BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC DÂN LẬP HẢI PHÒNG

LÊ KHẮC NGUYỄN

NGHIÊN CỨU NỘI LỰC VÀ CHUYỂN VỊ CỦA HỆ DẦM BẰNG PHƯƠNG PHÁP SO SÁNH

Chuyên ngành: **Kỹ thuật Xây dựng Công trình Dân dụng & Công nghiệp**

Mã số: **60.58.02.08**

LUẬN VĂN THẠC SỸ KỸ THUẬT

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS.TSKH. HÀ HUY CƯƠNG

Hải Phòng, 2015

Lời cảm ơn

Với tất cả sự kính trọng và biết ơn sâu sắc nhất, tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn của mình tới sự hướng dẫn tận tình và chu đáo của thầy hướng dẫn GS.TSHK Hà Huy Cương, các thầy cô trong khoa Sau đại học, khoa Xây dựng và toàn thể các thầy cô giáo trường Đại học Dân Lập Hải Phòng những người đã tạo điều kiện cho tôi hoàn thành luận văn này.

Do những hạn chế về kiến thức, thời gian, kinh nghiệm và tài liệu tham khảo nên thiếu sót và khuyết điểm là điều không thể tránh khỏi. Vì vậy, tôi rất mong nhận được sự góp ý, chỉ bảo của các thầy cô giáo đó chính là sự giúp đỡ quý báu mà tôi mong muốn nhất để cố gắng hoàn thiện hơn trong quá trình nghiên cứu và công tác sau này.

Xin trân trọng cảm ơn!

Tác giả luận văn

Lê Khắc Nguyễn

MỞ ĐẦU

Bài toán cơ học kết cấu hiện nay nói chung được xây dựng theo bốn đường lối đó là: Phương pháp xây dựng phương trình vi phân cân bằng phân tố; Phương pháp năng lượng; Phương pháp nguyên lý công ảo và Phương pháp sử dụng trực tiếp phương trình Lagrange. Các phương pháp giải gồm có: Phương pháp được coi là chính xác như, phương pháp lực; Phương pháp chuyển vị; Phương pháp hỗn hợp; Phương pháp liên hợp và các phương pháp gần đúng như, phương pháp phần tử hữu hạn; phương pháp sai phân hữu hạn; phương pháp hỗn hợp sai phân - biến phân.

Phương pháp so sánh là phương pháp được xây dựng dựa trên ý tưởng đặc biệt của K.F Gauss đối với cơ hệ chất điểm và được đề xuất bởi GS. TSKH Hà Huy Cương đối với cơ hệ môi trường liên tục. Điểm đặc biệt của phương pháp so sánh là tìm được kết quả của bài toán chưa biết thông qua kết quả của bài toán đã biết.

Đối tượng, phương pháp và phạm vi nghiên cứu của đề tài

Trong luận văn này, tác giả sử dụng phương pháp so sánh nói trên để xây dựng và giải bài toán dầm chịu uốn có xét đến biến dạng trượt ngang do lực cắt Q gây ra, chịu tác dụng của tải trọng tĩnh.

Do sự cần thiết của việc nghiên cứu nội lực và chuyển vị của kết cấu chịu uốn, mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu của luận văn này là:

Mục đích nghiên cứu của đề tài

"Nghiên cứu nội lực và chuyển vị của hệ dầm bằng phương pháp so sánh"

Nhiệm vụ nghiên cứu của đề tài

1. Tìm hiểu và giới thiệu các phương pháp xây dựng và các phương pháp giải bài toán cơ học kết cấu hiện nay.
2. Trình bày Phương pháp Nguyên lý cực trị Gauss do GS. TSKH. Hà Huy Cương đề xuất, với các ứng dụng trong cơ học môi trường liên tục nói chung và cơ học vật rắn biến dạng nói riêng.
3. Giới thiệu lý thuyết xét biến dạng trượt đối với bài toán kết cấu chịu uốn (dầm và khung) với việc dùng hai hàm chưa biết là hàm độ võng y và hàm lực cắt Q.

4. Trình bày phương pháp so sánh để xây dựng và giải bài toán dầm có xét đến biến dạng trượt, chịu tác dụng của tải trọng tĩnh.
5. Lập chương trình máy tính điện tử cho các bài toán nêu trên.

Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài nghiên cứu

Việc xác định nội lực và chuyển vị của kết cấu dầm chịu uốn đã được nhiều tác giả trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu, các kết quả nghiên cứu hiện nay nhìn chung được tìm thấy thông qua các phương pháp giải trực tiếp. Khác với cách làm hiện nay, tác giả luận văn giới thiệu phương pháp so sánh để xây dựng và giải bài toán kết cấu dầm chịu uốn một cách gián tiếp dựa trên ý tưởng đặc biệt của K.F Gauss khi nghiên cứu về cơ hệ chất điểm cùng với sự kế thừa, phát triển sáng tạo của GS. TSKH. Hà Huy Cương khi nghiên cứu hệ vật rắn biến dạng thuộc cơ hệ môi trường liên tục.

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của bản thân, được thực hiện trên cơ sở nghiên cứu, tính toán dưới sự hướng dẫn khoa học của GS.TSHK Hà Huy Cương.

Các số liệu trong luận văn có nguồn trích dẫn, kết quả trong luận văn là trung thực.

Tác giả luận văn

Lê Khắc Nguyễn

MỤC LỤC

Thø tù	Néi dung	Sè trang
	Më ®Çu	2
	Ch¬ng 1 - C¸c ph¬ng ph¸p x©y dùng vµ c¸c ph¬ng ph¸p gi¶i bµi to¸n c¬ häc kÕt cÊu	4
1	**Ph¬ng ph¸p x©y dùng bµi to¸n c¬ häc**	4
1.1	Ph¬ng ph¸p x©y dùng ph¬ng tr×nh vi ph©n c©n b»ng ph©n tè	4
1.2	Ph¬ng ph¸p n¨ng lîng	7
1.3	Nguyªn lý c«ng ¶o	10
1.4	Ph¬ng tr×nh Lagrange	12
2	**Bµi to¸n c¬ häc kÕt cÊu vµ c¸c ph¬ng ph¸p gi¶i**	14
2.1	Ph¬ng ph¸p lùc	15
2.2	Ph¬ng ph¸p chuyÓn vÞ	15
2.3	Ph¬ng ph¸p hçn hîp vµ ph¬ng ph¸p liªn hîp	15
2.4	Ph¬ng ph¸p phÇn tö h÷u h¹n	16
2.5	Ph¬ng ph¸p sai ph©n h÷u h¹n	16
2.6	Ph¬ng ph¸p hçn hîp sai ph©n - biÕn ph©n	16
	Ch¬ng 2 - Ph¬ng ph¸p nguyªn lý cùc trÞ Gauss	17
2.1.	Nguyªn lý cùc trÞ Gauss	17
2.2	Ph¬ng ph¸p nguyªn lý cùc trÞ Gauss	19
2.3	C¬ hÖ m«i trêng liªn tôc: øng suÊt vµ biÕn d¹ng	26
2.4	C¬ häc kÕt cÊu	32
2.5	Ph¬ng ph¸p nguyªn lý cùc trÞ Gauss vµ c¸c ph¬ng tr×nh c©n b»ng cña c¬ hÖ	35
2.5.1	Ph¬ng tr×nh c©n b»ng tÜnh ®èi víi m«i trêng ®µn håi, ®ång nhÊt, ®¼ng híng	36
2.5.2	Ph¬ng tr×nh vi ph©n cña mÆt vâng cña tÊm chÞu uèn	38
	Ch¬ng 2 - Ph¬ng ph¸p so s¸nh trong c¬ häc kÕt cÊu	41

3.1	Lý thuyÕt dÇm cã xÐt biÕn d¹ng trît	41
3.2	Ph¬ng ph¸p so s¸nh tÝnh to¸n dÇm cã xÐt ®Õn biÕn d¹ng trît ngang.	47
3.2.1	Ph¬ng ph¸p sö dông hÖ so s¸nh.	47
3.2.2	C¸c vÝ dô tÝnh to¸n.	48
	KÕt luËn	64
	KiÕn nghÞ vÒ nh÷ng nghiªn cøu tiÕp theo	64
	Danh môc tµi liÖu tham kh¶o	65
	Môc lôc	71

CHƯƠNG 1.
CÁC PHƯƠNG PHÁP XÂY DỰNG VÀ CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN CƠ HỌC KẾT CẤU

Trong chương này trình bày các phương pháp truyền thống để xây dựng các bài toán cơ học nói chung; giới thiệu bài toán cơ học kết cấu (bài toán tĩnh) và các phương pháp giải thường dùng hiện nay.

1. Phương pháp xây dựng bài toán cơ học.

Bốn phương pháp chung để xây dựng bài toán cơ học kết cấu được trình bày dưới đây. Dùng lý thuyết dầm chịu uốn để minh họa.

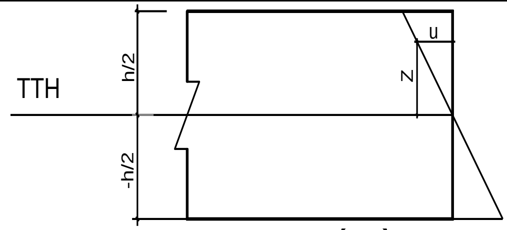
1.1. Phương pháp xây dựng phương trình vi phân cân bằng phân tố.

Phương trình vi phân cân bằng được xây dựng trực tiếp từ việc xét các điều kiện cân bằng lực của phân tố được tách ra khỏi kết cấu.Trong sức bền vật liệu khi nghiên cứu dầm chịu uốn ngang sử dụng các giả thiết sau:

- Trục dầm không bị biến dạng nên không có ứng suất.
- Mặt cắt thẳng góc với trục dầm sau khi biến dạng vẫn phẳng và thẳng góc với trục dầm (giả thiết Euler–Bernoulli).
- Không xét lực nén giữa các thớ theo chiều cao của dầm

Với giả thiết thứ ba thì chỉ có ứng suất pháp σ_x và các ứng suất tiếp σ_{xz}, σ_{zx} tác dụng lên phân tố dầm (hình 1.3), ứng suất pháp σ_z bằng không. Hai giả thiết thứ ba và thứ nhất dẫn đến trục dầm chỉ có chuyển vị thẳng đứng y(x) và nó được gọi là đường độ võng hay đường đàn hồi của dầm. Giả thiết thứ nhất xem chiều dài trục dầm không thay đổi khi bị võng đòi hỏi độ võng của dầm là nhỏ so với chiều cao dầm, y_{max} / h

1/5. Với giả thiết thứ hai thì biến dạng trượt do ứng suất tiếp gây ra không được xét trong tính độ võng của dầm như trình bày dưới đây. Giả thiết này chỉ đúng khi tỉ lệ h/l   1/5. Chuyển vị ngang u của điểm nằm ở độ cao z so với trục dầm bằng

$u=-z\dfrac{dy}{dx}$ Biến dạng và ứng suất xác định như sau $\varepsilon_x=-z\dfrac{d^2y}{dx^2}$; $\sigma_{xx}=-Ez\dfrac{d^2y}{dx^2}$	 Hình 1.2. Phân tố dầm

Momen tác dụng lên trục dầm:

$$M=\int_{-h/2}^{h/2}-Ebz^2\frac{d^2y}{dx^2}dz=-\frac{Ebh^3}{12}\frac{d^2y}{dx^2}$$

hay $\qquad M=EJ\chi \quad (1.7)$

trong đó: $EJ=\dfrac{Ebh^3}{12}$, $\chi=-\dfrac{d^2y}{dx^2}$

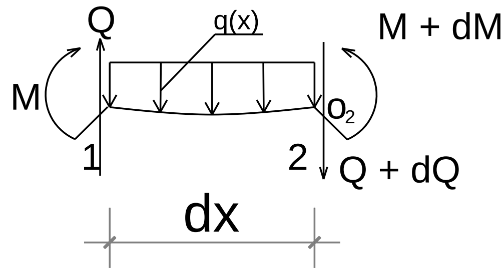
EJ được gọi là độ cứng uốn của dầm; χ là độ cong của đường đàn hồi và sẽ được gọi là biến dạng uốn; b là chiều rộng dầm. Để đơn giản trình bày, ở đây chỉ dùng trường hợp dầm có tiết diên chữ nhật.

Cách tính nội lực momen ở trên không xét đến biến dạng trượt do các ứng suất tiếp gây ra. Tổng các ứng suất tiếp σ_{zx} trên mặt cắt sẽ cho ta lực cắt Q tác dụng lên trục dầm: $\qquad Q=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{zx}dz$

Biểu thức của ứng suất tiếp σ_{zx} trong tích phân trên sẽ trình bày sau.

Nhờ các giả thiết nêu trên, thay cho trạng thái ứng suất trong dầm, ta chỉ cần nghiên cứu phương trình cân bằng của các nội lực M và Q tác dụng lên trục dầm.

Xét phân tố dx của trục dầm chịu tác dụng của các lực M,Q và ngoại lực phân bố q, hình 1.3. Chiều dương của M, Q và q trên hình vẽ tương ứng với chiều dương của độ võng hướng xuống dưới.



Hình 1.3. Xét cân bằng phân tố

Lấy tổng momen đối với điểm O_2, bỏ qua các vô cùng bé bậc cao ta có:

$$\frac{dM}{dx} - Q = 0 \quad (1.8)$$

Lấy tổng hình chiếu các lực lên trục thẳng đứng:

$$\frac{dQ}{dx} + q = 0 \quad (1.9)$$

Phương trình (1.8) là phương trình liên hệ giữa momen uốn và lực cắt, phương trình (1.9) là phương trình cân bằng lực cắt Q và ngoại lực phân bố q. Đó là hai phương trình xuất phát (hai phương trình đầu tiên) của phương pháp cân bằng phân tố. Lấy đạo hàm phương trình (1.8) theo x rồi cộng với phương trình (1.9), ta có phương trình dẫn xuất sau:

$$\frac{d^2M}{dx^2} + q = 0 \quad (1.10)$$

Thay M xác định theo (1.7) vào (1.10) nhận được phương trình vi phân xác định đường đàn hồi của thanh.

$$EJ\frac{d^4y}{dx^4} = q \quad (1.11)$$

Phương trình (1.11) được giải với các điều kiện biên của y và các đạo hàm đến bậc ba của y (4 điều kiện), hai điều kiện biên tại mỗi đầu cuối thanh.

Các điều kiện biên thường dùng như sau:

a) Liên kết khớp tại x=0:

Chuyển vị bằng không, $y\big|_{x=0} = 0$, momen uốn $M = 0$, suy ra $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0} = 0$

b) Liên kết ngàm tại x=0:

Chuyển vị bằng không, $y\big|_{x=0} = 0$, góc xoay bằng không, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0$

c) Không có gối tựa tại x=0:

Momen uốn $M = 0$, suy ra $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0} = 0$; lực cắt Q=0, suy ra $\left.\dfrac{d^3y}{dx^3}\right|_{x=0} = 0$

Các điều kiện tại x=l cũng lấy tương tự như trên.

Bây giờ tìm hiểu sự phân bố ứng suất tiếp σ_{zx} trên chiều dày h của dầm. Trước tiên viết phương trình cân bằng ứng suất trên trục x như sau:

$$-\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \quad \text{hay} \qquad \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = -Ez\frac{d^3y}{dx^3}$$

Tích phân phương trình trên theo z: $\sigma_{xz} = -\dfrac{Ez^2}{2}\dfrac{d^3y}{dx^3} + C(x)$

Hàm $C(x)$ xác định từ điều kiện ứng suất tiếp bằng không tại mặt trên và mặt dưới dầm, $z = \pm\dfrac{h}{2}$. Ta có: $C(x) = \dfrac{Eh^2}{8}\dfrac{d^3y}{dx^3}$

Ứng suất tiếp phân bố trên mặt cắt dầm có dạng:

$$\sigma_{xz} = -\frac{E}{8}\frac{d^3y}{dx^3}\left(4z^2 - h^2\right)$$

Đó là hàm parabol bậc hai. Ứng suất tiếp lớn nhất tại trục dầm (z=0) có giá trị bằng

$$\sigma_{xz}\big|_{z=0} = \frac{Eh^2}{8}\frac{d^3y}{dx^3}$$

Tích phân hàm ứng suất tiếp theo chiều cao dầm rồi nhân với chiều rộng b ta có lực cắt Q tác dụng lên phần trái của dầm.

$$Q = \frac{Ebh^3}{12}\frac{d^3y}{dx^3}$$

Ứng suất tiếp trung bình trên chiều cao dầm bằng: $\sigma_{xz}^{tb} = \dfrac{Eh^2}{12}\dfrac{d^3y}{dx^3}$

Tỉ lệ giữa ứng suất tiếp max tại trục dầm và ứng suất trung bình α=1.5.

1.2. Phương pháp năng lượng.

Năng lượng của cơ hệ bao gồm động năng T và thế năng Π. Động năng được xác định theo khối lượng và vận tốc chuyển động, còn thế năng Π bao gồm thế năng biến dạng và công của các trường lực, phụ thuộc vào chuyển vị. Trường lực là lực có thế như lực trọng trường. Các lực ngoài tác dụng lên cơ hệ là lực không thế.

Đối với hệ bảo toàn, năng lượng là không đổi:

$$T + \Pi = \text{const} \qquad (1.12)$$

Do đó tốc độ thay đổi năng lượng phải bằng không:

$$\frac{d}{dt}(T + \Pi) = 0 \qquad (1.13)$$

Ta xét bài toán tĩnh, T=0, do đó:

$$\Pi = \text{const} \qquad (1.14)$$

Thế năng Π có thể biểu thị qua ứng suất và nội lực cũng có thể biểu thị qua chuyển vị và biến dạng. Vì vậy ta có hai nguyên lý biến phân năng lượng sau:

Nguyên lý thế năng biến dạng cực tiểu

Khi phương trình cân bằng được biểu thị qua ứng suất hoặc nội lực và do đó thế năng biến dạng cũng biểu thị qua ứng suất hoặc nội lực ta có nguyên lý thế năng biến dạng cực tiểu, nguyên lý Castiliano (1847-1884). Nguyên lý phát biểu như sau:

Trong tất cả các trạng thái cân bằng lực có thể thì trạng thái cân bằng thực xảy ra khi thế năng biến dạng là cực tiểu.

Trạng thái cân bằng lực có thể là trạng thái mà các lực tác dụng lên phân tố thỏa mãn các phương trình cân bằng. Ta viết nguyên lý dưới dạng sau:

$$\Pi(F) \rightarrow \min$$

Với ràng buộc là các phương trình cân bằng viết dưới dạng lực.

Đối với dầm ta có:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EJ}dx \quad \rightarrow min \qquad (1.15)$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q \qquad (1.16)$$

Nội lực cần tìm mômen uốn là hàm phân bố theo chiều dài dầm M(x) và phải thỏa mãn các điều kiện liên kết ở hai đầu thanh (được xác định ở hai đầu thanh). Đây là bài toán cực trị có ràng buộc. Bằng cách dùng thừa số Lagrange đưa về bài toán không ràng buộc sau:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EJ}dx + \int_0^l \lambda(x)\left[\frac{d^2 M}{dx^2} + q\right]dx \rightarrow min \qquad (1.17)$$

là thừa số Lagrange và cũng là ẩn của bài toán. Theo phép tính biến phân từ phiếm hàm (1.17) ta nhận được hai phương trình sau (phương trình Euler–Lagrange).

$$M = -EJ\frac{d^2\lambda}{dx^2} (1.18)$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q \qquad (1.19)$$

có thứ nguyên là chuyển vị cho nên phương trình (1.18) biểu thị quan hệ giữa M và chuyển vị. Thế (1.18) vào (1.19) ta có:

$$EJ\frac{d^4\lambda}{dx^4} = q \qquad (1.20)$$

là độ võng của dầm và phương trình (1.20) là phương trình vi phân cân bằng của dầm viết theo chuyển vị nhận được ở trên.

<u>Nguyên lý công bù cực đại</u>

Khi dùng ẩn là các chuyển vị và biến dạng thì có nguyên lý công bù cực đại.

Trong tất cả các chuyển vị động học có thể (khả dĩ) thì chuyển vị thực là chuyển vị có công bù cực đại.

Chuyển vị động học có thể là chuyển vị thỏa mãn các phương trình liên hệ giữa chuyển vị và biến dạng và thỏa mãn các điều kiện biên. Công bù bằng tích của ngoại lực và chuyển vị trừ đi năng lượng biến dạng.

[Công ngoại lực – thế năng biến dạng]→max

Với ràng buộc là các phương trình liên hệ giữa chuyển vị và biến dạng.

Lấy ví dụ đối với dầm chịu uốn, ta có:

$$\int_0^l qydx - \frac{1}{2}\int_0^l EJ\,\chi^2\,dx \to \max(1.21)$$

Với ràng buộc:

$$\chi = -\frac{d^2y}{dx^2}(1.22)$$

là biến dạng uốn cũng là độ cong của đường độ võng. Tích phân thứ nhất trong (1.21) là công toàn phần của ngoại lực (không có hệ số ½), tích phân thứ hai là thế năng biến dạng biểu thị qua biến dạng uốn.

Thay từ (1.22) vào (1.21), ta có:

$$\int_0^l qydx - \frac{1}{2}\int_0^l EJ\left(-\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx \to \max(1.23)$$

Thay dấu của (1.23) ta có:

$$\frac{1}{2}\int_0^l EJ\left(-\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx - \int_0^l qydx \to \min(1.24)$$

Khi y có giá trị xác định tại hai đầu mút dầm thì điều kiện cần để biểu thức (1.24) cực tiểu là phương trình Euler sau:

$$EJ\frac{d^4y}{dx^4} = q \qquad (1.25)$$

Phương trình (1.25) là phương trình vi phân cân bằng của dầm chịu uốn. Nguyên lý công bù cực đại dưới dạng biểu thức (1.24) được sử dụng rộng rãi trong tính toán công trình theo phương pháp phần tử hữu hạn.

1.3. Nguyên lý công ảo.

Nguyªn lý c«ng ¶o ®îc sö dông rÊt réng r·i trong c¬ häc. Theo K.F. Gauss (1777-1855) th× mäi nguyªn lý trong c¬ häc hoÆc trùc tiÕp hoÆc gi¸n tiÕp ®Òu rót ra tõ nguyªn lý chuyÓn vÞ ¶o.

XÐt c¬ hÖ chÊt ®iÓm ë tr¹ng th¸i c©n b»ng ta cã:

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0,$$

(1.26)

$\sum X; \sum Y; \sum Z$: lµ tæng h×nh chiÕu cña tÊt c¶ c¸c lùc t¸c dông lªn ba trôc cña hÖ to¹ ®é §Ò c¸c. Ta viÕt biÓu thøc sau:

$$\sum X\delta U + \sum Y\delta V + \sum Z\delta W = 0, \qquad (1.27)$$

ë ®©y xem c¸c $\delta U; \delta V; \delta W;$ lµ c¸c thõa sè bÊt kú.

Tõ (1.26) ta cã (1.27) vµ ngîc l¹i tõ (1.27) ta sÏ nhËn ®îc (1.26) bëi v× c¸c $\delta U; \delta V; \delta W;$ lµ nh÷ng thõa sè bÊt kú. B©y giê ta xem $\delta U; \delta V; \delta W;$ lµ c¸c biÕn ph©n cña c¸c chuyÓn vÞ ¶o theo ba chiÒu cña hÖ to¹ ®é vu«ng gãc. ChuyÓn vÞ ¶o lµ chuyÓn vÞ bÐ do nguyªn nh©n bÊt kú bªn ngoµi nµo ®ã g©y ra. C¸c chuyÓn vÞ ¶o nµy ph¶i tho¶ m·n c¸c ®iÒu kiÖn liªn kÕt cña hÖ.

Khi cã chuyÓn vÞ ¶o th× vÞ trÝ cña c¸c lùc t¸c dông trªn hÖ cã thÓ thay ®æi nhng ph¬ng chiÒu vµ ®é lín cña nã vÉn gi÷ nguyªn kh«ng ®æi. Nh vËy, c¸c chuyÓn vÞ ¶o $\delta U; \delta V; \delta W$ lµ c¸c ®¹i lîng ®éc lËp víi lùc t¸c dông vµ tõ hai biÓu thøc (1.26) vµ (1.27) ta cã nguyªn lý c«ng ¶o:

NÕu nh tæng c«ng cña c¸c lùc t¸c dông cña hÖ thùc hiÖn trªn c¸c chuyÓn vÞ ¶o b»ng kh«ng th× hÖ ë tr¹ng th¸i c©n b»ng.

§èi víi hÖ ®µn håi (hÖ biÕn d¹ng) th× ngoµi ngo¹i lùc cßn cã néi lùc. VÊn ®Ò ®Æt ra ë ®©y lµ c¸ch tÝnh c«ng cña néi lùc nh thÕ nµo.

Tríc hÕt ta cÇn ph¶i ®a thªm yªu cÇu ®èi víi chuyÓn vÞ ¶o nh sau:

C¸c chuyÓn vÞ ¶o ph¶i tho¶ m·n c¸c liªn hÖ gi÷a chuyÓn vÞ vµ biÕn d¹ng. NÕu nh c¸c chuyÓn vÞ cã biÕn d¹ng $\varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y};\ldots$ th× biÕn ph©n c¸c chuyÓn vÞ ¶o $\delta u; \delta v; \delta w$ còng ph¶i cã c¸c biÕn d¹ng ¶o t¬ng øng:

$$\frac{\partial}{\partial x}\delta u; \frac{\partial}{\partial y}\delta v; \ldots .$$

Th«ng thêng c«ng cña néi lùc (hoÆc øng suÊt) ®îc tÝnh qua thÕ n¨ng biÕn d¹ng. Khi cã c¸c chuyÓn vÞ ¶o $\delta U; \delta V; \delta W;$ th× thÕ n¨ng biÕn d¹ng Π sÏ thay ®æi b»ng ®¹i lîng biÕn ph©n $\delta\Pi$. Do ®ã nguyªn lý chuyÓn vÞ ¶o ®èi víi hÖ biÕn d¹ng ®îc viÕt nh sau:

$$\delta\prod - \sum X\delta U - \sum Y\delta V - \sum Z\delta W = 0, \qquad (1.28)$$

C¸c ®¹i lîng biÕn ph©n trong (1.28) ®Òu lµ chuyÓn vÞ ¶o cho nªn nÕu xem néi lùc (øng suÊt) trong qu¸ tr×nh chuyÓn vÞ ¶o còng kh«ng ®æi th× dÊu biÕn ph©n trong (1.28) cã thÓ viÕt l¹i nh sau:

$$\delta\left[\prod - \sum XU - \sum YV - \sum ZW\right] = 0 \qquad (1.29)$$

Hai biÓu thøc (1.28) vµ (1.29) d-íi d¹ng chi tiÕt h¬n ®-îc tr×nh bµy trong [30, Tr.261].

$$\delta\int_0^l\left[\frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2-qy\right]dx=0 \qquad \text{hay} \qquad \int_0^l\delta\left[\frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2-qy\right]dx=0$$

(1.30)

Ph-¬ng tr×nh Euler cña (1.30) nh- sau: $EJ\frac{d^4y}{dx^4}-q=0$

1.4. Ph-¬ng tr×nh Lagrange:

Ph-¬ng tr×nh Lagrangelµ ph-¬ng tr×nh vi ph©n cña chuyÓn ®éng ®-îc biÓu thÞ qua c¸c to¹ ®é tæng qu¸t (c¸c chuyÓn vÞ tæng qu¸t).

Gäi T lµ ®éng n¨ng vµ Π lµ thÕ n¨ng cña hÖ, c¸c q_i lµ c¸c chuyÓn vÞ tæng qu¸t vµ Q_i lµ c¸c lùc tæng qu¸t th× ph-¬ng tr×nh Lagrange cã d¹ng:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}=Q_{i,}\ \text{(i=1,2,3......,n)}$$

(1.31)

trong ®ã: $\dot{q}_i=\frac{\partial q_i}{\partial t}$ lµ vËn tèc cña chuyÓn ®éng. §èi víi mçi chuyÓn vÞ q_i sÏ cã mét ph-¬ng tr×nh Lagrange. §éng n¨ng T trong to¹ ®é tæng qu¸t lµ hµm cña vËn tèc vµ cã thÓ lµ hµm cña c¶ chuyÓn vÞ tæng qu¸t.

ThÕ n¨ng toµn phÇn cña hÖ bao gåm thÕ n¨ng biÕn d¹ng vµ thÕ n¨ng cña lùc cã thÕ (lùc träng tr-êng lµ lùc cã thÕ). Q_i lµ lùc kh«ng thÕ cã thÓ ®-îc hiÓu lµ c¸c lùc ngoµi t¸c dông lªn hÖ (lùc tæng qu¸t). ¸p dông ph-¬ng tr×nh Lagrange ®Ó x©y dùng ph-¬ng tr×nh chuyÓn ®éng cña dÇm chÞu uèn nh- sau:

Gäi y_i lµ chuyÓn vÞ (tæng qu¸t) cña ®iÓm i cña dÇm vµ q_i lµ lùc t¸c dông t¹i ®iÓm i cña dÇm vµ m_i lµ khèi l-îng.

§éng n¨ng cña dÇm:

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m \dot{y}_i^{\,2} dx \qquad \text{trong ®ã:} \qquad \dot{y}_i = \frac{\partial y_i}{\partial t}$$

(1.32)

ThÕ n¨ng biÕn d¹ng cña dÇm chÞu uèn:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} EJ \left(\frac{\partial^2 y_i}{\partial x^2} \right)_i^2 \qquad (1.33)$$

DÊu tæng lÊy cho tÊt c¶ c¸c ®iÓm i cña dÇm. Ph-¬ng tr×nh Lagrange ®èi víi dÇm cã d¹ng

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial y_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} = q_{i,} \qquad (1.34)$$

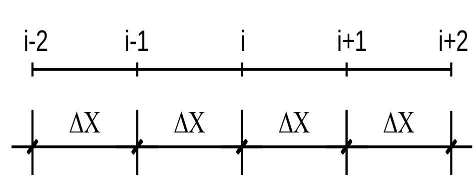
Ta tÝnh hai thµnh phÇn ®Çu cña ph-¬ng tr×nh (1.34)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \right) = \frac{\partial}{\partial t} m_i \dot{y}_i = m_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} = m_i \ddot{y}_i \qquad (1.35)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y_i} = 0$$

§Ó tÝnh thÕ n¨ng biÕn d¹ng cã thÓ dïng ph-¬ng ph¸p sai ph©n h÷u h¹n, h×nh 1.5.

Bëi v× ®é võng y_i cña dÇm chØ cã mÆt trong biÓu thøc thÕ n¨ng biÕn d¹ng cña ba ®iÓm liªn tiÕp i-1, i vµ i+1, cho nªn chØ cÇn tÝnh thÕ n¨ng biÕn d¹ng cña dÇm (1.33) cho ba ®iÓm nµy, Δx lµ kho¶ng c¸ch gi÷a c¸c ®iÓm.



H×nh 1.4. B-íc sai ph©n

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{2}EJ\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_i^2 &= \frac{1}{2}EJ\left(\frac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{\Delta x^2}\right)^2\\
\frac{1}{2}EJ\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{i-1}^2 &= \frac{1}{2}EJ\left(\frac{y_{i-2}-2y_{i-1}+y_i}{\Delta x^2}\right)^2\\
\frac{1}{2}EJ\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{i+1}^2 &= \frac{1}{2}EJ\left(\frac{y_i-2y_{i+1}+y_{i+2}}{\Delta x^2}\right)^2
\end{aligned}\right\} \quad (1.36)$$

Tæng céng ba ph-¬ng tr×nh trªn cho ta thÕ n¨ng cña dÇm ®Ó tÝnh y_i. Ta tÝnh $\frac{\partial \Pi}{\partial y_i}$ cña ph-¬ng tr×nh (1.34).

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial y_i} &= EJ\left(\frac{-2y_{i-1}+4y_i-2y_{i+1}+y_{i-2}-2y_{i-1}+y_i+y_i-2y_{i+1}+y_{i+2}}{\Delta x^4}\right)\\
&= EJ\left(\frac{y_{i-2}-4y_{i-1}+6y_i-4y_{i+1}+y_{i+2}}{\Delta x^4}\right) = EJ\left.\frac{\Delta_i^4}{\Delta x^4}\right|_i
\end{aligned}\right\} \quad (1.37)$$

BiÓu thøc (1.37) biÓu thÞ sai ph©n h÷u h¹n cña $EJ\left.\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\right|_i$.

Céng (1.35) vµ (1.37) nhËn ®-îc ph-¬ng tr×nh Lagrange ®èi víi chuyÓn vÞ y_i:

$$m\frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} + EJ\left.\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\right|_i = q_i \quad (1.38)$$

§iÓm i lµ bÊt kú nªn nhËn ®-îc ph-¬ng tr×nh vi ph©n c©n b»ng cña dÇm:

$$m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = q \quad (1.39)$$

§èi víi bµi to¸n tÜnh T=0 ta cã: $EJ\frac{d^4 y}{dx^4} = q$ (1.40)

Ph-¬ng ph¸p sö dông ph-¬ng tr×nh Lagrange ®Ó nhËn ®-îc ph-¬ng tr×nh vi ph©n cña ®-êng ®é vâng cña dÇm tr×nh bµy ë ®©y lµ cña t¸c gi¶.

ë trªn tr×nh bµy bèn ph-¬ng ph¸p chung ®Ó x©y dùng bµi to¸n c¬, lÊy bµi to¸n dÇm chÞu uèn lµm vÝ dô ®Ó biÕt c¸ch sö dông chóng vµ ®Ó thÊy bèn ®-êng lèi ®ã lµ t-¬ng ®-¬ng nhau nghÜa lµ ®Òu dÉn vÒ ph-¬ng tr×nh vi ph©n c©n b»ng cña hÖ.

2. Bài toán cơ học kết cấu và các phương pháp giải.

Bài toán cơ học kết cấu nhằm xác định nội lực và chuyển vị của hệ thanh, tấm, vỏ dưới tác dụng của các loại tải trọng, nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức,…và được chia làm hai loại:

- Bài toán tĩnh định: là bài toán có cấu tạo hình học bất biến hình và đủ liên kết tựa với đất, các liên kết sắp xếp hợp lý, chịu các loại tải trọng. Để xác định nội lực và chuyển vị chỉ cần dùng các phương trình cân bằng tĩnh học là đủ;
- Bài toán siêu tĩnh: là bài toán có cấu tạo hình học bất biến hình và thừa liên kết (nội hoặc ngoại) chịu các loại tải trọng, nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức,…Để xác định nội lực và chuyển vị ngoài các phương trình cân bằng ta còn phải bổ sung các phương trình biến dạng.

Nếu tính đến tận ứng suất, có thể nói rằng mọi bài toán cơ học vật rắn biến dạng nói chung và bài toán cơ học kết cấu nói riêng đều là bài toán siêu tĩnh.

Đã có nhiều phương pháp để giải bài toán siêu tĩnh. Hai phương pháp truyền thống cơ bản là phương pháp lực và phương pháp chuyển vị. Khi sử dụng chúng thường phải giải hệ phương trình đại số tuyến tính. Số lượng các phương trình tùy thuộc vào phương pháp phân tích. Từ phương pháp chuyển vị ta có hai cách tính gần đúng hay được sử dụng là H. Cross và G. Kani. Từ khi xuất hiện máy tính điện tử, người ta bổ sung thêm các phương pháp số khác như: Phương pháp phần tử hữu hạn; Phương pháp sai phân hữu hạn…

2.1. Phương pháp lực.

Trong hệ siêu tĩnh ta thay các liên kết thừa bằng các lực chưa biết, còn giá trị các chuyển vị trong hệ cơ bản tương ứng với vị trí và phương của các lực ẩn số do bản thân các lực đó và do các nguyên nhân bên ngoài gây ra bằng không. Từ điều kiện này ta lập được hệ các phương trình đại số tuyến tính, giải hệ này ta tìm được các ẩn số và từ đó suy ra các đại lượng cần tìm.

2.2. Phương pháp chuyển vị.

Khác với phương pháp lực, phương pháp chuyển vị lấy chuyển vị tại các nút làm ẩn. Những chuyển vị này phải có giá trị sao cho phản lực tại các liên kết đặt thêm vào hệ do bản thân chúng và do các nguyên nhân bên ngoài gây ra bằng không. Lập hệ phương trình đại số tuyến tính thỏa mãn điều kiện này và giải hệ đó ta tìm được các ẩn, từ đó xác định các đại lượng còn lại. Hệ cơ bản trong phương pháp chuyển vị là duy nhất và giới hạn giải các bài toán phụ thuộc vào số các phần tử mẫu có sẵn.

2.3. Phương pháp hỗn hợp và phương pháp liên hợp.

Phương pháp hỗn hợp, phương pháp liên hợp là sự kết hợp song song giữa phương pháp lực và phương pháp chuyển vị. Trong phương pháp này ta có thể chọn hệ cơ bản theo phương pháp lực nhưng không loại bỏ hết các liên kết thừa mà chỉ loại bỏ các liên kết thuộc bộ phận thích hợp với phương pháp lực; hoặc chọn hệ cơ bản theo phương pháp chuyển vị nhưng không đặt đầy đủ các liên kết phụ nhằm ngăn cản toàn bộ các chuyển vị nút mà chỉ đặt các liên kết phụ tại các nút thuộc bộ phận thích hợp với phương pháp chuyển vị. Trường hợp đầu hệ cơ bản là siêu tĩnh, còn trường hợp sau hệ cơ bản là siêu động.

Trong cả hai cách nói trên, bài toán ban đầu được đưa về hai bài toán độc lập: Một theo phương pháp lực và một theo phương pháp chuyển vị.

2.4. Phương pháp phần tử hữu hạn.

Thực chất của phương pháp phần tử hữu hạn là rời rạc hóa bản thân kết cấu (chia kết cấu thành một số phần tử có kích thước hữu hạn). Các phần tử liền kề liên hệ với nhau bằng các phương trình cân bằng và các phương trình liên tục.

Để giải quyết bài toán cơ học kết cấu, có thể tiếp cận phương pháp này bằng đường lối trực tiếp, suy diễn vật lý hoặc đường lối toán học, suy diễn biến phân. Tuy nhiên bằng cách nào đi chăng nữa thì kết quả thu được là một ma trận (độ cứng hoặc độ mềm). Ma trận đó được xây dựng dựa trên cơ sở cực trị hóa phiếm hàm biểu diễn năng lượng. Trong phạm vi mỗi phần tử riêng biệt, các hàm chuyển vị được xấp xỉ gần đúng theo một dạng nào đó, thông thường là các đa thức.

2.5. Phương pháp sai phân hữu hạn.

Phương pháp sai phân hữu hạn cũng là thay thế hệ liên tục bằng mô hình rời rạc, song hàm cần tìm (hàm mang đến cho phiếm hàm giá trị dừng), nhận những giá trị gần đúng tại một số hữu hạn điểm của miền tích phân, còn giá trị các điểm trung gian sẽ được xác định nhờ một phương pháp tích phân nào đó. Phương pháp này cho lời giải số của phương trình vi phân về chuyển vị và nội lực tại các điểm nút. Thông thường ta phải thay đạo hàm bằng các sai phân của hàm tại các nút. Phương trình vi phân của chuyển vị hoặc nội lực được viết dưới dạng sai phân tại mỗi nút, biểu thị quan hệ của chuyển vị tại một nút và các nút lân cận dưới tác dụng của ngoại lực.

2.6. Phương pháp hỗn hợp sai phân – biến phân.

Kết hợp phương pháp sai phân với phương pháp biến phân ta có một phương pháp linh động hơn: Hoặc là sai phân các đạo hàm trong phương trình biến phân hoặc là sai phân theo một phương và biến phân theo một phương khác (đối với bài toán hai chiều).

Ph¬ng ph¸p nguyªn lý cùc trÞ Gauss

Trong ch¬ng 1 ®· tr×nh bµy bèn ®êng lèi x©y dùng bµi to¸n c¬ häc vµ c¸c ph¬ng ph¸p gi¶i hiÖn nay thêng dïng trong c¸c gi¸o tr×nh, tµi liÖu trong vµ ngoµi níc. Kh¸c víi ch¬ng 1, ch¬ng nµy tr×nh bµy nguyªn lý Gauss, sau ®ã tr×nh bµy ph¬ng ph¸p míi dùa trªn nguyªn lý cùc trÞ Gauss ®Ó x©y dùng vµ gi¶i c¸c bµi to¸n c¬ häc díi d¹ng tæng qu¸t, chñ yÕu lµ cña c¬ hÖ vËt r¾n biÕn d¹ng. §Ó ®¹t môc tiªu trªn, trong ch¬ng cßn giíi thiÖu c¸c kh¸i niÖm øng suÊt vµ biÕn d¹ng cña c¬ hÖ m«i trêng liªn tôc vµ cña c¬ häc kÕt cÊu. Cuèi cïng, ®Ó lµm vÝ dô, tr×nh bµy viÖc ¸p dông ph¬ng ph¸p míi ®Ó nhËn ®îc c¸c ph¬ng tr×nh vi ph©n c©n b»ng cña c¬ hÖ.

2.1. Nguyªn lý cùc trÞ Gauss.

N¨m 1829 nhµ to¸n häc ngêi §øc K.F. Gauss ®· ®a ra nguyªn lý sau ®©y ®èi víi c¬ hÖ chÊt ®iÓm [1,tr. 171]:

"*ChuyÓn ®éng thùc cña hÖ chÊt ®iÓm cã liªn kÕt tïy ý chÞu t¸c ®éng bÊt k× ë mçi thêi ®iÓm x¶y ra mét c¸ch phï hîp nhÊt cã thÓ víi chuyÓn ®éng cña hÖ ®ã khi hoµn toµn tù do, nghÜa lµ chuyÓn ®éng thùc x¶y ra víi lîng cìng bøc tèi thiÓu nÕu nh sè ®o lîng cìng bøc lÊy b»ng tæng c¸c tÝch khèi lîng chÊt ®iÓm víi b×nh ph¬ng ®é lÖch vÞ trÝ chÊt ®iÓm so víi vÞ trÝ khi chóng hoµn toµn tù do.*

Gäi m_i lµ khèi lîng chÊt ®iÓm, A_i lµ vÞ trÝ cña nã, B_i lµ vÞ trÝ sau thêi ®o¹n v« cïng bÐ do t¸c ®éng lùc ngoµi vµ do vËn tèc ë ®Çu thêi ®o¹n g©y ra, C_i lµ vÞ trÝ cã thÓ (bÞ rµng buéc bëi liªn kÕt) th× lîng cìng bøc ®îc viÕt nh sau:

$$Z = \sum_i m_i \left(\overline{B_i C_i}\right)^2 \rightarrow Min \quad (2.1)$$

DÊu tæng trong (2.1) lÊy theo sè chÊt ®iÓm.

Sö dông nguyªn lý vËn tèc ¶o vµ nguyªn lý D 'Alembert, xÐt hÖ ë tr¹ng th¸i c©n b»ng vµ cho r»ng cã lùc víi ®é lín tØ lÖ víi ®é dµi $\overline{B_i C_i}$ t¸c dông theo chiÒu tõ C_i ®Õn B_i, Gauss ®· chøng minh nguyªn lý cña m×nh [1,tr. 172] .

§Ó cã thÓ sö dông nguyªn lý Gauss cÇn biÕt ®¹i l-îng biÕn ph©n cña nã. Theo [1,tr. 889], Gibbs (n¨m 1879) vµ Appell (n¨m 1899) ®i tõ c¸c lËp luËn kh¸c nhau ®Òu nhËn ®-îc nguyªn lý Gauss vµ chØ ra r»ng ®¹i l-îng biÕn ph©n cña nguyªn lý nµy lµ gia tèc. §iÒu nµy cã nghÜa lµ:

$$\delta r_i = 0 \; ; \qquad \delta \dot{r}_i = 0 \; ; \qquad \delta \ddot{r}_i \neq 0 \qquad (2.2)$$

ë ®©y δ lµ kÝ hiÖu biÕn ph©n (lÊy vi ph©n khi cè ®Þnh thêi gian), r_i, $\dot{r}_i$ vµ $\ddot{r}_i$ lÇn l-ît lµ vect¬ to¹ ®é, vect¬ vËn tèc vµ vect¬ gia tèc cña ®iÓm i. ChuyÓn dÞch cña chÊt ®iÓm cña hÖ cã liªn kÕt d-íi t¸c dông cña lùc F_i sau thêi ®o¹n dt tÝnh theo c«ng thøc sau ®©y:

$$r_i + \dot{r}_i dt + \frac{1}{2}\ddot{r}_i dt^2 \quad (2.3)$$

V× $\delta r_i = 0$ vµ $\delta \dot{r}_i = 0$ nªn chuyÓn dÞch cña chÊt ®iÓm hoµn toµn tù do (cã thÓ h×nh dung ë ®Çu thêi ®o¹n dt liªn kÕt ®-îc gi¶i phãng nh-ng vÉn gi÷ lùc t¸c dông) sau thêi ®o¹n dt lµ:

$$r_i + \dot{r}_i dt + \frac{1}{2}\frac{F_i}{m_i} dt^2 \qquad (2.4)$$

HiÖu cña (2.4) vµ (2.3) cho ta ®é lÖch vÞ trÝ cña chÊt ®iÓm cã liªn kÕt so víi vÞ trÝ cña nã khi hoµn toµn tù do.

Cã thÓ xem dt lµ h»ng th× l-îng c-ìng bøc Z theo (2.1) ®-îc viÕt d-íi d¹ng lùc nh- sau (víi ®é chÝnh x¸c b»ng thõa sè dt^4 / 4) :

$$Z = \sum_i m_i \left(\frac{F_i}{m_i} - \ddot{r}_i \right)^2 \rightarrow Min \qquad (2.5)$$

hoÆc

$$Z = \sum_i \frac{1}{m_i} \left(F_i - m_i \ddot{r}_i \right)^2 \rightarrow Min \qquad (2.5a)$$

Khi tÝnh l-îng c-ìng bøc theo (2.5) cÇn xem gia tèc lµ ®¹i l-îng biÕn ph©n (biÕn ph©n kiÓu Gauss theo c¸ch nãi cña Boltzmann). Nh- vËy, ph-¬ng ph¸p t×m cùc tiÓu cña c¸c bµi to¸n c¬ häc ®-îc x©y dùng theo nguyªn lý (2.5) kh«ng thÓ lµ bÊt kúmµ ph¶i lµ (khi kh«ng cã rµng bu«c nµo kh¸c):

$$\frac{\partial Z}{\partial \ddot{r}_i} = 0 \qquad (2.6)$$

§iÒu kiÖn (2.6) sÏ cho ta ph-¬ng tr×nh c©n b»ng. ThËt vËy, ¸p dông (2.6) vµo (2.5) ta nhËn ®-îc ph-¬ng tr×nh c©n b»ng cña hÖ (ë ®©y lùc t¸c dông b»ng lùc qu¸n tÝnh). Appell vµ Boltzmann (n¨m 1897) cßn cho biÕt nguyªn lý Gauss ®óng cho hÖ liªn kÕt holonom vµ c¶ hÖ liªn kÕt kh«ng holonom [1,tr. 890].

Nguyªn lý Gauss (2.1) hoÆc (2.5) cã d¹ng cña ph-¬ng ph¸p b×nh ph-¬ng tèi thiÓu lµ ph-¬ng ph¸p còng do Gauss ®-a ra vµ ®-îc dïng réng r·i trong to¸n häc hiÖn ®¹i, trong gi¶i tÝch còng nh- trong lêi gi¶i sè. Cã lÏ v× vËy nguyªn lý Gauss thu hót sù chó ý cña nhiÒu nhµ khoa häc, thÝ dô, Hertz (n¨m 1894) dùa trªn ý t-ëng l-îng c-ìng bøc ®-a ra nguyªn lý ®-êng th¼ng nhÊt (®-êng cã ®é cong nhá nhÊt) hoÆc Prigogine (n¨m 1954) vµ Gyarmati (n¨m 1965) ®· x©y dùng ®-îc l-îng c-ìng bøc cña c¸c qu¸ tr×nh kh«ng håi phôc trong nhiÖt ®éng lùc häc [2].

C¸c tµi liÖu gi¸o khoa vÒ c¬ häc th-êng giíi thiÖu nguyªn lý Gauss d-íi d¹ng (2.5) lµ d¹ng dïng ®-îc ®Ó tÝnh to¸n. Nh-ng nguyªn lý (2.5) víi ®¹i l-îng biÕn ph©n lµ gia tèc chØ lµ mét biÓu thÞ cña nguyªn lý Gauss (2.1) bëi v× ®¹i l-îng biÕn ph©n trong c¬ häc cßn cã thÓ lµ chuyÓn vÞ vµ vËn tèc nh- tr×nh bµy sau ®©y.

2.2. Ph-¬ng ph¸p nguyªn lý cùc trÞ Gauss.

Trong bµi viÕt cña m×nh Gauss nªu nhËn xÐt r»ng *nguyªn lý vËn tèc ¶o biÕn vÊn ®Ò tÜnh häc thµnh vÊn ®Ò to¸n häc thuÇn tuý, cßn nguyªn lý* D'Alembert ®-*a bµi to¸n ®éng lùc häc vÒ bµi to¸n tÜnh häc vµ mäi nguyªn lý cña c¬ häc hoÆc nhiÒu hoÆc Ýt ®Òu cã thÓ trùc tiÕp rót ra tõ hai nguyªn lý trªn.* D-íi ®©y tr×nh bµy ph-¬ng ph¸p dùa trªn nguyªn lý chuyÓn vÞ ¶o ®Ó nhËn ®-îc biÓu thøc (2.1) cña nguyªn lý Gauss.

XÐt hÖ chÊt ®iÓm cã liªn kÕt tuú ý ë mét thêi ®iÓm bÊt k× nµo ®ã cã nghÜa lµ ph¶i ®-a lùc qu¸n tÝnh f_i cña hÖ t¹i thêi ®iÓm ®ã t¸c dông lªn hÖ. §èi víi hÖ hoµn toµn tù do lùc qu¸n tÝnh f_{0i} cña nã b»ng víi ngo¹i lùc (chØ sè '0' ë ch©n kÝ tù chØ r»ng kÝ tù ®ã thuéc hÖ so s¸nh, tr-êng hîp nµy lµ hÖ hoµn toµn tù do cã cïng khèi l-îng vµ cïng chÞu t¸c dông lùc ngoµi gièng nh- hÖ cã liªn kÕt). Nh- vËy, c¸c lùc t¸c dông lªn hÖ cã liªn kÕt gåm c¸c lùc $f_i = m_i\ddot{r}_i$ vµ c¸c lùc $f_{0i} = m_i\ddot{r}_{0i}$ (thay cho ngo¹i lùc). Theo nguyªn lý chuyÓn vÞ ¶o ®èi víi liªn kÕt gi÷ (liªn kÕt d-íi d¹ng ®¼ng thøc) vµ kh«ng gi÷ (liªn kÕt d-íi d¹ng bÊt ®¼ng thøc) ®iÒu kiÖn cÇn vµ ®ñ ®Ó hÖ ë tr¹ng th¸i c©n b»ng lµ [1,tr. 887] :

$$\sum_i \left(f_i - f_{0i} \right) \delta r_i \le 0$$

(2.7)

BiÓu thøc (2.7) còng ®-îc Fourier (n¨m 1798) vµ Ostrogradsky (n¨m 1838) ®éc lËp ®-a ra.

Cã thÓ nhËn xÐt ngay r»ng phÇn trong ngoÆc ®¬n cña (2.7) biÓu thÞ lùc t¸c dông lªn hÖ nªn ph¶i b»ng kh«ng ®Ó hÖ ë tr¹ng th¸i c©n b»ng.

Trong biÓu thøc (2.7) cÇn xem c¸c chuyÓn vÞ r_i ®éc lËp ®èi víi lùc t¸c dông. Cho nªn tõ (2.7) cã thÓ viÕt:

$$Z = \sum_i \left(f_i - f_{0i} \right) r_i \to Min$$

(2.8)

Trong (2.8) r_i lµ c¸c biÕn ®éc lËp cÇn t×m ®Ó b¶o ®¶m cho Z cùc tiÓu. V× chuyÓn vÞ r_{0i} cña hÖ hoµn toµn tù do ®· biÕt nªn biÓu thøc (2.8) t-¬ng ®-¬ng víi c¸c biÓu thøc d-íi ®©y:

$$Z = \sum_i \left(f_i - f_{0i} \right) \left(r_i - r_{0i} \right) \to Min$$

(2.8a)

hoÆc

$$Z = \sum_i m_i \left[\frac{f_i}{m_i} - \ddot{r}_{0i} \right] (r_i - r_{0i}) \to Min$$

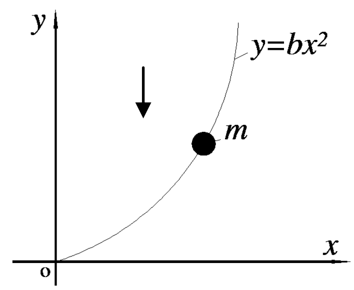
(2.8b)

DÔ dµng nhËn thÊy (2.8b) lµ tÝch cña khèi l-îng m_i víi b×nh ph-¬ng ®é lÖch vÞ trÝ chÊt ®iÓm vµ do ®ã Z x¸c ®Þnh theo (2.8) lµ l-îng c-ìng bøc cña nguyªn lý Gauss (víi ®é chÝnh x¸c b»ng thõa sè $dt^2/2$). So víi (2.5), l-îng c-ìng bøc Z x¸c ®Þnh theo (2.8) biÓu thÞ ®Çy ®ñ vµ râ rµng t- t-ëng cña nguyªn lý Gauss thÓ hiÖn ë chç, thø nhÊt, nã cho phÐp so s¸nh hÖ cã liªn kÕt víi hÖ hoµn toµn tù do, thø hai, ®¹i l-îng kh«ng biÕt (®¹i l-îng biÕn ph©n) trong (2.8) lµ chuyÓn vÞ gièng nh- trong (2.1). Cùc tiÓu cña (2.8) cÇn vµ ph¶i ®-îc t×m tõ ®iÒu kiÖn (khi kh«ng cã c¸c rµng buéc nµo kh¸c):

$$\frac{\partial Z}{\partial r_i} = 0 \qquad (2.9)$$

§iÒu kiÖn (2.9) ¸p dông vµo (2.8) cho ta ph-¬ng tr×nh c©n b»ng cña c¬ hÖ.

<u>VÝ dô 1</u> VÝ dô nµy lÊy tõ [3,tr. 64]. ViÕt ph-¬ng tr×nh chuyÓn ®éng cña khèi l-îng m ch¹y trªn ®-êng cong y= bx^2 trong mÆt ph¼ng (xy), kh«ng cã lùc ma s¸t, d-íi t¸c dông cña tr-êng gia tèc g (H×nh 1.1).



H×nh 1.1

C¸c lùc t¸c dông lªn khèi l-îng m bao gåm: lùc qu¸n tÝnh theo chiÒu y, lùc träng tr-êng theo chiÒu ©m cña y, lùc qu¸n tÝnh theo x. Chän hÖ so s¸nh lµ hÖ cã cïng khèi l-îng m n»m trong tr-êng gia tèc g nh-ng hoµn toµn tù do. L-îng c-ìng bøc ®-îc viÕt theo (2.8) nh- sau:

$$Z = (m\ddot{y} + mg)y + (m\ddot{x})x \rightarrow Min \qquad (a)$$

ThÕ $y = bx^2$ vµo (a) ta cã

$$Z = (m\ddot{y} + mg)bx^2 + (m\ddot{x})x \rightarrow Min \qquad (b)$$

Xem chuyÓn vÞ x lµ biÕn ®éc lËp vµ tõ ®iÒu kiÖn $\frac{\partial Z}{\partial x} = 0$ nhËn ®îc:

$$2bx\ddot{y} + 2bgx + \ddot{x} = 0 \qquad \text{(c)}$$

Thay $\ddot{y} = 2bx\ddot{x} + 2b\dot{x}^2$ vµo (c) nhËn ®îc ph¬ng tr×nh chuyÓn ®éng cña khèi lîng m:

$$(4b^2x^2 + 1)\ddot{x} + 4b^2x\dot{x}^2 + 2bgx = 0 \qquad \text{(d)}$$

Ph¬ng tr×nh (d) lµ kÕt qu¶ cÇn t×m.

Nh nhËn xÐt cña Gauss nªu trªn, cã thÓ nãi biÓu thøc (2.7) ®· biÕn vÊn ®Ò tÜnh häc (c©n b»ng lùc) thµnh vÊn ®Ò to¸n häc thuÇn tuý. ThËt vËy, nÕu ta dïng gia tèc lµ ®¹i lîng biÕn ph©n th× t¬ng tù nh (2.7) cã thÓ viÕt:

$$\sum_i (f_i - f_{0i})\delta \ddot{r}_i \le \quad 0 \qquad (2.10)$$

Víi ®iÒu kiÖn gia tèc $\ddot{r}_I$ lµ ®¹i lîng ®éc lËp ®èi víi lùc t¸c dông.

Tõ (1.10) cã thÓ viÕt:

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i})\ddot{r}_i \to Min \qquad (2.11)$$

Trong (2.11) cÇn xem gia tèc $\ddot{r}_i$ lµ ®¹i lîng biÕn ph©n ®Ó b¶o ®¶m cho Z cùc tiÓu. V× gia tèc $\ddot{r}_{0i}$ cña hÖ hoµn toµn tù do ®· biÕt nªn biÓu thøc (2.11) t¬ng ®¬ng víi c¸c biÓu thøc díi ®©y:

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i})(\ddot{r}_i - \ddot{r}_{0i}) \to Min \qquad (2.11a)$$

hoÆc $Z = \sum_i m_i\left(\frac{f_i}{m_i} - \ddot{r}_{0i}\right)(\ddot{r}_i - \ddot{r}_{0i}) \to Min$

$$Z = \sum_i m_i.(\ddot{r}_i - \ddot{r}_{0i})^2 \to Min \qquad (2.11b)$$

Ta thÊy (2.11b) trïng víi (2.5). C¸c gia tèc $\ddot{r}_i$ ph¶i tháa m·n c¸c liªn kÕt nÕu cã vµ ®iÒu kiÖn cùc tiÓu cña (2.11) lµ biÓu thøc (2.6).

VÝ dô 2 . Lµm l¹i vÝ dô 1 (H×nh 1) theo nguyªn lÝ (2.5) hoÆc biÓu thøc (2.11)

Khèi l-îng m võa chuyÓn ®éng theo x, võa chuyÓn ®éng theo y, nh-ng do cã liªn kÕt *y= bx*^{2} nªn chØ cã mét bËc tù do, thÝ dô lµ *x*. C¸c lùc t¸c dông lªn *m* bao gåm: Lùc qu¸n tÝnh theo chiÒu *y*, lùc träng tr-êng theo chiÒu ©m cña *y*, lùc qu¸n tÝnh theo *x*. L-îng c-ìng bøc *Z* viÕt theo (2.5) lµ:

$$Z = m\left(\frac{mg}{m}+\ddot{y}\right)^2 + m\ddot{x}^2 \rightarrow Min \qquad \text{(a)}$$

LÊy ®¹o hµm rµng buéc *y=bx*^{2} theo thêi gian hai lÇn ta cã:

$$\ddot{y} = 2bx\ddot{x} + 2b\dot{x}^2 \qquad \text{(b)}$$

Thay $\ddot{y}$ trong (a) b»ng (b), nhËn ®-îc:

$$Z = (g + 2bx\ddot{x} + 2b\dot{x}^2)^2 + \ddot{x}^2 \rightarrow Min \qquad \text{(c)}$$

Xem gia tèc $\ddot{x}$ lµ biÕn ®éc lËp vµ tõ ®iÒu kiÖn $\partial Z/\partial\ddot{x} = 0$ ta cã ph-¬ng tr×nh chuyÓn ®éng cña khèi l-îng m nh- sau:

$$(4b^2x^2+1)\ddot{x} + 4b^2x\dot{x}^2 + 2bgx = 0 \qquad \text{(d)}$$

Ph-¬ng tr×nh (d) lµ kÕt qu¶ cÇn t×m.

T-¬ng tù, còng cã thÓ dïng vËn tèc $\dot{r}_i$ lµ ®¹i l-îng biÕn ph©n, khi ®ã l-îng c-ìng bøc Z ®-îc viÕt:

$$Z = \sum_i \left(f_i - f_{0i}\right)\dot{r}_i \rightarrow Min \qquad (2.12)$$

Víi ®iÒu kiÖn vËn tèc $\dot{r}_i$ lµ biÕn ®éc lËp vµ tho¶ m·n c¸c liªn kÕt nÕu cã. Trong tr-êng hîp nµy ®iÒu kiÖn cùc tiÓu cña nguyªn lý(2.12) sÏ lµ (khi kh«ng cã rµng buéc nµo kh¸c):

$$\frac{\partial Z}{\partial \dot{r}_i} = 0 \qquad (2.13)$$

Lµm l¹i bµi to¸n cña vÝ dô 1 víi ®¹i l-îng biÕn ph©n lµ vËn tèc (biÓu thøc 2.12) còng cho ta kÕt qu¶ ®óng ®¾n.

Tãm l¹i, c¸c nguyªn lý (2.5) hoÆc (2.11) víi ®¹i l-îng biÕn ph©n lµ gia tèc ®éc lËp ®èi víi lùc t¸c dông, nguyªn lý (2.8) víi ®¹i l-îng biÕn ph©n lµ chuyÓn vÞ ®éc lËp ®èi víi lùc t¸c dông vµ nguyªn lý (2.12) víi ®¹i l-îng biÕn ph©n lµ vËn tèc ®éc lËp ®çi víi lùc t¸c dông ®· biÕn ph-¬ng tr×nh c©n b»ng lùc (vÊn ®Ò c¬ häc) thµnh c¸c bµi to¸n to¸n häc thuÇn tuý vµ cã thÓ ®-îc ph¸t biÓu nh- sau : *ChuyÓn ®éng thùc cña c¬ hÖ x¶y ra khi l-îng c-ìng bøc Z.*

- *X¸c ®Þnh theo (2.5) th× ®-îc t×m theo gia tèc , ®iÒu kiÖn (2.6)*
- *X¸c ®Þnh theo (2.8) th× ®-îc t×m theo chuyÓn vÞ, ®iÒu kiÖn (2.9)*
- *X¸c ®Þnh theo (2.12) th× ®-îc t×m theo vËn tèc, ®iÒu kiÖn (2.13)*

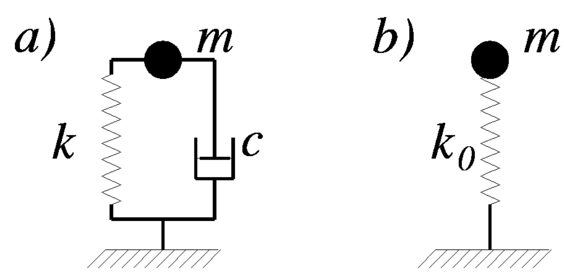
lµ cùc tiÓu.

§-¬ng nhiªn, c¸c ®¹i l-îng biÕn ph©n gia tèc, chuyÓn vÞ vµ vËn tèc ph¶i tháa m·n c¸c ®iÒu kiÖn liªn kÕt cña hÖ.

§Ó cã thÓ ¸p dông cho c¶ c¸c bµi to¸n tÜnh cña m«i tr-êng liªn tôc ta sÏ dïng nguyªn lý (2.8) víi ®¹i l-îng biÕn ph©n lµ chuyÓn vÞ vµ ®iÒu kiÖn cùc tiÓu lµ (2.9). Nguyªn lÝ (2.5) kh«ng cho phÐp gi¶i c¸c bµi to¸n tÜnh. Do ®ã, c¸ch tr×nh bµy nguyªn lý Gauss d-íi d¹ng nµy ®· h¹n chÕ viÖc sö dông nguyªn lý trong c¬ häc.

Cã thÓ më réng nguyªn lý Gauss b»ng c¸ch so s¸nh hÖ cÇn tÝnh víi hÖ cã liªn kÕt tuú ý chÞu t¸c dông cña lùc gièng nh- hÖ cÇn tÝnh mµ lêi gi¶i cña nã ®· biÕt. Khi ®ã thay cho lùc ngoµi ta dïng lùc liªn kÕt vµ lùc qu¸n tÝnh cña hÖ so s¸nh víi dÊu ng-îc l¹i ®Ó t¸c ®éng lªn hÖ cÇn tÝnh. §iÒu nµy lµ hiÓn nhiªn bëi v× ngo¹i lùc lu«n c©n b»ng víi néi lùc. XÐt vÝ dô minh häa sau:

VÝ dô 3: HÖ cÇn tÝnh lµ khèi l-îng m cã liªn kÕt lß xo ®é cøng k vµ liªn kÕt nhít víi hÖ sè nhít c chÞu t¸c dông lùc p(t) (H×nh 2.2). XÐt dao ®éng th¼ng ®øng u(t) cña m so víi vÞ trÝ c©n b»ng tÜnh cña nã. Bµi to¸n cã mét bËc dao ®éng tù do. Ta chän hÖ so s¸nh cã khèi l-îng m_0 vµ liªn kÕt lß xo ®é cøng k_0 cïng chÞu lùc p(t) (H×nh 2.2.b).



H×nh 2.2 a) HÖ cÇn tÝnh; b) HÖ so s¸nh.

Dao ®éng u_0(t) cña hÖ so s¸nh (so víi vÞ trÝ c©n b»ng tÜnh cña nã) x¸c ®Þnh tõ ph-¬ng tr×nh c©n b»ng sau:

$$m_0\ddot{u}_0 + k_0 u_0 = p(t) \qquad \text{(a)}$$

Lùc t¸c dông lªn khèi l-îng m gåm cã: lùc qu¸n tÝnh $m\ddot{u}$, lùc c¶n lß xo ku, lùc c¶n nhít $c\dot{u}$ vµ lùc p(t) ®-îc thay b»ng néi lùc cña hÖ so s¸nh. L-îng c-ìng bøc theo (2.8) viÕt ®-îc:

$$Z \;=\; (m\ddot{u} + c\dot{u} + ku - m_0\ddot{u}_0 - k_0u_0)u \rightarrow Min \qquad \text{(b)}$$

PhÇn trong dÊu ngoÆc ®¬n cña (b) biÓu thÞ lùc t¸c dông vµ theo nguyªn lý chuyÓn vÞ (2.8) cÇn xem chuyÓn vÞ u lµ biÕn ®éc lËp ®èi víi lùc t¸c dông th× tõ ®iÒu kiÖn $\partial Z/\partial u = 0$ nhËn ®-îc ph-¬ng tr×nh c©n b»ng cña hÖ cÇn tÝnh:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = m_0\ddot{u}_0 + k_0u_0 \qquad \text{(c)}$$

hay chó ý tíi (a) ta cã:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \qquad \text{(d)}$$

Nh×n vµo (c) vµ (d) thÊy r»ng thay cho viÖc gi¶i ph-¬ng tr×nh vi ph©n c©n b»ng (d) cña hÖ cÇn tÝnh ta cã thÓ gi¶i ph-¬ng tr×nh (c) øng víi tõng thêi ®iÓm. VÕ ph¶i cña (c) cã thÓ lµ nghiÖm riªng hoÆc nghiÖm c¬ b¶n (tr-êng hîp p(t) lµ xung ®¬n vÞ) cña (d) hoÆc, mét c¸ch tæng qu¸t, lµ thÓ hiÖn cña p(t) trªn hÖ bÊt k× nµo kh¸c (lêi gi¶i cña hÖ bÊt k× khi chÞu t¸c ®éng cña p(t)). NhËn xÐt nµy rÊt h÷u Ých bëi v× nã cho ta mét ph-¬ng ph¸p n÷a ®Ó gi¶i c¸c ph-¬ng tr×nh vi ph©n phøc t¹p, ®Æc biÖt lµ ®èi víi c¸c bµi to¸n cã ®iÒu kiÖn biªn ë v« h¹n hoÆc lµ khi gi¶i b»ng sè.

L-îng c-ìng bøc Z theo (b) cã thÓ viÕt d-íi d¹ng sau:

$$Z = Z1 + Z2 + Z3 \rightarrow Min \qquad \text{(e)}$$

$$Z1 = \frac{1}{k}(ku - k_0u_0)^2, \qquad Z2 = 2c\dot{u}u, \qquad Z3 = 2m(\ddot{u} - \ddot{u}_0)u \qquad \text{(f)}$$

ë ®©y Z1 viÕt d-íi d¹ng b×nh ph-¬ng tèi thiÓu. V× Z1 ®-îc viÕt d-íi d¹ng b×nh ph-¬ng tèi thiÓu nªn c¸c ®¹i l-îng Z2 vµ Z3 ph¶i nh©n víi hÖ sè 2. C¸c biÓu thøc l-îng c-ìng bøc (b) vµ (e),(f) lµ t-¬ng ®-¬ng.

Nh÷ng nhËn xÐt rót ra tõ vÝ dô minh häa nªu trªn ¸p dông ®óng cho bÊt k× hÖ nµo kh¸c.

Tr×nh bµy trªn cho thÊy cã thÓ dïng hÖ cã liªn kÕt bÊt k× ®Ó lµm hÖ so s¸nh cho nªn cã thÓ më réng biÓu thøc (2.8) nh sau :

$$Z = \sum_i \left(f_i - f_{0i}\right) r_i \to Min \qquad (2.14)$$

Víi f_i lµ néi lùc bao gåm lùc qu¸n tÝnh vµ lùc liªn kÕt nÕu cã cña hÖ cÇn tÝnh, f_{0i} lµ néi lùc vµ lùc liªn kÕt ®· biÕt cña hÖ so s¸nh bÊt kú chÞu t¸c dông lùc ngoµi gièng nh hÖ cÇn tÝnh.

Chó ý r»ng khi sö dông biÓu thøc (2.14) cÇn xem chuyÓn vÞ r_i lµ ®¹i lîng ®éc lËp ®èi víi lùc vµ ph¶i tháa m·n c¸c ®iÒu kiÖn liªn kÕt nÕu cã. Bëi v× cùc tiÓu cña lîng cìng bøc Z ph¶i ®îc t×m theo (2.9) (khi kh«ng cã c¸c rµng buéc nµo kh¸c) nghÜa lµ ph¶i gi¶i ph¬ng tr×nh c©n b»ng cña c¬ hÖ nªn bµi to¸n lu«n cã nghiÖm vµ nghiÖm lµ duy nhÊt.

Ph¬ng ph¸p cña nguyªn lý (2.14) cho phÐp dïng hÖ so s¸nh bÊt k×. §¹i lîng biÕn ph©n cña (2.14) lµ chuyÓn vÞ,®iÒu kiÖn cùc tiÓu cña nã lµ biÓu thøc (2.9). Ph¬ng ph¸p nµy do GS. TSKH Hµ Huy C¬ng ®Ò xuÊt vµ ®îc gäi lµ ph¬ng ph¸p nguyªn lý cùc trÞ Gauss.

BiÓu thøc (2.7) trong c¸c gi¸o tr×nh c¬ häc thêng mang dÊu b»ng, nghÜa lµ chØ xÐt trêng hîp liªn kÕt gi÷ vµ khi ®ã tõ (2.7) sÏ nhËn ®îc nguyªn lý c«ng ¶o. Cã thÓ nãi biÓu thøc (2.7) víi dÊu nhá thua hoÆc b»ng lµ sù kh¸c biÖt c¬ b¶n gi÷a nguyªn lý c¬ häc cña Gauss víi c¬ häc dùa trªn nguyªn lý c«ng ¶o hiÖn dïng.

2.3. C¬ hÖ m«i trêng liªn tôc: øng suÊt vµ biÕn d¹ng.

Trong môc nµy tr×nh bµy ph¬ng ph¸p nguyªn lýGauss ®èi víi c¬ hÖ m«i trêng liªn tôc. Muèn vËy cÇn biÕt kh¸i niÖm øng suÊt vµ biÕn d¹ng cña m«i trêng liªn tôc. §Ó tr×nh bµy gän díi ®©y dïng c¸c ®¹i lîng tenx¬ víi c¸ch hiÓu nh sau [4 ,tr.196]:

$$a_i a_i = a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2$$

$$a_{kk} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

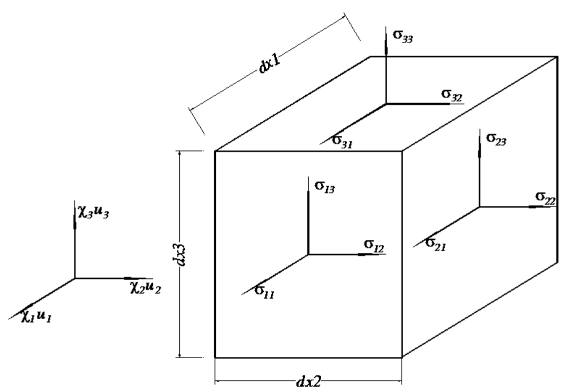
vµ hÖ sè Kronecker:

δ_{ij} = 1 khi i = j

δ_{ij} = 0 khi $i \neq j$

víi i = 1,2,3 ; j = 1,2,3 ; k = 1,2,3 ®èi víi kh«ng gian 3 chiÒu.

Cã thÓ nãi ®èi tîng nghiªn cøu cña c¬ hÖ m«i trêng liªn tôc trong to¹ ®é vu«ng gãc lµ ph©n tè khèi ch÷ nhËt (ba chiÒu, kÝch thíc v« cïng bÐ) hoÆc ph©n tè ch÷ nhËt (hai chiÒu, kÝch thíc v« cïng bÐ) ®îc t¸ch ra tõ m«i trêng (h×nh 2.3).



H×nh 2.3. Tr¹ng th¸i øng suÊt ph©n tè

Khi ®ã lÝ thuyÕt øng suÊt cho thÊy ngoµi c¸c lùc th«ng thêng (lùc g©y c¸c chuyÓn vÞ tÞnh tiÕn trong c¬ hÖ chÊt ®iÓm) trªn bÒ mÆt ph©n tè cßn cã c¸c øng suÊt t¸c dông.

Cã 9 øng suÊt σ_{ij} t¸c dông lªn bÒ mÆt ph©n tè. Thø nguyªn cu¶ øng suÊt b»ng lùc chia cho ®¬n vÞ diÖn tÝch.

Tõ ®iÒu kiÖn c©n b»ng lùc vµ momen sÏ nhËn ®-îc ph-¬ng tr×nh c©n b»ng tÜnh cña ph©n tè:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \qquad (2.15)$$

Trong (2.15) σ_{ij} lµ øng suÊt , $\sigma_{ij,j}$ biÓu thÞ ®¹o hµm cña øng suÊt theo to¹ ®é kh«ng gian, $\partial\sigma_{ij}/\partial x_j = \sigma_{ij,j}$, b_i lµ lùc khèi (lùc khèi xem nh- lµ lùc c¶n). NÕu kh«ng cã lùc momen khèi th× tõ ph-¬ng tr×nh c©n b»ng sÏ cã:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \qquad (2.16)$$

Sè øng suÊt ®éc lËp t¸c dông lªn bÒ mÆt ph©n tè chØ cßn 6 . LÝ thuyÕt øng suÊt cho thÊy khi biÕt tr¹ng th¸i øng suÊt ph©n tè th× sÏ x¸c ®Þnh ®-îc tr¹ng th¸i lùc t¹i ®iÓm ®ã cña m«i tr-êng vµ ng-îc l¹i.

Khi chÞu t¸c dông ngo¹i lùc, ph©n tè chuyÓn ®éng vµ biÕn h×nh. Lý thuyÕt biÕn d¹ng cho thÊy ngoµi c¸c chuyÓn vÞ u_i ph©n tè cßn chÞu c¸c biÕn d¹ng ε_{ij} . NÕu xem biÕn d¹ng lµ bÐ (b×nh ph-¬ng hoÆc tÝch hai biÕn d¹ng lµ nhá so víi chÝnh nã) th× c¸c biÕn d¹ng ®-îc x¸c ®Þnh theo c¸c ph-¬ng tr×nh sau:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \qquad (2.17)$$

C¸c ε_{ij} lµ c¸c ®¹i l-îng kh«ng thø nguyªn. T-¬ng tù nh- tenx¬ σ_{ij}, tenx¬ ε_{ij} ®èi xøng vµ cã 6 biÕn d¹ng ®éc lËp t-¬ng øng víi 6 øng suÊt.

Tõ (2.17) thÊy r»ng tr¹ng th¸i chuyÓn vÞ x¸c ®Þnh duy nhÊt tr¹ng th¸i biÕn d¹ng, nh-ng ng-îc l¹i kh«ng

®óng bëi v× cã nh÷ng chuyÓn vÞ kh«ng g©y biÕn d¹ng (chuyÓn vÞ cña vËt r¾n tuyÖt ®èi). Ngoµi c¸c ph-¬ng tr×nh nªu trªn, ®Ó b¶o ®¶m tÝnh liªn tôc cña m«i tr-êng cßn cã c¸c c¸c ph-¬ng tr×nh vÒ ®iÒu kiÖn kh«ng bÞ gi¸n ®o¹n.

Tïy theo tÝnh chÊt c¬ häc cña vËt liÖu m«i tr-êng mµ cã c¸c liªn hÖ kh¸c nhau gi÷a øng suÊt vµ biÕn d¹ng. Do cã 6 øng suÊt vµ 6 biÕn d¹ng nªn mét c¸ch tæng qu¸t cÇn biÕt 36 th«ng sè tÝnh chÊt vËt liÖu. Tuy nhiªn tõ ®iÒu kiÖn biÓu thÞ n¨ng l-îng biÕn d¹ng ph¶i gièng nhau con sè 36 rót xuèng cßn 21. §èi víi vËt liÖu ®¼ng h-íng chØ cßn 2 th«ng sè tÝnh chÊt vËt liÖu ®éc lËp ®-îc chän trong sè c¸c th«ng sè sau: hai h»ng sè LamÐ μ vµ λ, m«®un Young E, m«®un tr-ît G vµ hÖ sè Poisson ν, gi÷a chóng cã c¸c liªn hÖ sau ®©y:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \qquad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad (2.18)$$

§èi víi vËt liÖu ®ång nhÊt, ®¼ng h-íng, tu©n theo ®Þnh luËt Hóc (Hooke) th× liªn hÖ gi÷a øng suÊt vµ biÕn d¹ng sÏ lµ:

$$\sigma_{ij} = 2G\left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\right) \qquad (2.19)$$

Tõ c«ng thøc (2.19) thÊy r»ng øng suÊt σ_{ij} kh«ng nh÷ng phô thuéc vµo biÕn d¹ng ε_{ij} theo ph-¬ng cña nã mµ cßn phô thuéc vµo c¸c biÕn d¹ng theo c¸c ph-¬ng kh¸c th«ng qua hÖ sè Poisson ν. HÖ sè 2G ®Ó tiÖn tr×nh bµy sau nµy sÏ ®-îc gäi lµ ®*é cøng cña biÕn d¹ng*.

Nh÷ng tr×nh bµy trªn cho thÊy ®èi víi c¬ hÖ m«i tr-êng liªn tôc cÇn xem c¸c biÕn d¹ng ε_{ij} lµ ®éc lËp ®èi víi nhau vµ ®-îc x¸c ®Þnh theo ph-¬ng tr×nh (2.17), cÇn xÐt c¸c ph¬ng tr×nh vÒ ®iÒu kiÖn kh«ng bÞ gi¸n ®o¹n cña m«i trêng vµ liªn hÖ gi÷a øng suÊt vµ biÕn d¹ng. §èi víi m«i trêng ®µn håi, ®ång nhÊt, ®¼ng híng liªn hÖ øng suÊt - biÕn d¹ng lÊy theo (2.19) vµ ®iÒu kiÖn kh«ng bÞ gi¸n ®o¹n cña m«i trêng tù ®éng tho¶ m·n khi biÓu thÞ øng suÊt qua chuyÓn vÞ.

Tãm l¹i, kh¸c víi c¬ hÖ chÊt ®iÓm, trong m«i trêng liªn tôc ngoµi lùc khèi vµ lùc qu¸n tÝnh lµ c¸c lùc t¸c dông g©y chuyÓn vÞ, cßn ph¶i xÐt thªm c¸c øng suÊt σ_{ij} g©y ra c¸c biÕn d¹ng ε_{ij}.

Tõ nhËn xÐt võa nªu, cã thÓ sÏ cã Ých ®èi víi nhËn thøc khi ®a ra c¸c nhËn ®Þnh tæng qu¸t vÒ mèi t¬ng quan gi÷a c¬ häc chÊt ®iÓm vµ c¬ hÖ m«i trêng liªn tôc nh sau:

- Kh¸i niÖm c¬ b¶n cña c¬ chÊt ®iÓm lµ chÊt ®iÓm, c¸c lùc t¸c dông lªn chÊt ®iÓm g©y ra c¸c chuyÓn vÞ, ®Æc trng cña chÊt ®iÓm lµ khèi lîng;
- Kh¸i niÖm c¬ b¶n cña c¬ hÖ m«i trêng liªn tôc lµ mÆt c¾t ph©n tè, c¸c øng suÊt g©y ra c¸c biÕn d¹ng, c¸c ®Æc trng cña mÆt c¾t ph©n tè lµ c¸c ®é cøng biÕn d¹ng t¬ng øng víi c¸c øng suÊt. C¸c ®é cøng nµy x¸c ®Þnh tïy theo tÝnh chÊt vËt liÖu m«i trêng. Trong c¬ hÖ m«i trêng liªn tôc cßn cã lùc khèi vµ lùc qu¸n tÝnh g©y chuyÓn vÞ gièng nh trong c¬ hÖ chÊt ®iÓm. Do ®ã, cã thÓ tãm t¾t mèi t¬ng quan võa nªu díi d¹ng:

ChÊt ®iÓm $\Leftrightarrow$ *MÆt c¾t ph©n tè*

Lùc

$\Leftrightarrow$ *Lùc*

C¸c øng suÊt

Chuyón vÞ

⇔ Chuyón vÞ

BiÕn d¹ng

Khèi l-îng

⇔ Khèi l-îng

C¸c ®é cøng biÕn d¹ng

KÝ hiÖu ⇔ chØ sù t-¬ng ®-¬ng gi÷a c¸c kh¸i niÖm. Víi c¸ch hiÓu nµy còng dÔ dµng x©y dùng phiÕm hµm l-îng c-ìng bøc t-¬ng tù nh- (2.14) ®èi víi c¬ hÖ m«i tr-êng liªn tôc bÊt kú ®-îc tr×nh bµy sau ®©y.

Tr-íc tiªn, ta dïng hÖ so s¸nh lµ hÖ chÊt ®iÓm cã cïng khèi l-îng, cïng chÞu t¸c dông lùc ngoµi vµ hoµn toµn tù do. §èi víi m«i tr-êng liªn tôc cÇn xÐt thªm øng suÊt vµ biÕn d¹ng nªn l-îng c-ìng bøc Z cña hÖ viÕt t-¬ng tù (2.14) nh- sau:

$$Z.... = ..Z1 + Z2 \rightarrow Min$$

$$Z1 = \int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dV \quad , \quad Z2 = \int_V (\rho \ddot{u}_i u_i + b_i u_i - \rho \ddot{u}_{0i} u_i) dF \quad (2.20)$$

Trong (2.20) V lµ thÓ tÝch vËt thÓ, ρ lµ khèi l-îng ®¬n vÞ. Lùc qu¸n tÝnh lµ lùc c¶n nªn trong (2.20) mang dÊu céng. L-îng c-ìng bøc *Z1* xÐt øng suÊt cña m«i tr-êng liªn tôc cÇn tÝnh, hÖ chÊt ®iÓm so s¸nh kh«ng cã øng suÊt. L-îng c-ìng bøc *Z2* xÐt lùc khèi vµ lùc qu¸n tÝnh cña m«i tr-êng liªn tôc, lùc qu¸n tÝnh cña hÖ chÊt ®iÓm so s¸nh. C¸c lùc nµy ®Òu g©y chuyÓn vÞ *u*.

Theo ph-¬ng ph¸p nguyªn lý cùc trÞ Gauss, trong (2.20) cÇn xem c¸c biÕn d¹ng ε_{ij} lµ ®éc lËp ®èi víi c¸c øng suÊt σ_{ij} vµ c¸c chuyÓn vÞ u_i lµ ®éc lËp ®èi víi lùc t¸c dông (ë ®©y lµ lùc khèi vµ lùc qu¸n tÝnh) vµ ®éc lËp ®èi víi nhau. §iÒu kiÖn cùc tiÓu cña (2.20) lµ:

$$\frac{\partial Z1}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial Z2}{\partial u_i} = 0 \quad (2.21.a)$$

NÕu biÕn d¹ng ε_{ij} biÓu thÞ qua chuyÓn vÞ (c«ng thøc (2.17)) th× ®iÒu kiÖn cùc tiÓu cña (2.20) ®-îc viÕt nh- sau:

$$\frac{\partial Z1}{\partial \varepsilon_{ij}}\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial u_i} + \frac{\partial Z2}{\partial u_i} = 0 \quad (2.21.b)$$

Tõ ®iÒu kiÖn (2.21.a) nhËn ®-îc:

$$\sigma_{ij,j} + b_i + \rho \ddot{u}_i - \rho \ddot{u}_{0i} = 0 \quad (2.22)$$

Ph-¬ng tr×nh (2.22) lµ ph-¬ng tr×nh vi ph©n c©n b»ng cña c¬ hÖ m«i tr-êng liªn tôc d-íi d¹ng øng suÊt.

NÕu t¹i ®iÓm ®ang xÐt kh«ng cã lùc ngoµi t¸c dông th× $\rho\ddot{u}_{0y}$ bÞ triÖt tiªu, ph-¬ng tr×nh (2.22) lµ ph-¬ng tr×nh c©n b»ng ®éng lùc häc th-êng gÆp cña c¬ hÖ m«i tr-êng liªn tôc. Tr-êng hîp bµi to¸n tÜnh, $\rho\ddot{u}_i$ còng b»ng kh«ng, ph-¬ng tr×nh (2.22) khi ®ã trïng víi (2.15).

DÔ dµng nhËn ®-îc ph-¬ng tr×nh vi ph©n c©n b»ng d-íi d¹ng chuyÓn vÞ b»ng c¸ch ®-a liªn hÖ øng suÊt - biÕn d¹ng vµo ph-¬ng tr×nh (2.22) hoÆc vµo phiÕm hµm (2.20).Trong môc (2.5) d-íi ®©y sÏ trë l¹i vÊn ®Ò nµy.

CÇn nªu nhËn xÐt r»ng biÓu thøc (2.20) cho phÐp so s¸nh c¬ hÖ m«i tr-êng liªn tôc víi c¬ hÖ chÊt ®iÓm hoµn toµn tù do khi hai hÖ cïng chÞu lùc ngoµi nh- nhau. Trong (2.20) kh«ng chøa c¸c th«ng sè tÝnh chÊt vËt liÖu cña m«i tr-êng nªn nã ®óng víi m«i tr-êng bÊt kú.

XÐt c¸c tr-êng hîp kh¸c cña phiÕm hµm l-îng c-ìng bøc (2.20):

- Trêng hîp kh«ng dïng hÖ so s¸nh th× ph¶i ®a lùc ngoµi pi vµo (2.20). Lùc pi thêng t¸c dông lªn bÒ mÆt Ω cña vËt nªn ta viÕt:

$$Z = \int_V (\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + \rho\ddot{u}_i u_i - b_i u_i)dv - \int_\Omega p\ u_i d\Omega \rightarrow Min \qquad (2.23)$$

- Cã thÓ dïng hÖ so s¸nh còng lµ c¬ hÖ m«i trêng liªn tôc cã liªn kÕt bÊt kú víi ®iÒu kiÖn hai hÖ cïng chÞu lùc ngoµi gièng nhau:

$$Z = \int_V \left[(\sigma_{ij} - \sigma_{0ij})\varepsilon_{ij} + (\rho\ddot{u}_i - \rho_0\ddot{u}_{0i})u_i - (b_i - b_{0i})u_i\right]dv \rightarrow Min \qquad (2.24)$$

Gièng nh ®· tr×nh bµy ë vÝ dô 3, thùc chÊt cña ph¬ng ph¸p nguyªn lý cùc trÞ Gauss lµ dïng néi lùc cña hÖ so s¸nh t¸c dông lªn hÖ cÇn t×m.

- §èi víi bµi to¸n tÜnh, lùc qu¸n tÝnh triÖt tiªu, khi kh«ng xÐt lùc khèi, biÓu thøc (2.24) cã d¹ng:

$$Z = \int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{0ij})\varepsilon_{ij}dv \rightarrow Min \qquad (2.25)$$

- §èi víi bµi to¸n tÜnh, kh«ng xÐt lùc khèi, kh«ng dïng hÖ so s¸nh, tõ (2.23) ta cã:

$$Z = \int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dv - \int_\Omega p_i u_i d\Omega \rightarrow Min \qquad (2.26)$$

C¸c chuyÓn vÞ u_i vµ biÕn d¹ng ε_{ij} (x¸c ®Þnh theo (2.17)) trong c¸c phiÕm hµm (2.20, 2.23, 2.24, 2.25) vµ (2.26) lµ nh÷ng ®¹i lîng ®éc lËp ®èi víi lùc t¸c dông vµ øng suÊt vµ ph¶i tho¶ m·n c¸c ®iÒu kiÖn liªn kÕt nÕu cã. ChuyÓn ®éng thùc cña c¬ hÖ m«i trêng liªn tôc x¶y ra khi cùc tiÓu c¸c phiÕm hµm lîng cìng bøc võa nªu theo

®iÒu kiÖn (2.21) nÕu kh«ng cã c¸c ®iÒu kiÖn liªn kÕt nµo kh¸c.

§èi víi m«i trêng ®µn håi, quan hÖ øng suÊt – biÕn d¹ng x¸c ®Þnh theo (2.19), ta cã thÓ viÕt lîng cìng bøc díi d¹ng b×nh ph¬ng tèi thiÓu nh nhËn xÐt ®· nªu ë vÝ dô 3:

$$Z = \int_V \frac{1}{2G}(\sigma_{ij}-\sigma_{0ij})^2 dv + 2\int_V (f_{mi}-f_{0mi})u_i dv \rightarrow Min$$

(2.27a)

hoÆc $$Z = \int_V 2G(\varepsilon_{ij}-\varepsilon_{0ij})^2 dv \quad + 2\int_V m_i(\ddot{u}_i-\ddot{u}_{0i})u_i dv \rightarrow Min$$

T¬ng tù, khi kh«ng dïng hÖ so s¸nh th× ph¶i xÐt lùc ngoµi, cã thÓ viÕt l¹i (2.26) nh díi ®©y:

$$Z = \int_V \frac{1}{2G}(\sigma_{ij})^2 dv + 2\int_V f_{mi}u_i dv - 2\int_\Omega p_i u_i d\Omega \rightarrow Min$$

(2.27b)

hoÆc $$Z = \int_V 2G(\varepsilon_{ij})^2 dv + 2\int_V (m_i\ddot{u}_i)u_i dv - 2\int_\Omega p_i u_i d\Omega \rightarrow Min$$

Trong (2.27) $f_{mi} = m_i\ddot{u}_i$ vµ $f_{0mi} = m_{0i}\ddot{u}_{0i}$ lµ lùc qu¸n tÝnh cña hÖ cÇn tÝnh vµ hÖ so s¸nh, liªn hÖ gi÷a øng suÊt vµ biÕn d¹ng x¸c ®Þnh theo biÓu thøc (2.19). Trong (2.27), cÇn xem c¸c biÕn d¹ng ε_{ij} lµ c¸c ®¹i lîng biÕn ph©n ®éc lËp ®èi víi c¸c øng suÊt σ_{ij}, c¸c chuyÓn vÞ u_i lµ ®éc lËp ®èi víi lùc t¸c dông p vµ lùc qu¸n tÝnh.

TÝch ph©n thø nhÊt trong (2.27) liªn quan ®Õn øng suÊt ®µn håi cã träng sè lµ 2G, Trë lªn tr×nh bµy c¸c phiÕm hµm lîng cìng bøc, ®èi víi c¬ hÖ chÊt ®iÓm lµ c¸c biÓu thøc (2.14), ®èi víi m«i trêng liªn tôc lµ biÓu thøc (2.20) vµ c¸c trêng hîp kh¸c cña nã lµ c¸c biÓu thøc (2.23), (2.24), (2.25), (2.26) vµ (2.27). Trong c¸c phiÕm hµm nµy cÇn xem c¸c biÕn d¹ng ε_{ij}x¸c

®Þnh theo (2.17) vµ c¸c chuyÓn vÞ u_i lµ c¸c ®¹i l-îng kh«ng biÕt ®éc lËp ®èi víi øng suÊt vµ lùc t¸c dông, tháa m·n c¸c ®iÒu kiÖn liªn kÕt nÕu cã vµ c¸c ®iÒu kiÖn kh«ng bÞ gi¸n ®o¹n (riªng ®èi víi m«i tr-êng liªn tôc). Cùc tiÓu c¸c phiÕm hµm nµy theo ®iÒu kiÖn (2.21) cho ta chuyÓn vÞ thùc cña c¬ hÖ cÇn tÝnh.

Ph-¬ng ph¸p nguyªn lý cùc trÞ Gauss lµ ph-¬ng ph¸p míi trong c¬ häc m«i tr-êng liªn tôc.

2.4. C¬ häc kÕt cÊu.

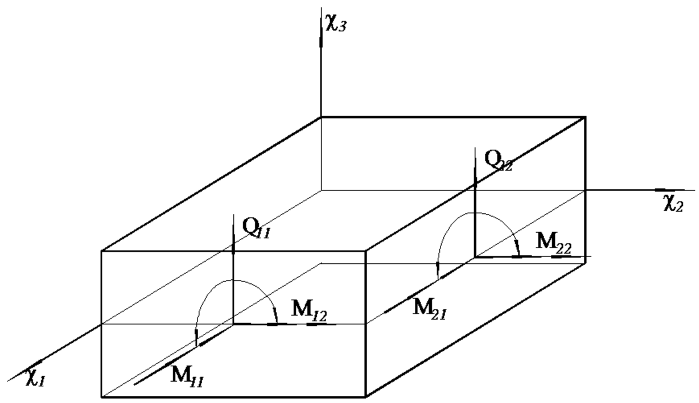
M«n søc bÒn vËt liÖu vµ c¬ häc kÕt cÊu nghiªn cøu tr¹ng th¸i øng suÊt biÕn d¹ng cña dÇm, thanh, tÊm, khung, dµn v.v…lµ nh÷ng kÕt cÊu cã mét hoÆc hai kÝch th-íc nhá thua nhiÒu lÇn so víi c¸c kÝch th-íc cßn l¹i. Trong tr-êng hîp nµy ®Ó ®¬n gi¶n nh-ng kÕt qu¶ tÝnh vÉn b¶o ®¶m ®é chÝnh x¸c ®ñ dïng trong thùc tÕ (kiÓm tra b»ng thÝ nghiÖm), cã thÓ dïng mÆt c¾t kÕt cÊu thay cho mÆt c¾t phÇn tè vµ c¸c øng suÊt t¸c dông lªn mÆt c¾t ®-îc qui vÒ thµnh c¸c néi lùc t¸c dông lªn mÆt trung b×nh (®-êng trung b×nh ®èi víi dÇm) nh- lùc däc N, momen uèn M, lùc c¾t Q v.v… Muèn vËy cÇn ®-a vµo c¸c gi¶ thiÕt sau ®©y:

- Khi chÞu lùc däc trôc, øng suÊt ph¸p ®-îc xem lµ ph©n bè ®Òu trªn tiÕt diÖn.
- Khi chÞu lùc ngang (t¸c dông th¼ng gãc víi mÆt trung b×nh) cã c¸c gi¶ thiÕt sau ®©y:

MÆt trung b×nh cña tÊm vµ trôc trung b×nh cña dÇm kh«ng cã néi lùc vµ do ®ã kh«ng bÞ biÕn d¹ng.

Gi¶ thiÕt tiÕt diÖn ph¼ng: tiÕt diÖn sau khi biÕn d¹ng vÉn ph¼ng.

Kh«ng xÐt øng suÊt nÐn gi÷a c¸c líp theo chiÒu cao tiÕt diÖn, nghÜa lµ xem c¸c líp song song víi mÆt trung b×nh (tÊm) lµm viÖc ë tr¹ng th¸i øng suÊt ph¼ng.



H×nh 2.4. Néi lùc cña ph©n tè tÊm

Sö dông c¸c gi¶ thiÕt trªn, c¸c momen uèn vµ xo¾n vµ lùc c¾t t¸c dông lªn mÆt c¾t kÕt cÊu x¸c ®Þnh theo c¸c biÓu thøc d-íi ®©y (h×nh 2.4):

$$M_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} x_3 dx_3 \,, \qquad M_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} x_3 dx_3 \,, \qquad M_{12} = M_{21} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} x_3 dx_3$$

$$Q_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} dx_3 \,, \qquad Q_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23} dx_3 \qquad (2.28)$$

ë ®©y h lµ chiÒu cao tiÕt diÖn.

§Ó cã thÓ ¸p dông ph-¬ng ph¸p nguyªn lý cùc trÞ Gauss cÇn biÕt c¸c 'biÕn d¹ng' cña tiÕt diÖn do momen uèn g©y ra. Víi c¸c gi¶ thiÕt nªu trªn chØ cÇn biÕt chuyÓn vÞ th¼ng ®øng w cña trôc hoÆc mÆt trung b×nh cña kÕt cÊu (cßn gäi lµ ®-êng ®é vâng, ®-êng ®µn håi) th× trong tr-êng hîp uèn thuÇn tuý cã thÓ tÝnh ®-îc c¸c chuyÓn vÞ theo c¸c ph-¬ng cßn l¹i vµ dïng c¸c ph-¬ng tr×nh (2.17) ®Ó x¸c ®Þnh c¸c biÕn d¹ng. KÕt qu¶ cho thÊy c¸c biÕn d¹ngtrong mÆt ph¼ng tÊm (hoÆc thí dÇm) ph©n bè tuyÕn tÝnh theo chiÒu cao vµ tØ lÖ víi ®é cong χ_{ij} cña mÆt vâng (i=1,2; j=1,2):

$\varepsilon_{ij} = x_3 \chi_{ij}$;

$\chi_{11} = -w,_{11}$, $\chi_{22} = -w,_{22}$, $\chi_{12} = -w,_{12}$. (2.29)

DÊu trõ trong c«ng thøc x¸c ®Þnh ®é cong (2.29) lµ do xem chuyÓn vÞ w cã chiÒu d¬ng híng xuèng díi vµ dÊu nèi lùc nh trªn h×nh 2.4. Nh vËy, ®é cong χ_{ij} cña c¸c líp song song víi mÆt trung b×nh lµ gièng nhau vµ ®ã lµ 'biÕn d¹ng' do momen M_{ij} g©y ra. BiÕt ®îc biÕn d¹ng ε_{ij} x¸c ®Þnh theo (2.29) sÏ tÝnh ®îc momen M_{ij} theo (2.28). Liªn hÖ gi÷a momen uèn vµ 'biÕn d¹ng uèn' cña tiÕt diÖn nh sau:

$$M_{11} = D(\chi_{11} + \nu\chi_{22}), \quad M_{22} = D(\chi_{22} + \nu\chi_{11}), \quad M_{12} = D(1-\nu)\chi_{12} \qquad (2.30)$$

ë ®©y D lµ ®é cøng uèn.

®èi víi dÇm D = EJ = $\frac{Eh^3}{12}$, ®èi víi tÊm D = $\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

vµ D (1 - ν) ®îc gäi lµ ®é cøng xo¾n (®é cøng cña biÕn d¹ng xo¾n).

(ë ®©y cÇn chó ý r»ng do cã liªn kÕt gèi tùa nªn mÆt trung b×nh cã thÓ bÞ biÕn d¹ng trong mÆt ph¼ng cña nã, gi¶ thiÕt mÆt trung b×nh lµ mÆt trung hoµ nªu trªn kh«ng ®îc tho¶ m·n. Trong trêng hîp nµy ®é vâng ph¶i lµ bÐ so víi chiÒu cao dÇm hoÆc chiÒu dµy tÊm ®Ó cã thÓ bá qua øng suÊt t¸c dông trong mÆt trung b×nh).

Trong tr-êng hîp cã lùc c¾t Q_{ii} th× chóng ®-îc x¸c ®Þnh tõ ®iÒu kiÖn c©n b»ng ph©n tè, ta cã:

$$Q_{11} = \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2}, \qquad Q_{22} = \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_1}$$

hay $Q_{11} = D\,[(\chi_{11})_{,1} + (\chi_{12})_{,2}]$, $Q_{22} = D[(\chi_{12})_{,1} + (\chi_{22})_{,2}]$ (2.31)

Tõ c«ng thøc (2.28) cã thÓ thÊy ®é cøng chÞu c¾t cu¶ tiÕt diÖn lµ Gh vµ biÕn d¹ng tr-ît γ_{11} vµ γ_{22} t-¬ng øng víi lùc c¾t sÏ b»ng gãc xoay cña ®-êng ®µn håi:

$$\gamma_{11} = w_{,1} = \frac{\partial w}{\partial x_1}, \qquad \gamma_{22} = w_{,2} = \frac{\partial w}{\partial x_2} \qquad (2.32)$$

Trong lý thuyÕt kÕt cÊu chÞu uèn nªu trªn, ®é vâng cña kÕt cÊu chØ do mo-men uèn g©y ra, kh«ng xÐt biÕn d¹ng tr-ît do lùc c¾t g©y ra.

§èi víi c¸c lùc N_{ij} t¸c dông lªn mÆt trung b×nh cña tiÕt diÖn th× c¸c biÕn d¹ng ε_{ij} (i=1,2;j=1,2) vÉn x¸c ®Þnh theo (2.17). §é cøng cña tiÕt diÖn chÞu nÐn kÐo sÏ lµ Eh.

Trong c¸c c«ng thøc võa nªu lÊy i=1,j=1 ®èi víi bµi to¸n mét chiÒu (thanh, dÇm), chiÒu réng dÇm b»ng ®¬n vÞ.

Do sö dông momen uèn cña tiÕt diÖn nªn ph¶i ®-a thªm c¸c liªn kÕt vÒ xoay ®Ó m« t¶ c¸c ®iÒu kiÖn biªn cña nã: liªn kÕt khíp cho phÐp tiÕt diÖn xoay tù do, momen b»ng kh«ng; liªn kÕt ngµm kh«ng cho tiÕt diÖn xoay, momen kh¸c kh«ng.

Sau khi ®· biÕt 'c¸c biÕn d¹ng' t-¬ng øng víi c¸c néi lùc cña tiÕt diÖn (momen uèn, lùc c¾t, lùc däc trôc v.v..) vµ ®é cøng cña chóng th× dÔ dµng x©y dùng c¸c bµi to¸n c¬ häc kÕt cÊu theo ph¬ng ph¸p nguyªn lÝ cù trÞ Gauss.

Ta cã thÓ viÕt mét c¸ch tæng qu¸t lîng cìng bøc Z cña bµi to¸n c¬ häc kÕt cÊu díi d¹ng t¬ng tù nh (2.25) (bµi to¸n tÜnh):

$$Z= \int_V [(M_{ij}-M_{0ij})\chi_{ij}+ (Q_{ii}-Q_{0ii})\gamma_{ii}+ (N_{ij}-N_{0ij})\varepsilon_{ij}\}dv \rightarrow Min$$

(2.33a)

hoÆc díi d¹ng b×nh ph¬ng tèi thiÓu:

$$Z= \int_V \frac{1}{Docung} (\text{Néi lùc hÖ cÇn tÝnh- Néi lùc hÖ so s¸nh})^2 dv \rightarrow Min \quad (2.33b)$$

vµ trong trêng hîp kh«ng dïng hÖ so s¸nh ta cã:

$$Z= \int_V \frac{1}{Docung}(\text{ Néi lùc hÖ cÇn tÝnh})^2 dv - 2\int_\Omega p_i w_i d\Omega \rightarrow Min \quad (2.33c)$$

ë ®©y V lµ chiÒu dµi dÇm hoÆc diÖn tÝch tÊm, Ω lµ chiÒu dµi hoÆc diÖn tÝch ph¹m vi ®Æt lùc. Trong (2.33) cÇn xem c¸c ®é cong χ_{ij} lµ c¸c ®¹i lîng ®éc lËp ®èi víi néi lùc momen uèn M_{ij} , c¸c biÕn d¹ng trît γ_{11} vµ γ_{22} lµ c¸c ®¹i lîng ®éc lËp ®èi víi lùc c¾t Q_{11} vµ Q_{22}, c¸c biÕn d¹ng trong mÆt trung b×nh ε_{ij} lµ c¸c ®¹i lîng ®éc lËp ®èi víi N_{ij} vµ ®Òu lµ c¸c ®¹i lîng biÕn ph©n cña bµi to¸n. §iÒu ®ã chØ ra r»ng cùc tiÓu cña lîng cìng bøc Z , biÓu thøc(2.33) , chØ cã thÓ t×m tõ ®iÒu kiÖn:

$$\frac{\partial Z}{\partial \chi_{ij}}\frac{\partial \chi_{ij}}{\partial W}+\frac{\partial Z}{\partial \gamma_{ii}}\frac{\partial \gamma_{ii}}{\partial W}+\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_{ij}}\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial W}+\frac{\partial Z}{\partial W}=0 \quad (2.34)$$

Bëi v× c¸c biÕn d¹ng uèn, biÕn d¹ng c¾t v.v…lµ hµm cña ®é vâng vµ ®é vâng lµ hµm cña täa ®é nªn ®iÒu kiÖn (2.34) ®îc tÝnh b»ng phÐp tÝnh biÕn ph©n vµ sÏ cho ta ph¬ng tr×nh c©n b»ng tÜnh cña kÕt cÊu (xem môc 2.5 díi ®©y).

Ph¬ng ph¸p nguyªn lý cùc trÞ Gauss víi biÓu thøc lîng cìng bøc Z viÕt theo (2.33) vµ ®iÒu kiÖn cùc tiÓu (2.34) lµ ph¬ng ph¸p míi, tæng qu¸t trong c¬ häc kÕt cÊu.

2.5. Ph¬ng ph¸p nguyªn lý cùc trÞ Gauss vµ c¸c ph¬ng tr×nh c©n b»ng cña c¬ hÖ.

Theo ph¬ng ph¸p nguyªn lý cùc trÞ Gauss, nÕu nh biÕt ®îc c¸c lùc vµ néi lùc cña c¬ hÖ vµ c¸c chuyÓn vÞ vµ biÕn d¹ng do chóng g©y ra th× cã thÓ viÕt ®îc lîng cìng bøc Z cña hÖ. Dïng phÐp tÝnh biÕn ph©n víi ®¹i lîng biÕn ph©n lµ c¸c chuyÓn vÞ ®éc lËp ®èi víi lùc t¸c dông vµ biÕn d¹ng ®éc lËp víi øng suÊt sÏ nhËn ®îc ph¬ng tr×nh vi ph©n c©n b»ng cña hÖ (ph¬ng tr×nh ¥-le (Euler) cña phiÕm hµm Z). Sau ®©y tr×nh bµy c¸c vÝ dô sö dông ph¬ng ph¸p võa nªu ®Ó t×m ph¬ng tr×nh c©n b»ng.

2.5.1. Ph¬ng tr×nh c©n b»ng tÜnh ®èi víi m«i trêng ®µn håi, ®ång nhÊt, ®¼ng híng.

Ba ph¬ng tr×nh vi ph©n c©n b»ng cña c¬ hÖ díi d¹ng øng suÊt lµ ph¬ng tr×nh (2.22). ThÕ c¸c øng suÊt σ_{ij} x¸c ®Þnh theo (2.19) vµo (2.22) sÏ cã c¸c ph¬ng tr×nh vi ph©n c©n b»ng cña c¬ hÖ ®µn håi ®ång nhÊt ®¼ng híng díi d¹ng chuyÓn vÞ. ë ®©y tr×nh bµy c¸ch tÝnh trùc tiÕp ®Ó nhËn ®îc c¸c ph¬ng tr×nh ®ã (trêng hîp bµi to¸n tÜnh).

Liªn hÖ biÕn d¹ng - chuyÓn vÞ (2.17) vµ øng suÊt - biÕn d¹ng (2.19) ®îc viÕt l¹i trong hÖ täa ®é (x,y,z) díi d¹ng thêng dïng víi u ,v vµ w lµ c¸c chuyÓn vÞ t¬ng øng theo c¸c chiÒu (x,y,z) nh sau:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\sigma_x = 2G\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right), \qquad \sigma_y = 2G\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right), \qquad \sigma_z = 2G\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right)$$

$$\tau_{xy} = G\,\gamma_{xy}, \qquad \tau_{xz} = G\,\gamma_{xz}, \qquad \tau_{yz} = G\,\gamma_{yz} \qquad (2.34)$$

ë ®©y $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ - biÕn d¹ng thÓ tÝch cña ph©n tè.

Ta viÕt lîng cêng bøc Z theo (2.25) cho mçi øng suÊt vµ lùc khèi b:

$$Z1 = \int_V 2G\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right)\frac{\partial u}{\partial x}\,dV, \qquad Z2 = \int_V 2G\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right)\frac{\partial v}{\partial y}\,dV,$$

$$Z3 = \int_V 2G\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right)\frac{\partial w}{\partial z}\,dV, \qquad Z4 = \int_V G\,\gamma_{xy}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)dV,$$

$$Z5 = \int_V G\,\gamma_{xz}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)dV, \qquad Z6 = \int_V G\,\gamma_{yz}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)dV$$

Z7 = $\int_V b_x u\, dV$, Z8= $\int_V b_y v\, dV$, Z9 = $\int_V b_z w\, dV$ (2.35)

L-îng c-ìng bøc Z b»ng tæng c¸c l-îng c-ìng bøc thµnh phÇn:

$$Z = Z1+Z2+Z3+Z4+Z5+Z6+Z7+Z8+Z9 \rightarrow Min$$

Tõ ®iÒu kiÖn cùc tiÓu (1.21) cña phiÕm hµm Z viÕt l¹i d-íi d¹ng:

$$\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_{ij}}\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial u}+\frac{\partial Z}{\partial u}=0,\quad \frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_{ij}}\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial v}+\frac{\partial Z}{\partial v}=0,\quad \frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_{ij}}\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial w}+\frac{\partial Z}{\partial w}=0 \qquad (2.36)$$

sÏ nhËn ®-îc ba ph-¬ng tr×nh vi ph©n c©n b»ng tÜnh. Bëi v× u, v vµ w lµ c¸c hµm cña täa ®é (x,y,z), kh«ng ph¶i lµ biÕn ®éc lËp , nªn phÐp tÝnh (2.36) lµ phÐp tÝnh biÕn ph©n. Ph-¬ng tr×nh c©n b»ng thø nhÊt víi u lµ hµm ch-a biÕt nhËn ®-îc víi chó ý r»ng

- §¹i l-îng biÕn ph©n cña Z1 (øng víi σ_x) lµ ε_x hay $\frac{\partial u}{\partial x}$, nh- vËy:

$$\frac{\partial Z1}{\partial \varepsilon_x} = -\frac{\partial}{\partial x}2G\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right) = -2G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\nu}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x}\theta\right)$$

- §¹i l-îng biÕn ph©n cña Z4 (øng víi τ_{xy}) lµ γ_{xy} cã thµnh phÇn $\frac{\partial u}{\partial y}$, nªn:

$$\frac{\partial Z4}{\partial \gamma_{xy}} = -G\frac{\partial}{\partial y}\gamma_{xy} = -G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)$$

- §¹i l-îng biÕn ph©n cña Z5 (øng víi τ_{xz}) lµ γ_{xz} cã thµnh phÇn $\frac{\partial u}{\partial z}$, nªn:

$$\frac{\partial Z5}{\partial \gamma_{xz}} = -G \frac{\partial}{\partial z}\gamma_{xz} = -G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x}\right)$$

- §¹i lîng biÕn ph©n cña Z7 lµ u, nªn:

$$\frac{\partial Z7}{\partial u} = b_x$$

Tæng céng:

$$\frac{\partial Z1}{\partial u} + \frac{\partial Z4}{\partial u} + \frac{\partial Z5}{\partial u} + \frac{\partial Z7}{\partial u} = 0$$

sau khi rót gän sÏ lµ:

$$G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{G}{1-2\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x}\theta\right) + b_x = 0$$

(2.37)

Ph¬ng tr×nh c©n b»ng thø hai nhËn ®îc víi v lµ hµm cha biÕt. Trong (2.35) c¸c ®¹i lîng biÕn ph©n cña v cã ë Z2, Z4, Z6 vµ Z8. Ph¬ng tr×nh c©n b»ng thø ba nhËn ®îc víi w lµ hµm cha biÕt. Trong (2.35) c¸c ®¹i lîng biÕn ph©n cña w cã ë Z3, Z5, Z6 vµ Z9. B»ng c¸ch tÝnh biÕn ph©n t¬ng tù sÏ cã thªm hai ph¬ng tr×nh c©n b»ng sau:

$$G\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \frac{G}{1-2\nu}\left(\frac{\partial}{\partial y}\theta\right) + b_y = 0$$

(2.38)

$$G\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \frac{G}{1-2\nu}\left(\frac{\partial}{\partial z}\theta\right) + b_z = 0$$

(2.39)

Ba ph-¬ng tr×nh (2.37), (2.38) vµ (2.39) lµ c¸c ph-¬ng tr×nh vi ph©n c©n b»ng cña c¬ hÖ ®µn håi, ®ång nhÊt vµ ®¼ng h-íng vµ ®-îc gäi lµ ph-¬ng tr×nh Navier [4] D-íi d¹ng tenx¬ c¸c ph-¬ng tr×nh nµy ®-îc viÕt gän nh- sau:

$$Gu_{j,kk} + \frac{G}{1-2\nu} u_{k,kj} + b_j = 0 \qquad (2.40)$$

2.5.2. Ph-¬ng tr×nh vi ph©n cña mÆt vâng cña tÊm chÞu uèn.

XÐt tÊm cã chiÒu dµy kh«ng dæi ViÕt l¹i c¸c biÓu thøc (2.30) ®èi víi c¸c néi lùc momen uèn vµ xo¾n vµ (2.31) ®èi víi lùc c¾t t¸c dông lªn ph©n tè tÊm trong hÖ täa ®é (x,y) ta cã:

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \quad M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \quad M_{xy} = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$Q_x = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right), \qquad Q_y = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right) \qquad (2.41)$$

BiÕt ®-îc c¸c lùc t¸c dông lªn ph©n tè th× ®Ô dµng viÕt ®-îc l-îng c-êng bøc Z, thÝ dô, d-íi d¹ng b×nh ph-¬ng tèi thiÓu theo (2.33.b) (khi kh«ng cã ngo¹i lùc):

$$Z1 = \int_\Omega D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 d\Omega, \quad Z2 = \int_\Omega D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 d\Omega,$$

$$Z3 = 2\int_\Omega D(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 d\Omega \qquad (2.42)$$

ë ®©y Ω lµ diÖn tÝch tÊm. L-îng c-ìng bøc Z b»ng tæng c¸c l-îng c-ìng bøc do mçi thµnh phÇn néi lùc momen uèn vµ xo¾n g©y ra:

$$Z = Z1 + Z2 + Z3 \rightarrow Min \qquad (2.43)$$

Chó ý r»ng trong (2.43) ta chØ xÐt néi lùc momen, ch-a xÐt tíi lùc c¾t , ph©n tè kh«ng cã lùc ngoµi t¸c dông. HÖ sè 2 trong Z3 ®Ó xÐt momen xo¾n t¸c dông b»ng nhau lªn hai chiÒu x,y. C¸c 'biÕn d¹ng' t-¬ng øng víi c¸c néi lùc momen x¸c ®Þnh theo (2.29) :

$$\chi_{xx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \chi_{yy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \chi_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \qquad (2.44)$$

C¸c 'biÕn d¹ng' nµy cÇn ®-îc xem lµ ®éc lËp ®èi víi c¸c néi lùc momen uèn vµ xo¾n vµ lµ c¸c ®¹i l-îng biÕn ph©n cña bµi to¸n. Do ®ã tõ ®iÒu kiÖn cùc tiÓu (2.36) ta cã:

$$\frac{\partial Z1}{\partial \chi_{xx}}\frac{\partial \chi_{xx}}{\partial w} = 2D\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 2D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right),$$

$$\frac{\partial Z2}{\partial \chi_{yy}}\frac{\partial \chi_{yy}}{\partial w} = 2D\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 2D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right),$$

$$\frac{\partial Z3}{\partial \chi_{xy}}\frac{\partial \chi_{xy}}{\partial w} = 4\,D(1-\nu)\,\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) = 4D(1-\nu)\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \qquad (2.45)$$

Tæng céng c¸c thµnh phÇn cña (1.45) nhËn ®-îc ph-¬ng tr×nh vi ph©n ®é vâng cña tÊm chÞu uèn:

$$D\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D\,\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \qquad (2.46)$$

Ph-¬ng tr×nh (2.46) th-êng ®-îc gäi lµ ph-¬ng tr×nh Sophie Germain (n¨m 1811).

Khi x©y dùng l-îng c-êng bøc Z (biÓu thøc 2.43) kh«ng xÐt tíi lùc c¾t bëi v× lý thuyÕt kÕt cÊu chÞu uèn tr×nh bµy trªn kh«ng xÐt biÕn d¹ng cña lùc c¾t.Tuy nhiªn, trong ph¹m vi cña lý thuyÕt nµy, nÕu dïng lùc c¾t x¸c ®Þnh theo (2.31) vµ biÕn d¹ng tr-ît theo (2.32) th× l-îng c-êng bøc Z ®-îc viÕt nh- sau:

$$Z = \int_{\Omega} Q_{xx}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) d\Omega + \int_{\Omega} Q_{yy}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) d\Omega \rightarrow Min \qquad (2.47)$$

Xem c¸c gãc xoay $\frac{\partial w}{\partial x}$ vµ $\frac{\partial w}{\partial y}$ lµ c¸c ®¹i l-îng biÕn ph©n ®éc lËp ®èi víi lùc c¾t Q_x vµ Q_y vµ b»ng phÐp tÝnh biÕn ph©n l¹i nhËn ®-îc ph-¬ng tr×nh vi ph©n (2.46).

§èi víi dÇm, l-îng c-êng bøc viÕt theo (2.33.a) sÏ lµ:

$$Z = -\int_{l} EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(\chi_{xx})\, dl - \int_{l_q} qw\, dl_q \qquad (2.48)$$

Trong (2.48) l lµ chiÒu dµi dÇm, $\chi_{xx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ lµ biÕn d¹ng uèn (®é cong) cña dÇm, l_q lµ chiÒu dµi ®o¹n dÇm cã lùc q t¸c dông. Ph-¬ng tr×nh vi ph©n ®-êng ®é vâng cña dÇm:

$$\frac{\partial Z}{\partial \chi_{xx}}\frac{d\chi_{xx}}{dw} + \frac{\partial Z}{\partial w} = EJ\frac{d^4 w}{dx^4} - q = 0 \qquad (2.49)$$

CHƯƠNG 3.
PHƯƠNG PHÁP SO SÁNH TRONG CƠ HỌC KẾT CẤU

Trong chương này trình bày lý thuyết dầm có xét biến dạng trượt và phương pháp mới – Phương pháp dùng hệ so sánh để nghiên cứu nội lực và chuyển vị của hệ dầm, khung chịu uốn có xét biến dạng trượt ngang do lực cắt Q gây ra.

Hệ so sánh trong phương pháp nguyên lý cực trị Gauss là hệ có liên kết bất kì, chịu tác dụng lực ngoài giống như hệ cần tính. Dùng hệ so sánh ở đây có nghĩa là giải phóng các liên kết của hệ so sánh để biến nó thành hệ tự do hoàn toàn và đưa nội lực và các lực liên kết của hệ so sánh tác dụng lên hệ cần tính. Lực liên kết là lực do ngoại lực tác dụng lên liên kết, có dấu ngược lại với phản lực liên kết.

Có hai đường lối giải bài toán tìm cực tiểu phiếm hàm lượng cưỡng bức của phương pháp nguyên lý cực trị Gauss: Giải các phương trình vi phân cân bằng (phương trình Ơ-le) nhận được từ phiếm hàm hoặc giải trực tiếp trên phiếm hàm. Bậc đạo hàm của phương trình vi phân cao gấp hai lần bậc đạo hàm của các thành phần tương ứng trong phiếm hàm cho nên cách giải trực tiếp trên phiếm hàm có ưu điểm hơn ở chỗ số ẩn sẽ ít hơn và đặc biệt là nó cho phép áp dụng một cách trực tiếp các phương pháp, các thuật toán của toán học tối ưu (hay rộng hơn, của vận trù học) để giải các bài toán cơ học. Điều này làm cho phương pháp giải các bài toán cơ kết cấu càng trở nên phong phú hơn.

Cuối cùng để làm sáng tỏ nội dung phương pháp, tác giả trình bày các ví dụ tính toán cụ thể như tính toán các dầm một nhịp với các điều kiện biên hai đầu khác nhau, dầm liên tục hai nhịp, dầm liên tục ba nhịp, khung một tầng một nhịp và khung một tầng nhiều nhịp chịu các loại tải trọng khác nhau.

Có thể nhận biết những đặc diểm trên của phương pháp nguyên lí cực trị Gauss qua tính toán các dạng kết cấu cụ thể trình bày dưới đây.

3.1. Lý thuyết dầm có xét biến dạng trượt.

Lý thuyết xét biến dạng trượt trong dầm do Timoshenko đưa ra và thường được gọi là lý thuyết dầm Timoshenko. Khi xây dựng lý thuyết này vẫn sử dụng giả thiết tiÕt diÖn ph¼ng của lý thuyết dầm thông thường, tuy nhiên do có biến dạng trượt, trục dầm sẽ xoay đi một góc vµ kh«ng cßn th¼ng gãc víi tiÕt diÖn dÇm n÷a.

Lý thuyết xét biến dạng trượt được dùng phổ biến trong phương pháp phần tử hữu hạn hiÖn nay là dùng hàm độ võng y và hàm góc xoay θ do momen uốn gây ra là hai hàm chưa biết. Trong trường hợp này biến dạng trượt tại trục trung hòa được xác định như sau, ví dụ như [36, trg 5].

$$\gamma = \frac{dy}{dx} - \theta \qquad (3.1)$$

Từ đó ta có các công thức xác định M và Q:

$$M = -EJ\left(\frac{d\theta}{dx}\right)$$

$$Q = \frac{GF}{\alpha}\left[-\frac{dy}{dx} + \theta\right] (3.2)$$

Trong các công thức trên EJ là độ cứng uốn, GF là độ cứng cắt của tiết diện, G là mođun trượt của vật liệu, F là diện tích tiết diện, α là hệ số xét sự phân bố không đều của ứng suất tiếp trªn chiều cao tiết diện.

Các tác giả [36,trg 5] cho rằng khi môđun trượt G→∞ thì từ (3.2) suy ra:

$$\theta = \frac{dy}{dx} \qquad (3.3)$$

Nghĩa là trở về lý thuyết dầm không xét biến dạng trượt: Góc xoay của đường độ võng là do mômen gây ra. Theo tác giả, lập luận trên không đúng bởi vì khi thỏa mãn phương trình (3.3) thì từ phương trình (3.2) suy ra lực cắt Q =0, dẫn về trường hợp uốn thuần túy của dầm. Vì lý do đó nên lý thuyết xét biến dạng trượt dùng y và làm ẩn không hội tụ về lý thuyết dầm thông thường và khi áp dụng vào bài toán tấm, nó cũng không hội tụ về lý thuyết tấm thông thường (lý thuyết tấm Kierchhoff, [36, trg 71],[33, trg 404]. Phương hướng chung để khắc phục thiếu sót vừa nêu là bổ sung thªm các nút xét lực cắt Q trong các phần tử dầm hoặc phần tử tấm [33,34, 36] hoặc dùng phần tử có hàm dạng là đa thức bậc thấp (bậc nhất) [39,trg 126]. VÊn ®Ò t×m phÇn tö cã hµm d¹ng kh«ng bÞ hiÖn t-îng biÕn d¹ng tr-ît bÞ khãa,shear locking, vÉn ®ang ®-îc tiÕp tôc nghiªn cøu,[40].T×nh hình chung hiện nay về lý thuyết xét biến dạng trượt trong dầm và tấm là như trên.

Khác với các tác giả khác, trong [27,28] lý thuyết xét biến dạng trượt được xây dựng trên cơ sở hai hàm chưa biết là hàm độ võng y và hàm lực cắt Q. Trong trường hợp này biến dạng trượt xác định theo:

$$\gamma = \frac{\alpha Q}{GF} \quad (3.4)$$

α là hệ số xét sự phân bố không đều của ứng suất cắt tại trục dầm.

Góc xoay do momen uốn sinh ra bằng hiệu giữa góc xoay đường độ võng với góc xoay do lực cắt gây ra.

$$\theta = \frac{dy}{dx} - \gamma = \frac{dy}{dx} - \frac{\alpha Q}{GF} \quad (3.5)$$

Momen uốn sẽ bằng:

$$M = -EJ\frac{d\theta}{dx} = EJ(-\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF}\frac{dQ}{dx}) \quad (3.6)$$

Biến dạng uốn χ:

$$\chi = -\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF}\frac{dQ}{dx} (3.7)$$

Dựa trên lý thuyết này ta sẽ xây dựng phương trình cân bằng và các điều kiện biên của dầm như sau. Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss ta viết phiếm hàm lượng cưỡng bức (chuyển động) như sau: (giả sử dầm có lực phân bố đều q).

$$Z = \int_0^l M\chi dx + \int_0^l Q\gamma dx - \int_0^l qydx \to Min (3.8)$$

Các hàm độ võng y, hàm biến dạng trượt γ và hàm biến dạng uốn χ là các đại lượng biến phân, nghĩa là điều kiện cần và đủ để hệ ở trạng thái cân bằng là:

$$\delta Z = \int_0^l M\delta\chi dx + \int_0^l Q\delta\gamma dx - \int_0^l q\delta y dx = 0$$

Hay $$Z = \int_0^l M\delta\left[-\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF}\frac{dQ}{dx}\right]dx + \int_0^l Q\delta\left[\frac{\alpha Q}{GF}\right]dx - \int_0^l q\delta[y]dx \quad (3.9)$$

Trong phương trình tích phân (2.9) hai đại lượng cần tìm là y(x) và Q(x) do đó có thể tách ra thành hai phương trình sau:

$$\int_0^l M\delta\left[-\frac{d^2y}{dx^2}\right]dx - \int_0^l q\delta[y]dx = 0 \quad (3.10)$$

$$\int_0^l M\delta\left[\frac{\alpha}{GF}\frac{dQ}{dx}\right]dx + \int_0^l Q\delta\left[\frac{\alpha Q}{GF}\right]dx = 0 \qquad (3.11)$$

Lấy tích phân từng phần phương trình (3.10):

$$\int_0^l M\delta\left[-\frac{d^2y}{dx^2}\right]dx = -\int_0^l Md\left(\delta\left[\frac{dy}{dx}\right]\right)dx = -M\delta\left[\frac{dy}{dx}\right]\Big|_0^l + \int_0^l \frac{dM}{dx}\delta\left[\frac{dy}{dx}\right]dx$$

Tích phân từng phần thành phần cuối của biểu thức trên ta có:

$$\int_0^l M\delta\left[-\frac{d^2y}{dx^2}\right]dx = -M\delta\left[\frac{dy}{dx}\right]\Big|_0^l + \frac{dM}{dx}\delta[y]\Big|_0^l - \int_0^l \frac{d^2M}{dx^2}\delta[y]dx$$

Phương trình (3.10) sau khi lấy tích phân từng phần có dạng:

$$-M\delta\left[\frac{dy}{dx}\right]\Big|_0^l + \frac{dM}{dx}\delta[y]\Big|_0^l - \int_0^l \left(\frac{d^2M}{dx^2} + q\right)\delta[y]dx = 0 \qquad (3.12)$$

Bởi vì các đại lượng và là nhỏ và bất kỳ nên từ (2.12) ta có:

$$\frac{d^2M}{dx^2} + q = 0 \qquad (3.12a)$$

$$-M\delta\left[\frac{dy}{dx}\right]\Big|_0^l = 0 \qquad (3.12b)$$

$$\frac{dM}{dx}\delta[y]\Big|_0^l = 0 \qquad (3.12c)$$

Tích phân từng phần phương trình (3.11):

$$\int_0^l M\delta\left[\frac{\alpha}{GF}\frac{dQ}{dx}\right]dx = \int_0^l Md\left(\delta\left[\frac{\alpha Q}{GF}\right]\right)dx = M\left(\delta\left[\frac{\alpha Q}{GF}\right]\right)\Big|_0^l - \int_0^l \frac{dM}{dx}\delta\left[\frac{\alpha Q}{GF}\right]dx$$

Sau khi lấy tích phân từng phần:

$$M\left(\delta\left[\frac{\alpha Q}{GF}\right]\right)\Big|_0^l + \int_0^l \left(-\frac{dM}{dx} + Q\right)\delta\left[\frac{\alpha Q}{GF}\right] dx \ = 0 \qquad (3.13)$$

Bởi vì biến phân là nhỏ và bất kỳ nên từ (2.13) ta có:

$$-\frac{dM}{dx} + Q = 0 \qquad (2.13a)$$

$$M\delta\left[\frac{\alpha Q}{GF}\right]\Big|_0^l = 0 \qquad (2.13b)$$

Sử dụng công thức (3.6), hai phương trình vi phân cân bằng của dầm (3.12a) và (3.13a) có dạng:

$$EJ\left[\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{\alpha}{GF}\frac{d^3Q}{dx^3}\right] = q \qquad (2.14a)$$

$$EJ\left[\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{\alpha}{GF}\frac{d^2Q}{dx^2}\right] = Q \qquad (2.15a)$$

Phương trình (3.14a) và (3.15a) có thể viết lại dưới dạng:

$$EJ\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{\alpha h^2}{6}\frac{d^3Q}{dx^3} = q \qquad (2.14b)$$

$$EJ\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{\alpha h^2}{6}\frac{d^2Q}{dx^2} = Q \qquad (2.15b)$$

Để nhận được các điều kiện biên của dầm thì kết hợp (3.12b) và (3.13b) ta có:

$$M\delta\left[-\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha Q}{GF}\right]\Big|_0^l = 0 \qquad (3.16)$$

Chú ý tới phương trình (3.13a), phương trình (3.12c) viết lại như sau:

$$Q\delta[y]|_0^l = 0 \qquad (3.17)$$

Tóm lại, lý thuyết xét biến dạng trượt cho ta hai phương trình vi phân (3.14) và (3.15) đối với hai hàm y và Q: phương trình (3.14) là phương trình vi phân cân bằng giữa nội lực và ngoại lực, phương trình (3.15) là phương trình liên hệ giữa mômen uốn và lực cắt. Các phương trình (3.16) và (3.17) là các điều kiện biên ở hai đầu thanh.

Ta xét điều kiện biên (3.16)

Nếu như tại x=0 hoặc x=l, góc xoay θ do mômen uốn gây ra có biến phân:

$$\delta\theta = \delta\left[-\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha Q}{GF}\right]\Bigg|_0^l \neq 0 \quad thì\, M|_0^l = 0 \rightarrow liên\ kết\ khớp \qquad (3.18a)$$

Nếu như góc xoay θ không có biến phân:

$$\delta\theta = \delta\left[-\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha Q}{GF}\right]\Bigg|_0^l = 0 \quad thì\, M|_0^l bất\ kỳ \rightarrow liên\ kết\ ngàm \qquad (3.18b)$$

Đối với điều kiện (3.17), nếu như chuyển vị y tại x=0 hoặc x=l có biến phân.

$$\delta[y]|_0^l \neq 0\ thì\ Q|_0^l = 0, \rightarrow không\ có\ gối\ tựa \qquad (3.18c)$$

Nếu như $\delta[y]|_0^l = 0\ thì\ Q\,|_0^l bất\ kỳ, \rightarrow liên\ kết\ gối\ tựa$ (3.

Khi không xét biến dạng trượt, G→∞ hoặc h→0 thì các phương trình (3.14) và (3.15) cũng như các phương trình về điều kiện biên (3.16) và (3.17) hoặc (3.18) đều dẫn về lý thuyết dầm Euler- Bernoulli. Cho nên có thể nói lý thuyết xét biến dạng trượt nêu trên (xem hµm y vµ hµm Q lµ hai hµm ch-a biÕt) là lý thuyết đầy đủ về dầm.

Cuối cùng cần lưu ý rằng khi xét tính liên tục về góc xoay giữa hai đoạn dầm là nói đến tính liên tục của góc xoay do mômen gây ra xác định theo công thức (3.5), không phải liên tục của góc xoay .

Hệ số α

Hệ số α là hệ số tập trung ứng suất cắt tại trục dầm.

Đối với tiết diện chữ nhật α=1.5, đối với tiết diện tròn α=4/3. Tuy nhiên khi xét biến dạng trượt các trị trên thay đổi tương ứng bằng 1.2 và 1.11 [31, trg 132, 60, trg 492].Trong tính toán sau này tác giả dùng hệ số α=1.2 đối với tiết diện chữ nhật. Phương pháp chung để xác định hệ số ỏ là cân bằng tổng theo chiều cao dầm công của ứng suất cắt thực hiện trên biến dạng trượt tương ứng với công lực cắt thực hiện trên biến dạng trượt tại trục dầm, vấn đề này đã được nhiều tác giả nghiên cứu [31] [33, trg 400].

3.2. Phương pháp so sánh tính toán dầmcó xét đến biến dạng trượt ngang.

3.2.1. Phương pháp sử dụng hệ so sánh.

Chuyển vị thực của dầm hoặc khung được tìm từ cực tiểu lượng cưỡng bức Z được viết như (3.19):

$$Z = \sum_{i=1}^{n}\left(\int_{l}(M_{xi} - M_{0i})\chi_i + (Q_i - Q_{0i})\gamma_i\right)dx \to Min \quad (3.19)$$

Trong công thức trên dấu tổng lấy theo các đoạn i của dầm, dấu tích phân lấy theo chiều dài l_i của đoạn thứ i, M_i, y_i, Q_i là momen uốn, độ võng và lực cắt của đoạn thứ i của hệ cần tính; M_{0i}, y_{0i}, Q_{0i} là momen uốn, độ võng và lực cắt của đoạn thứ i của hệ so sánh cùng chịu lực ngoài giống như hệ cần tính.

Nếu như các hàm y_i thoả mãn các điều kiện biên thì từ điều kiện cực tiểu của Z theo (3.20):

$$\left.\begin{aligned} h_i &= \int_0^{l_i}[M_i - M_{0i}]\frac{\partial}{\partial\alpha_i}(\chi_i)dx = 0; \quad \alpha_i(i = 0 \div n) \\ f_i &= \int_0^{l_i}[M_i - M_{0i}]\frac{\partial}{\partial\beta_i}(\chi_i)dx + \int_0^{l1}[Q_i - Q_{0i}]\frac{\partial}{\partial\beta_i}(\gamma_i)dx = 0; \beta_i(i = 0 \div n) \end{aligned}\right\} \quad (3.20)$$

sẽ nhận được hệ phương trình đại số để xác định các ẩn α_i, β_i. Như trên đã trình bày, α_i, β_i có thể là các hệ số của đa thức xấp xỉ, chuyển vị và góc xoay của phần tử hữu hạn khi dùng phương pháp phần tử hữu hạn, hoặc chuyển vị tại các nút của phương pháp sai phân hữu hạn. Các chuyển vị và biến dạng theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss phải được xem là độc lập đối với lực và ứng suất (chuyển vị và biến dạng ảo). Các phương trình nhận được từ điều kiện (3.20) là các phương trình đại số, không phải là các phương trình vi phân, biểu thị điều kiện cân bằng lực của kết cấu. Bởi vì giải hệ phương trình cân bằng nên bài toán luôn có nghiệm và nghiệm là duy nhất.

Nếu như các hàm y_i chưa thoả mãn đầy đủ các điều kiện biên thì ta phải đưa các điều kiện biên chưa thỏa mãn đó vào điều kiện ràng buộc của bài toán (3.19). Giả sử y_i có kđiều kiện biên chưa thỏa mãn ta có kđiều kiện ràng buộc. Cuối cùng bài toán dẫn về tìm cực trị của (3.19) vớikđiều kiện ràng buộc đó.

Đưa bài toán tìm cực trị (3.19) với k điều kiện ràng buộc về bài toán tìm cực trị không có ràng buộc bằng cách xây dựng phiếm hàm mở rộng F như sau:

$$F = Z + \sum_{k=1}^{n} g_k \lambda_k \rightarrow Min(3.21)$$

Trong đó: λ_k là các thừa số Lagrange và cũng là các ẩn của bài toán.

Từ điều kiện cực trị của bài toán (3.21), ta có hệ các phương trình đại số (3.22).

$$\left.\begin{array}{l} h_i = \int_0^{l_i} \left[M_i - M_{0i}\right] \dfrac{\partial}{\partial \alpha_i}(\chi_i)dx + \dfrac{\partial}{\partial \alpha_i} \sum_{k=1}^{n} g_k \lambda_k = 0; \quad \alpha_i (i = 0 \div n) \\ f_i = \int_0^{l_i} \left[M_i - M_{0i}\right] \dfrac{\partial}{\partial \beta_i}(\chi_i)dx + \dfrac{\partial}{\partial \alpha_i} \sum_{k=1}^{n} g_k \lambda_k + \int_0^{li} \left[Q_i - Q_{0i}\right] \dfrac{\partial}{\partial \beta_i}(\gamma_i)dx = 0; \\ \beta_i (i = 0 \div n) \end{array}\right\} (3.22)$$

Giải hệ (3.22), ta sẽ nhận được các ẩn cần tìm là α_i, β_i và λ_k.

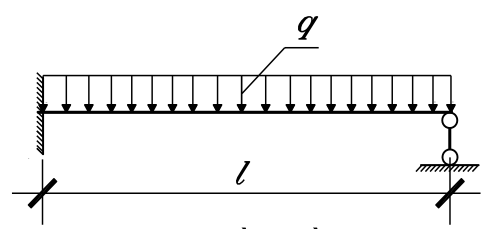
3.2.2. Các ví dụ tính toán.

Ví dụ 3.1: Dầm đầu ngàm đầu khớp

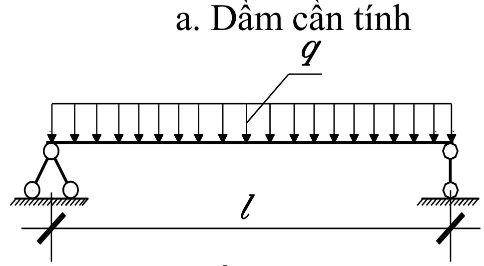
Xác định nội lực và chuyển vị của dầm siêu tĩnh trình bày ở hình 3.1a. Chiều dài dầm l, độ cứng uốn EJ không đổi, tải phân bố đều q. Chọn trục tọa độ x như trên hình vẽ (Hình 3.1b).

Đường độ võng y_1 và Q_1của dầm được tìm theo hàm đa thức :

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 \\ Q_1 = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 \end{array}\right\} (a)$$



a. Dầm cần tính



b. Dầm so sánh

Hình 3.1. Dầm đầu ngàm đầu khớp

Các hệ số $a_i (i = 1 \div 5)$, $b_i (b = 0 \div 4)$ là các ẩn cần xác định. Hàm y cần thỏa mãn thêm các điều kiện ràng buộc sau:

Điều kiện góc xoay tại ngàm và chuyển vị tại đầu phải dầm bằng không:

$$\left.\begin{array}{l} g_1 = \left.\dfrac{dy_1}{dx} - \dfrac{\alpha}{GF} Q_1 \right|_{x=0} = 0 \\ g_2 = y\big|_{x=l1} = 0 \end{array}\right\} \quad \text{(b)}$$

Biến dạng uốn χ_1 và biến dạng trượt γ_1 của dầm bằng, theo (3.8) :

$$\chi_1 = -\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF}\frac{dQ_1}{dx}\ ;\ \gamma_1 = \frac{dy_1}{dx} - \frac{\alpha Q_1}{GF} \ \text{(c)}$$

Mô men uốn của dầm bằng, theo (3.8):

$$M_1 = EJ\chi_1 = EJ\left[-\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF}\frac{dQ_1}{dx}\right] \quad \text{(d)}$$

Chọn dầm tĩnh định cùng chịu lực phân bó đều q làm hệ so sánh (hình 3.18c).

Momen uốn và lực cắt của dầm so sánh xác định theo công thức:

$$\left.\begin{array}{l} M_0 = \dfrac{ql}{2}x - \dfrac{q}{2}x^2 \\ Q_0 = \dfrac{ql}{2} - qx \end{array}\right\} \quad \text{(e)}$$

Hai phản lực gối tựa trái R_{0t} và phải R_{0p} của dầm so sánh không có tác dụng lên dầm cần tính, cho nên từ biểu thức (3.19) lượng cưỡng bức Z của dầm được viết như sau:

$$Z = \int_0^{l1} (EJ\chi_1 - \frac{qlx}{2} + \frac{qx^2}{2})\chi_1 + \int_0^{l1} (Q_1 - \frac{ql}{2} + qx)\gamma_1 \rightarrow Min \text{(f)}$$

Khi tìm cực tiểu của Z còn phải thỏa mãn điều kiện ràng buộc (b) cho nên, theo phương pháp thừa số Lagrange, viết phiếm hàm mở rộng F :

$$F = Z + \sum_{k=1}^{2} \lambda_k g_k \rightarrow Min \quad \text{(g)}$$

Ở đây $\lambda_k (k = 1, 2)$ là các thừa số Lagrange cũng là các ẩn của bài toán, Z xác định theo (g). Từ điều kiện cực tiểu của biểu thức (g) ta nhận được hệ phương trình sau:

$$\left.\begin{aligned} & h_i = \int_0^{l1} [M_1 - M_{01}] \frac{\partial}{\partial a_i}(\chi_1) dx + \frac{\partial}{\partial a_i} \sum_{k=1}^{2} g_k \lambda_k = 0; \quad a_i (i = 1 \div 5) \\ & f_i = \int_0^{l_i} [M_1 - M_{01}] \frac{\partial}{\partial b_i}(\chi_1) dx + \frac{\partial}{\partial a_i} \sum_{k=1}^{2} g_k \lambda_k + \int_0^{l1} [Q_1 - Q_{01}] \frac{\partial}{\partial b_i}(\gamma_1) dx = 0; \\ & b_i (i = 0 \div 4) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(h)}$$

Giải hệ phương trình (h) gồm 12 phương trình $a_i (i = 1 \div 5)$; λ_1, λ_2 và $a_i (i = 1 \div 5)$ ta tìm được 12 ẩn số. Từ đó tìm được:

- Hàm đường độ võng của dầm cần tính $y(x) = \dfrac{ql^2}{16EJ} x^2 - \dfrac{5ql}{48EJ} x^3 + \dfrac{q}{24EJ} x^4$

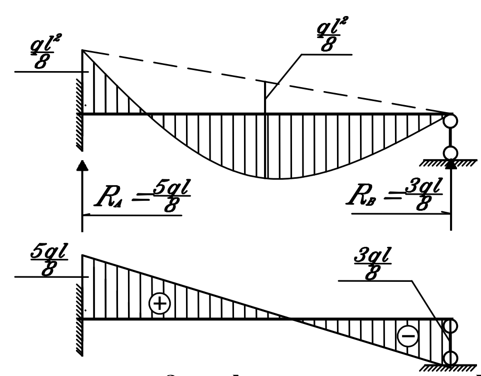
- Hàm momen uốn của dầm cần tính $M(x) = -\dfrac{ql^2}{8} + \dfrac{5ql}{8} x - \dfrac{q}{2} x^2$

- Hàm lực cắt của dầm cần tính $Q(x) = \dfrac{5ql}{8} - qx$

Momen uốn tại gối tựa khớp, $x = l$, bằng không. Chú ý, khác với các phương pháp hiện có, khi xây dựng bài toán tính dầm ở trên không cần dùng diều kiện biên này và nó được tự động thỏa mãn.

Hàm đa thức xấp xỉ độ võng dầm trong thí dụ trên (biểu thức (a)) có thể mở rộng đếnbậc 5, bậc 6 v.v…, tuy nhiên trong ví dụ này các hệ số của chúng sẽ tự động triệt tiêu.

- Biểu đồ moomen uốn và lực cắt trong trường hợp không xét biến dạng trượt có dạng như, hình 3.2.



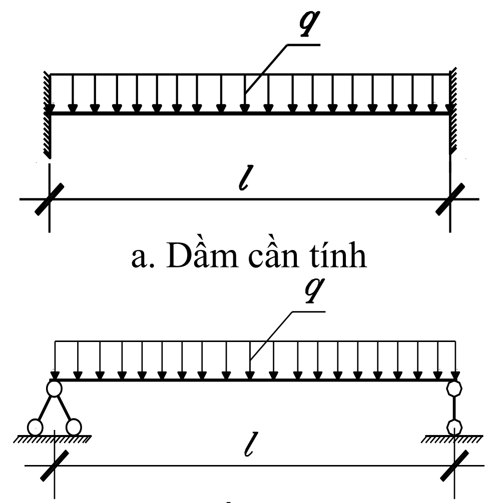
Hình 3.2. Biểu đồ M và Q của dầm đầu ngàm – đầu khớp

Ví dụ 3.2:Dầm hai đầu ngàm.

Xác định nội lực và chuyển vị của dầm siêu tĩnh trình bày ở hình 3.3a, dầm so sánh hình 3.3b. Chiều dài dầm l, độ cứng uốn EJ không đổi, tải phân bố đều q.

Đường độ võng y_1 và Q_1 của dầm được tìm theo hàm đa thức:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 \\ Q_1 &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 \end{aligned}\right\} \text{(a)}$$



a. Dầm cần tính

b. Dầm so sánh

Hình 3.3. Dầm hai đầu ngàm

Các hệ số $a_i(i=1\div 5)$, $b_i(b=0\div 4)$ là các ẩn cần xác định. Hàm y cần thỏa mãn thêm các điều kiện ràng buộc sau:

Điều kiện góc xoay tại ngàm ở hai đầu và chuyển vị tại đầu phải dầm bằng không:

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= \frac{dy_1}{dx} - \frac{\alpha}{GF}Q_1\Big|_{x=0} = 0 \\ g_2 &= y\big|_{x=l1} = 0 \\ g_3 &= \frac{dy_1}{dx} - \frac{\alpha}{GF}Q_1\Big|_{x=l1} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(b)}$$

Biến dạng uốn χ_1 và biến dạng trượt γ_1 của dầm bằng, theo (3.8) :

$$\chi_1 = -\frac{d^2y_1}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF}\frac{dQ_1}{dx}\,;\ \gamma_1 = \frac{dy_1}{dx} - \frac{\alpha Q_1}{GF} \text{ (c)}$$

Mô men uốn của dầm bằng, theo (3.8):

$$M_1 = EJ\chi_1 = EJ\left[-\frac{d^2y_1}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF}\frac{dQ_1}{dx}\right] \qquad \text{(d)}$$

Chọn dầm tĩnh định cùng chịu lực phân bó đều q làm hệ so sánh (hình 3.18b).

Momen uốn và lực cắt của dầm so sánh xác định theo công thức :

$$\left.\begin{aligned} M_0 &= \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2 \\ Q_0 &= \frac{ql}{2} - qx \end{aligned}\right\} \qquad \text{(e)}$$

Hai phản lực gối tựa trái R_{0t} và phải R_{0p} của dầm so sánh không có tác dụng lên dầm cần tính, cho nên từ biểu thức (3.19) lượng cưỡng bức Z của dầm được viết như sau:

$$Z = \int_0^{l1} (EJ\chi_1 - \frac{qlx}{2} + \frac{qx^2}{2})\chi_1 + \int_0^{l1} (Q_1 - \frac{ql}{2} + qx)\gamma_1 \to Min \text{(f)}$$

Khi tìm cực tiểu của Z còn phải thỏa mãn điều kiện ràng buộc (b) cho nên, theo phương pháp thừa số Lagrange, viết phiếm hàm mở rộng F :

$$F = Z + \sum_{k=1}^{3} \lambda_k g_k \to Min \qquad \text{(g)}$$

Ở đây $\lambda_k (k = 1, 2, 3)$ là các thừa số Lagrange cũng là các ẩn của bài toán, Z xác định theo (g). Từ điều kiện cực tiểu của biểu thức (g) ta nhận được hệ phương trình sau:

$$\left.\begin{aligned} & h_i = \int_0^{l1} [M_1 - M_{01}] \frac{\partial}{\partial a_i}(\chi_1)dx + \frac{\partial}{\partial a_i}\sum_{k=1}^{3} g_k \lambda_k = 0; \quad a_i (i = 1 \div 5) \\ & f_i = \int_0^{l1} [M_1 - M_{01}] \frac{\partial}{\partial b_i}(\chi_1)dx + \frac{\partial}{\partial a_i}\sum_{k=1}^{3} g_k \lambda_k + \int_0^{l1} [Q_1 - Q_{01}] \frac{\partial}{\partial b_i}(\gamma_1)dx = 0; \\ & b_i (i = 0 \div 4) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(h)}$$

Giải hệ phương trình (h) gồm 13 phương trình $a_i (i = 1 \div 5)$; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3,$ và $a_i (i = 1 \div 5)$ ta tìm được 13 ẩn số. Từ đó tìm được:

- Hàm đường độ võng của dầm cần tính:

$$y(x) = \frac{1}{10000000}\frac{ql^3}{EJ}x + \frac{ql^2}{24EJ}x^2 - \frac{ql}{12EJ}x^3 + \frac{q}{24EJ}x^4$$

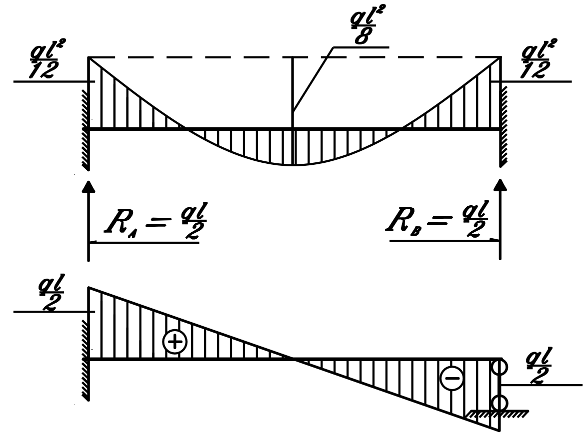
- Tại *x=0.5*l có:* $y(x)_{max} = \dfrac{ql^4}{384EJ}$

- Hàm momen uốn và hàm lực cắt của dầm cần tính:

$$M(x) = -\frac{ql^2}{12} + \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2;$$

- Hàm lực cắt của dầm cần tính: $Q(x) = \frac{ql}{2} - qx$

- Biểu đồ mômen uốn và lực cắt trong trường hợp không xét biến dạng trượt có dạng như, hình 3.4.



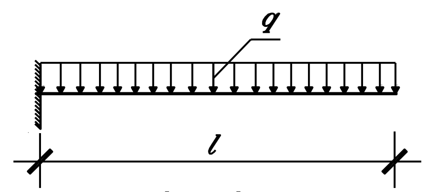
Hình 3.4. Biểu đồ M và Q của dầm hai đầu ngàm

Ví dụ 3.3:Dầm dầu ngàm – đầu tự do

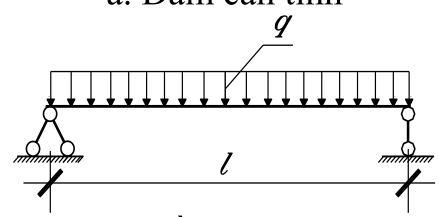
Xác định nội lực và chuyển vị của dầm tĩnh định trình bày ở hình 3.5a. Chiều dài dầm l, độ cứng uốn EJ không đổi, tải phân bố đều q. Dầm so sánh là dầm đơn giản, hình 3.5b.

Đường độ võng y_1 và Q_1của dầm được tìm theo hàm đa thức :

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 \\ Q_1 &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 \end{aligned}\right\} \text{(a)}$$



a. Dầm cần tính



b. Dầm so sánh

Hình 3.5. Dầm đầu ngàm - đầu tự do

Các hệ số $a_i(i = 1 \div 5)$, $b_i(b = 0 \div 4)$ là các ẩn cần xác định. Hàm y cần thỏa mãn thêm các điều kiện ràng buộc sau:

Điều kiện góc xoay tại ngàm ở đầu trái;mômen uốn và lực cắt tại đầu phải dầm bằng không:

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= \frac{dy_1}{dx} - \frac{\alpha}{GF} Q_1 \Big|_{x=0} = 0 \\ g_2 &= EJ\left[-\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF}\frac{dQ_1}{dx} \right]_{x=l1} \\ g_3 &= EJ\left[-\frac{d^3 y_1}{dx^3} + \frac{\alpha}{GF}\frac{d^2 Q_1}{dx^2} \right]_{x=l1} \end{aligned}\right\} \quad \text{(b)}$$

Biến dạng uốn χ_1 và biến dạng trượt γ_1 của dầm bằng, theo (3.8) :

$$\chi_1 = -\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF}\frac{dQ_1}{dx}\ ;\ \gamma_1 = \frac{dy_1}{dx} - \frac{\alpha Q_1}{GF} \quad \text{(c)}$$

Mô men uốn của dầm bằng, theo (3.8):

$$M_1 = EJ\chi_1 = EJ\left[-\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF}\frac{dQ_1}{dx} \right] \qquad \text{(d)}$$

Chọn dầm tĩnh định cùng chịu lực phân bố đều q làm hệ so sánh (hình 3.21b).

Momen uốn và lực cắt của dầm so sánh xác định theo công thức:

$$\left.\begin{aligned} M_0 &= \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2 \\ Q_0 &= \frac{ql}{2} - qx \end{aligned}\right\} \qquad \text{(e)}$$

Phản lực gối tựa trái R_{0t} của dầm so sánh không có tác dụng lên dầm cần tính mà chỉ có phản lực phải R_{0p} tác dụng tại đầu phải của dầm cần tính cùng chiều với tải trọng q , cho nên từ biểu thức (3.19) lượng cưỡng bức Z của dầm được viết như sau:

$$Z = \int_0^{l1} (EJ\chi_1 - \frac{qlx}{2} + \frac{qx^2}{2})\chi_1 + \int_0^{l1} (Q_1 - \frac{ql}{2} + qx)\gamma_1 - \frac{ql}{2} y_1\Big|_{x=l1} \rightarrow Min \text{(f)}$$

Khi tìm cực tiểu của Z còn phải thỏa mãn điều kiện ràng buộc (b) cho nên, theo phương pháp thừa số Lagrange, viết phiếm hàm mở rộng F :

$$F = Z + \sum_{k=1}^{3} \lambda_k g_k \rightarrow Min \qquad \text{(g)}$$

Ở đây $\lambda_k (k = 1, 2, 3)$ là các thừa số Lagrange cũng là các ẩn của bài toán, F xác định theo (g). Từ điều kiện cực tiểu của biểu thức (g) ta nhận được hệ phương trình sau:

$$\left.\begin{array}{l} h_i = \int_0^{l1}\left[M_1 - M_{01}\right]\dfrac{\partial}{\partial a_i}(\chi_1)dx + \dfrac{\partial}{\partial a_i}\sum_{k=1}^{3} g_k\lambda_k - \dfrac{ql}{2}\dfrac{\partial}{\partial a_i}y_1\Big|_{x=l1} = 0; \quad a_i(i = 1\div 5) \\ f_i = \int_0^{l1}\left[M_1 - M_{01}\right]\dfrac{\partial}{\partial b_i}(\chi_1)dx + \dfrac{\partial}{\partial a_i}\sum_{k=1}^{3} g_k\lambda_k + \int_0^{l1}\left[Q_1 - Q_{01}\right]\dfrac{\partial}{\partial b_i}(\gamma_1)dx = 0; \\ b_i(i = 0\div 4) \end{array}\right\}(h)$$

Giải hệ phương trình (h) gồm 13 phương trình $a_i(i=1\div 5)$; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, và $a_i(i=1\div 5)$ ta tìm được 13 ẩn số. Từ đó tìm được:

- Hàm đường độ võng của dầm cần tính:

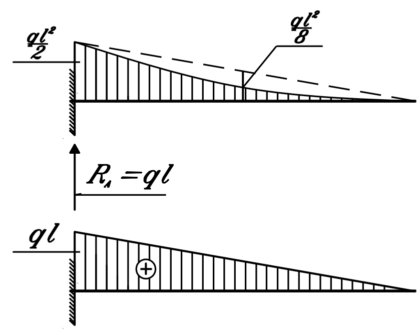
$$y(x) = \frac{1}{5000000}\frac{ql^3}{EJ}x + \frac{ql^2}{4EJ}x^2 - \frac{ql}{6EJ}x^3 + \frac{q}{24EJ}x^4$$

- Tại *x=l có:* $y(x)_{\max} = \dfrac{ql^4}{8EJ}$

- Hàm momen uốn của dầm cần tính $M(x) = -\dfrac{ql^2}{2} + qlx - \dfrac{q}{2}x^2$;

- Hàm lực cắt của dầm cần tính $Q(x) = ql - qx$

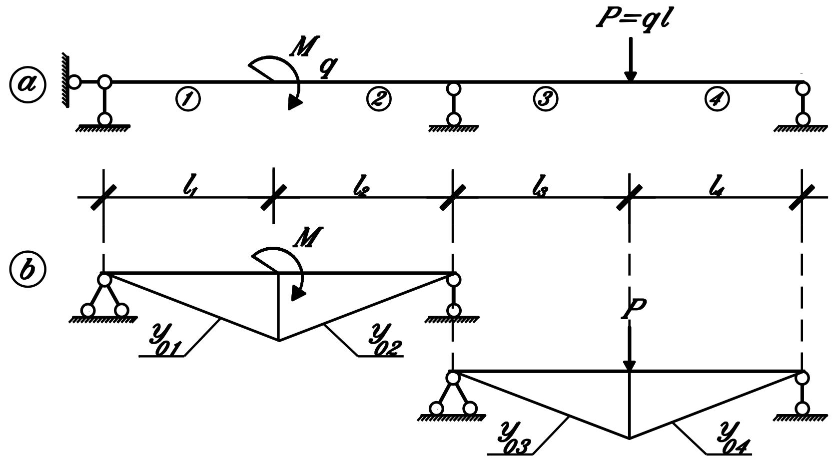
- Biểu đồ mômen uốn và lực cắt trong trường hợp không xét biến dạng trượt có dạng như, hình 3.22.



Hình 3.6. Biểu đồ M và Q của dầm đầu ngàm – đầu tự do

Ví dụ 3.4: Tính dầm liên tục hai nhịp

Xác định nội lực và chuyển vị của dầm liên tục hai nhịp, độ cứng uốn EJ=Const, chịu tải M và P như hình 3.7a. Tiết diện dầm chữ nhật, có chiều cao h, hệ số ứng suất trượt $\alpha = 1.2$. Dầm so sánh là các dầm đơn giản, hình 3.7b.



Hình 3.7. Dầm liên tục hai nhịp

Chia dầm thành bốn đoạn với các đoạn có chiều dài tương ứng là $l_1=l_2=l_3=l_4=l/2$

Giả thiết đường độ võng y_1, y_2, y_3, y_4 và đường lực cắt Q_1, Q_2,Q_3,Q_4, của dầm có dạng đa thức như sau:

$$\left.\begin{array}{ll} y_1 = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4; & Q_1 = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \\ y_2 = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4; & Q_2 = d_0 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3 \\ y_3 = e_1x + e_2x^2 + e_3x^3 + e_4x^4; & Q_3 = i_0 + i_1x + i_2x^2 + i_3x^3 \\ y_4 = v_0 + v_1x + v_2x^2 + v_3x^3 + v_4x^4; & Q_4 = w_0 + w_1x + w_2x^2 + w_3x^3 \end{array}\right\} \quad \text{(a)}$$

Trong đó: $a_i(i=1\div4)$, $b_i(i=0\div3)$, $c_i(i=0\div4)$, $d_i(i=0\div3)$, $e_i(i=1\div4)$, $i_i(i=0\div3)$, $v_i(i=0\div4)$, $w_i(i=0\div3)$, là các ẩn của bài toán. Theo các biểu thức từ (3.4) đến (3.7) tính được: Biến dạng trượt γ_1, γ_2,γ_3,γ_4,; góc xoay θ_1, θ_2,θ_3,θ_4,; biến dạng uốn χ_1, χ_2, χ_3, χ_4, và momen uốn M_{x1}, M_{x2},M_{x3},M_{x4}, tương ứng với các đoạn 1, 2, 3 và 4, cụ thể là:

$$\gamma_i = \frac{\alpha Q_i}{GF}; \qquad \theta_i = \frac{dy_i}{dx} - \gamma_i = \frac{dy_i}{dx} - \frac{\alpha Q_i}{GF}; \qquad \text{với (i=1}\div\text{4)}$$

$$\chi_i = -\frac{d^2y_i}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF}\frac{dQ_i}{dx}; \quad M_{xi} = -EJ\chi_i = EJ\left(-\frac{d^2y_i}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF}\frac{dQ_i}{dx}\right)$$

Trong đó: α là hệ số xét sự phân bố không đều của ứng suất cắt tại trục dầm; *GF* là độ cứng cắt của dầm:

$$GF = \frac{E}{2}F = \frac{6EJ}{h^2}$$

Chọn hai dầm tĩnh định chịu moomen tập trung M và lực tập trung P làm hệ so sánh tương ứng cho hai nhịp của dầm liên tục cần tính (hình 3.23b).

Momen uốn và lực cắt của hai dầm so sánh xác định theo công thức:

$$\left.\begin{aligned} &M_{01} = \frac{-Mx}{(l_1 + l_2)}; \quad M_{02} = \frac{-M(l_2 - x)}{(l_1 + l_2)}; Q_{01} = \frac{-M}{(l_1 + l_2)}; \quad Q_{02} = \frac{-M}{(l_1 + l_2)}; \\ &M_{03} = \frac{Pl_4 x}{(l_3 + l_4)}; \quad M_{04} = \frac{Pl_3(l_4 - x)}{(l_3 + l_4)}; Q_{03} = \frac{Pl_4}{(l_3 + l_4)}; \quad Q_{04} = \frac{-Pl_3}{(l_3 + l_4)}; \end{aligned}\right\} (b)$$

Phản lực gối tựa trái R_{0t} và gối tựa phải R_{0p} của hai dầm so sánh không gây mô men lên dầm liên tục cần tính, cho nên từ biểu thức (3.19) lượng cưỡng bức Z của dầm được viết như sau:

$$\left.\begin{aligned} Z = &\int_0^{l1}\left(EJ\chi_1 + \frac{Mx}{(l_1 + l_2)}\right)\chi_1 dx + \int_0^{l1}\left(Q_1 + \frac{M}{(l_1 + l_2)}\right)\gamma_1 dx + \\ &+\int_0^{l2}\left(EJ\chi_2 + \frac{M(l_2 - x)}{(l_1 + l_2)}\right)\chi_2 dx + \int_0^{l2}(Q_2 + \frac{M}{(l_1 + l_2)})\gamma_2 dx + \\ &+\int_0^{l3}\left(EJ\chi_3 - \frac{Pl_4 x}{(l_3 + l_4)}\right)\chi_3 dx + \int_0^{l3}\left(Q_3 - \frac{Pl_4}{(l_3 + l_4)}\right)\gamma_3 dx + \\ &+\int_0^{l4}\left(EJ\chi_4 - \frac{Pl_3(l_4 - x)}{(l_3 + l_4)}\right)\chi_4 dx + \int_0^{l4}\left(Q_4 + \frac{Pl_3}{(l_3 + l_4)}\right)\gamma_4 dx \end{aligned}\right\} \rightarrow Min(c)$$

Hàm độ võng y_i phải thoả mãn các điều kiện ràng buộc sau:

$$\left.\begin{aligned} &g_1 = EJ\left(-\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF}\frac{dQ_1}{dx}\right)\Bigg|_{x=0} = 0; \quad g_2 = \left(\frac{dy_1}{dx} - \frac{\alpha Q_1}{GF}\right)\Bigg|_{x=l_1} = \left(\frac{dy_2}{dx} - \frac{\alpha Q_2}{GF}\right)\Bigg|_{x=0} \\ &g_3 = y_1\big|_{x=l_1} = y_2\big|_{x=0}; \quad g_4 = y_2\big|_{x=l_2} = 0; \quad g_5 = \left(\frac{dy_2}{dx} - \frac{\alpha Q_2}{GF}\right)\Bigg|_{x=l_2} = \left(\frac{dy_3}{dx} - \frac{\alpha Q_3}{GF}\right)\Bigg|_{x=0} \\ &g_6 = \left(\frac{dy_3}{dx} - \frac{\alpha Q_3}{GF}\right)\Bigg|_{x=l_3} = \left(\frac{dy_4}{dx} - \frac{\alpha Q_4}{GF}\right)\Bigg|_{x=0}; g_7 = y_3\big|_{x=l3} = y_4\big|_{x=0}; g_8 = y_4\big|_{x=l_4} = 0 \\ &g_9 = EJ\left(-\frac{d^2 y_4}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF}\frac{dQ_4}{dx}\right)\Bigg|_{x=l4} = 0 \end{aligned}\right\} (c)$$

Đưa bài toán tìm cực trị (b) với các ràng buộc (c) về bài toán cực trị không ràng buộc bằng cách xây dựng phiếm hàm mở rộng Lagrange F như sau:

$$F = Z + \sum_{k=1}^{9} \lambda_k g_k \to Min \qquad \text{(d)}$$

Với λ_k(k=1÷9) là các thừa số Lagrange cũng là các ẩn của bài toán. Như vậy có tổng cộng 41 ẩn (4 hệ số a_i, 4 hệ số b_i,4 hệ số c_i, 4 hệ số d_i, 4 hệ số e_i,4 hệ số i_i, 4 hệ số v_i, 4 hệ số w_i và 9 thừa số λ_i,). Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss xem các biến dạng uốn là độc lập với mômen tác dụng cho nên điều kiện cực trị của phiếm hàm mở rộng F là:

$$\left.\begin{aligned}
h_i &= \int_0^{l_1} [M_{x1} - M_{01}] \frac{\partial}{\partial a_i}(\chi_1)dx + \frac{\partial}{\partial a_i}\sum_{k=1}^{9}(g_k \lambda_k) = 0; \quad a_i(i = 1, 2, 3,4) \\
f_i &= \int_0^{l_1} [M_{x1} - M_{01}] \frac{\partial}{\partial b_i}(\chi_1)dx + \frac{\partial}{\partial b_i}\sum_{k=1}^{9}(g_k \lambda_k) + \int_0^{l1}[Q_1 - Q_{01}]\frac{\partial}{\partial b_i}(\gamma_1)dx = 0; b_i(i = 0,1, 2, 3) \\
k_i &= \int_0^{l_2} [M_{x2} - M_{02}] \frac{\partial}{\partial c_i}(\chi_2)dx + \frac{\partial}{\partial c_i}\sum_{k=1}^{9}(g_k \lambda_k) = 0; \quad c_i(i = 0, 1, 2, 3,4) \\
t_i &= \int_0^{l_2} [M_{x2} - M_{02}] \frac{\partial}{\partial d_i}(\chi_2)dx + \frac{\partial}{\partial d_i}\sum_{k=1}^{9}(g_k \lambda_k) + \int_0^{l2}[Q_2 - Q_{02}]\frac{\partial}{\partial d_i}(\gamma_2)dx = 0; d_i(i = 0,1, 2, 3)
\end{aligned}\right\} \text{(d1)}$$

$$\left.\begin{aligned}
h_{3i} &= \int_0^{l_3} [M_{x3} - M_{03}] \frac{\partial}{\partial e_i}(\chi_3)dx + \frac{\partial}{\partial e_i}\sum_{k=1}^{9}(g_k \lambda_k) = 0; \quad e_i(i = 1, 2, 3,4) \\
f_{3i} &= \int_0^{l_3} [M_{x3} - M_{03}] \frac{\partial}{\partial i_i}(\chi_3)dx + \frac{\partial}{\partial i_i}\sum_{k=1}^{9}(g_k \lambda_k) + \int_0^{l3}[Q_3 - Q_{03}]\frac{\partial}{\partial i_i}(\gamma_3)dx = 0; i_i(i = 0,1, 2, 3) \\
k_{4i} &= \int_0^{l_4} [M_{x4} - M_{04}] \frac{\partial}{\partial v_i}(\chi_4)dx + \frac{\partial}{\partial v_i}\sum_{k=1}^{9}(g_k \lambda_k) = 0; \quad v_i(i = 0, 1, 2, 3,4) \\
t_{4i} &= \int_0^{l_4} [M_{x4} - M_{04}] \frac{\partial}{\partial w_i}(\chi_4)dx + \frac{\partial}{\partial w_i}\sum_{k=1}^{9}(g_k \lambda_k) + \int_0^{l4}[Q_4 - Q_{04}]\frac{\partial}{\partial w_i}(\gamma_4)dx = 0; w_i(i = 0,1, 2, 3)
\end{aligned}\right\} \text{(d2)}$$

Nhận được 41 phương trình bậc nhất để xác định 41 ẩn số. Giải các phương trình trên ta nhận được kết quả tính đường độ võng y_i, moomen uốn $M_i$và lực cắt Q_i như sau:

$$y_1(x) = -0.0677\frac{ql^3}{EJ}x + 0.1927\frac{ql}{EJ}x^3$$

$$y_2(x) = -0.0098\frac{ql^4}{EJ} + 0.0768\frac{ql^3}{EJ}x - 0.2109\frac{ql^2}{EJ}x^2 + 0.1927\frac{ql}{EJ}x^3$$

$$y_3(x) = 0.0104\frac{ql^3}{EJ}x + 0.0781\frac{ql^2}{EJ}x^2 - 0.1094\frac{ql}{EJ}x^3$$

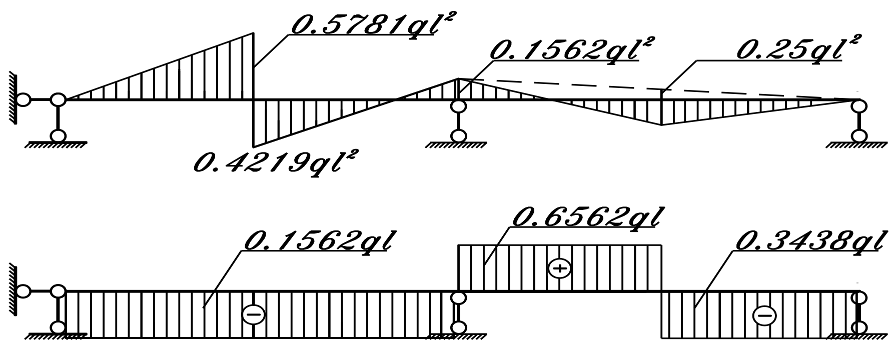
$$y_4 = 0.0111\frac{ql^4}{EJ} + 0.0065\frac{ql^3}{EJ}x - 0.0859\frac{ql^2}{EJ}x^2 + 0.0573\frac{ql}{EJ}x^3$$

$M_{1x} = -1.1562qlx$; $Q_{1x} = -1.1562ql$

$M_{2x} = 0.4219ql^2 - 1.1562qlx$; $Q_{2x} = -1.1562ql$

$M_{3x} = -0.1562ql^2 + 0.6562qlx$; $Q_{3x} = 0.6562ql$

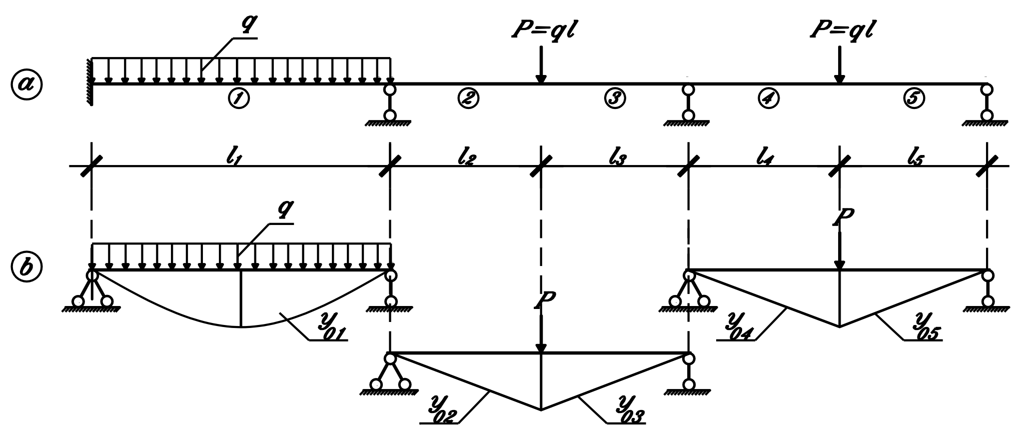
$M_{4x} = 0.1719ql^2 - 0.3438qlx$; $Q_{4x} = -0.3438ql$



Hình 3.8. Biểu đồ M và Q

Ví dụ 3.5: Tính dầm liên tục ba nhịp

Xác định nội lực và chuyển vị của dầm liên tục ba nhịp, độ cứng uốn EJ=Const, chịu tải phân bố đều q và tải trọng tập trung P như hình 3.9a. Tiết diện dầm chữ nhật, có chiều cao h, hệ số ứng suất trượt $\alpha = 1.2$. Dầm so sánh là các dầm đơn giản, hình 3.9b.



Hình 3.9. Dầm liên tục ba nhịp

Chia dầm thành năm đoạn với các đoạn có chiều dài tương ứng là:

$l_1=l$, $l_2=l_3=l_4=l_5=l/2$.

Giả thiết đường độ võng y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, và đường lực cắt Q_1, Q_2,Q_3,Q_4, Q_5, của dầm có dạng đa thức như sau:

$$\left.\begin{array}{ll} y_1 = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4; & Q_1 = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 \\ y_2 = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4; & Q_2 = d_0 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3 + d_4x^4 \\ y_3 = e_0 + e_1x + e_2x^2 + e_3x^3 + e_4x^4; & Q_3 = n_0 + n_1x + n_2x^2 + n_3x^3 + n_4x^4 \\ y_4 = j_1x + j_2x^2 + j_3x^3 + j_4x^4; & Q_4 = w_0 + w_1x + w_2x^2 + w_3x^3 + w_4x^4 \\ y_5 = i_0 + i_1x + i_2x^2 + i_3x^3 + i_4x^4; & Q_5 = v_0 + v_1x + v_2x^2 + v_3x^3 + v_4x^4 \end{array}\right\} \quad (a)$$

Trong đó: $a_i(i=1\div4)$, $b_i(i=0\div4)$, $c_i(i=1\div4)$, $d_i(i=0\div4)$, $e_i(i=1\div4)$, $n_i(i=0\div4)$, $j_i(i=1\div4)$, $w_i(i=0\div4)$, $i_i(i=0\div4)$, $v_i(i=0\div4)$, là các ẩn của bài toán. Theo các biểu thức từ (3.4) đến (3.7) tính được: Biến dạng trượt γ_1, γ_2,γ_3,γ_4,γ_5,; góc xoay θ_1, θ_2,θ_3,θ_4,θ_5,; biến dạng uốn χ_1, χ_2, χ_3, χ_4,χ_5, và momen uốn M_{x1}, M_{x2},M_{x3},M_{x4},M_{x5}, tương ứng với các đoạn 1, 2, 3, 4 và 5, cụ thể là:

$$\gamma_i = \frac{\alpha Q_i}{GF}; \qquad \theta_i = \frac{dy_i}{dx} - \gamma_i = \frac{dy_i}{dx} - \frac{\alpha Q_i}{GF}; \qquad \text{với } (i=1\div5)$$

$$\chi_i = -\frac{d^2y_i}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF}\frac{dQ_i}{dx}; \quad M_{xi} = -EJ\chi_i = EJ\left(-\frac{d^2y_i}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF}\frac{dQ_i}{dx}\right)$$

Trong đó: α là hệ số xét sự phân bố không đều của ứng suất cắt tại trục dầm; *GF* là độ cứng cắt của dầm:

$$GF = \frac{E}{2}F = \frac{6EJ}{h^2}$$

Chọn ba dầm tĩnh định chịu lực phân bố đều q và lực tập trung P làm hệ so sánh tương ứng cho ba nhịp của dầm liên tục cần tính (hình 3.25b).

Momen uốn và lực cắt của ba dầm so sánh lần lượt xác định theo công thức:

$$\left.\begin{aligned}
&M_{01}=\frac{qxl}{2}-\frac{qx^2}{2};\quad M_{02}=\frac{Pl_2x}{(l_2+l_3)};Q_{01}=\frac{ql}{2}-qx;\quad Q_{02}=\frac{Pl_3}{(l_2+l_3)};\\
&M_{03}=\frac{Pl_2(l_3-x)}{(l_2+l_3)};\quad M_{04}=\frac{Pl_5x}{(l_4+l_5)};Q_{03}=\frac{-Pl_2}{(l_2+l_3)};\quad Q_{04}=\frac{Pl_5}{(l_4+l_5)};\\
&M_{05}=\frac{Pl_4(l_5-x)}{(l_4+l_5)};\quad Q_{05}=-\frac{Pl_4}{(l_4+l_5)};
\end{aligned}\right\}\text{(b)}$$

Phản lực gối tựa trái R_{0t} và gối tựa phải R_{0p} của hai dầm so sánh không gây mô men lên dầm liên tục cần tính, cho nên từ biểu thức (3.19) lượng cưỡng bức Z của dầm được viết như sau:

$$\left.\begin{aligned}
Z=&\int_0^{l1}\left(EJ\chi_1-\frac{qxl}{2}+\frac{qx^2}{2}\right)\chi_1dx+\int_0^{l1}\left(Q_1-\frac{ql}{2}+qx\right)\gamma_1dx+\\
&+\int_0^{l2}\left(EJ\chi_2-\frac{Pl_2x}{(l_2+l_3)}\right)\chi_2dx+\int_0^{l2}(Q_2-\frac{Pl_3}{(l_2+l_3)})\gamma_2dx+\\
&+\int_0^{l3}\left(EJ\chi_3-\frac{Pl_2(l_3-x)}{(l_2+l_3)}\right)\chi_3dx+\int_0^{l3}\left(Q_3+\frac{Pl_2}{(l_2+l_3)}\right)\gamma_3dx+\\
&+\int_0^{l4}\left(EJ\chi_4-\frac{Pl_5x}{(l_4+l_5)}\right)\chi_4dx+\int_0^{l4}\left(Q_4-\frac{Pl_5}{(l_4+l_5)}\right)\gamma_4dx+\\
&+\int_0^{l5}\left(EJ\chi_5-\frac{Pl_4(l_5-x)}{(l_4+l_5)}\right)\chi_5dx+\int_0^{l5}\left(Q_5+\frac{Pl_4}{(l_4+l_5)}\right)\gamma_5dx
\end{aligned}\right\}\to Min\text{(c)}$$

Hàm độ võng y_i phải thoả mãn các điều kiện ràng buộc sau:

$$\left.\begin{aligned}
&g_1=\left(\frac{dy_1}{dx}-\frac{\alpha Q_1}{GF}\right)\Bigg|_{x=0};\quad g_2=y_1\big|_{x=l_1};\quad g_3=\left(\frac{dy_1}{dx}-\frac{\alpha Q_1}{GF}\right)\Bigg|_{x=l_1}=\left(\frac{dy_2}{dx}-\frac{\alpha Q_2}{GF}\right)\Bigg|_{x=0}\\
&g_4=\left(\frac{dy_2}{dx}-\frac{\alpha Q_2}{GF}\right)\Bigg|_{x=l_2}=\left(\frac{dy_3}{dx}-\frac{\alpha Q_3}{GF}\right)\Bigg|_{x=0};g_5=y_2\big|_{x=l2}=y_3\big|_{x=0};g_6=y_3\big|_{x=l_3}\\
&g_7=\left(\frac{dy_3}{dx}-\frac{\alpha Q_3}{GF}\right)\Bigg|_{x=l_3}=\left(\frac{dy_4}{dx}-\frac{\alpha Q_4}{GF}\right)\Bigg|_{x=0};g_8=\left(\frac{dy_4}{dx}-\frac{\alpha Q_4}{GF}\right)\Bigg|_{x=l4}=\left(\frac{dy_5}{dx}-\frac{\alpha Q_5}{GF}\right)\Bigg|_{x=0};\\
&g_9=y_4\big|_{x=l4}=y_5\big|_{x=0};g_{10}=y_5\big|_{x=l5};\quad g_{11}=EJ\left(-\frac{d^2y_5}{dx^2}+\frac{\alpha}{GF}\frac{dQ_5}{dx}\right)\Bigg|_{x=l5}=0
\end{aligned}\right\}\text{(c)}$$

Đưa bài toán tìm cực trị (b) với các ràng buộc (c) về bài toán cực trị không ràng buộc bằng cách xây dựng phiếm hàm mở rộng Lagrange F như sau:

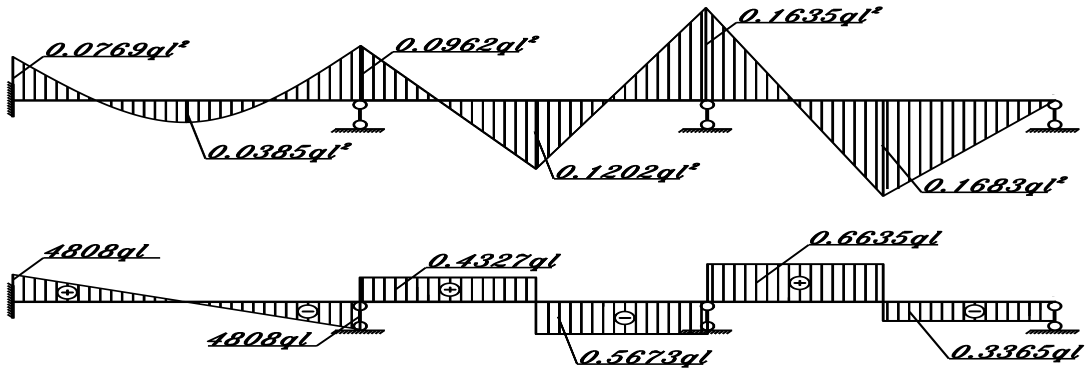
$$F = Z + \sum_{k=1}^{11} \lambda_k g_k \rightarrow Min \qquad \text{(d)}$$

Với λ_k(k=1÷11) là các thừa số Lagrange cũng là các ẩn của bài toán. Như vậy có tổng cộng 58 ẩn a_i(i=1÷4), b_i(i=0÷4), c_i(i=1÷4), d_i(i=0÷4), e_i(i=1÷4), n_i(i=0÷4), j_i(i=1÷4), w_i(i=0÷4), i_i(i=0÷4), v_i(i=0÷4),và 11 thừa số λ_i,). Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss xem các biến dạng uốn là độc lập với mômen tác dụng cho nên điều kiện cực trị của phiếm hàm mở rộng F là:

$$\left.\begin{aligned}
&h_i = \int_0^{l_1} [M_{x1} - M_{01}] \frac{\partial}{\partial a_i}(\chi_1) dx + \frac{\partial}{\partial a_i} \sum_{k=1}^{11} (g_k \lambda_k); \quad a_i (i = 1, 2, 3, 4)\\
&f_i = \int_0^{l_1} [M_{x1} - M_{01}] \frac{\partial}{\partial b_i}(\chi_1) dx + \frac{\partial}{\partial b_i} \sum_{k=1}^{11} (g_k \lambda_k) + \int_0^{l1} [Q_1 - Q_{01}] \frac{\partial}{\partial b_i}(\gamma_1) dx = 0; b_i (i = 0, 1, 2, 3, 4)\\
&h_{2i} = \int_0^{l_2} [M_{x2} - M_{02}] \frac{\partial}{\partial c_i}(\chi_2) dx + \frac{\partial}{\partial c_i} \sum_{k=1}^{11} (g_k \lambda_k) = 0; \quad c_i (i = 1, 2, 3, 4)\\
&f_{2i} = \int_0^{l_2} [M_{x2} - M_{02}] \frac{\partial}{\partial d_i}(\chi_2) dx + \frac{\partial}{\partial d_i} \sum_{k=1}^{11} (g_k \lambda_k) + \int_0^{l2} [Q_2 - Q_{02}] \frac{\partial}{\partial d_i}(\gamma_2) dx = 0; d_i (i = 0, 1, 2, 3, 4)\\
&k_{3i} = \int_0^{l_3} [M_{x3} - M_{03}] \frac{\partial}{\partial e_i}(\chi_3) dx + \frac{\partial}{\partial e_i} \sum_{k=1}^{11} (g_k \lambda_k) = 0; \quad e_i (i = 0, 1, 2, 3, 4)\\
&t_{3i} = \int_0^{l_3} [M_{x3} - M_{03}] \frac{\partial}{\partial n_i}(\chi_3) dx + \frac{\partial}{\partial n_i} \sum_{k=1}^{11} (g_k \lambda_k) + \int_0^{l3} [Q_3 - Q_{03}] \frac{\partial}{\partial n_i}(\gamma_3) dx = 0; n_i (i = 0, 1, 2, 3, 4)
\end{aligned}\right\} \text{(d1)}$$

$$\left.\begin{aligned}
&h_{4i} = \int_0^{l_4} [M_{x4} - M_{04}] \frac{\partial}{\partial j_i}(\chi_4) dx + \frac{\partial}{\partial j_i} \sum_{k=1}^{11} (g_k \lambda_k) = 0; \quad j_i (i = 1, 2, 3, 4)\\
&f_{4i} = \int_0^{l4} [M_{x4} - M_{04}] \frac{\partial}{\partial w_i}(\chi_4) dx + \frac{\partial}{\partial w_i} \sum_{k=1}^{11} (g_k \lambda_k) + \int_0^{l4} [Q_4 - Q_{04}] \frac{\partial}{\partial w_i}(\gamma_4) dx = 0; i_i (i = 0, 1, 2, 3, 4)\\
&k_{5i} = \int_0^{l_5} [M_{x5} - M_{05}] \frac{\partial}{\partial i_i}(\chi_5) dx + \frac{\partial}{\partial i_i} \sum_{k=1}^{11} (g_k \lambda_k) = 0; \quad i_i (i = 0, 1, 2, 3, 4)\\
&t_{5i} = \int_0^{l5} [M_{x5} - M_{05}] \frac{\partial}{\partial v_i}(\chi_5) dx + \frac{\partial}{\partial v_i} \sum_{k=1}^{11} (g_k \lambda_k) + \int_0^{l5} [Q_5 - Q_{05}] \frac{\partial}{\partial v_i}(\gamma_5) dx = 0;\\
&w_i (i = 0, 1, 2, 3, 4)
\end{aligned}\right\} \text{(d2)}$$

Nhận được 58 phương trình bậc nhất để xác định 58 ẩn số. Giải các phương trình trên ta nhận được kết quả tính đường độ võng y_i, $M_i$và lực cắt Q_i như sau:



Hình 3.10. Biểu đồ M và Q

KẾT LUẬN

Qua kết quả nghiên cứu từ các chương, chương 1 đến chương 3 tác giả đã áp dụng phương pháp so sánh để nghiên cứu nội lực và chuyển vị của hệ dầm có xét đến biến dạng trượt ngang do lực cắt Q gây ra. Tác giả rút ra các kết luận sau:

1. Tác giả đã áp dụng thành công phương pháp nguyên lý cực trị Gauss do GS. TSKH Hà Huy Cương đề xuất để nghiên cứu nội lực và chuyển vị của hệ dầm phẳng chịu uốn, chịu tác dụng của tải trọng tĩnh.
2. Tác giả đã áp dụng được phương pháp so sánh để nghiên cứu nội lực và chuyển vị của hệ dầm có xét đến biến dạng trượt ngang do lực cắt Q gây ra. Cách đặt bài toán đơn giản và nhận được kết quả chính xác. Khi không kể đến biến dạng trượt ngang nhận được kết quả trùng khớp với kết quả giải bằng các phương pháp khác.
3. Bài toán xác định nội lực và chuyển vị của hệ dầm có xét đến biến dạng trượt ngang tỏ ra rất đơn giản vì có thể so sánh cả hệ phức tạp với một hệ đơn giản. Hiệu quả của cách làm này càng cao khi hệ cần xét càng phức tạp.
4. Phương pháp giải bài toán kết cấu bằng cách sử dụng hệ so sánh mở ra khả năng nhận được dữ liệu thực nghiệm của một kết cấu từ việc nghiên cứu thực nghiệm kết cấu khác. Đây là một phương pháp mới và có hiệu quả.

KIẾN NGHỊ VỀ NHỮNG NGHIÊN CỨU TIẾP THEO

1. Đây là một phương pháp mới và đúng nên có thể dùng nó như một công cụ phục vụ công tác giảng dạy và học tập.
2. Phương pháp cho phép nhận được giữ liệu thực nghiệm từ việc thực nghiệm kết cấu khác nên có thể ứng dụng trong việc xây dựng mô hình mô phỏng.
3. Dùng lý thuyết đã xây dựng ở trên để nghiên cứu nội lực và chuyển vị của các kết cấu chịu uốn khác như tấm, vỏ vv...có xét đến biến dạng trượt ngang do lực cắt Q gây ra.

Danh môc tµi liÖu tham kh¶o

I. TIÕNG VIÖT

[1] Hµ Huy C¬ng (2005), *Ph¬ng ph¸p nguyªn lý cùc trÞ Gauss*, T¹p chÝ Khoa häc vµ kü thuËt, IV/ Tr. 112 ÷118.

[2] NguyÔn V¨n Liªn, NguyÔn Ph¬ng Thµnh, §inh Träng B»ng (2003), *Gi¸o tr×nh Søc bÒn vËt liÖu*, Nhµ xuÊt b¶n x©y dùng, t¸i b¶n lÇn thø 3, 330 trang.

[3] NguyÔn Ph¬ng Thµnh(2002), *Nghiªn cøu tr¹ng th¸i øng suÊt - biÕn d¹ng tÊm nhiÒu líp chÞu t¶i träng ®éng cã xÐt lùc ma s¸t ë c¸c mÆt tiÕp xóc*, LuËn ¸n tiÕn sü kü thuËt.

[4] V¬ng Ngäc Lu(2002), *Nghiªn cøu tr¹ng th¸i øng suÊt - biÕn d¹ng cña tÊm sµn Sandwich chÞu t¶i träng tÜnh vµ ®éng*, LuËn ¸n tiÕn sü kü thuËt.

[5] TrÇn H÷u Hµ(2006), *Nghiªn cøu bµi to¸n t¬ng t¸c gi÷a cäc vµ nÒn díi t¸c dông cña t¶i träng*, LuËn ¸n tiÕn sü kü thuËt.

[6] Ph¹m V¨n Trung (2006), *Ph¬ng ph¸p míi TÝnh to¸n hÖ d©y vµ m¸i treo*, LuËn ¸n TiÕn sü kü thuËt.

[7] Vò Hoµng HiÖp (2007), *Nghiªn cøu tr¹ng th¸i øng suÊt - biÕn d¹ng cña dÇm nhiÒu líp chÞu t¶i tÜnh vµ ®éng*, LuËn ¸n tiÕn sü kü thuËt, Hµ néi.

[8] NguyÔn V¨n §¹o (2001), *C¬ häc gi¶i tÝch*, Nhµ xuÊt b¶n §¹i häc Quèc gia Hµ néi, 337 trang.

[9] NguyÔn V¨n §¹o, TrÇn Kim Chi, NguyÔn Dòng (2005), *NhËp m«n §éng lùc häc phi tuyÕn vµ chuyÓn ®éng hçn ®én.* Nhµ xuÊt b¶n §¹i häc Quèc gia Hµ néi.

[10] LÒu Thä Tr×nh, §ç V¨n B×nh(2006), *Gi¸o tr×nh æn ®Þnh c«ng tr×nh*, Nhµ xuÊt b¶n Khoa häc kü thuËt.

[11] Vò Hoµng HiÖp (2008), *TÝnh kÕt cÊu cã xÐt biÕn d¹ng trît*, T¹p chÝ XD sè7.

[12] §oµn V¨n DuÈn, NguyÔn Ph¬ng Thµnh (2007), *Ph¬ng ph¸p míi tÝnh to¸n æn ®Þnh cña thanh*, T¹p chÝ X©y dùng sè 12 (Tr41-Tr44).

[13] §oµn V¨n DuÈn (2007), *Ph¬ng ph¸p nguyªn lý Cùc trÞ Gauss ®èi víi c¸c bµi to¸n æn ®Þnh c«ng tr×nh*, LuËn v¨n th¹c sü kü thuËt.

[14] §oµn V¨n DuÈn (2008), *Ph¬ng ph¸p míi tÝnh to¸n æn ®Þnh cña khung*, T¹p chÝ X©y dùng sè 01 (Tr35-Tr37).

[15] §oµn V¨n DuÈn (2008),*Nghiªn cøu æn ®Þnh uèn däc cña thanh cã xÐt biÕn d¹ng trît*, T¹p chÝ X©y dùng sè 12 (Tr33-Tr37).

[16] §oµn V¨n DuÈn (2009), *Ph¬ng ph¸p nghiªn cøu æn ®Þnh tæng thÓ cña dµn*, T¹p chÝ X©y dùng sè 03 (Tr86-Tr89).

[17] §oµn V¨n DuÈn (2010), Ph¬ng ph¸p phÇn tö h÷u h¹n nghiªn cøu æn ®Þnh uèn däc cña thanh, T¹p chÝ kÕt cÊu vµ C«ng nghÖ x©y dùng, sè 05, Qóy IV(Tr30-Tr36).

[18] §oµn V¨n DuÈn (2011), Nghiªn cøu æn ®Þnh ®µn håi cña thanh vµ hÖ thanh, LuËn ¸n TiÕn sü kü thuËt.

[19] §oµn V¨n DuÈn (2012), Ph¬ng ph¸p míi tÝnh to¸n d©y mÒm, T¹p chÝ kÕt cÊu vµ c«ng nghÖ X©y dùng sè 09, Qóy II (Tr56-Tr61).

[20] §oµn V¨n DuÈn (2014), Ph¬ng ph¸p chuyÓn vÞ cìng bøc gi¶i bµi to¸n trÞ riªng vµ vÐc t¬ riªng,T¹p chÝ X©y dùng sè 11 (Tr82-Tr84).

[21] §oµn V¨n DuÈn (2015), Ph¬ng ph¸p míi nghiªn cøu æn ®Þnh ®éng lùc häc cña thanh,T¹p chÝ X©y dùng sè 01 (Tr86-Tr88).

[22] §oµn V¨n DuÈn (2015), Bµi to¸n c¬ häc kÕt cÊu díi d¹ng tæng qu¸t,T¹p chÝ X©y dùng sè 02 (Tr59-Tr61).

[23] §oµn V¨n DuÈn (2015), Ph¬ng ph¸p so s¸nh nghiªn cøu néi lùc vµ chuyÓn vÞ cña hÖ dÇm,T¹p chÝ X©y dùng sè 11 (Tr56-Tr58).

[24] §oµn V¨n DuÈn (2015), TÝnh to¸n kÕt cÊu khung chÞu uèn b»ng ph¬ng ph¸p so s¸nh,T¹p chÝ X©y dùng sè 12 (Tr62-Tr64).

[25] TrÇn ThÞ Kim HuÕ (2005), *Ph¬ng ph¸p nguyªn lý Cùc trÞ Gauss ®èi víi c¸c bµi to¸n c¬ häc kÕt cÊu,* LuËn v¨n th¹c sü kü thuËt.

[26] NguyÔn ThÞ Liªn (2006), *Ph¬ng ph¸p nguyªn lý Cùc trÞ Gauss ®èi víi c¸c bµi to¸n ®éng lùc häc c«ng tr×nh,* LuËn v¨n th¹c sü kü thuËt.

[27] Vò Thanh Thñy (2009), *X©y dùng bµi to¸n dÇm khi xÐt ®Çy ®ñ hai thµnh phÇn néi lùc momen vµ lùc c¾t.* T¹p chÝ X©y dùngsè 4.

[28] Vò Thanh Thñy (2009), *Dao ®éng tù do cña dÇm khi xÐt ¶nh hëng cña lùc c¾t.* T¹p chÝ X©y dùng, sè 7.

[29] Timoshenko C.P, Voinãpki- Krige X, (1971), *TÊm vµ Vá.* Ngêi dÞch, Ph¹m Hång Giang, Vò Thµnh H¶i, §oµn H÷u Quang, Nxb Khoa häc vµ kü thuËt, Hµ Néi.

II. TIÕNG PH¸P

[30] Robert L'Hermite (1974), *Flambage et StabilitÐ - Le flambage Ðlastique des piÌces droites,* Ðdition Eyrolles, Paris.

IIi. TIÕNG ANH

[31] Stephen P.Timoshenko-Jame M.Gere (1961), *Theory of elastic stability,* McGraw-Hill Book Company, Inc, New york - Toronto - London, 541 Tr.

[32] William T.Thomson (1998), *Theory of Vibration with Applications* (T¸i b¶n lÇn thø 5). Stanley Thornes (Publishers) Ltd, 546 trang.

[33] Klaus – Jurgen Bathe (1996), *Finite Element procedures.* Part one, Prentice – Hall International, Inc, 484 trang.

[34] Klaus – Jurgen Bathe (1996), *Finite Element procedures.* Part two, Prentice – Hall International, Inc, 553 trang.

[35] Ray W.Clough, Joseph Penzien(1993), *Dynamics of Structures* (T¸i b¶n lÇn thø 2), McGraw-Hill Book Company, Inc, 738 trang.

[36] O.C. Zienkiewicz-R.L. Taylor (1991), *The finite element method* (four edition) Volume 2, McGraw-Hill Book Company, Inc, 807 trang.

[37] G.Korn-T.Korn (1961), *Mathematical Handbook for sientists and Engineers,* McGraw-Hill, New york (B¶n dÞch tiÕng Nga, I.Bramovich chñ biªn, Nhµ xuÊt b¶n Nauka-Moscow, 1964).

[38] Stephen P.Timoshenko-J. Goodier (1970), *Theory of elasticity,* McGraw-Hill, New york (B¶n dÞch tiÕng Nga, G. Shapiro chñ biªn, Nhµ xuÊt b¶n Nauka-Moscow, 1979), 560 trang.

[39] D.R.J. Owen, E.Hinton (1986), *Finite Elements in Plasticity:* Theory and Practice,Pineridge Press Lt.

[40] Lars Olovsson, Kjell Simonsson, Mattias Unosson (2006), *Shear locking reduction in eight-node tri-linear solid finite elements,*J. 'Computers @ Structures',84, trg 476-484.

[41] C.A.Brebbia, J.C.F.Telles, L.C.Wrobel(1984), *Boundary Element Techniques. Theory and Applications in Engineering.* Nxb Springer – Verlag.(B¶n dÞch tiÕng Nga, 1987).

[42] Chopra Anil K (1995). *Dynamics of structures.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New – Jersey 07632.

[43] Wilson Edward L. Professor Emeritus of structural Engineering University of California at Berkeley (2002). *Three – Dimensional Static and Dynamic Analysis of structures,* Inc. Berkeley, California, USA. Third edition, Reprint January.

[44] Wilson, E. L., R. L. Taylor, W. P. Doherty and J. Ghaboussi (1971). *"Incompatible Displacement Models",* Proceedings, ORN Symposium on "Numerical and Computer Method in Structural Mechanics". University of Illinois, Urbana. September. Academic Press.

[45] Strang, G (1972). *"Variational Crimes in the Finite Element Method"* in "The Mathematical Foundations of the Finite Element Method". P.689 -710 (ed. A.K. Aziz). Academic Press.

[46] Irons, B. M. and O. C. Zienkiewicz (1968). *"The isoparametric Finite Element System – A New Concept in Finite Element Analysis",* Proc. Conf. "Recent Advances in Stress Analysis". Royal Aeronautical Society. London.

[47] Kolousek Vladimir, DSC Professor, Technical University, Pargue (1973). *Dynamics in engineering structutes.* Butter worths London.

[48] Felippa Carlos A (2004). *Introduction of finite element methods.* Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures University of Colorado Boulder, Colorado 80309-0429, USA, Last updated Fall.

[49] Wang C.M, Reddy J.N, Lee K.H.(2000), *Shear deformable beems and plates – Relationships with Classical Solutions.* ELSEVIER, Amsterdam – Lausanne- New York – Oxford –Shannon – Singapore – Tokyo.

[50] Barbero Ever J, Department of Mechanica & Aerospace Engineering, West Virgina University, USA (1999), *Introduction to Composite Materials Design.* Taylor and Francis.

[51] Decolon C (2002). *Analysis of Composite Structures. Hermes Penton, Ltd, UK.*

[52] Fu-le Li, ZHI-zhong Sun, Corresponding author, Department of Mathematics, Shoutheast University, Nanjing 210096, PR China (2007*). A finite difference scheme for solving the Timoshenko beem equations with boundary feedback.* Journal of Computational and applied Mathematics 200, 606 – 627, Elsevier press. Avaiable online at www.sciencedirect.com.

[53] *Khaji N., Corresponding author, Shafiei M., Civil Engineering DepartmentTarbiat Modares University, P. O. Box 14155-4838, Tehran, Tran ((2009)). Closed - form solutions for crack detection problem of Timoshenko beems with various boundary conditions.* International Journal of Mechanical Sciences 51, 667-681. Contents lists available at Science Direct journal hompage: www.elsevier.com/locate/ijmecsci.

[54] Antes H. Institute of Applied Mechanics, University Carolo Wilhelmina, D-38023Braunschweig, Germany (2003). *Fundamental solution and integralequations for Timoshenko beems.* Computers and Structures 81, 383-396. Pergamon press. Available online at www.sciencedirect.com.

[55] Nguyen Dinh Kien (2007). *Free Vibration of prestress Timoshenko beems resting on elastic foundation. Viet nam Journal of Mechanics, VAST, Vol.29, No. 1,pp. 1-12.*

[56] Grawford F (1974). *Waves,* Berkeley physics course, volume 3. McGraw – hill Book Company.

Iv. TIÕNG nga

[57] М. А. Айзерман (1980), *КлассиЧескаямеханика,Москва.*
[58] КиселевВ. А (1969).*Строительнаямеханика - Специальныйкурс. Стройздат,* Москва.
[59] П. С. Полак (1959),*Вариационные принципымеханики, Москва.*
[60] КиселевВ. А (1980).*Строительнаямеханика - Специальныйкурс. Стройздат, Москва.*
[61] А. А. Чирас (1989), *Строителbнаямеханика, Стройздат, Москва.*
[62] Г. КАУДЕРЕР (1961), *НЕЛИНЕЙНАЯ МЕХАНИКА,* МОСКВА.