cùng bé) hoặc phân tố chữ nhật (hai chiều, kích thước vô cùng bé) được tách ra từ môi trường (hình 2.3).



Hình 2.3. Trạng thái ứng suất phân tố

Khi đó lí thuyết ứng suất cho thấy ngoài các lực thông thường (lực gây các chuyển vị tịnh tiến trong cơ hệ chất điểm) trên bề mặt phân tố còn có các ứng suất tác dụng . Có 9 ứng suất σ_{ij} tác dụng lên bề mặt phân tố. Thứ nguyên cuả ứng suất bằng lực chia cho đơn vị diện tích.

Từ điều kiện cân bằng lực và momen sẽ nhận được phương trình cân bằng tĩnh của phân tố

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \qquad (2.15)$$

Trong (2.15) σ_{ij} là ứng suất , $\sigma_{ij,j}$ biểu thị đạo hàm của ứng suất theo toạ độ không gian, $\partial\sigma_{ij}/\partial x_j = \sigma_{ij,j}$, b_i là lực khối (lực khối xem như là lực cản). Nếu không có lực momen khối thì từ phương trình cân bằng sẽ có :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \qquad (2.16)$$

Số ứng suất độc lập tác dụng lên bề mặt phân tố chỉ còn 6 . Lí thuyết ứng suất cho thấy khi biết trạng thái ứng suất phân tố thì sẽ xác định được trạng thái lực tại điểm đó của môi trường và ngươc lại .

Khi chịu tác dụng ngoại lực, phân tố chuyển động và biến hình. Lý thuyết biến dạng cho thấy ngoài các chuyển vị u_i phân tố còn chịu các biến dạng ε_{ij} . Nếu xem biến dạng là bé (bình phương hoặc tích hai biến dạng là nhỏ so với chính nó) thì các biến dạng được xác định theo các phương trình sau:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} \right) \tag{2.17}$$

Các ε_{ij} là các đại lượng không thứ nguyên. Tương tự như tenxơ σ_{ij}, tenxơ ε_{ij} đối xứng và có 6 biến dạng độc lập tương ứng với 6 ứng suất.

Từ (2.17) thấy rằng trạng thái chuyển vị xác định duy nhất trạng thái biến dạng, nhưng ngược lại không đúng bởi vì có những chuyển vị không gây biến dạng (chuyển vị của vật rắn tuyệt đối). Ngoài các phương trình nêu trên, để bảo đảm tính liên tục của môi trường còn có các các phương trình về điều kiện không bị gián đoạn.

Tùy theo tính chất cơ học của vật liệu môi trường mà có các liên hệ khác nhau giữa ứng suất và biến dạng. Do có 6 ứng suất và 6 biến dạng nên một cách tổng quát cần biết 36 thông số tính chất vật liệu. Tuy nhiên từ điều kiện biểu thị năng lượng biến dạng phải giống nhau con số 36 rút xuống còn 21. Đối với vật liệu đẳng hướng chỉ còn 2 thông số tính chất vật liệu độc lập được chọn trong số các thông số sau: hai hằng số Lamé μ và λ , môđun Young E , môđun trượt G và hệ số Poisson ν, giữa chúng có các liên hệ sau đây :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad , \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2.18}$$

Đối với vật liệu đồng nhất , đẳng hướng, tuân theo định luật Húc (Hooke) thì liên hệ giữa ứng suất và biến dạng sẽ là :

$$\sigma_{ij} = 2G\left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\,\varepsilon_{kk}\,\delta_{ij}\right) \tag{2.19}$$

Từ công thức (2.19) thấy rằng ứng suất σ_{ij} không những phụ thuộc vào biến dạng ε_{ij} theo phương của nó mà còn phụ thuộc vào các biến dạng theo các phương khác thông qua hệ số Poisson ν . Hệ số 2G để tiện trình bày sau này sẽ được gọi là *độ cứng của biến dạng*.

Những trình bày trên cho thấy đối với cơ hệ môi trường liên tục cần xem các biến dạng ε_{ij} là độc lập đối với nhau và được xác định theo phương trình (2.17), cần xét các phương trình về điều kiện không bị gián đoạn của môi trường và liên hệ giữa ứng suất và biến dạng. Đối với môi trường đàn hồi, đồng nhất, đẳng hướng liên hệ ứng suất - biến dạng lấy theo (2.19) và điều kiện không bị gián đoạn của môi trường tự động thoả mãn khi biểu thị ứng suất qua chuyển vị.

Tóm lại, khác với cơ hệ chất điểm, trong môi trường liên tục ngoài lực khối và lực quán tính là các lực tác dụng gây chuyển vị, còn phải xét thêm các ứng suất σ_{ij} gây ra các biến dạng ε_{ij}.

Từ nhận xét vừa nêu, có thể sẽ có ích đối với nhận thức khi đưa ra các nhận định tổng quát về mối tương quan giữa cơ học chất điểm và cơ hệ môi trường liên tục như sau:

Khái niệm cơ bản của cơ chất điểm là chất điểm, các lực tác dụng lên chất điểm gây ra các chuyển vị, đặc trưng của chất điểm là khối lượng;

Khái niệm cơ bản của cơ hệ môi trường liên tục là mặt cắt phân tố, các ứng suất gây ra các biến dạng, các đặc trưng của mặt cắt phân tố là các độ cứng biến dạng tương ứng với các ứng suất. Các độ cứng này xác định tùy theo tính chất vật liệu môi trường. Trong cơ hệ môi trường liên tục còn có lực khối và lực quán tính gây chuyển vị giống như trong cơ hệ chất điểm. Do đó, có thể tóm tắt mối tương quan vừa nêu dưới dạng:

Chất điểm	⇔	*Mặt cắt phân tố*
Lực	⇔	*Lực*
		Các ứng suất
Chuyển vị	⇔	*Chuyển vị*
		Biến dạng
Khối lượng	⇔	*Khối lượng*
		Các độ cứng biến dạng

Kí hiệu $\Leftrightarrow$ chỉ sự tương đương giữa các khái niệm. Với cách hiểu này cũng dễ dàng xây dựng phiếm hàm lượng cưỡng bức tương tự như (2.14) đối với cơ hệ môi trường liên tục bất kỳ được trình bày sau đây.

Trước tiên, ta dùng hệ so sánh là hệ chất điểm có cùng khối lượng, cùng chịu tác dụng lực ngoài và hoàn toàn tự do. Đối với môi trường liên tục cần xét thêm ứng suất và biến dạng nên lượng cưỡng bức Z của hệ viết tương tự (2.14) như sau:

$$Z.... = ..Z1 + Z2 \quad \to Min$$

$$Z1 = \int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dV \quad , \quad Z2 = \int_V (\rho\ddot{u}_i u_i + b_i u_i - \rho\ddot{u}_{0i} u_i) dF \tag{2.20}$$

Trong (2.20) V là thể tích vật thể, ρ là khối lượng đơn vị. Lực quán tính là lực cản nên trong (2.20) mang dấu cộng. Lượng cưỡng bức *Z1* xét ứng suất của môi trường liên tục cần tính, hệ chất điểm so sánh không có ứng suất. Lượng cưỡng bức *Z2* xét lực khối và lực quán tính của môi trường liên tục, lực quán tính của hệ chất điểm so sánh. Các lực này đều gây chuyển vị *u*.

Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, trong (2.20) cần xem các biến dạng ε_{ij} là độc lập đối với các ứng suất σ_{ij} và các chuyển vị u_i là độc lập đối với lực tác dụng (ở đây là lực khối và lực quán tính) và độc lập đối với nhau. Điều kiện cực tiểu của (2.20) là

$$\frac{\partial Z1}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial Z2}{\partial u_i} = 0 \tag{2.21.a}$$

Nếu biến dạng ε_{ij} biểu thị qua chuyển vị (công thức (2.17)) thì điều kiện cực tiểu của (2.20) được viết như sau:

$$\frac{\partial Z1}{\partial \varepsilon_{ij}}\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial u_i} + \frac{\partial Z2}{\partial u_i} = 0 \tag{2.21.b}$$

Từ điều kiện (2.21.a) nhận được

$$\sigma_{ij,j} + b_i + \rho\ddot{u}_i - \rho\,\ddot{u}_{0i} = 0 \tag{2.22}$$

Phương trình (2.22) là phương trình vi phân cân bằng của cơ hệ môi trường liên tục dưới dạng ứng suất.

Nếu tại điểm đang xét không có lực ngoài tác dụng thì $\rho\ddot{u}_{0y}$ bị triệt tiêu, phương trình (2.22) là phương trình cân bằng động lực học thường gặp của cơ hệ môi trường liên tục. Trường hợp bài toán tĩnh, $\rho\ddot{u}_i$ cũng bằng không, phương trình (2.22) khi đó trùng với (2.15).

Dễ dàng nhận được phương trình vi phân cân bằng dưới dạng chuyển vị bằng cách đưa liên hệ ứng suất - biến dạng vào phương trình (2.22) hoặc vào phiếm hàm (2.20).Trong mục (2.5) dưới đây sẽ trở lại vấn đề này.

Cần nêu nhận xét rằng biểu thức (2.20) cho phép so sánh cơ hệ môi trường liên tục với cơ hệ chất điểm hoàn toàn tự do khi hai hệ cùng chịu lực ngoài như nhau. Trong (2.20) không chứa các thông số tính chất vật liệu của môi trường nên nó đúng với môi trường bất kỳ.

Xét các trường hợp khác của phiếm hàm lượng cưỡng bức (2.20):
Trường hợp không dùng hệ so sánh thì phải đưa lực ngoài pi vào (2.20). Lực pi thường tác dụng lên bề mặt Ω của vật nên ta viết

$$Z = \int_V (\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + \rho\ddot{u}_i u_i - b_i u_i)dv - \int_\Omega p\ u_i d\Omega \quad \rightarrow\ Min \tag{2.23}$$

Có thể dùng hệ so sánh cũng là cơ hệ môi trường liên tục có liên kết bất kỳ với điều kiện hai hệ cùng chịu lực ngoài giống nhau:

$$Z = \int_V \left[(\sigma_{ij} - \sigma_{0ij})\varepsilon_{ij} + (\rho\ddot{u}_i - \rho_0\ddot{u}_{0i})u_i - (b_i - b_{0i})u_i\right]dv \rightarrow\ Min \tag{2.24}$$

Giống như đã trình bày ở ví dụ 3, thực chất của phương pháp nguyên lý cực trị Gauss là dùng nội lực của hệ so sánh tác dụng lên hệ cần tìm.

Đối với bài toán tĩnh, lực quán tính triệt tiêu, khi không xét lực khối, biểu thức (2.24) có dạng:

$$Z = \int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{0ij})\varepsilon_{ij} dv \quad \rightarrow\ Min \tag{2.25}$$

Đối với bài toán tĩnh, không xét lực khối, không dùng hệ so sánh, từ (2.23) ta có:

$$Z = \int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dv - \int_\Omega p_i u_i d\Omega \quad \rightarrow\ Min \tag{2.26}$$

Các chuyển vị u_i và biến dạng ε_{ij} (xác định theo (2.17)) trong các phiếm hàm (2.20, 2.23, 2.24, 2.25) và (2.26) là những đại lượng độc lập đối với lực tác dụng và ứng suất và phải thoả mãn các điều kiện liên kết nếu có. Chuyển động thực của cơ hệ môi trường liên tục xảy ra khi cực tiểu các phiếm hàm lượng cưỡng bức vừa nêu theo điều kiện (2.21) nếu không có các điều kiện liên kết nào khác.

Đối với môi trường đàn hồi, quan hệ ứng suất – biến dạng xác định theo (2.19), ta có thể viết lượng cưỡng bức dưới dạng bình phương tối thiểu như nhận xét đã nêu ở ví dụ 3:

$$Z = \int_V \frac{1}{2G}(\sigma_{ij} - \sigma_{0ij})^2 dv + 2\int_V (f_{mi} - f_{0mi}) u_i dv \quad \rightarrow Min \qquad (2.27a)$$

hoặc
$$Z = \int_V 2G(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{0ij})^2 dv + 2\int_V m_i(\ddot{u}_i - \ddot{u}_{0i}) u_i dv \quad \rightarrow Min$$

Tương tự, khi không dùng hệ so sánh thì phải xét lực ngoài, có thể viết lại (2.26) như dưới đây

$$Z = \int_V \frac{1}{2G}(\sigma_{ij})^2 dv + 2\int_V f_{mi} u_i dv - 2\int_\Omega p_i u_i d\Omega \quad \rightarrow Min \qquad (2.27b)$$

hoặc
$$Z = \int_V 2G(\varepsilon_{ij})^2 dv + 2\int_V (m_i \ddot{u}_i) u_i dv - 2\int_\Omega p_i u_i d\Omega \quad \rightarrow Min$$

Trong (2.27) $f_{mi} = m_i\ddot{u}_i$ và $f_{0mi} = m_{0i}\ddot{u}_{0i}$ là lực quán tính của hệ cần tính và hệ so sánh, liên hệ giữa ứng suất và biến dạng xác định theo biểu thức (2.19). Trong (2.27), cần xem các biến dạng ε_{ij} là các đại lượng biến phân độc lập đối với các ứng suất σ_{ij}, các chuyển vị u_i là độc lập đối với lực tác dụng p và lực quán tính.

Tích phân thứ nhất trong (2.27) liên quan đến ứng suất đàn hồi có trọng số là 2G, Trở lên trình bày các phiếm hàm lượng cưỡng bức, đối với cơ hệ chất điểm là các biểu thức (2.14), đối với môi trường liên tục là biểu thức (2.20) và các trường hợp khác của nó là các biểu thức (2.23), (2.24), (2.25), (2.26) và (2.27). Trong các phiếm hàm này cần xem các biến dạng ε_{ij} xác định theo (2.17) và các chuyển vị u_i là các đại lượng không biết độc lập đối với ứng suất và lực tác dụng, thỏa mãn các điều kiện liên kết nếu có và các điều kiện không bị gián đoạn (riêng đối với môi trường liên tục). Cực tiểu các phiếm hàm này theo điều kiện (2.21) cho ta chuyển vị thực của cơ hệ cần tính.

Phương pháp nguyên lí cực trị Gauss là phương pháp mới trong cơ học môi trường liên tục.

2.4. Cơ học kết cấu

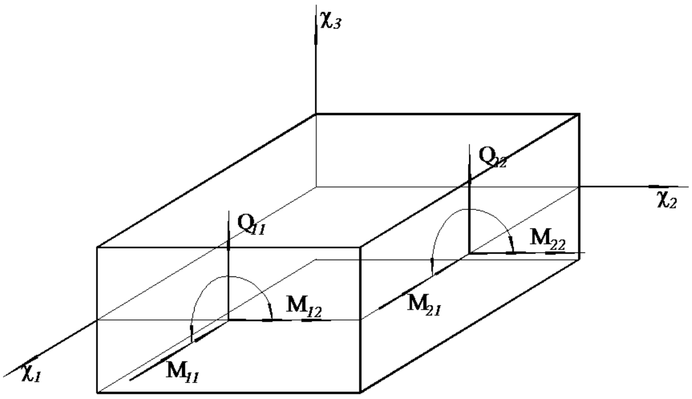
Môn sức bền vật liệu và cơ học kết cấu nghiên cứu trạng thái ứng suất biến dạng của dầm, thanh, tấm, khung, dàn v.v…là những kết cấu có một hoặc hai kích thước nhỏ thua nhiều lần so với các kích thước còn lại. Trong trường hợp này để đơn giản nhưng kết quả tính vẫn bảo đảm độ chính xác đủ dùng trong thực tế (kiểm tra bằng thí nghiệm), có thể dùng mặt cắt kết cấu thay cho mặt cắt phân tố và các ứng suất tác dụng lên mặt cắt được qui về thành các nội lực tác dụng lên mặt trung bình (đường trung bình đối với dầm) như lực dọc N, momen uốn M, lực cắt Q v.v… Muốn vậy cần đưa vào các giả thiết sau đây:

– Khi chịu lực dọc trục, ứng suất pháp được xem là phân bố đều trên tiết diện. Khi chịu lực ngang (tác dụng thẳng góc với mặt trung bình) có các giả thiết sau đây:

– Mặt trung bình của tấm và trục trung bình của dầm không có nội lực và do đó không bị biến dạng.

– Giả thiết tiết diện phẳng: tiết diện sau khi biến dạng vẫn phẳng.

– Không xét ứng suất nén giữa các lớp theo chiều cao tiết diện, nghĩa là xem các lớp song song với mặt trung bình (tấm) làm việc ở trạng thái ứng suất phẳng.



Hình 2.4. Nội lực của phân tố tấm

Sử dụng các giả thiết trên, các momen uốn và xoắn và lực cắt tác dụng lên mặt cắt kết cấu xác định theo các biểu thức dưới đây (hình 2.4):

$$M_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} x_3 dx_3 \,, \quad M_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} x_3 dx_3 \,, \quad M_{12} = M_{21} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} x_3 dx_3$$

$$Q_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} dx_3 \,, \quad Q_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23} dx_3 \qquad (2.28)$$

ở đây h là chiều cao tiết diện.

Để có thể áp dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss cần biết các 'biến dạng' của tiết diện do momen uốn gây ra. Với các giả thiết nêu trên chỉ cần biết chuyển vị thẳng đứng w của trục hoặc mặt trung bình của kết cấu (còn gọi là đường độ võng, đường đàn hồi) thì trong trường hợp uốn thuần tuý có thể tính được các chuyển vị theo các phương còn lại và dùng các phương trình (2.17) để xác định các biến dạng. Kết quả cho thấy các biến dạng trong mặt phẳng tấm (hoặc thớ dầm) phân bố tuyến tính theo chiều cao và tỉ lệ với độ cong χ_{ij} của mặt võng (i=1,2; j=1,2):

$$\varepsilon_{ij} = x_3 \chi_{ij} \;;$$

$$\chi_{11} = -w_{,11} \;, \quad \chi_{22} = -w_{,22} \;, \quad \chi_{12} = -w_{,12} \;. \qquad (2.29)$$

Dấu trừ trong công thức xác định độ cong (2.29) là do xem chuyển vị w có chiều dương hướng xuống dưới và dấu nội lực như trên hình 2.4. Như vậy, độ cong χ_{ij} của các lớp song song với mặt trung bình là giống nhau và đó là 'biến dạng' do momen M_{ij} gây ra. Biết được biến dạng ε_{ij} xác định theo (2.29) sẽ tính được momen M_{ij} theo (2.28). Liên hệ giữa momen uốn và 'biến dạng uốn' của tiết diện như sau:

$$M_{11} = D(\chi_{11} + \nu\chi_{22}) \,, \quad M_{22} = D(\chi_{22} + \nu\chi_{11}) \,, \quad M_{12} = D(1-\nu)\chi_{12} \qquad (2.30)$$

ở đây D là độ cứng uốn

đối với dầm $D = EJ = \dfrac{Eh^3}{12}$, đối với tấm $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

và $D(1-\nu)$ được gọi là độ cứng xoắn (độ cứng của biến dạng xoắn). (ở đây cần chú ý rằng do có liên kết gối tựa nên mặt trung bình có thể bị biến dạng trong mặt phẳng của nó, giả thiết mặt trung bình là mặt trung hoà nêu trên không được thoả mãn. Trong trường hợp này độ võng phải là bé so với chiều cao dầm hoặc chiều dày tấm để có thể bỏ qua ứng suất tác dụng trong mặt trung bình).

Trong trường hợp có lực cắt Q_{ii} thì chúng được xác định từ điều kiện cân bằng phân tố, ta có:

$$Q_{11} = \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} \quad , \qquad Q_{22} = \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_1}$$

hay $Q_{11} = D\,[(\chi_{11})_{,1} + (\chi_{12})_{,2}]$, $Q_{22} = D[(\chi_{12})_{,1} + (\chi_{22})_{,2}]$ (2.31)

Từ công thức (2.28) có thể thấy độ cứng chịu cắt cuả tiết diện là Gh và biến dạng trượt γ_{11} và γ_{22} tương ứng với lực cắt sẽ bằng góc xoay của đường đàn hồi:

$$\gamma_{11} = w_{,1} = \frac{\partial w}{\partial x_1} \quad , \qquad \gamma_{22} = w_{,2} = \frac{\partial w}{\partial x_2} \tag{2.32}$$

Trong lý thuyết kết cấu chịu uốn nêu trên, độ võng của kết cấu chỉ do mo-men uốn gây ra, không xét biến dạng trượt do lực cắt gây ra.

Đối với các lực N_{ij} tác dụng lên mặt trung bình của tiết diện thì các biến dạng ε_{ij} (i=1,2;j=1,2) vẫn xác định theo (2.17). Độ cứng của tiết diện chịu nén kéo sẽ là Eh.

Trong các công thức vừa nêu lấy i=1,j=1 đối với bài toán một chiều (thanh, dầm), chiều rộng dầm bằng đơn vị.

Do sử dụng momen uốn của tiết diện nên phải đưa thêm các liên kết về xoay để mô tả các điều kiện biên của nó: liên kết khớp cho phép tiết diện xoay tự do, momen bằng không; liên kết ngàm không cho tiết diện xoay, momen khác không.

Sau khi đã biết 'các biến dạng' tương ứng với các nội lực của tiết diện (momen uốn, lực cắt, lực dọc trục v.v..) và độ cứng của chúng thì dễ dàng xây dựng các bài toán cơ học kết cấu theo phương pháp nguyên lí cực trị Gauss.

Ta có thể viết một cách tổng quát lượng cưỡng bức Z của bài toán cơ học kết cấu dưới dạng tương tự như (2.25) (bài toán tĩnh):

$$Z = \int_V [(M_{ij} - M_{0ij})\chi_{ij} + (Q_{ii} - Q_{0ii})\gamma_{ii} + (N_{ij} - N_{0ij})\varepsilon_{ij}\}dv \rightarrow Min \tag{2.33a}$$

hoặc dưới dạng bình phương tối thiểu

$$Z = \int_V \frac{1}{Docung} \text{(Nội lực hệ cần tính- Nội lực hệ so sánh)}^2 \, dv \rightarrow Min \qquad (2.33b)$$

và trong trường hợp không dùng hệ so sánh ta có

$$Z = \int_V \frac{1}{Docung} \text{(Nội lực hệ cần tính)}^2 \, dv - 2\int_\Omega p_i w_i d\Omega \rightarrow Min \qquad (2.33c)$$

ở đây V là chiều dài dầm hoặc diện tích tấm, Ω là chiều dài hoặc diện tích phạm vi đặt lực. Trong (2.33) cần xem các độ cong χ_{ij} là các đại lượng độc lập đối với nội lực momen uốn M_{ij}, các biến dạng trượt γ_{11} và γ_{22} là các đại lượng độc lập đối với lực cắt Q_{11} và Q_{22}, các biến dạng trong mặt trung bình ε_{ij} là các đại lượng độc lập đối với N_{ij} và đều là các đại lượng biến phân của bài toán. Điều đó chỉ ra rằng cực tiểu của lượng cưỡng bức Z , biểu thức(2.33) , chỉ có thể tìm từ điều kiện:

$$\frac{\partial Z}{\partial \chi_{ij}}\frac{\partial \chi_{ij}}{\partial W} + \frac{\partial Z}{\partial \gamma_{ii}}\frac{\partial \gamma_{ii}}{\partial W} + \frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_{ij}}\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial W} + \frac{\partial Z}{\partial W} = 0 \qquad (2.34)$$

Bởi vì các biến dạng uốn, biến dạng cắt v.v…là hàm của độ võng và độ võng là hàm của tọa độ nên điều kiện (2.34) được tính bằng phép tính biến phân và sẽ cho ta phương trình cân bằng tĩnh của kết cấu (xem mục 2.5 dưới đây). Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss với biểu thức lượng cưỡng bức Z viết theo (2.33) và điều kiện cực tiểu (2.34) là phương pháp mới, tổng quát trong cơ học kết cấu.

2.5. Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss và các phương trình cân bằng của cơ hệ

Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, nếu như biết được các lực và nội lực của cơ hệ và các chuyển vị và biến dạng do chúng gây ra thì có thể viết được lượng cưỡng bức Z của hệ. Dùng phép tính biến phân với đại lượng biến phân là các chuyển vị độc lập đối với lực tác dụng và biến dạng độc lập với ứng suất sẽ nhận được phương trình vi phân cân bằng của hệ (phương trình Ơ-le (Euler) của phiếm hàm Z). Sau đây trình bày các ví dụ sử dụng phương pháp vừa nêu để tìm phương trình cân bằng.

2.5.1. Phương trình cân bằng tĩnh đối với môi trường đàn hồi, đồng nhất, đẳng hướng

Ba phương trình vi phân cân bằng của cơ hệ dưới dạng ứng suất là phương trình (2.22). Thế các ứng suất σ_{ij} xác định theo (2.19) vào (2.22) sẽ có các phương trình vi phân cân bằng của cơ hệ đàn hồi đồng nhất đẳng hướng dưới dạng chuyển vị. Ở đây trình bày cách tính trực tiếp để nhận được các phương trình đó (trường hợp bài toán tĩnh).

Liên hệ biến dạng - chuyển vị (2.17) và ứng suất - biến dạng (2.19) được viết lại trong hệ tọa độ (x,y,z) dưới dạng thường dùng với u ,v và w là các chuyển vị tương ứng theo các chiều (x,y,z) như sau:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\sigma_x = 2G\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right), \quad \sigma_y = 2G\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right), \quad \sigma_z = 2G\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right)$$

$$\tau_{xy} = G\,\gamma_{xy}, \quad \tau_{xz} = G\,\gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = G\,\gamma_{yz} \tag{2.34}$$

ở đây $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ - biến dạng thể tích của phân tố.

Ta viết lượng cưỡng bức Z theo (2.25) cho mỗi ứng suất và lực khối b:

$$Z1 = \int_V 2G\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right)\frac{\partial u}{\partial x}\,dV, \quad Z2 = \int_V 2G\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right)\frac{\partial v}{\partial y}\,dV,$$

$$Z3 = \int_V 2G\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right)\frac{\partial w}{\partial z}\,dV, \quad Z4 = \int_V G\,\gamma_{xy}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)dV,$$

$$Z5 = \int_V G\,\gamma_{xz}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)dV, \quad Z6 = \int_V G\,\gamma_{yz}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)dV$$

$$Z7 = \int_V b_x u \, dV, \qquad Z8 = \int_V b_y v \, dV, \qquad Z9 = \int_V b_z w \, dV \tag{2.35}$$

Lượng cưỡng bức Z bằng tổng các lượng cưỡng bức thành phần :

$$Z = Z1+Z2+Z3+Z4+Z5+Z6+Z7+Z8+Z9 \qquad \to Min$$

Từ điều kiện cực tiểu (1.21) của phiếm hàm Z viết lại dưới dạng

$$\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial u} + \frac{\partial Z}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial w} + \frac{\partial Z}{\partial w} = 0 \tag{2.36}$$

sẽ nhận được ba phương trình vi phân cân bằng tĩnh. Bởi vì u, v và w là các hàm của tọa độ (x,y,z), không phải là biến độc lập , nên phép tính (2.36) là phép tính biến phân. Phương trình cân bằng thứ nhất với u là hàm chưa biết nhận được với chú ý rằng

- đại lượng biến phân của Z1 (ứng với σ_x) là ε_x hay $\frac{\partial u}{\partial x}$, như vậy

$$\frac{\partial Z1}{\partial \varepsilon_x} = - \frac{\partial}{\partial x} 2G\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right) = - 2G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x}\theta\right)$$

- đại lượng biến phân của Z4 (ứng với τ_{xy}) là γ_{xy} có thành phần $\frac{\partial u}{\partial y}$, nên

$$\frac{\partial Z4}{\partial \gamma_{xy}} = - G \frac{\partial}{\partial y} \gamma_{xy} = -G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)$$

- đại lượng biến phân của Z5 (ứng với τ_{xz}) là γ_{xz} có thành phần $\frac{\partial u}{\partial z}$, nên

$$\frac{\partial Z5}{\partial \gamma_{xz}} = -G \frac{\partial}{\partial z} \gamma_{xz} = - G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x}\right)$$

- đại lượng biến phân của Z7 là u, nên

$$\frac{\partial Z7}{\partial u} = b_x$$

Tổng cộng $\frac{\partial Z1}{\partial u} + \frac{\partial Z4}{\partial u} + \frac{\partial Z5}{\partial u} + \frac{\partial Z7}{\partial u} = 0$

sau khi rút gọn sẽ là :

$$G(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2})+\frac{G}{1-2\nu}(\frac{\partial}{\partial x}\theta)+b_x=0 \quad (2.37)$$

Phương trình cân bằng thứ hai nhận được với v là hàm chưa biết. Trong (2.35) các đại lượng biến phân của v có ở Z2, Z4, Z6 và Z8. Phương trình cân bằng thứ ba nhận được với w là hàm chưa biết. Trong (2.35) các đại lượng biến phân của w có ở Z3, Z5, Z6 và Z9. Bằng cách tính biến phân tương tự sẽ có thêm hai phương trình cân bằng sau:

$$G(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2})+\frac{G}{1-2\nu}(\frac{\partial}{\partial y}\theta)+b_y=0 \quad (2.38)$$

$$G(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2})+\frac{G}{1-2\nu}(\frac{\partial}{\partial z}\theta)+b_z=0 \quad (2.39)$$

Ba phương trình (2.37), (2.38) và (2.39) là các phương trình vi phân cân bằng của cơ hệ đàn hồi, đồng nhất và đẳng hướng và được gọi là phương trình Navier [4] Dưới dạng tenxơ các phương trình này được viết gọn như sau:

$$Gu_{j,kk}+\frac{G}{1-2\nu}u_{k,kj}+b_j=0 \quad (2.40)$$

2.5.2. Phương trình vi phân của mặt võng của tấm chịu uốn

Xét tấm có chiều dày không dổi Viết lại các biểu thức (2.30) đối với các nội lực momen uốn và xoắn và (2.31) đối với lực cắt tác dụng lên phân tố tấm trong hệ tọa độ (x,y) ta có :

$$M_x=-D(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}),\ M_y=-D(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}),\ M_{xy}=-D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

$$Q_x=-D(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}),\ Q_y=-D(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}) \quad (2.41)$$

Biết được các lực tác dụng lên phân tố thì để dàng viết được lượng cưỡng bức Z, thí dụ, dưới dạng bình phương tối thiểu theo (2.33.b) (khi không có ngoại lực):

$$Z1 = \int_{\Omega} D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 d\Omega \;, \quad Z2 = \int_{\Omega} D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 d\Omega,$$

$$Z3 = 2\int_{\Omega} D(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 d\Omega \tag{2.42}$$

ở đây Ω là diện tích tấm. Lượng cưỡng bức Z bằng tổng các lượng cưỡng bức do mỗi thành phần nội lực momen uốn và xoắn gây ra :

$$Z = Z1 + Z2 + Z3 \quad \rightarrow Min \tag{2.43}$$

Chú ý rằng trong (2.43) ta chỉ xét nội lực momen, chưa xét tới lực cắt , phân tố không có lực ngoài tác dụng. Hệ số 2 trong Z3 để xét momen xoắn tác dụng bằng nhau lên hai chiều x,y. Các 'biến dạng' tương ứng với các nội lực momen xác định theo (2.29) :

$$\chi_{xx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \;, \; \chi_{yy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \;\; \chi_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{2.44}$$

Các 'biến dạng' này cần được xem là độc lập đối với các nội lực momen uốn và xoắn và là các đại lượng biến phân của bài toán. Do đó từ điều kiện cực tiểu (2.36) ta có :

$$\frac{\partial Z1}{\partial \chi_{xx}} \frac{\partial \chi_{xx}}{\partial w} = 2D \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 2D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right),$$

$$\frac{\partial Z2}{\partial \chi_{yy}} \frac{\partial \chi_{yy}}{\partial w} = 2D \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 2D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right),$$

$$\frac{\partial Z3}{\partial \chi_{xy}} \frac{\partial \chi_{xy}}{\partial w} = 4D(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) = 4D(1-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \tag{2.45}$$

Tổng cộng các thành phần của (1.45) nhận được phương trình vi phân độ võng của tấm chịu uốn :

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \tag{2.46}$$

Phương trình (2.46) thường được gọi là phương trình Sophie Germain (năm 1811).

Khi xây dựng lượng cưỡng bức Z (biểu thức 2.43) không xét tới lực cắt bởi vì lý thuyết kết cấu chịu uốn trình bày trên không xét biến dạng của lực cắt.Tuy nhiên, trong phạm vi của lý thuyết này, nếu dùng lực cắt xác định theo (2.31) và biến dạng trượt theo (2.32) thì lượng cưỡng bức Z được viết như sau

$$Z = \int_{\Omega} Q_{xx}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) d\Omega + \int_{\Omega} Q_{yy}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) d\Omega \to Min \qquad (2.47)$$

Xem các góc xoay $\frac{\partial w}{\partial x}$ và $\frac{\partial w}{\partial y}$ là các đại lượng biến phân độc lập đối với lực cắt Q_x và Q_y và bằng phép tính biến phân lại nhận được phương trình vi phân (2.46).

Đối với dầm, lượng cưỡng bức viết theo (2.33.a) sẽ là :

$$Z = -\int_{l} EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(\chi_{xx})\,dl - \int_{l_q} qw\,dl_q \qquad (2.48)$$

Trong (2.48) l là chiều dài dầm, $\chi_{xx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ là biến dạng uốn (độ cong) của dầm, l_q là chiều dài đoạn dầm có lực q tác dụng. Phương trình vi phân đường độ võng của dầm:

$$\frac{\partial Z}{\partial \chi_{xx}}\frac{d\chi_{xx}}{dw} + \frac{\partial Z}{\partial w} = EJ\frac{d^4 w}{dx^4} - q = 0 \qquad (2.49)$$

CHƯƠNG 3.

PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN LÝ CỰC TRỊ GAUSS ĐỐI VỚI CÁC BÀI TOÁN CƠ HỌC KẾT CẤU

3.1. Bài toán cơ học kết cấu và các phương pháp giải

Bài toán cơ học kết cấu nhằm xác định nội lực và chuyển vị của hệ thanh, tấm, vỏ hay kết hợp dưới tác dụng của tải trọng, nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức, ... và được chia làm hai loại:

- Bài toán tĩnh định: để xác định nội lực (và do đó cả chuyển vị), chỉ cần dùng các phương trình tĩnh học;

- Bài toán siêu tĩnh: nhằm mục đích trên ta còn phải bổ sung các phương trình biến dạng.

Nếu tính đến tận ứng suất, có thể nói rằng mọi bài toán cơ học vật rắn biến dạng nói chung và bài toán cơ học kết cấu nói riêng đều là bài toán siêu tĩnh.

Đã có nhiều phương pháp để giải bài toán siêu tĩnh. Hai phương pháp truyền thống cơ bản là phương pháp lực và phương pháp chuyển vị. Khi sử dụng chúng, thường phải giải hệ phương trình đại số tuyến tính. Số lượng các phương trình tuỳ thuộc vào phương pháp phân tích. Từ phương pháp chuyển vị ta có hai cách tính gần đúng hay được sử dụng là H. Cross và G. Kani. Từ khi xuất hiện máy tính điện tử, người ta bổ sung thêm các phương pháp số khác như: phương pháp phần tử hữu hạn, phương pháp sai phân hữu hạn, phương pháp ma trận chuyển...

3.1.1. Phương pháp lực

Trong hê siêu tĩnh, ta thay các *liên kết thừa* bằng các lực chưa biết, còn giá trị các chuyển vị trong hộ cơ bản tương ứng với vị trí và phương của các lực ẩn số do bản thân các lực đó và do các nguyên nhân bên ngoài gây ra bằng không. Từ điều kiện này ta lập được hộ phương trình đại số tuyến tính, giải hô này ta tìm được các ẩn số và từ đó suy ra các đại lượng cần tìm.

3.1.2. Phương pháp chuyển vị

Khác với phương pháp lực, phương pháp chuyển vị lấy *chuyển* vị tại các nút làm *ẩn*. Những chuyển vị này phải có giá trị sao cho phản lực tại các liên kết đặt thêm vào hệ do bản thân chúng và do các nguyên nhân bên ngoài gây ra bằng không. Lập hệ phương trình đại số tuyến tính thoả mãn điều kiện này và giải hệ đó ta tìm được các ẩn, từ đó xác định các đại lượng còn lại.

Hệ cơ bản trong phương pháp chuyển vị .là duy nhất và giới hạn giải các bài toán phụ thuộc vào số các phần tử mẫu có sẵn.

3.1.3. Phương pháp hỗn hợp và phương pháp liên hợp

Phương pháp hỗn hợp là sự kết hợp giữa phương pháp lực và phương pháp chuyển vị, trong đó ta *loại bỏ* các liên kết và chọn các lực làm ẩn trên các bộ phận thích hợp với phương pháp lực; *đặt thêm* các liên kết ngăn cản chuyển vị các nút và chọn chuyển vị các nút đó làm ẩn tiên những bô phận thích hợp với phương pháp chuyển vị. Khi đó diều kiện bổ sung bao gồm: chuyển vị theo phương của các liên kết bị loại bỏ, các chuyển vị cưỡng bức và do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản bằng không; phản lực trong các liên kết đặt thêm vào các hệ do các lực, các chuyển vị cưỡng bức và do tải uọng gây ra trong hô cơ bản bằng khổng. Việc thiết lạp theo các điều kiện bổ Ming và giải hệ phương trình cho ta kết quả cần tìm.

Khác với phương pháp hỗn hợp, phương pháp liên hợp là sự *phối hợp song song* phương pháp lực và phương pháp chuyển vị. Trong phương pháp này ta có thể chọn hệ cơ bản theo phương pháp lực nhưng không loại bỏ hết các liên kết thừa mà cnĩ loại bỏ các liên kết thuộc bộ phận thích hợp với phương pháp lực; hoặc chọn hê cơ bản theo phương pháp chuyển vị nhưng không đặt đầy đủ các liên kết phụ nhằm ngăn cản tất cả các chuyển vị nút mà chỉ đặt liên kết phụ tại các nút thuộc bộ phận thích hợp với phương pháp chuyển vị. Trường hợp đầu hê cơ bản là siêu tĩnh, còn trường hợp sau hộ cơ bản là siêu động.

Trong cả hai cách nói trên, bài toán ban đầu được đưa về hai bài toán độc lập: một theo phương pháp lực và một theo phương pháp chuyển vị.

3.1.4. Phương pháp phần tử hữu hạn

Thực chất của phương pháp phần tử hữu hạn là *rời rạc hoá* bản thân kết cấu (chia kết cấu thành một số phần tử có kích thước hữu hạn). Các phần tử liền kề liên hệ với nhau bằng các phương trình cân bằng và các phương trình liên tục.

Để giải quyết bài toán cơ học kết cấu, có thể tiếp cận phương pháp này bằng đường lối trực tiếp tức - suy diễn vật lý - hoặc đường lối toán học - suy diễn biến phân. Tuy nhiên bằng cách nào đi chăng nữa thì kết quả thu được là một ma trận (độ cứng hoăc độ mềm). Ma trận đó được xây dựng dựa trên cơ sở cực trị hoá phiếm hàm biểu diễn năng lượng.

Trong phạm vi mỗi phần tử riêng biệt, các hàm chuyển vị được xấp xỉ gần đúng theo một dạng nào đấy, thông thường là các đa thức.

3.1.5. Phương pháp sai phần hữu hạn

Phương pháp sai phân hữu hạn cũng là thay thế hệ liên tục bằng *mô hình rời rạc,* song hàm cần tìm (hàm mang đến cho phiếm hàm giá trị dừng) nhận những giá trị gần đúng tại một số hữu hạn điểm của miền tích phân, còn giá trị các điểm trung gian sẽ được xác định nhờ một phương pháp tích phân nào đó.

Phương pháp này cho lời giải số của phương trình vi phân về chuyển vi và nội lực tại các điểm nút. Thông thường ta phải thay đạo hàm bằng các sai phân của hàm tại các nút.

Phương trình vi phân của chuyển vị hoặc nội lực được viết dưới dạng sai phân tại mỗi nút, biểu thị quan hệ của chuyển vị tại một nút và các nút lân cận dưới tác dụng của ngoại lực.

3.1.6. Phương pháp hỗn hợp sai phản - biến phân

Kết hợp phương pháp sai phân với phương pháp biến phân ta có một phương pháp linh động hơn: hoặc là sai phân các đạo hàm trong phương trình biến phân hoặc là sai phân theo một phương và biến phân theo một phuơng khác (đối với bài toán hai chiều).

3.1.7. Nhận xét

Tất cả các phương pháp kể trên suy cho cùng đều xuất phát từ nguyên lý Lagrange (hay D'Alembert - Lagrange). Việc áp dụng nguyên lý cho thấy có mối *tương quan đối ngẫu* giữa lực và chuyển vị: để tìm điều kiện dừng, nếu lấy biến phân phiếm hàm biểu diễn năng lượng đối với các thành phần *chuyển vị* ta nhận được các phương trình *cân bằng* còn nếu lấy biến phân phiếm hàm đó đối với các thành phần *lực* ta được các phương trình *biến dạng.*

3.2. Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss để giải các bài toán cơ học vật rắn biến dạng

GS. TSKH. Hà Huy Cương [39] là người đề xuất phương pháp sử dụng nguyên lý Gauss để giải các bài toán cơ học vật rắn biến dạng.

Với đối tượng nghiên cứu là hệ chất điểm, nguyên lý Gauss động chạm đến ba khái niệm cơ bản: *liên kết, chuyển đông* và *khối lượng.* Nếu ta tìm cách áp dụng nguyên lý cho vật rắn biến dạng, thì đối tượng khảo sát là tập hợp các mặt cắt và các khái niêm trên sẽ được hiểu như sau:

- *Liên kết* có thể là liên kết ngoài hoặc liên kết trong. Liên kết ngoài là tác động tương hỗ giữa đối tượng đang xét và hệ khác. Liên kết trong là tác động tương hỗ giữa các mặt cắt. Trong cơ học vật rắn biến dạng, các liên kết trong được thể hiện qua các phương trình cân bằng, các phương trình liên tục của biến dạng, các quan hệ của ứng suất và biến dạng của lý thuyết đàn hồi, lý thuyết dẻo, lý thuyết từ biến dạng, các quan hệ của ứng suất và biến dạng của lý thuyết đàn hồi, lý thuyết dẻo, lý thuyết từ biến.
- *Chuyển động* ở vật rắn biến dạng phận của vật thể; ta có thể hiểu đó là các biểu hiện của biến dạng: đường (mặt) đàn hồi đường (mặt) trượt...
- *Khối lượng* là yếu tố ngăn cản sự thay đổi chuyển động của chất điểm. Đối với vật rắn biến dạng, yếu tố này được hiểu là độ cứng mặt cắt kéo (nén), cắt, uốn hay xoắn, ... tuỳ theo việc đang xét nội lực (hay biến dạng) nào.

3.3. Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss đối với các bài toán cơ học kết cấu

3.3.1. Bài toán dầm chịu uốn thuần tuý

Giả sử, $y = y(x)$ là đường đàn hồi (chưa biết) của một dồm chịu uốn thuần túy, thoả mãn những điều kiện liên kết cho trước.

Mômen uốn tại mặt cắt X của dầm là:

$$M = -D\frac{d^2y}{dx^2} \tag{3.1}$$

lực tác dụng, độ cứng mặt cắt D = EJ của dầm khi uốn như là khối lượng, còn đạo hàm cấp hai của độ võng (d^2y/dx^2) như là *"gia tốc"* chuyển động của dầm.

Như vậy nguyên lý Gauss sẽ được áp dụng cho dầm nếu ta thay:

- các lực bởi các mômen,
- các khối lượng bởi các độ cứng mặt cắt và
- gia tốc bởi các đạo hàm cấp hai của đường đàn hồi.

Bây giờ, ta chọn một dầm nào đó làm *dầm so sánh*, có thể chịu liên kết khác nhưng phải giống dầm dã cho về *độ cứng mặt* và *về tải trọng*. Lúc đó *"gia tốc"* chuyển động của dầm so sánh sẽ là *(d^2y_0/dx^2)*, với y_0 là độ võng của dầm so sánh.

Theo nguyên lý cưỡng bức nhỏ nhất, chuyển động của dầm đã cho sẽ rất gần với dầm so sánh, nếu lượng cưỡng bức sau đây đạt cực tiểu:

$$Z = \int_0^1 D\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2y_0}{dx^2}\right)dx \qquad (3.2)$$

hay $Z = \int_0^1 \frac{1}{D}(M_x - M_x^0)^2 dx$ (3.3)

Trong đó M_x là mômen của dầm đang xét (phải thoả mãn các điều kiện biên động học cho trước; M_x^0 là mômen của dầm so sánh; D = EJ_x là độ cứng của mặt cắt về uốn chung cho cả hai dầm.

Khi hộ so sánh không có liên kết:

$$Z = \int_0^1 \left\{ D\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 2qy \right. \mathrm{dx} \qquad (3.4)$$

Trong biểu thức (3.4) vắng mặt các đạo hàm cấp hai của y_0 đối với toạ độ x nhưng có thêm số hạng *(-2qy)* là lượng cưỡng bức của đoạn dầm *dx* chịu lực phân bố đều, khi phân tố được tự do thì chuyển vị của nó sẽ là y_0 -» ∞. Độ cứng của dầm lúc này là:

$$C = \frac{qdx}{y_o dx} = \frac{q}{y_o}$$

Biểu thức lượng cưỡng bức của đoạn dầm lúc này là:

$$Z_{dx} = C(y - y_0)^2 = \left(y^2 - 2yy_o + y_0^2\right)\frac{q}{y_0} = q\left(\frac{y^2}{y_0} - 2y + y_0\right)$$

Vì $y_0 \to \infty$ nên:

$$Z_{dx} = q(-2 + y_0)$$

Ta sẽ cực tiểu hoá lượng cưỡng bức z_{dx} nên để cho tiện ngay từ bây giờ ta có thể coi:

$$Z_{dx} = -2qy$$

Trường hợp trên dầm có lực tập p trung thì $Z_{dx} = -2Py$, và khi có mô men tập trung M thì $\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{dx}}$ = - $2M\varphi$ trong đó φ là góc xay tại tiết diện có mômen tập trung, với giả thiết chuyển vị bé ta có tg$\varphi \approx \varphi = y'$

3.3.2. Bài toán hệ dầm hoặc hệ thanh

Trường hợp tổng quát của dầm phẳng, chuyển vị trong trường hợp uốn là độ võng, trường hợp cắt là sự trượt và kéo (hay nén) là sự dãn dài (hay co ngắn). Độ cứng của mặt cắt dầm trong các trường hợp này được đặc trưng bởi các đại lượng EJ, GF và EF tương ứng. Khi đó, tương tự như trong công thức (3.3) có kể đến tính chất độc lập tác dụng của các mômen uốn, lực cắt và lực dọc ta có biểu thức lượng cưỡng bức tính toán cho hệ dầm tổng quát như sau:

$$Z = \int_0^1 \left[\frac{1}{Ef_x}(M_x - M_x^0)^2 + \frac{1}{GF}(Q_y - Q_y^0)^2 + \frac{1}{\mathrm{EF}}(N_Z - N_Z^0)^2 \right] dx$$

Trong đó M, Q, N là các thành phần nội lực của dầm đang xét (phải thoả mãn các điều kiện biên động học cho trước); các thành phần ký hiệu với chỉ số “0” là của dầm so sánh; EJ_x, GF và EF là độ cứng của mặt cắt về uốn, cắt và kéo - nén (chung cho cả hai dầm).

Khi tải trọng vuông góc với trục thanh thì biểu thức lượng cưỡng bức:

$$Z = \int_0^1 \left[\frac{1}{Ef_x}(M_x - M_x^0)^2 + \frac{1}{GF}(Q_y - Q_y^0)^2 \right] dx$$

Đối với hệ khung phẳng (hay không gian) các thành phần nội lực gồm có mômen uốn, lực cắt và lực dọc nên biểu thức lượng cưỡng bức trong trường hợp tổng quát là công thức (3.6). Khi bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt và lực dọc ta có công thức (3.2) hoặc (3.3).

3.3.3. Bài toán dàn

Hệ dàn được xem như là hệ gồm các thanh thẳng liên kết với nhau tại các điểm nút, sao cho các thanh quy tụ vào một nút nào đó thì có trục đồng quy lại một điểm và tải trọng tác dụng lên dàn là các lực tập trung tại nút cũng đi qua điểm này. Các điểm nút được gọi là mắt dàn và là khớp lý tưởng. Nội lực trong các thanh dàn ;chỉ gồm lực dọc trục thanh. Vì vậy trong biểu thức lượng cưỡng bức khi xét cho dàn ta có:

$$Z = \int_0^1 \left[\frac{1}{EF_x} (N_Z - N_Z^0)^2 \right] dx$$

Khi hệ so sánh không có liên kết:

$$Z = \int_0^1 \left[\frac{1}{EF_x} N_Z^2 dx - 2PV \right]$$

trong đó: p - lực tập trung tại nút.

V - chuyển vị theo phương của lực tập trung.

Đại lượng 2PV là lượng cưỡng bức của nút dàn tự do.

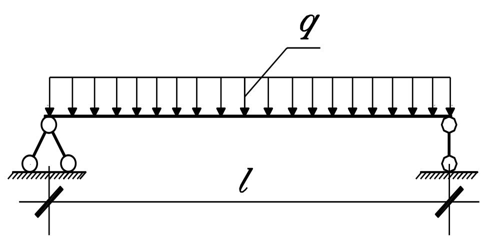
Tóm lại, bằng cách cực tiểu hoá lượng cưỡng bức đối với hệ thanh đang xét so với hệ "so sánh " được chọn, ta luôn có thể biết được giá trị (hay biểu thức) của đại lượng cần tìm ở hệ đã cho.

3.4. Sử dụng nguyên lý cực trị Gauss thành lập phương trình vi phân cân bằng:

Ví dụ: Thiết lập phương trình vi phạm của đường đàn hồi cho lần chịu lực như hình 3.1 biết dầm có tiết diện không đổi, chịu tải trọng phận bố đều.

Lời giải:

Hệ so sánh được chọn là 1 dầm không có liên kết , có độ cứng mặt cắt và chịu tải trong như dầm đang xét. Theo công thức (3.4) biểu thực lượng cưỡng bức của dầm so với dầm được chọn:



Hình 3.1. Dầm đơn giản

$$Z= \int_0^l EJ \left\{ \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 - 2qt \right\} dx$$

trong đó y (x) là phương trình đường đàn hồi của dầm.

Chuyển động thực của dầm sẽ xảy ra với ứng lượng cưỡng bức cực tiểu.

$Z \rightarrow \min$

Hay Z= $\int_0^l EJ\left\{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 2qt\right\}dx \rightarrow \min$ (3.10)

Điều kiện để phiếm hàm (2.10) đạt cực trị:

$$\delta Z = \delta\int_0^l EJ\left\{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 2qy\right\}dx = 0 \quad (3.11)$$

hay 2FJ $\left(\frac{\partial^2 y}{\delta x^2}\right)''x - 2q = 0$ (3.12)

Phương trình (3.12) chính làd phương trình vi phân của đường đàn hồi quen thuộc đã thiết lập được trong sức bền vật liệu (12,tr.149)

trường hợp áp dụng nguyên lý lagrange, ta có năng lượng biến dạng sinh ra khi dầm bị uốn:

$$\text{II} = \int_0^l \frac{M^2}{2EJ}dx = \frac{EJ}{2}\int_0^l y''^2\,dx \quad (3.13)$$

Thế năng của ngoại lực phân bố q:

$$T = -\int_0^l qydx \quad (3.14)$$

Thế năng tổng cộng của hệ:

$$U = \text{II} + T = \frac{EJ}{2}\int_0^1 y''^2dx - \int_0^l qydx$$

Hay

$$U = \left(\frac{EJ}{2}\int_0^1 y''^2 - qy\right)dx \quad (3.15)$$

Phương trình vi phân Eulẻ 1 của phiến hàm (3.15) có dạng:

$\frac{\partial\phi}{\partial u} - \frac{d}{dx} - \frac{\partial\phi}{\partial u} = 0; \frac{\partial\phi}{\partial u} = EJy'';$(3.17)

Thay (3.17) vào (3.16) ta được (3.12)

Kết luận: Như vậy từ phương pháp sử dụng nguyên lý cực trị Gauss ta có thể thành lập được phương trình vi phân của đường đàn hồi giống như việc áp dụng nguyên lý Lagrange.

3.5. Kết luận và nhân xét về phương pháp sử dụng nguyên lý cực trị Gauss

để giải các bài toán cơ học kết cấu.

a) Trong nguyên lý cưỡng bức nhỏ nhất , K , F gauss đã so sánh hệ chất điểm có liên kết với chính hệ đó nhưng không có liên kết. Khi áp dụng nguyên lý Gauss cho vật rắn biến dạng, GS.TSKH Hà Huy Cương đã được sử dụgn " hệ so sánh" laqf một hệ bất kì miễn là có cùng độ cứng cắt và chụi cùng tải trọng như hệ đã cho . áp dụng phương pháp đang xst bài toán luôn được đua về cùng một dạng tiêu chuẩn, do đó cách giải rất đơn giản.

Phương pháp này đã được ứng dụng để giảiquyết có hiệu quả các bài toán liên quan đến môi trường đàn hồi, đàn nhớt , đàn dẻo , thậm chí cả trong lĩnh vực động lực học chất lỏng . Phương pháp được phát huy mạnh mẽ trong việc giải các bài toán tấm bê tông mặt đường ô tô và sân bay, tấm composite công trình ngầm chụi tải trong động và hai bài toán lan truyền sóng trong môi trường đất bất kì …

b) nguyên lý Gauss bao gồm các định luật tổng quát về cân bằng và chuyển đồng nên có thể áp dụng cho cả cả bài toán tĩnh lẫn bài toán động, vì thế phương pháp sử dụng có thể áp dụng cho cả bài tính lấn bài toán động. Vì thế phương pháp sử dụng nguyên lí cực trị Gauss để giảI các bài toán vật rắn biếndạng nói chung và các bài toán cơ học kết nối riêng cũng đáp ứng riêng cho hai lạoi bài toán trên.

c) Trong bài toán rắn biến dạng, nếu lấy biến phân phiếm hàm biểu diễn lượng cưỡng bức đối với các thành phần cơ bản ta luôn có có thể biểu thức của nguyên lí đàn xét về phương cân trình.

d) Các phương pháp lực, chuyển vị, hỗn hợp vfa liên hợp của lực với chuyển vị phần tử hữu hạn sai phân – biến phân suy cho cùng đều xuất pháp từ nguyên lí Lagrange liên kết đến cực trị hoá phiếm hàm biểu diễn năng lượng còn phương pháp sử dụng nguyên lícực trị Gaus lại cực tiểu phioếm hàm biểu diễn lượng cưỡng bức đối với các thành phần cơ bản.

3.6. Tính toán dầm và khung

3.6.1. Các bước thực hiện để giải bài toán kết cấu dầm và khung

Bước 1. Chọn hệ so sánh: đó là hệ có cùng độ cứng mặt cắt và có cùng tải trong với hệ cần tìm nhưng có liên kết bất kỳ mà kết quả tính toán đã biết (bằng cách nào đó).

Bước 2. Giả thiết đường độ võng của dầm cần tìm: đường độ võng có thể có đa dạng thức hoặc chuỗi lượng giác đơn (Fourier).

Dạng đa thức: $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + ...$ (3.1)

Dạng chuỗi lượng giác đơn:

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} A_k \sin \frac{n\prod x}{a} \quad (3.2)$$

Bước 3. Viết biểu thức lượng cưỡng bức của dầm, đó là biểu thức (3.2),(3.3) hoặc (3.4).

Bước 4. Viết các điều kiện biên về động học thể hiện sai khác giữa hệ cần tìm với hệ so sánh. Các điều kiện biên này chính là ràng buộc. Đối với các bài toán cơ học kết cấu và sức bền vật liệu ràng buộc ở dạng đẳng thức, với các bài toán khác (ví dụ trong môi trường đàn hồi) ở dạng bất đẳng thức.

Bước 5. Cực tiểu hoá biểu thức lượng cưỡng bức, bài toán trở thành bài toán cực trị có ràng buộc. Phương pháp thông dụng nhất để giải là dùng thừa số Langrange dẫn về bài toán cực trị không có ràng buộc.

Phiếm hàm có chứa véctơ các nhân tử Langrange (các ràng buộc) được gọi. là phiếm hàm mở rộng

Trong luận văn này, tác giả dùng phần mềm Matlab làm công cụ hỗ trợ tính toán.

3.6.2. Các ví dụ tính toán dầm

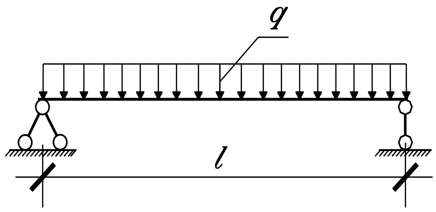
3.6.2.1. Tính toán dầm một nhịp

Ví dụ 1: Dầm đơn giản

Xác định đường đàn hồi của dầm chịu tải trọng phân bố đều như hình 3.1

Lời giải

a) Chọn đường đàn hồi dạng đa thức (3.1)



Hình 3.1. Dầm đơn giản

$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$

Trong đó: a_i - các hệ số cần xác định.

Hệ so sánh giống dầm đang xét nhưng không có liên kết.

Biểu thức lượng cưỡng bức viết cho dầm khi không kể đến ảnh hưởng của lực cắt:

$$Z = \int_0^1 \frac{1}{EJ}\left(\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 2qy\right)dx$$

Dầm đang xét khác với dầm so sánh ở chỗ nó có các liên kết tại các đầu mút dầm. Tại đầu có gối cố định và đầu phải có gối di động, do đó, độ võng tại hai đầu thanh phải bằng không, từ đó có các điều kiện ràng buộc:

$$y_{|x=0} \to g_1 = a_0 = 0$$

$$y_{|x=l} \to g_2 = a_1l + a_2l^2 + a_3l^3 + a_4l^4 = 0 \qquad (3.3)$$

Các điều kiện (3.3) cũng nhằm để (3.1) thoả mãn các điều kiện biên.

Chuyển động thực của dầm sẽ xảy ra ứng với lượng cưỡng bức cực tiểu:

$$Z = \int_0^1 EJ\left\{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 2qy-\right\}dx \to \min$$

Như vậy, đây là trường hợp tìm cực trị của một hàm với n ($n = \overline{1,2}$) điều kiện ràng buộc. Dùng phương pháp thừa số Langrange ta có thể dẫn bài toán cực trị có ràng buộc về bài toán cực trị không có ràng buộc với phiếm hàm mở rộng như sau:

$$Z = \int_0^1 \frac{1}{EJ}\left(\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 2qy\right)dx + \sum_{i=1\lambda}^{n} \lambda_i . g_i \to \min; \qquad (3.4)$$

hay

$$Z = \frac{l^5}{5}\left(144EJ_4^2 - 2qa_4\right) + \frac{l^4}{4}\left(144EJa_3a_4 - 2qa_3\right)$$

$$+\frac{l^3}{3}\left(48EJa_2a_4+36EJa_3^2-2qa_2\right)+\frac{l^2}{2}\left(24EJa_2a_3-2qa_1\right)+$$

$$+4EJa_2^2l-2a_0ql+\lambda_1a_0+\lambda_2\left(a_1l+a_2l^2+a_3l^3+a_4l^4\right)\rightarrow \min$$

trong đó λ_i - các nhân tử Langrange, là những đại lượng chưa biết.

điều kiện cực trị của phiếm hàm (3.5)là:

$$\frac{\partial Z}{\partial a_i}=0;\frac{\partial Z}{\partial \lambda_j}=0; \qquad (i=\overline{0,4};\quad j=\overline{1,2};);$$

Chúng dẫn đến hệ 7 phương trình tuyến tính xác định 7 hệ số chưa biết (trong đó có 2 hệ số là nhân tử Langrange), giải ra ta có $a_0=0;a_1=\frac{1}{24\text{EJ}}ql^3;$

$$a_2=0;a_3=\frac{-1}{12EJ}ql;a_4=\frac{1}{24\text{EJ}}q;$$

Từ đó có phương trình đường đàn hồi của dầm cầm tìm là:

$$y=\frac{ql^3}{24EJ}x-\frac{ql}{12EJ}x^3+\frac{q}{24EJ}x^4; \qquad (3.6)$$

Tại $x=l/2$ có ymax $=\frac{5ql^4}{384EJ};$

Đây cũng chính là kết quả của sức bền vật liệu.

b) Chọn đường đàn hồi dạng chuỗi lượng giác đơn (3.2)

$$y=\sum_{i=1}^{\infty}A_k\sin\frac{n\prod x}{a};$$

trong đó A_k,n là các hệ số cần xác định.

Dễ dàng thấy rằng nghiệm (3.2) thoả mãn các điều kiện biên.

Để đơn giảm, ta chỉ xét với k=1, đường đàn hồi có dạng:

$$y=A\sin\frac{n\prod x}{a}; \qquad (3.7)$$

Chọn hệ so sánh như trường hợp a, ta có điều kiện ràng buộc:

$$y_{|x=l}=0\rightarrow g_1=\text{A}\sin(n\prod)=0;$$

Thay vào (3.4) có:

$$\text{Z}=\frac{a}{2l^3nII}(an^5\prod^5EJ\text{ - }an^4\prod^4EJ\cos(n\prod)\sin(n\prod)+4ql^4\cos n\prod)-4ql^4$$

$+\lambda_1 a\sin(n\prod)\rightarrow \min$

Điều kiện cực trị của phiếm hàm (3.8) dẫn đến hệ hai phương trình tuyến tính xác định a và n, giải hệ tìm được; $a=\frac{ql^4}{\prod^5 EJ};n=1$

Thay kết quả đó vào (3.7)có:

$$y=\frac{ql^4}{\prod^5 EJ}\sin\frac{nx}{l}; \qquad (3.9)$$

So sánh (3.6) với (3.9) cho thấy sự chênh lệch độ võng khi sử dụng hai dạng đường đàn hồi (3.1) và (3.2) là không đáng kể. Cụ thể trong bảng 1 tác giả tính giá trị độ võng tại các điểm trên dầm trong hai trường hợp a và b thu được sai khác lớn nhất là 0,8456%(xem bảng1). Vì vậy, có thể chọn đường đàn hồi dạng đa thức để tính tính toán.

Bảng 1: Bảng so sánh độ võng trong hai trường hợp: đường đàn hồi dạng đa thức và đàn hồi dạng chuỗi lượng giác đơn (Fourier)

Tỉ số $\frac{x}{l}$	y_x khi đường đàn hồi dạng đa thức	y_x khi đường đàn hồi dạng chuỗi lượng giác đơn (Fourier)	Chênh lệch độ võng
$\frac{1}{2}$	$\frac{5ql^4}{384EJ}$	$\frac{4ql^4}{II^5EJ}$	0,3824
$\frac{1}{3}$	$\frac{11ql^4}{972EJ}$	$\frac{2\sqrt{3ql^4}}{II^5EJ}$	0,0264
$\frac{1}{4}$	$\frac{19ql^4}{2048EJ}$	$\frac{2\sqrt{2ql^4}}{II^5EJ}$	-0,3756
$\frac{1}{5}$	$\frac{29ql^4}{3750EJ}$	$\frac{4ql^4}{II^5EJ}\sin\frac{II}{5}$	-0,6555
$\frac{1}{6}$	$\frac{205ql^4}{31104EJ}$	$\frac{2ql^4}{II^5EJ}$	-0,8446
$\frac{2}{3}$	$\frac{11ql^4}{8972EJ}$	$\frac{2\sqrt{3ql^4}}{II^5EJ}$	0,0264
$\frac{2}{5}$	$\frac{31ql^4}{2500EJ}$	$\frac{4ql^4}{II^5EJ}\sin\frac{2II}{5}$	0,2519
$\frac{3}{5}$	$\frac{31ql^4}{2500EJ}$	$\frac{4ql^4}{II^5EJ}\sin\frac{3II}{5}$	0,2519

Ví dụ 2: Dầm đầu khớp đầu ngàm

Xác định đường đàn hồi của chịu trọng phân bố như hình 3.2.

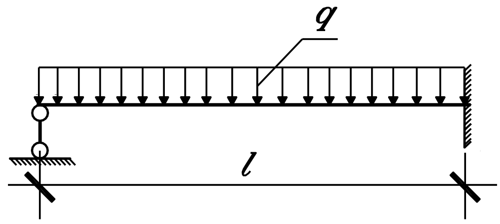
Lời giải:

Chọn đường đàn hồi:

$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$

trong đó a_i - các hệ số cần xácđịnh:

Ta coi các hệ sau là hệ so sánh.



Hình 3.2. Dầm đầu khớp đầu ngàm

a) Dàm không có liên kết

Không kể đến lực, biểu thức lượng cưỡng bức theo (3.4)

$$Z=\int_0^l D\left\{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2-2qy\right\}dx;$$

Sự khác biệt giữa dầm đang xét và dầm so sánh là các liên kết tạihi đầu mút dầm . Trái có gối di động và đầu phải có ngàm cứng , do đó, độ võng tại hai đầu thanh và góc xoay tại đầu phải bằng không, từ đó có các điều kiện ràng buộc:

$y\ |x=0 = 0 \rightarrow g_1 = a_0 = 0$

$y\ |x=0 = 0 \rightarrow g_2 = a_1l + a_2l_2 + a_3l^3 + a_4l^4 = 0$

$y\ |x=0 = 0 \rightarrow g_2 = a_1l + a_2l_2 + a_3l^3 + a_4l^4 = 0$

Chuyển động thực của dầm xảy ra khi lượng cưỡng bức cực tiểu:

$Z \rightarrow \min$

dùng phương pháp thừa số Lagrange đưa về toán cực trị không có ràng buộc với phiếm hàm mở rộng như (3.11):

$$Z=\frac{l^5}{5}(144EJa_4^2-2qa_4)+\frac{l^4}{4}(144EJa_3a_4-2qa_3)+$$

$$+\ \frac{l^5}{3}(48EJa_2a_4+36EJa_3^2-2qa_2)+\frac{l^2}{2}(24EJa_2a_3-2qa_1)+ \qquad (3.11)$$

$$+\ (4EJ\,a_2^2l-2a_0ql+\lambda_1a_0+\lambda_2(a_1l+a_2l^2+a_3l^3+a_4l^4)+$$

$$+\ \lambda_3(a_1+2.a_2l+3a_3l^2+4a_4l^3 \qquad \rightarrow \min$$

Điều kiện cực trị của phiếm hàm (3.11) sẽ là:

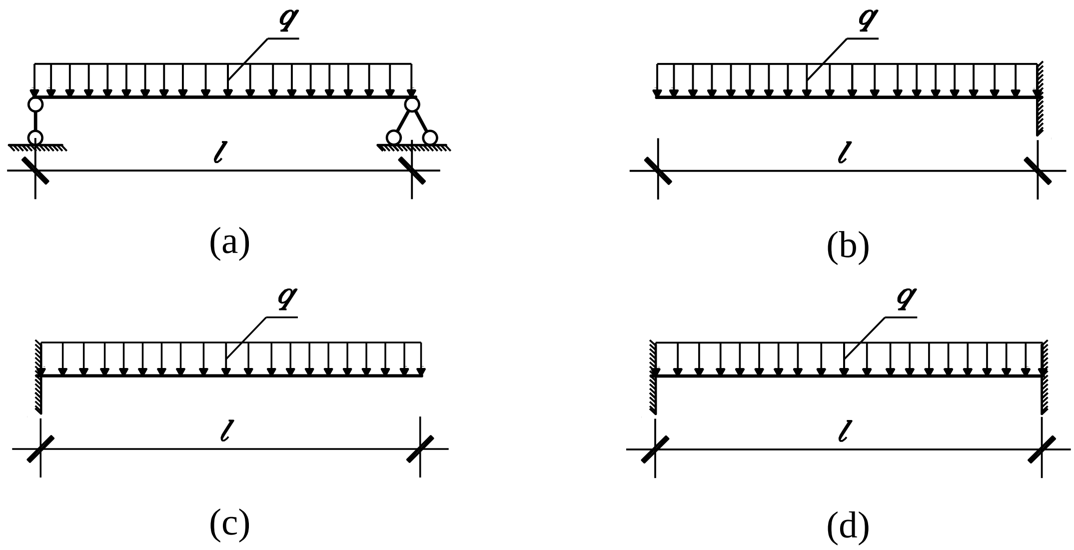
$$\frac{\partial Z}{\partial a_i}=0;\ \frac{\partial Z}{\partial \lambda_j}=0; \qquad (i=\overline{0,4};\ j=\overline{1,3});$$

Từ đó có hệ 8 phương trình tính, giải ra ta có $a_0 = 0$; $a_1 = \frac{1}{48EJ}ql^3$; $a_2 = 0$;

$a_3 = \frac{-1}{16EJ}ql; a_4 = \frac{1}{24EJ}q$; Thay vào (3.1) được phương trình đường đàn hồi của dầm cần tính là:

$$y = \frac{ql^3}{48EJ}x - \frac{ql}{16EJ}x^3 + \frac{q}{24EJ}x^4 \qquad (3.12)$$

b) Dầm đơn giản (Hình 3.3a)



Hình 3.3 - Các hệ so sánh

Mômen uốn của dầm xác định theo công thức:

$$M_0 = \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2 \qquad (3.13)$$

Biểu thức lượng cưỡng bức viết cho dầm theo (2.3)

$$Z = \int_0^1 \frac{1}{EJ}(M_x - M_x^0)^2 dx;$$

Hay $Z = \int_0^1 \frac{1}{EJ}(-EJy'' - M_x^0)^2 \to \min$ (3.14)

Thay (3.1) và (3.13) vào (3.14) ta có:

$$Z = \int_0^1 EJ(-2a_2 - 6a_3x - 12a_4x^2 - \frac{ql}{2EJ}x + \frac{q}{2EJ}x^2)^2 dx \to \min \qquad (3.15)$$

Dầm đang xét khác với hệ so sánh ở chỗ đầu mút phải của nó bị ngàm cứng tại mút này độ võng góc xoay của dầm bằng không, từ đó có các điều kiện ràng buộc là:

$$y_{|x=l}=0\rightarrow g_1=a_1l+a_2l^2+a_3l^3+a_4l^4=0;$$

$$y_{|x=l}=0\rightarrow g_2=a_1+2.a_2l^2+3.a_3l^2+4.a_4l^3=0; \qquad (3.16)$$

Điều kiện biên tại đầu trái của hai dầm như nhau, vì thế tính toán có thể không kể đến các điều kiện biên đó (ở đây trong biểu thức đường đàn hồi (3.1) ta dễ dàng có được a_0=0).

Phiếm hàm mở rộng có dạng:

$$\left.\begin{aligned}Z=\int_0^1 EJ(-2a_2-6a_3x-12a_4x^2-\frac{ql}{2EJ}x+\frac{q}{2EJ}x^2)^2dx+\lambda_1a_0+\\+\ \lambda_2(a_1l+a_2l^2+a_3l^3+a_4l^4)+\lambda_2(a_1+2.a_2l+3a_3l^2+4a_4l^3)\rightarrow\min\end{aligned}\right\}$$

Điều kiện cực trị của phiếm hàm (3.17) cho hệ 8 phương trình tuyến tính, thay kết quả giải hệ phương trình vào (3.1) được phương trình đường đàn hồi của dầm cần tìm như (3.12)

c) Dầm consol (Hình 3.3b)

Trường hợp này dầm đã cho khác với hệ so sánh của nó là ở chỗ: đầu trái không có độ võng và mômen uốn. Để tiện tính toán ta đặt gốc toạ độ tại đầu phải của dầm. Khi đó mômen uốn của hệ cơ bản xác định bằng công thức:

$$M_0=-\frac{q}{2}(l-x)^2; \qquad (3.18)$$

Điều kiện biên của đầu trái của dầm so với hệ cơ bản:

$$y_{|x=l}=0\rightarrow g_1=a_0+a_1l+a_2l^2+a_3l^3+a_4l^4=0;$$

Điều kiện biên tại đầu trái của hai dầm là như nhau, vì thế trong tính toán không kể đến các điều kiện biên đó, ta có biểu thức lượng cưỡng bức của dầm theo (2.3):

$$Z=\int_0^1 EJ(-2a_2-6a_3x-12a_4x^2+\frac{q}{2EJ(l-x)^2})^2dx\rightarrow\min; \qquad (3.19)$$

Phiếm hàm mở rộng có dạng:

$$Z=\int_0^1 EJ(-2a_2-6a_3x-12a_4x^2+\frac{q}{2EJ}(l-x)^2\ )^2dx$$

$$+\ \lambda\ (a_0 + a_1 l + a_2 l^2 + a_3 l^3 + a_4 l^4) \rightarrow \min$$

Giải bài toán trên ta có phương trình đàn hồi:

$$y = \frac{ql^2}{16EJ}x^2 - \frac{5ql}{48EJ}x^3 + \frac{q}{24EJ}x^4; \qquad (3.21)$$

Trong phương trình (3.21) lưu ý là gốc toạ độ lấy tại bên phải dầm, kết quả tại các toạ độ cụ thể trùng với kết quả ở' (3.12).

d) Dầm consol (hình 3.3c) và dầm hai đầu ngàm (hình 3.3d)

Thực hiện tương tự ta có kết quả cần tìm như (3.12).

Nhận xét:

a) Với những hệ so sánh khác nhau, phương pháp đề xuất cho cùng một kết quả.

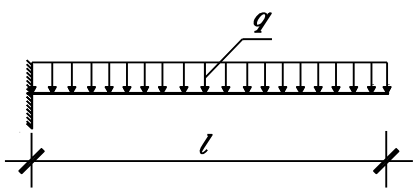
b) Bằng phương pháp sử dụng nguyên lý Gauss, có thể dễ dàng tìm đựoc lời giải của một bài toán trôn cơ sở so sánh với lời giải có sẵn của một bài toán khác.

c) Đại lượng so sánh có thể là biến dạng hoặc nội lực, nhưng dù là đại lượng nào thì ta cũng di đến cùng một kết quả.

Ví dụ 3: Dầm đầu ngàm đầu tự do

Tính toán dầm chịu uốn ngang phẳng trong hai trường hợp: không kể và có kể đến ảnh hưởng của lực cắt đối với độ võng của dầm.

Bài toán: Xác định đường đàn hồi của dầm đầu ngàm đầu tự do chịu tải trọng phân bố đều như hình 3.4.



Hình 3.4. Dầm đầu ngàm đầu tự do

Lời giải:

Chọn biểu thức đường đàn hồi có dạng (3.1)

$y = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$

Điều kiện biên viết cho dầm:

$$y_{|x=0} = 0 \rightarrow g_1 = a_0 = 0;\ y'_{|x=0} = 0 \rightarrow g_2 = a_1 = 0; \qquad (3.22)$$

Hệ so sánh là dầm có cùng độ cứng và tải trọng nhưng không có liên kết. Khi không kể đến lực cắt biểu thức lượng cưỡng bức có dạng (2.4):

$$Z = \int_0^1 \left(D\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - 2qy \right)^2 dx;$$

Hay $Z = \int_0^1 \left[EI.(2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2)^2 - 2q(a_2x^3 + 2a_3x^3 + a_4x^4) \right] dx$ (3.23)

Từ điều kiện Z -> min ta có:

Giải hệ phương trình này được: $a_2 = \frac{1}{4EJ}ql^2; a_3 = \frac{-1}{6EJql}; a_4 = \frac{1}{24EJ}q$

Từ đó có phương trình đường đàn hồi của dầm cần tìm:

$$y = \frac{ql^2}{4EJ}x^2 - \frac{ql}{6EJ}x^3 + \frac{q}{24EJ}x^4 \quad (3.24)$$

Tại x = l có $y = \frac{ql^4}{8EJ}, y' = \frac{ql^3}{6EJ};$

Kết quả này trùng với kết quả của sức bền vật liệu.

Bây giờ ta kể đến ảnh hưởng của lực cắt, khi đó biểu thức lượng cưỡng bức :

$$Z = \int_0^1 \left(\frac{1}{EJ}(M)^2 + \frac{1}{GF}(Q)^2 - 2qy \right) dx \quad (3.25)$$

Biểu diễn M,Q lần lượt theo đạo hàm bậc hai và bậc ba của độ võng, sau đó cực tiểu hoá (3.25):

$$Z = \int_0^1 \left[EJ\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \frac{EJ^2}{GF}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - 2qy \right] dx \to \min \quad (3.26)$$

Chọn biểu thức đường đàn hồi dạng (3.1). Từ điều kiện cực tiểu của phiếm hàm (3.26) và các điều kiện biên (3.22) tìm được hệ 3 phương trình xác định hệ số a_i. Giải hệ phương trình tìm được:

$$a_2 = \frac{ql^2(l^4GF^2 + 56l^2EJ.GF + 240EJ^2}{4EJ(l^2GF + 12ql^2EJ)(l^2GF + 60EJ)};$$

$$a_3 = -\frac{ql^3GF(l^2GF^2 + 36EJ)}{6EJ(l^2GF + 12EJ)(l^2GF + 60EJ)};$$

$$a_4 = \frac{ql^2GF}{24EJ(l^2GF + 60EJ)};$$

Thay kết quả vừa tìm được vào (3.1) thu được phương trình đường đàn hồi:

$$y = \frac{(l^4GF^2 + 56l^2EJ.\text{GF} + 240\text{EJ}^2)ql^2}{4\text{EJ}(\text{l}^2GF + 12ql^2\text{EJ}(\text{l}^2GF + 60EJ)} x^2 - \quad (3.27)$$

$$- \frac{GF(l^4GF^2 + 36EJ)\text{ql}^3}{6EJ(\text{l}^2GF + 12EJ)(\text{l}^2GF + 60EJ)} x^3 + \frac{GFql^2}{24EJ(\text{l}^2GF + 60EJ)} x^4$$

So sánh (3.24) với (3.27) nhận thấy mức độ ảnh hưởng của lực cắt đến độ võng giảm khi tỷ số $\frac{\text{Chiều cao tiết diện (h)}}{\text{Nhịp dầm (1)}}$ tăng. Cụ thể, thay $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ trong đó μ là hệ số Poisson và xét trường hợp dầm tiết diện chữ nhật có tỉ số h/l khác nhau ta thu được kết quả trong bảng 2 và bảng 3

Bảng 2: trường hợp vật liệu có hệ số biến dạng ngang (hệ số Poisson) nhỏ

Tỉ số $\frac{h}{l}$	y_{max} **khi không xét ảnh hưởng của lực cắt Q**	y_{max} **khi có xét ảnh hưởng của lực cắt Q**	**Chênh lệch độ võng (%)**
$\frac{1}{20}$	$\frac{ql^4}{8EJ}$	$\frac{301ql^4}{2412EJ}$	0,1658
$\frac{1}{15}$	$\frac{ql^4}{8EJ}$	$\frac{679ql^4}{5448EJ}$	0,2937
$\frac{1}{12}$	$\frac{ql^4}{8EJ}$	$\frac{109ql^4}{876EJ}$	0,4566
$\frac{1}{10}$	$\frac{ql^4}{8EJ}$	$\frac{19ql^4}{153EJ}$	0,6536
$\frac{1}{8}$	$\frac{ql^4}{8EJ}$	$\frac{49ql^4}{396EJ}$	1,0101
$\frac{1}{5}$	$\frac{ql^4}{8EJ}$	$\frac{79ql^4}{648EJ}$	2,4691
$\frac{1}{4}$	$\frac{ql^4}{8EJ}$	$\frac{13ql^4}{108EJ}$	3,7037
$\frac{1}{3}$	$\frac{ql^4}{8EJ}$	$\frac{31ql^4}{264EJ}$	6,0606
$\frac{1}{2}$	$\frac{ql^4}{8EJ}$	$\frac{1ql^4}{9EJ}$	11,1111

Bảng 3: Trường hợp hệ số Poisson lớn $\mu = 0,3$

Tỉ số $\frac{h}{l}$	**y_{max} khi không xét ảnh hưởng của lực cắt Q**	**y_{max} khi có xét ảnh hưởng của lực cắt Q**	**Chênh lệch độ võng (%)**
$\frac{1}{20}$	$\frac{ql^4}{8EJ}$	$\frac{3013ql^4}{24156EJ}$	0,2153
$\frac{1}{15}$	$\frac{ql^4}{8EJ}$	$\frac{3401ql^4}{27312EJ}$	0,3808
$\frac{1}{12}$	$\frac{ql^4}{8EJ}$	$\frac{1093ql^4}{8796EJ}$	0,5912
$\frac{1}{10}$	$\frac{ql^4}{8EJ}$	$\frac{763ql^4}{6156EJ}$	0,8447
$\frac{1}{8}$	$\frac{ql^4}{8EJ}$	$\frac{493ql^4}{3996EJ}$	1,3013
$\frac{1}{5}$	$\frac{ql^4}{8EJ}$	$\frac{401ql^4}{3312EJ}$	3,1401
$\frac{1}{4}$	$\frac{ql^4}{8EJ}$	$\frac{133ql^4}{1116EJ}$	4,6595
$\frac{1}{3}$	$\frac{ql^4}{8EJ}$	$\frac{161ql^4}{1392EJ}$	7,4716
$\frac{1}{2}$	$\frac{ql^4}{8EJ}$	$\frac{43ql^4}{396EJ}$	13,1313

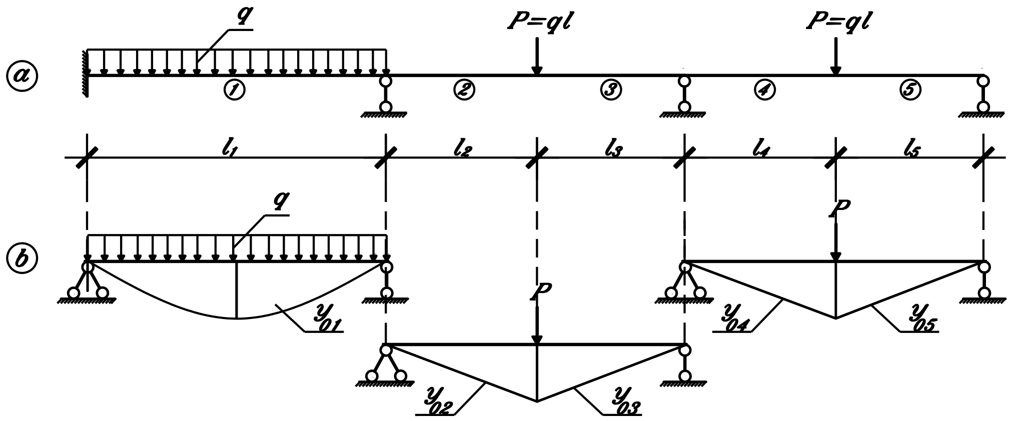
Nhận xét:

a) Phương pháp cho phép kể đến ảnh hưởng của lực cắt đối với độ võng của dầm một cách dễ dàng (chĩ cán đưa thêm vào lượng cưỡng bức biểu thức chứa đạo hàm cấp 3 của độ võng).

b) Trường hợp tỷ số h/1 $\geq \frac{1}{3}$ đối với dầm consol, ảnh hưởng cùa lực cắt đến độ võng dầm là đáng kể (sai khác ít nhất khoảng 6% so với khi không kể đến ảnh hưởng lực cắt)

3.6.2.2. Tính toán dầm liên tục

Xác định đường đàn hồi và vẽ biểu đồ mômen uốn trong dầm ở hình 3.5a.



Hình 3.5. Dầm liên tục ba nhịp

Lời giải:

Chia dầm thành năm đoạn và viết biểu thức đường đàn hồi của các đoạn dưới dạng khai triển Taylor như sau:

$$y_i = a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$
$$y_{II} = b_1x + b_2\quad x^2 + b_3x^3 + b_4x^4$$
$$y_{III} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 \tag{3.28}$$
$$y_{IV} = d_1x + d_2x^2 + d_3x^3 + d_4x^4$$
$$y_v = e_0 + e_1x + e_2x^2 + ex^3 + e_4x^4$$

Dễ dàng thấy rằng nghiệm (3.28) thoả mãn các điều kiện biên.

Hệ so sánh với mỗi đoạn dầm chọn như hình 3.5b, phương trình mômen của chúng lần lượt là:

$$y_{0I} = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2};$$

$$y_{0II} = \frac{P_1l_3}{l_2 + l_3}x;$$

$$y_{0III} = \frac{P_1(l_1l_2 - l_2x)}{l_2 + l_3}$$

$$y_{0IV} = \frac{P_2l_5}{l_4 + l_5}x$$

$$y_{0V} = \frac{P_2(l_4 l_5 - l_4 x)}{l_4 + l_5};$$

Điều kiện biên viết cho dầm đang xét:

$$y_{1|x=l_1} = 0 \to g_1 = a_2 l_1^2 + a_3 l_1^3 + a_4 l_1^4 = 0$$

$$y'_{1|x=l_1} = 0 \to g_2 = 2a_2 l_1 + 3a_3 l_1^3 + 4a_4 l_1^4 = 0$$

$$y_{II|x=l2} = 0 \to g_3 = b_1 l_2 + b_2 l_2^2 + b_3 l_2^3 + b_4 l_2^4 - c_0 = 0$$

$$y'_{II|x=l_2} = 0 \to g_4 = b_1 + 2b_2 l_2^2 + 2b_3 l_2^3 + 4b_4 l_2^4 - c_1 = 0$$

$$y_{III|x=l_3} = 0 \to g_5 = c_0 + c_1 l_3 + c_2 l_3^2 + c_3 l_3^3 + c_4 l_3^4 = 0$$

$$y'_{III|x=l_3} = y'_{IV|x=0} = 0 \to g_6 = c_1 + 2c_2 l_3 + 3c_3 l_3^2 + 4c_4 l_3^3 - d_1 = 0$$

$$y_{IV|x=l_4} = y_{V|x=0} = 0 \to g_7 = d_1 l_4 + d_2 l_2^4 + d_3 l_4^3 + d_4 l_4^4 - e_0 = 0$$

$$y'_{IV|x=l_4} = y'_{V|x=0} = 0 \to g_8 = d_1 + 2d_2 l_4 + 3d_3 l_4 + d_4 l_4^4 - e_0 = 0$$

$$y =_{V|x=5} = 0 \to g_9 = e_0 + e_1 l_5 + e_2 l_5^2 + e_3 l_5^3 + e_4 l_5^4 = 0$$

Biểu thức lượng cưỡng bức viết cho toàn hệ:

$$Z = \sum_{l=1}^{5} \int_0^{l_1} \frac{1}{EJ} (-EJy''_i - y_{0I})^2 dx$$

Hay

$$Z = \int_0^{l_1} \frac{1}{EJ} (-EJy''_I - y_{0I})^2 dx - \int_0^{l_2} \frac{1}{EJ} (-EJy''_{II} - y_{0II})^2 dx +$$

$$\int_0^{l_3} \frac{1}{EJ} (-EJy''_{III} - y_{0III})^2 dx - \int_0^{l_4} \frac{1}{EJ} (-EJy''_{IV} - y_{0IV})^2 dx + \quad (3.32)$$

$$\int_0^{l_5} \frac{1}{EJ} (-EJy''_V - y_{0V})^2 dx \to \min$$

Kết hợp (3.30) và (3.32) có:

$$Z = \int_0^{l_1} \frac{1}{EJ} (-EJy''_I - y_{0I})^2 dx - \int_0^{l_2} \frac{1}{EJ} (-EJy''_{II} - y_{0II})^2 dx +$$

$$\int_0^{l_3} \frac{1}{EJ} (-EJy''_{III} - y_{0III})^2 dx - \int_0^{l_4} \frac{1}{EJ} (-EJy''_{IV} - y_{0IV})^2 dx + \quad (3.33)$$

$$\int_0^{l_5} \frac{1}{EJ}(-EJy''_V - y_{0V})^2 dx + \sum_{j=1}^{9} g_i\lambda_i \to \min$$

Điều kiện cực trị của phiếm hàm (3.33):

$$\frac{\partial Z}{\partial a_i} = 0;\ \frac{\partial Z}{\partial b_i} = 0\ ;\ \frac{\partial Z}{\partial c_i} = 0;\ \frac{\partial Z}{\partial d_i} = 0;\ \frac{\partial Z}{\partial e_i} = 0;\ \frac{\partial Z}{\partial \lambda_i} = 0$$

trong đó: (i=$\overline{0,4}$; j = $\overline{1,9}$)

Từ đó thu được hệ 30 phương trình tuyến tính, giải hệ này được kết quả cần tìm.

Tác giả viết cho trường hợp chiều dài các đoạn dầm khác nhau và chịu tải trọng tập trung khác nhau, kết quả cho khá dài. Trường hợp $P=P_1=P_2$, $l_1=2l_2=2l_3=2l_4=2l_5$ có phương trình đường đàn hồi các đoạn:

$$y_1 = -\frac{11ql^2 - 3Pl}{208EJ}x^2 + \frac{59ql - 9P}{624EJ}x^3 - \frac{1}{24EJ}qx^4;$$

$$y_2 = -\frac{7ql^3 - 9Pl^2}{624EJ}x - \frac{2ql^2 - 3Pl}{104EJ}x^2 + \frac{5(ql + 8P)}{624EJ}x^3;$$

$$y_3 = -\frac{9ql^4 - 32Pl^3}{499EJ} - \frac{59ql^3 - 12Pl^3}{2496EJ}x - \frac{3ql^2 - 28Pl}{416EJ}x^2 + \frac{5ql - 64P}{624EJ}x^3;$$

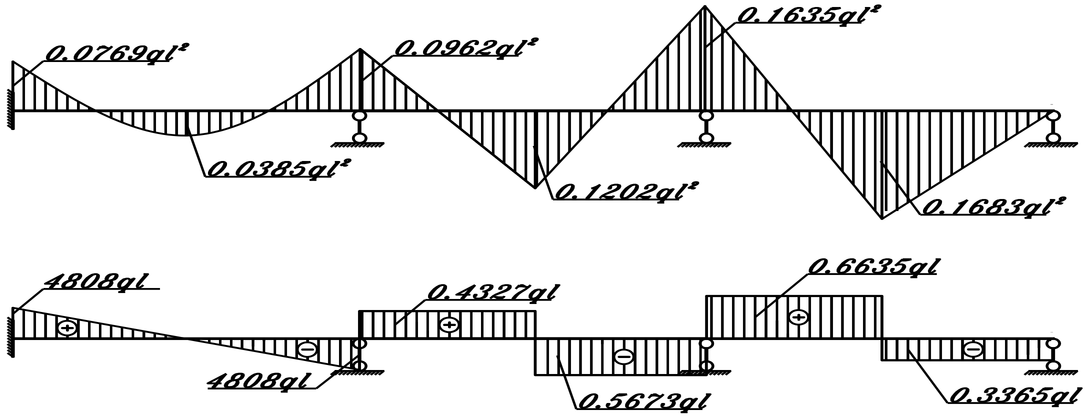
$$y_4 = -\frac{2ql^3 + 3Pl^3}{624EJ}x - \frac{ql^2 - 18Pl}{208EJ}x^2 - \frac{5(ql - 70P)}{624EJ}x^3;$$

$$y_5 = -\frac{3ql^4 + 50Pl^3}{4992EJ} + \frac{ql^3 - 18Pl^3}{2496EJ}x + \frac{ql^2 + 34Pl}{416EJ}x^2 + \frac{ql + 34P}{624EJ}x^3;$$

và phương trình mômen:

$$\begin{aligned}
M_1 &= \frac{11pl^2 - 3Pl}{104} - \frac{59ql - 9P}{104} + \frac{qx^2}{2} \\
M_2 &= \frac{2pl^2 + 3Pl}{52} - \frac{65ql + 520P}{1352}x \\
M_3 &= \frac{3pl^2 - 28Pl}{208} - \frac{65ql - 832P}{1352}x \\
M_4 &= -\frac{pl^2 + 18Pl}{104} + \frac{ql - 70P}{104}x \\
M_5 &= -\frac{pl^2 + 34Pl}{208} - \frac{ql + 34P}{104}x
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Trường hợp P = ql, biểu đồ mômen của dầm như hình 3.6



Hình 3.6. Biểu đồ M và Q

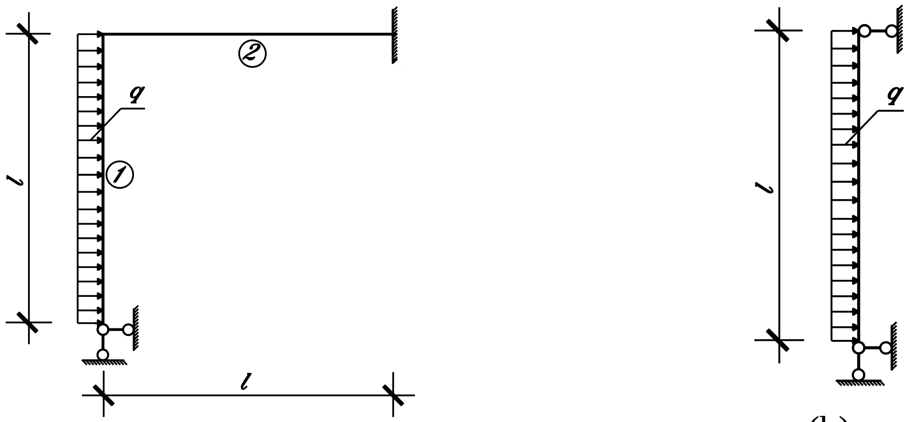
3.6.3. Các ví dụ tính toán khung

Ví dụ 1: Khung siêu tĩnh bậc 2

Xác định đường đàn hồi và vẽ biểu đồ mômen uốn cho khung hình 3.7a.

Lời giải:

Chọn hệ so sánh như trên hình (3.7b), khi đó biểu thức mômen uốn chỉ có trong thanh 1:



Hình 3.7. Khung siêu tĩnh bậc 2

$$M_0 = \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2$$

Lấy gốc toạ độ của thành 1 tại A và thanh 2 tại B, bỏ qua lực dọc trong thanh 1 và 2 (vị trí B không thay đổi) ta viết biểu thức đường đàn hồi cho từng đoạn thanh:

$$y_I = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$
$$y_{II} = b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4$$

Dễ dàng nhận thấy các nghiệm này thoả mãn các điều kiện biên. Trong khung, các nút được xem là tuyệt đối cứng và do đó các góc được bảo toàn. Vì vậy, góc xoay của các thanh quy tụ vào nút B bằng nhau. Tại ngàm C đọ võng và góc bằng không. Điều kiện biên viết cho các thanh như sau:

$$\begin{aligned}
&y_{I\int x=1} = 0 \to g_1 = a_1 l + a_2 l^2 + a_3 l^3 + a_4 l^4 = 0;\\
&y'_{I\int x=1} = y'_{II\int x=0} \to g_2 = a_1 + 2a_2 l + 3a_3 l^2 + 4a_4 l^3 - b_1 = 0;\\
&y_{II\int x=1} = 0 \to g_3 = b_1 l + b_2 l^2 + b_3 l^3 + b_4 l^4 = 0;\\
&y'_{II\int x=1} = 0 \to g_4 = b_1 + 2b_2 l + 3b_3 l^2 + 4b_4 l^2 = 0;
\end{aligned} \qquad (3.36)$$

Biểu thức lượng cưỡng bức của khung:

$$Z = \sum_{I=1}^{2}\int_0^{l_1} \frac{1}{EJ}(M_1 - M_{01})^2 xd; \qquad i = \overline{0,2};$$

Viết biểu thức mômen uốn trong các thanh chưa biết qua đạo hàm cấp 2 của độ võng:

$$Z = \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{EJ}}(-EJy''_1 - M_0)^2 dx + \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{EJ}}(-EJy''_{II})^2 dx \to \min; \qquad (3.37)$$

Cực tiểu hoá (3.37) có kể đến (3.36) ta có phiếm hàm mở rộng:

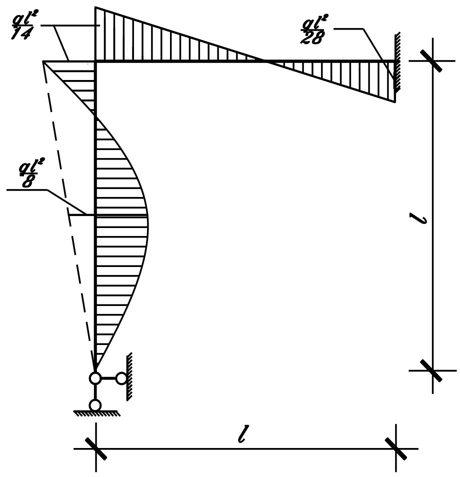
$$Z = \int_0^1 \frac{1}{EJ}(-EJy''_l - M_0)^2 dx + \int_0^1 \frac{1}{EJ}(-EJy''_{II})^2 dx + \sum_{j=1}^{4}\lambda_j g_j \to \min; \qquad (3.38)$$

Trong đó: $j = \overline{1,4};$

Điều kiện cực tiểu của (3.38):

$$\frac{\partial Z}{\partial a_1} = 0; \frac{\partial Z}{\partial b_1} = 0; \frac{\partial Z}{a\lambda_j} = 0; (i = \overline{1,4};\ j = \overline{1,4});$$

dẫn đến hệ 12 phương trình tuyến tính 12 ẩn xác định các hệ số chưa biết, giải ra có phương trình đường đàn hồi:



Hình 3.8. Biểu đồ mômen

$$y_I = -\frac{5ql^3}{168EJ}x + \frac{ql}{14EJ}x^3 - \frac{q}{24EJ}x^4;$$
$$y_{II} = \frac{ql^3}{56EJ}x - \frac{ql^2}{28EJ}x^2 + \frac{ql}{56EJ}x^3; \qquad (3.39)$$

Biểu thức mômen uốn

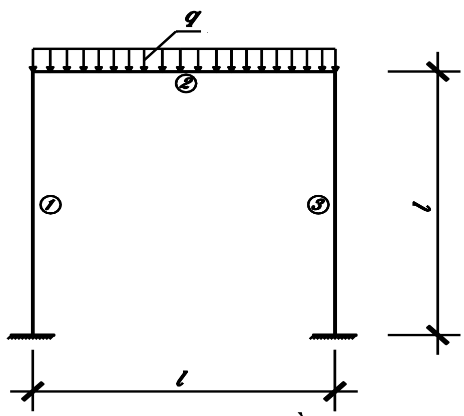
$$M_1 = \frac{3ql}{7}x + \frac{ql}{2}x^2;$$
$$M_2 = \frac{ql^2}{14}x - \frac{3ql}{28}x; \qquad (3.40)$$

Biểu đồ mômen như hình 3.8. Kết quả này trùng với kết quả lời giải theo phương pháp lực [25,tr.18].

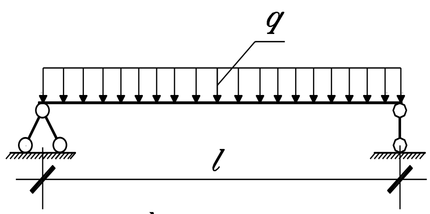
Ví dụ 2: Khung siêu tĩnh bậc 3

Xác định đường đàn hồi và vẽ biểu đồ mômen uốn của khung cho ở hình 3.9.

Lời giải: Chọn hệ so sánh như trên hình 3.9b, khi đó biểu thức mômen uốn chỉ có trong thanh 2:



a. Khung cần tính



b. Dầm so sánh

Hình 3.9. Khung một tầng một nhịp

$$M_0 = \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2; \qquad (3.41)$$

Lấy gốc toạ độ củ thanh 1 tại A, thanh 2 tại B và thanh 3 tại D bỏ qua lực dọc trong các thanh, biểu thức đường đàn hồi cho từng đoạn thanh:

$$y_I = a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$
$$y_{II} = b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4$$
$$y_{III} = c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4$$

Ta nhận thấy một cách dễ dàng các nghiệm này thảo mãn các điều kiên biên. Tại hai nút B, C không có chuyển vị đứng ngang, góc xoay của các thanh quy tụ vào đó bằng nhau. Do đó điều kiện biên viết cho các thanh như sau:

$$\begin{aligned}
&y'_{I\int x=1+} = y'_{II\int x=0} \to g_1 = 2a_2l + 3a_3l^2 + 4b_4l^3 - b_1 = 0\\
&y'_{II\int x=1} = y'_{III\int x=1} \to g_2 = b_1 + 2b_2l + 3b_3l^2 + 4b_4l^3 - 2c_2l - 3c_3l^2 - 4c_4l^3 = 0;\\
&y_{I\int x=1} = 0 \to g_3 = a_2l^2 + a_3l^3 + a_4l^4 = 0;\\
&y_{I\ddot{U}I=1} = 0 \to g_4 = c_2l^2 + c_3l^3 + c_4l^4 = 0;
\end{aligned} \qquad (3.42)$$

Biểu thức lượng cưỡng bức của khung:

$$Z = \sum_{i=1}^{3}\int_0^{l_I}\frac{1}{EJ}(M_1 - M_{01})^2dx; \qquad i = \overline{0,3};$$

Hay:

$$\left.\begin{aligned}
z = &\int_0^1\frac{1}{EJ}(-EJy''_1 - M_o)^2dx + \int_0^1\frac{1}{EJ}(-EJy''_{II})^2dx\\
&+\int_0^1\frac{1}{EJ}(-EJy''_{III})^2dx \to \min
\end{aligned}\right\} \qquad (3.43)$$

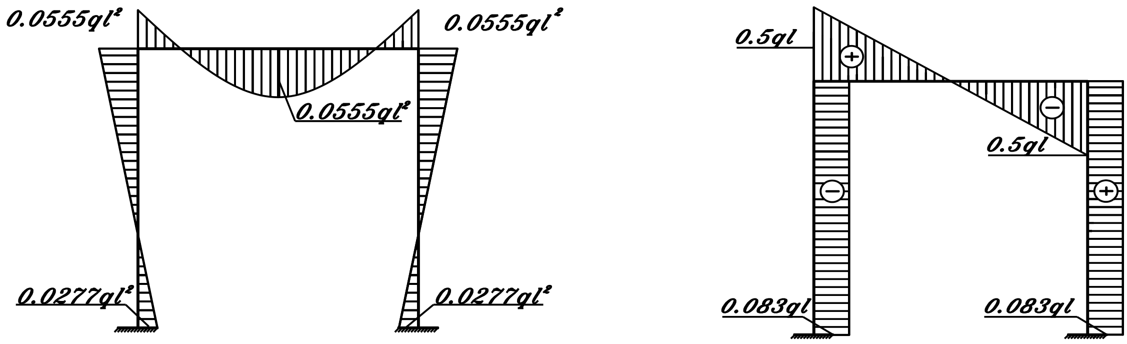
Kết hợp (3.43) với (3.42) được (3.44):

$$\left.\begin{aligned}
Z = &\int_0^1\frac{1}{EJ}(-EJy''_1 - M_0)^2dx + \int_0^1\frac{1}{EJ}(-EJy''_{II})^2\\
&+\int_0^1\frac{1}{EJ}(-EJy''_{III})^2dx + \sum_{j=1}^{4}\lambda_jg_j \to Min
\end{aligned}\right\}; \ j = \overline{1,4}; \qquad (3.44)$$

Các điều kiện cực tiểu của (3.44):

$$\frac{\partial z}{\partial a_1} = 0; \frac{\partial Z}{\partial b_j} = 0; \frac{\partial Z}{\partial c_1} = 0; \frac{\partial Z}{\partial \lambda_1} = 0; (i = \overline{2,4}; \ j = \overline{1,4})$$

Chúng dân đến hệ 14 phương trình tuyến tính 14 ẩn xác định các hế số chưa biết, từ đó có phương trình đường đàn hồi cho các đoạn khung:



a. Biểu đồ M
b. Biểu đồ Q

Hình 3.10. Biểu đồ nội lực khung một tầng một nhịp

$$y_1 = -\frac{ql^2}{72EJ}x^2 + \frac{ql}{72EJ}x^3;$$
$$y_{II} = \frac{ql^3}{72EJ}x + \frac{ql^2}{36EJ}x^2 - \frac{ql}{12EJ}x^3 + \frac{c}{24EJ}x^4; \qquad (3.45)$$
$$y_{III} = \frac{ql^2}{72EJ}x^2 + \frac{ql}{72EJ}x^3;$$

Biểu thức mômen uốn

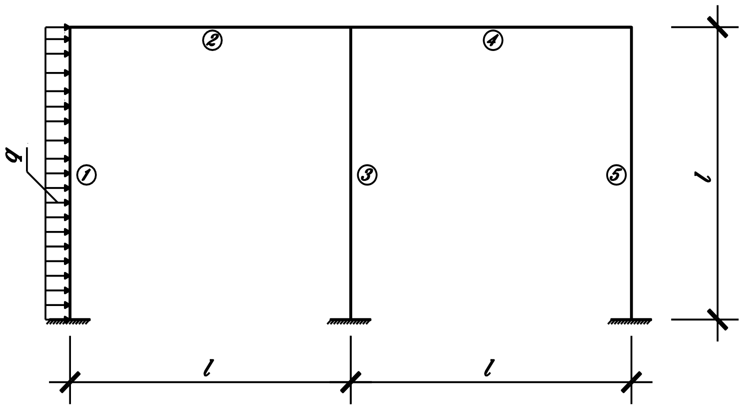
$$M_1 = \frac{ql}{36}s - \frac{ql}{12}x;$$
$$M_{II} = \frac{ql^2}{18} + \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2; \qquad (3.46)$$
$$M_{III} = \frac{ql}{36}x + \frac{ql}{12}x;$$

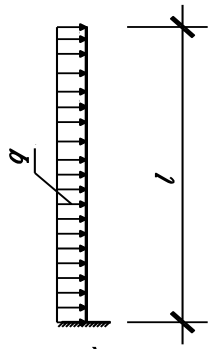
Biểu đồ mômen như hình 3.10.

Ví dụ 3: Khung siêu tĩnh bậc sáu

Xác định đường đàn hồi và vẽ biểu đồ mômen uốn cho khung như hình

3.11a.





b. Dầm so sánh

a. Khung cần tính

Hình 3.11. Khung một tầng hai nhịp

Lời giải:

Chọn hệ so sánh như trên hình 3.11b, khi đó biểu thức mômen uốn chỉ có trong thanh 1:

$$M_0 = -\frac{q}{2}(l-x)^2; \qquad (3.47)$$

Lấy gốc toạ độ tại đầu trái (đối với các thanh ngang) và phía dưới (đối với các thanh đứng), ta có biểu thức đường đàn hồi cho từng đoạn thanh:

$$\begin{aligned}
y_I &= a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \\
y_{II} &= b_{1x} + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 \\
y_{III} &= c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 \\
y_{IV} &= d_1x + d_2x^2 + d_3x^3 + d_4x^4 \\
y_v &= e_2x^2 + e_3x^3 + e_4x^4
\end{aligned} \qquad (3.48)$$

Tương tự như trên, ta nhận thấy các nghiệm này thảo mãm các điều kiện biên. Tại các nút B, C, E không có chuyển vị đứng và ngang, góc xoay của các thanh quy tụ vào đó bằng nhau. Ta viết được điều kiện biên cho các thah như sau:

$$Y^1_{I\backslash x=1} = y^1{}_{I|x=0} \longrightarrow g_1 = 2a_2l + 3a_3l^2 + 4a_4l^3 - b_1 = 0;$$

$$Y^1_{II|x-l} = y^1_{II|x=l} \longrightarrow g_2 = b_1 + 2b_2l + 3b_3l_1 + 4b_4l^3 - 4c_4l^3 = 0$$

$$Y^1_{III|x=1} = y^1_{IV|x=0} \longrightarrow g_3 = 2c_2 + 3c_3l^2 + 4c_4l^3 - d_1 = 0$$

$$Y^1_{IV|x=1} = y^1_{V|x=1} \longrightarrow g_4 = d_1 + 2d_2l + 3d_2l^3 + 2e_2l - 3e_2l^3 = 0$$

$$Y_{I|x=I} = y_{III|x=l} \longrightarrow g_5 = a_2 l^2 + a_3 l^3 + c_4 l^4 - c_2 l^2 - c_3 l^3 - c_4 l^4 = 0$$

$$Y_{III|x=l} = y_{V|x=l} \longrightarrow g_6 = c_2 l^2 + c_3 l^4 - e_2 l^2 - e_4 l^4 = 0$$

$$Y_{II|x=ll} = 0 \longrightarrow g_7 = b_1;+b_2 l^2 + b_3 l^3 + b_4 l^4 = 0$$

$$Y_{IV|x=l} = 0 \longrightarrow g_g = d_1 l + d_2 l^2 + d_3 l^3 + d_4 l^4 = 0$$

Biểu thức lượng cưỡng bức của khung:

$$Z = \sum_{I-1}^{5} \int_0^1 -\frac{1}{EJ}\left(M_1 - M_{01}\right)^2 dx; \qquad i = \overline{0,5;};$$

hay

$$\left.\begin{aligned} Z = & \int_0^1 \frac{1}{EJ}\left(-EJy_{IV}^{11} - M_0\right)^2 dx + \int_0^1 \frac{1}{EJ}\left(-EJ_{II}^{II}\right)^2 dx + \int_0^1 \left(-EJ_{III}^{II}\right)^2 dx + \\ & + \int_0^1 \frac{1}{EJ}\left(-EJl_{IV}^{II}\right)^2 dx + \int_0^1 \frac{1}{EJ}\left(-EJy_{IV}^{II}\right)^2 dx \to \min \end{aligned}\right\} ; (3.50)$$

Cùng với các điều kiện ràng buộc (3.49) ta có phiềm hàm mở rộng:

$$\left.\begin{aligned} Z = & \int_0^1 \left(EJy_I^1 = M_0\right)^2 dx + \int_0^1 \frac{1}{EJ}\left(-EJl_{II}^{II}\right)^2 dx = \int_0^1 (-EJy_{III}^{II})^2 dx + \\ & + \int_0^1 \frac{1}{EJ}\left(-EJy_{IV}^{11}\right)^2 dx + \int_0^1 \left(-EJy_V^I\right)^2 dx + \sum_{k=1}^{2} \lambda_k g_k \to \min \end{aligned}\right\} ; (3.51)$$

Các điều khiên cực tiêu của phiếm hàm:

$$\frac{\partial Z}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial Z}{\partial b_j} = 0; \quad \frac{\partial Z}{\partial c_1} = 0; \quad \frac{\partial Z}{\partial c_1} = 0; \quad \frac{\partial Z}{ad_j} = 0; \quad \frac{\partial Z}{\partial e_1} = 0; \quad \frac{\partial Z}{\partial \lambda_k} = 0$$

dẫn đến hệ 25 phương trình tuyến tính 25 ẩn xác định hệ số chưa biết từ đó có phương trình đường đàn hồi cho các đoạn khung:

$$y_1 = \frac{47ql^2}{512EJ}x^2 - \frac{179ql}{1536EJ}x^3 + \frac{q}{24EJ}x^4;$$

$$y_{II} = \frac{ql^3}{1536EJ}x = \frac{ql^2}{128EJ}x^2 \frac{11ql}{1536EJ}x^3;$$

$$y_{III} = \frac{17ql^2}{384EJ}x - \frac{37ql^2}{153EJ}x^2 + \frac{9ql}{512EJ}x^3;$$

$$y_{IV} = \frac{5ql^3}{768EJ}x - \frac{37ql^2}{1536EJ}x^2 + \frac{9ql}{512EJ}x^3;$$

$$y_v = \frac{61ql^2}{153EJ}x^2 - \frac{35ql}{1536EJ}x^3;$$

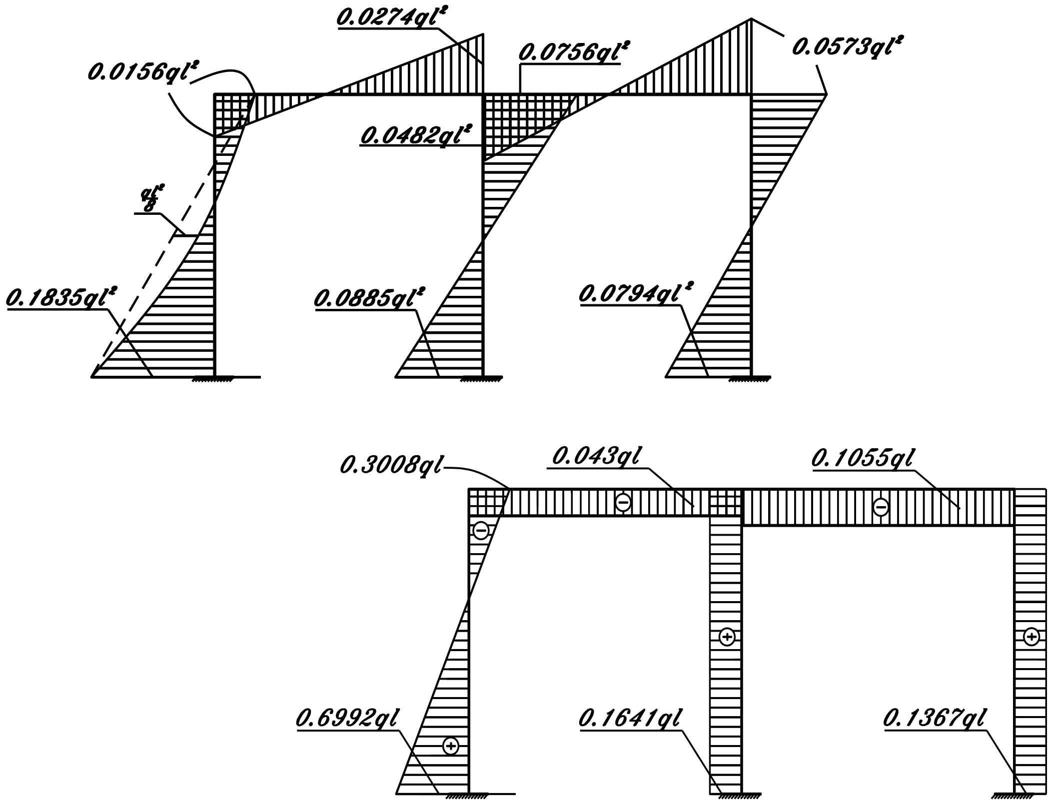
Biểu thức mômen uốn:

$$M_1 = \frac{47ql^2}{512EJ}x - \frac{179ql}{1536EJ}x^3 + \frac{q}{24EJ}x^4; \qquad M_{II} = \frac{ql^2}{64} - \frac{11ql}{256}x;$$

$$M_{III} = -\frac{17ql^2}{192} + \frac{21ql}{128}x; \qquad M_{IV} = \frac{37ql^2}{768} - \frac{27ql}{256}x; \tag{3.53}$$

$$M_{IV} = \frac{61ql^2}{768} + \frac{35ql}{256}x;$$

Biểu đồ mô men uốn của khung như hình 3.12



Hình 3.12 - Biểu đồ mô men và lực cắt

Nhận xét: Bài toán khung và đầm tỏ ra đơn giản hơn rất nhiều vì có thể so sánh cả hệ phức tạp với một hệ đơn giản. Hiệu quả của các làm này càng cao khi hệ cần xét càng phức tạp.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

*** Kết luận**

Từ những nghiên cứu nêu trong các chương của luận văn, tác giả rút ra những kết luận sau:

1) Tác giả đã sử dụng được phương pháp do GS. TSKH. Hà Huy Cương đề xuất để giải quyết một số bài toán cơ học kết cấu. Đây một phương pháp mới và có hiệu quả.

2) Cách đặt bài toán đơn giản và đúng đắn, lời giải của bài toán chỉ cần thoả mãn điều kiện biên động học.

3) Tác giả đã xây dựng cách giải với từng bài toán cụ thể.

a) Đối với bài toán dầm: xét đến ảnh hưởng của lực cắt đối với chuyển vị một cách dễ dàng.

b) Bài toán khung và dầm tỏ ra đơn giản rất nhiều vì có thể so sánh cả hệ phức tạp vối một hệ đơn giản. Hiệu quả và cách làm này càng cao khi hệ cần xét càng phức tạp.

4) Phương pháp so sánh hệ đang xét với một hệ khác không hoàn toàn tự do và cũng không giống nhau hoàn toàn, ví dụ có thể so sánh hệ thanh với thanh hoặc hệ hai chiều với hệ một chiều.

5) Phương pháp sử dụng nguyên lý cực trị Gauss mở ra khả năng nhận được dữ liệu thực nghiệm của một kết cấu từ việc nghiên cứu thực nghiệm kết cấu khác.

*** Kiến nghị**

1) Đây là một phương pháp mới và đúng nên có thể dùng nó như một công cụ phục vụ công tác giảng dạy và học tập.

2) Phương pháp cho phép nhận được giữ liệu thực nghiệm từ việc thực nghiệm kết cấu khác nên có thể ứng dụng trong việc xây dựng mô hình mô phỏng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Xuân Bảo, Phạm Hồng Giang, Vũ Thành Hải, Nguyễn Văn Lệ, *Phương pháp phần tử hữu hạn và ứng dụng để tính toán công trình thuỷ lợi*, Nhà xuất bản Nông nghiệp, Hà Nội,1983.

[2] Vũ Như Cầu, *Dạng ma trận của các phương pháp tính kết cấu*, Nhà xuất bản Nông nghiệp, Hà Nội, 1992.

[3] Vũ Như Cầu, *Bài giảng lý thuyết tối ưu trong cơ học kết cấu*, Trường Đại học Xây dựng, Hà Nội, 1992.

[4] Hà Huy Chương, Nguyễn Thị Dân, *Trường vận tốc dòng chảy quanh vật nổi*, Tuyển tập báo cáo hội nghị kết cấu và công nghệ Xây dựng, Hà Nội, 2001, Tr.486.

[5] Hà Huy Cương, Phạm Cao Thăng, *Tính toán kết cấu đất có cốt trong xây dựng công trình*, Khoa học và Kỹ thuật , Học viện Kỹ thật Quân sự, Số 76 (III/1996), Tr.$1 \div 4$.

[6] Hà Huy Chương, Võ Văn Thảo, Hoàng Đình Đạm, *Nghiên cứu trạng thái ứng suất - biến dạng của mặt đường có cốt mềm năm ngang,* Khoa học và Kỹ thuật, Giao thông vận tải , 8/1998, Tr, $15 \div 18$

[7] Hà Huy Cương, Đặng Huy Tú, *Bài toán truyền sóng chấn động trong môi trường đất và ứng dụng trong tính toán móc cọc*, Nhà xuất bản Xây dựng , số 1/1999, Tr $33 \div$ 35.

[8] Hoàng Đình Đạm, *Đất có cốt mềm trong nền đướng ô tô và sân ba*y, Khoa học và Kỹ thuật , Học viện Kỹ thuật Quân Sự, Số 74 (I/1996) , Tr. $18 \div 26$.

[9] Nguyễn Văn Đạo, *Cơ học giải tích*, Nhà xuất bản đạihọc quốc gia Hà Nội , Hà Nội, 2001.

[10] Ninh Quang Hải, *Cơ học lý thuyết*, Nhà xuất bản Xây dựng , Hà Nội, 1999.

[11] Nguỹen Văn Khang, *Dao động kỹ thuật*, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 1998.

[12] Vũ Đình Lai, Nguyễn Xuân Lựu, Bùi Đình Nghi, Sức bền vật liệu , Nhà xuất

bản giao thông vận tải, Hà Nội, 2002.

[13] Nguyễn Thị Ngọc Lan, *Phân tích một số phương pháp số trong cơ học kết cấu* , Luận văn tạc sỹ kỹ thuật, Hà Nội, 1999.

[14] Nguyễn Văn Liên, Nguyễn Phương Thành, *Xử lý giữ liệu động để xác định dao động các công trình*, tạp chí xây dựng, 11/2001 Tr.48 $\div$ 56

[15] Hoàng Văn Nhất, *Tính toán nội lực trong tấm bê tông mặt đường sân bay có thép truyền lực*, Khoa học và Kỹ thuật , Học viện kỹ thuật Quân sự, số 86 (1/1999), Tr. 37 $\div$ 42.

[16] Hoàng Nam Nhất, *Phân tích tải trọng để đánh giá sức chịu tải của mặt đường cứng sân bay và ô tô* , Khoa học và Kỹ thuật , Học viện kỹ thuật Quân sự, Số 86 (I/1999) , Tr. 43 $\div$ 48.

[17] Hoàng Như Sáu, Tính *toán kết cấu xây dựng bằng phương pháp sai phân hữu hạn*, biến phân và hỗn hợp sai phân hữu hạn- biến phân, Nhà xuất bản Xây dựng , Hà Nội , 1982.

[18] Dương Tất Sinh, Đánh giá khả năng chịu tải của mặt đường sân bay, Nhà xuất bản giao thông vận tải, 7/1998, Tr. 19 $\div$ 21.

[19] Ngô Hà Sơn, *ứng suất nhiệt trong tấm bê tông xi măng mặt đường sân bay*, Khoa học và kỹ thuật , Học việ kỹ thuật Quân sự, Số 86(I/1999), Tr. 31 $\div$ 36

[20] Nguyễn Phương Thành, *Nghiên cứu trạng thái ứng suất - biến dạng tấm nhiều lớp chịu tải trọng động có xét lực ma sát ở các mặt tiếp xúc*, Luận án tiến sỹ khoa học, Hà Nội, 2002.

[21] Nguyễn Phương Thành, *Nghiên cứu phản ứng động tấm nhiều lớp có xét lực ma sát ở các mặt tiếp xúc*, Tạp chí Khoa Học và Công nghệ , Trung tâm khoa học tự nhiên và công nghệ quốc gia, Tập XXXI- 2001-2 , Tr. 48 $\div$ 56.

[22] Nguyễn Trâm, Phương pháp số, Tập I- Phương pháp phần tử hữu hạn và dải hữu hạn, Trường đại học Xây dựng , Hà Nội, 1996.

[23] Lều Thọ Trình, *Bài tập cơ học kết cấu, Tập II- Hệ tĩnh định*, Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật, Hà Nội 2003.

[24] Lều Thọ Trình, *Cơ học kết cấu , Tập II - Hệ siêu tĩnh*, Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật, Hà Nội, 2003

[25] Lều Thọ Trình, *Bài tập cơ học kết cấu*, Tập II - Hệ siêu tĩnh , nhà xuất bản khoa học kỹ thuật , Hà Nội , 1991.

[26] Hồ Anh Tuấn , Trần Bình,, *Phương pháp phần tử hữu hạn*, Nhà xuất bản Khoa học - Kỹ Thuật, Hà Nội, 1978.\

[27] Nguyễn Văn Vượng,, *Lý thuyết đàn hồi ứng dụng* , Nhà xuất bản Giáo dục , Hà Nội, 1999.

[28] Nguyễn Mạnh Yên, *Phương pháp số trong cơ học kết cấu*, Nhà xuất bản Khoa Học - Kỹ thuật, Hà Nội 1996.

[29] *Tuyển tập công trình khoa học - Khoa xây dựng*, Trường đại học kiến trúc Hà Nội, 2004.

Ha Huy Cuong, Nguyen Phuong Thanh, Application du principe d' obligation minimale dans la resolution des problems de la mécanique dé fluids , structues and interactiens, Nha Trang, Vietnam August 14-18.2000, P.693-702.