BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

PHAN ĐỨC CHÍNH (Tổng Chủ biên)
TÔN THÂN (Chủ biên)
NGUYỄN HUY ĐOAN - LÊ VĂN HỒNG
TRƯƠNG CÔNG THÀNH - NGUYỄN HỮU THẢO

TOÁN 8

TẬP HAI

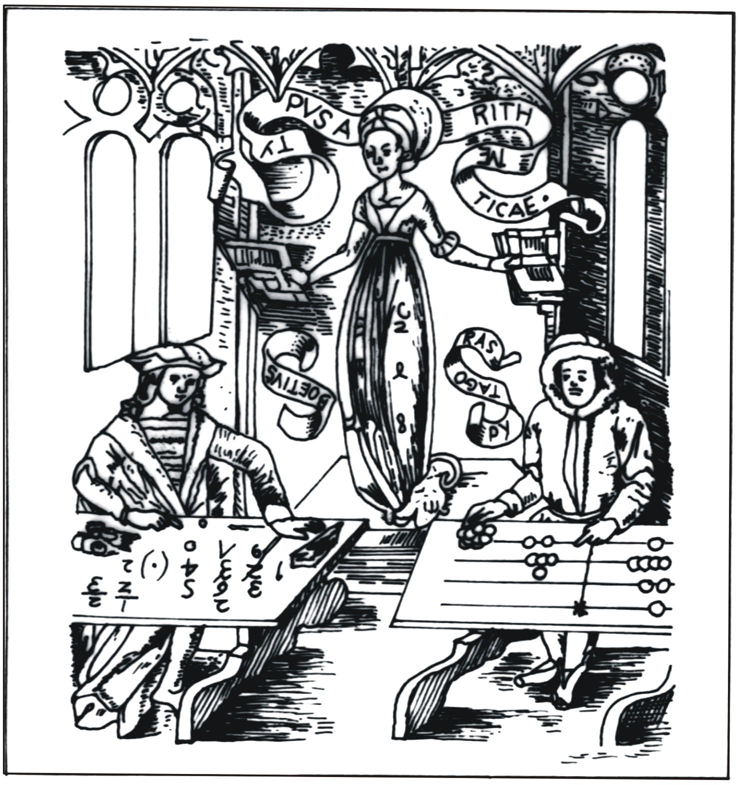
(Tái bản lần thứ mười sáu)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Hãy bảo quản, giữ gìn sách giáo khoa để dành tặng cho các em học sinh lớp sau !

Phần ĐẠI SỐ

Chương III – PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN



Vừa gà vừa chó
Bó lại cho tròn
Ba mươi sáu con
Một trăm chân chẵn.
Hỏi có bao nhiêu gà, bao nhiêu chó ?

Đó là một bài toán cổ rất quen thuộc ở Việt Nam. Nó có liên hệ gì với bài toán :

Tìm x, biết $2x + 4(36 - x) = 100$ *?*

Làm thế nào để tìm được giá trị của x trong bài toán thứ hai, và giá trị đó có giúp ta giải được bài toán thứ nhất không ?

Chương này sẽ cho ta một phương pháp mới để dễ dàng giải được nhiều bài toán được coi là khó nếu giải bằng phương pháp khác.

§1. Mở đầu về phương trình

Vẫn là bài toán tìm x quen thuộc.

1. Phương trình một ẩn

Ở lớp dưới, ta đã gặp các bài toán như :

Tìm x, biết $2x + 5 = 3(x - 1) + 2.$

Trong bài toán đó, ta gọi hệ thức $2x + 5 = 3(x - 1) + 2$ là một *phương trình với ẩn số x* (hay *ẩn x*).

Một phương trình với ẩn x có dạng A(x) = B(x), trong đó *vế trái* A(x) và *vế phải* B(x) là hai biểu thức của cùng một biến x.

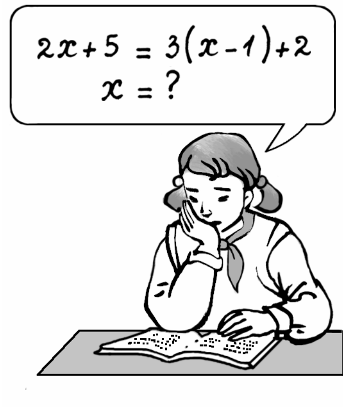
Ví dụ 1. $2x + 1 = x$ là phương trình với ẩn x ;

$2t - 5 = 3(4 - t) - 7$ là phương trình với ẩn t.

?1 *Hãy cho ví dụ về :*

a) *Phương trình với ẩn y ;*

b) *Phương trình với ẩn u.*



?2 *Khi x = 6, tính giá trị mỗi vế của phương trình :*

$$2x + 5 = 3(x - 1) + 2.$$

Ta thấy hai vế của phương trình nhận cùng một giá trị khi x = 6. Ta nói rằng số 6 *thoả mãn* (hay *nghiệm đúng*) phương trình đã cho và gọi 6 (hay x = 6) là một *nghiệm* của phương trình đó.

?3 *Cho phương trình* $2(x + 2) - 7 = 3 - x.$

a) *x = –2 có thoả mãn phương trình không ?*

b) *x = 2 có là một nghiệm của phương trình không ?*

▶ ***Chú ý***

a) Hệ thức x = m (với m là một số nào đó) cũng là một phương trình. Phương trình này chỉ rõ rằng m là nghiệm duy nhất của nó.

b) Một phương trình có thể có một nghiệm, hai nghiệm, ba nghiệm, ..., nhưng cũng có thể không có nghiệm nào hoặc có vô số nghiệm. Phương trình không có nghiệm nào được gọi là phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 2. Phương trình $x^2 = 1$ có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = -1$.

Phương trình $x^2 = -1$ vô nghiệm.

2. Giải phương trình

Tập hợp tất cả các nghiệm của một phương trình được gọi là *tập nghiệm* của phương trình đó và thường được kí hiệu bởi S.

?4 *Hãy điền vào chỗ trống (...) :*

a) *Phương trình $x = 2$ có tập nghiệm là $S = \ldots$*

b) *Phương trình vô nghiệm có tập nghiệm là $S = \ldots$*

Khi bài toán yêu cầu *giải một phương trình*, ta phải *tìm tất cả các nghiệm* (hay *tìm tập nghiệm*) của phương trình đó.

3. Phương trình tương đương

Phương trình $x = -1$ có tập nghiệm là $\{-1\}$. Phương trình $x + 1 = 0$ cũng có tập nghiệm là $\{-1\}$. Ta nói rằng hai phương trình ấy *tương đương với nhau*.

Tổng quát, ta gọi hai phương trình có cùng một tập nghiệm là *hai phương trình tương đương*.

Để chỉ hai phương trình tương đương với nhau, ta dùng kí hiệu "$\Leftrightarrow$". Chẳng hạn :

$$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

BÀI TẬP

1. Với mỗi phương trình sau, hãy xét xem $x = -1$ có là nghiệm của nó không :

a) $4x - 1 = 3x - 2$; b) $x + 1 = 2(x - 3)$; c) $2(x + 1) + 3 = 2 - x$?

2. Trong các giá trị $t = -1$, $t = 0$ và $t = 1$, giá trị nào là nghiệm của phương trình

$$(t + 2)^2 = 3t + 4\ ?$$

3. Xét phương trình $x + 1 = 1 + x$. Ta thấy mọi số đều là nghiệm của nó. Người ta còn nói : Phương trình này *nghiệm đúng với mọi* x. Hãy cho biết tập nghiệm của phương trình đó.

4. Nối mỗi phương trình sau với các nghiệm của nó (theo mẫu) :

$3(x-1) = 2x-1$ (a) $\qquad -1$

$\dfrac{1}{x+1} = 1 - \dfrac{x}{4}$ (b) $\qquad 2$

$x^2 - 2x - 3 = 0$ (c) $\qquad 3$

5. Hai phương trình x = 0 và x(x – 1) = 0 có tương đương không ? Vì sao ?

Có thể em chưa biết

Phương trình là đối tượng nghiên cứu trung tâm của môn Đại số. Ngày nay, cách viết các phương trình rất rõ ràng và thuận tiện cho việc giải chúng. Nhưng trước đây, người ta đã phải diễn tả phương trình bằng lời hoặc bằng hình vẽ rất phức tạp. Cách viết phương trình như ngày nay mới được hoàn thiện vào thế kỉ XVII. Sự ra đời của khái niệm ẩn số và kí hiệu ẩn số là một bước tiến quan trọng trong lịch sử phát triển của lí thuyết phương trình.

Phương trình $x\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{7}+1\right)=37$ được viết ở Ai Cập năm 1550 trước Công nguyên như sau :

§2. Phương trình bậc nhất một ẩn và cách giải

Chỉ cần hai quy tắc tương tự như đối với đẳng thức số.

1. Định nghĩa phương trình bậc nhất một ẩn

Phương trình dạng ax + b = 0, với a và b là hai số đã cho và a ≠ 0, được gọi là phương trình bậc nhất một ẩn.

Chẳng hạn, 2x – 1 = 0 và 3 – 5y = 0 là những phương trình bậc nhất một ẩn.

Để giải các phương trình này, ta thường dùng quy tắc chuyển vế và quy tắc nhân mà ta nêu sau đây.

2. Hai quy tắc biến đổi phương trình

a) Quy tắc chuyển vế

Ta đã biết : Trong một đẳng thức số, khi chuyển một hạng tử từ vế này sang vế kia, ta phải đổi dấu hạng tử đó.

Đối với phương trình, ta cũng có thể làm tương tự. Chẳng hạn, đối với phương trình $x + 2 = 0$, chuyển hạng tử $+2$ từ vế trái sang vế phải và đổi dấu thành -2, ta được $x = -2$.

Như vậy, ta đã áp dụng quy tắc sau đây :

> ***Trong một phương trình, ta có thể chuyển một hạng tử từ vế này sang vế kia và đổi dấu hạng tử đó.***

Quy tắc trên gọi là *quy tắc chuyển vế*.

?1 *Giải các phương trình :*

a) $x - 4 = 0$;   b) $\frac{3}{4} + x = 0$;   c) $0,5 - x = 0$.

b) Quy tắc nhân với một số

Ta đã biết : Trong một đẳng thức số, ta có thể nhân cả hai vế với cùng một số.

Đối với phương trình, ta cũng có thể làm tương tự. Chẳng hạn, đối với phương trình $2x = 6$, nhân cả hai vế với $\frac{1}{2}$, ta được $x = 3$.

Như vậy, ta đã áp dụng quy tắc sau đây :

> ***Trong một phương trình, ta có thể nhân cả hai vế với cùng một số khác 0.***

Quy tắc trên gọi là *quy tắc nhân với một số* (gọi tắt là *quy tắc nhân*).

Chú ý rằng nhân cả hai vế với $\frac{1}{2}$ cũng có nghĩa là chia cả hai vế cho 2. Do đó quy tắc nhân còn có thể phát biểu :

> ***Trong một phương trình, ta có thể chia cả hai vế cho cùng một số khác 0.***

?2 *Giải các phương trình :*

a) $\frac{x}{2} = -1$;   b) $0,1x = 1,5$;   c) $-2,5x = 10$.

3. Cách giải phương trình bậc nhất một ẩn

Ta thừa nhận rằng : *Từ một phương trình, dùng quy tắc chuyển vế hay quy tắc nhân, ta luôn nhận được một phương trình mới tương đương với phương trình đã cho.*

Sử dụng hai quy tắc trên, ta giải phương trình bậc nhất một ẩn như sau :

Ví dụ 1. Giải phương trình $3x - 9 = 0$.

Phương pháp giải :

$3x - 9 = 0 \Leftrightarrow 3x = 9$ (Chuyển -9 sang vế phải và đổi dấu)

$\Leftrightarrow x = 3$ (Chia cả hai vế cho 3).

Kết luận : Phương trình có một nghiệm duy nhất $x = 3$.

Trong thực hành, ta thường trình bày bài giải một phương trình như sau :

Ví dụ 2. Giải phương trình $1 - \frac{7}{3}x = 0$.

Giải :

$$1 - \frac{7}{3}x = 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{3}x = -1 \Leftrightarrow x = (-1) : \left(-\frac{7}{3}\right) \Leftrightarrow x = \frac{3}{7}.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{\frac{3}{7}\right\}$.

• Tổng quát, phương trình $ax + b = 0$ (với $a \neq 0$) được giải như sau :

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

Vậy phương trình bậc nhất $ax + b = 0$ *luôn có một nghiệm duy nhất* $x = -\frac{b}{a}$.

?3 *Giải phương trình* $-0,5x + 2,4 = 0$.

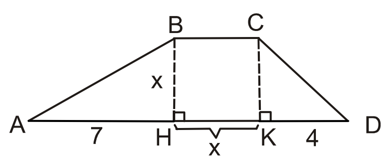
BÀI TẬP

6. Tính diện tích S của hình thang ABCD (h.1) theo x bằng hai cách :

1) Theo công thức $S = BH \times (BC + DA) : 2$;

2) $S = S_{ABH} + S_{BCKH} + S_{CKD}$.

Sau đó, sử dụng giả thiết $S = 20$ để thu được hai phương trình tương đương với nhau. Trong hai phương trình ấy, có phương trình nào là phương trình bậc nhất không ?



Hình 1

7. Hãy chỉ ra các phương trình bậc nhất trong các phương trình sau :

a) $1 + x = 0$; b) $x + x^2 = 0$; c) $1 - 2t = 0$;

d) $3y = 0$; e) $0x - 3 = 0$.

8. Giải các phương trình :

a) $4x - 20 = 0$; b) $2x + x + 12 = 0$;

c) $x - 5 = 3 - x$; d) $7 - 3x = 9 - x$.

9. Giải các phương trình sau, viết số gần đúng của mỗi nghiệm ở dạng số thập phân bằng cách làm tròn đến hàng phần trăm :

a) $3x - 11 = 0$; b) $12 + 7x = 0$; c) $10 - 4x = 2x - 3$.

§3. Phương trình đưa được về dạng ax + b = 0

Vẫn chỉ cần dùng hai quy tắc đã biết.

Trong bài này, ta chỉ xét các phương trình mà *hai vế của chúng là hai biểu thức hữu tỉ của ẩn*, *không chứa ẩn ở mẫu* và có thể đưa được về dạng $ax + b = 0$ hay $ax = -b$.

1. Cách giải

Ví dụ 1. Giải phương trình $2x - (3 - 5x) = 4(x + 3)$.

Phương pháp giải :

– Thực hiện phép tính để bỏ dấu ngoặc :

$$2x - 3 + 5x = 4x + 12.$$

– Chuyển các hạng tử chứa ẩn sang một vế, các hằng số sang vế kia :

$$2x + 5x - 4x = 12 + 3.$$

– Thu gọn và giải phương trình nhận được :

$$3x = 15 \Leftrightarrow x = 5.$$

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$\frac{5x-2}{3}+x=1+\frac{5-3x}{2}.$$

Phương pháp giải :

– Quy đồng mẫu hai vế :

$$\frac{2(5x-2)+6x}{6}=\frac{6+3(5-3x)}{6}.$$

– Nhân hai vế với 6 để khử mẫu :

$$10x-4+6x=6+15-9x.$$

– Chuyển các hạng tử chứa ẩn sang một vế, các hằng số sang vế kia :

$$10x+6x+9x=6+15+4.$$

– Thu gọn và giải phương trình nhận được :

$$25x=25 \Leftrightarrow x=1.$$

?1 *Hãy nêu các bước chủ yếu để giải phương trình trong hai ví dụ trên.*

2. Áp dụng

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$\frac{(3x-1)(x+2)}{3}-\frac{2x^2+1}{2}=\frac{11}{2}.$$

Giải :

$$\frac{(3x-1)(x+2)}{3}-\frac{2x^2+1}{2}=\frac{11}{2} \Leftrightarrow \frac{2(3x-1)(x+2)-3(2x^2+1)}{6}=\frac{33}{6}$$

$$\Leftrightarrow 2(3x-1)(x+2)-3(2x^2+1)=33$$

$$\Leftrightarrow (6x^2+10x-4)-(6x^2+3)=33$$

$$\Leftrightarrow 6x^2+10x-4-6x^2-3=33$$

$$\Leftrightarrow 10x=33+4+3$$

$$\Leftrightarrow 10x=40$$

$$\Leftrightarrow x=4.$$

Phương trình có tập nghiệm $S=\{4\}$.

?2 *Giải phương trình*

$$x - \frac{5x+2}{6} = \frac{7-3x}{4}.$$

▶ ***Chú ý***

1) *Khi giải một phương trình, người ta thường tìm cách biến đổi để đưa phương trình đó về dạng đã biết cách giải (đơn giản nhất là dạng $ax + b = 0$ hay $ax = -b$). Việc bỏ dấu ngoặc hay quy đồng mẫu chỉ là những cách thường dùng để nhằm mục đích đó. Trong một vài trường hợp, ta còn có những cách biến đổi khác đơn giản hơn.*

Ví dụ 4. Phương trình $\frac{x-1}{2} + \frac{x-1}{3} - \frac{x-1}{6} = 2$ có thể giải như sau :

$$\frac{x-1}{2} + \frac{x-1}{3} - \frac{x-1}{6} = 2 \Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\frac{4}{6} = 2$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 4.$$

2) *Quá trình giải có thể dẫn đến trường hợp đặc biệt là hệ số của ẩn bằng 0. Khi đó, phương trình có thể vô nghiệm hoặc nghiệm đúng với mọi x.*

Ví dụ 5. Ta có $x + 1 = x - 1 \Leftrightarrow x - x = -1 - 1 \Leftrightarrow (1 - 1)x = -2 \Leftrightarrow 0x = -2$.

Phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 6. Ta có $x + 1 = x + 1 \Leftrightarrow x - x = 1 - 1 \Leftrightarrow (1 - 1)x = 0 \Leftrightarrow 0x = 0$.

Phương trình nghiệm đúng với mọi x.

BÀI TẬP

10. Tìm chỗ sai và sửa lại các bài giải sau cho đúng :

a) $3x - 6 + x = 9 - x$

$\Leftrightarrow 3x + x - x = 9 - 6$

$\Leftrightarrow 3x = 3$

$\Leftrightarrow x = 1.$

b) $2t - 3 + 5t = 4t + 12$

$\Leftrightarrow 2t + 5t - 4t = 12 - 3$

$\Leftrightarrow 3t = 9$

$\Leftrightarrow t = 3.$

11. Giải các phương trình :

a) $3x - 2 = 2x - 3$;

b) $3 - 4u + 24 + 6u = u + 27 + 3u$;

c) $5 - (x - 6) = 4(3 - 2x)$;

d) $-6(1,5 - 2x) = 3(-15 + 2x)$;

e) $0,1 - 2(0,5t - 0,1) = 2(t - 2,5) - 0,7$;

f) $\dfrac{3}{2}\left(x - \dfrac{5}{4}\right) - \dfrac{5}{8} = x$.

12. Giải các phương trình :

a) $\dfrac{5x - 2}{3} = \dfrac{5 - 3x}{2}$;

b) $\dfrac{10x + 3}{12} = 1 + \dfrac{6 + 8x}{9}$;

c) $\dfrac{7x - 1}{6} + 2x = \dfrac{16 - x}{5}$;

d) $4(0,5 - 1,5x) = -\dfrac{5x - 6}{3}$.

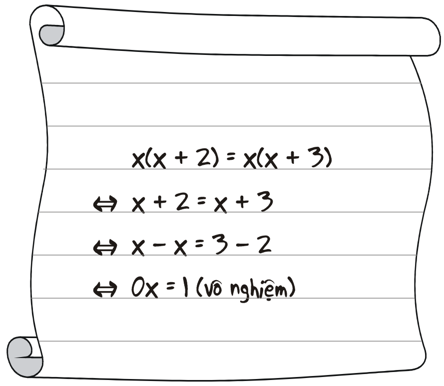
13. Bạn Hoà giải phương trình

$$x(x + 2) = x(x + 3)$$

như trên hình 2.

Theo em, bạn Hoà giải đúng hay sai ?

Em sẽ giải phương trình đó như thế nào ?



Hình 2

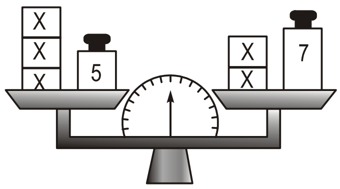
LUYỆN TẬP

14. Số nào trong ba số -1 ; 2 và -3 nghiệm đúng mỗi phương trình sau :

$$|x| = x \quad (1), \qquad x^2 + 5x + 6 = 0 \quad (2), \qquad \frac{6}{1 - x} = x + 4 \quad (3) ?$$

15. Một xe máy khởi hành từ Hà Nội đi Hải Phòng với vận tốc trung bình 32km/h. Sau đó 1 giờ, một ôtô cũng khởi hành từ Hà Nội đi Hải Phòng, cùng đường với xe máy và với vận tốc trung bình 48km/h. Hãy viết phương trình biểu thị việc ôtô gặp xe máy sau x giờ, kể từ khi ôtô khởi hành.

16. Viết phương trình biểu thị cân thăng bằng trong hình 3 (đơn vị khối lượng là gam).



Hình 3

17. Giải các phương trình :

a) $7 + 2x = 22 - 3x$; b) $8x - 3 = 5x + 12$;

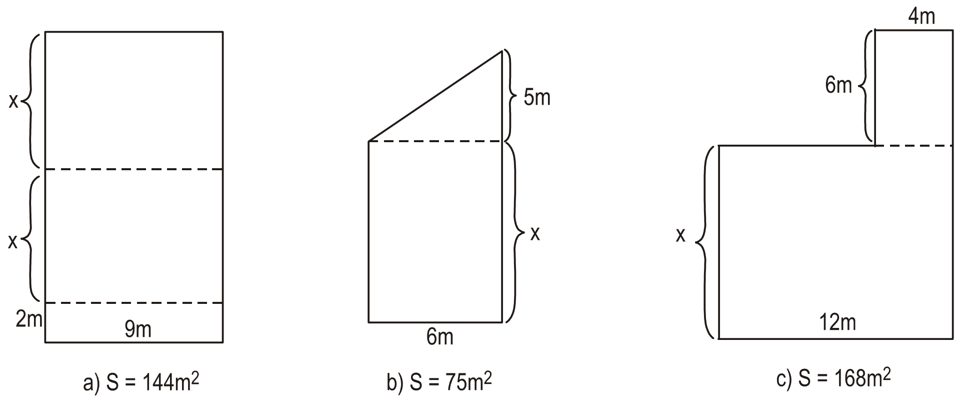
c) $x - 12 + 4x = 25 + 2x - 1$; d) $x + 2x + 3x - 19 = 3x + 5$;

e) $7 - (2x + 4) = -(x + 4)$; f) $(x - 1) - (2x - 1) = 9 - x$.

18. Giải các phương trình :

a) $\frac{x}{3} - \frac{2x+1}{2} = \frac{x}{6} - x$; b) $\frac{2+x}{5} - 0,5x = \frac{1-2x}{4} + 0,25$.

19. Viết phương trình ẩn x rồi tính x (mét) trong mỗi hình dưới đây (h.4) (S là diện tích của hình) :



Hình 4

20. ***Đố.*** Trung bảo Nghĩa hãy nghĩ ở trong đầu một số tự nhiên tuỳ ý, sau đó Nghĩa thêm 5 vào số ấy, nhân tổng nhận được với 2, được bao nhiêu đem trừ đi 10, tiếp tục nhân hiệu tìm được với 3 rồi cộng thêm 66, cuối cùng chia kết quả cho 6. Chẳng hạn, nếu Nghĩa nghĩ đến số 7 thì quá trình tính toán sẽ là : $7 \rightarrow (7 + 5 = 12) \rightarrow (12 \times 2 = 24) \rightarrow (24 - 10 = 14) \rightarrow (14 \times 3 = 42) \rightarrow (42 + 66 = 108) \rightarrow (108 : 6 = 18)$.

Trung chỉ cần biết kết quả cuối cùng (số 18) là đoán ngay được số Nghĩa đã nghĩ là số nào.

Nghĩa thử mấy lần, Trung đều đoán đúng. Nghĩa phục tài Trung lắm. Đố em tìm ra bí quyết của Trung đấy !

§4. Phương trình tích

Để giải một phương trình, lại phải giải nhiều phương trình. Sao thế nhỉ ?

?1 *Phân tích đa thức $P(x) = (x^2 - 1) + (x + 1)(x - 2)$ thành nhân tử.*

Trong bài này, chúng ta cũng chỉ xét các phương trình mà *hai vế của nó là hai biểu thức hữu tỉ của ẩn và không chứa ẩn ở mẫu.*

1. Phương trình tích và cách giải

?2 *Hãy nhớ lại một tính chất của phép nhân các số, phát biểu tiếp các khẳng định sau :*

Trong một tích, nếu có một thừa số bằng 0 thì . . . ; ngược lại, nếu tích bằng 0 thì ít nhất một trong các thừa số của tích . . .

Ví dụ 1. Giải phương trình $(2x - 3)(x + 1) = 0$.

Phương pháp giải :

Tính chất nêu trên của phép nhân các số có thể viết :

$$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ hoặc } b = 0 \text{ (a và b là hai số).}$$

Tương tự, đối với phương trình ta cũng có :

$$(2x - 3)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \text{ hoặc } x + 1 = 0.$$

Do đó ta phải giải hai phương trình :

1) $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = 1{,}5$.

2) $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm : $x = 1{,}5$ và $x = -1$. Ta còn viết : Tập nghiệm của phương trình là $S = \{1{,}5 ; -1\}$.

• Phương trình như trong Ví dụ 1 được gọi là *phương trình tích*.

Sau đây chúng ta xét các phương trình tích có dạng $A(x)B(x) = 0$. Để giải các phương trình này, ta áp dụng công thức :

$$\boxed{A(x)B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \textit{ hoặc } B(x) = 0.}$$

Như vậy, muốn giải phương trình $A(x)B(x) = 0$, ta giải hai phương trình $A(x) = 0$ và $B(x) = 0$, rồi lấy tất cả các nghiệm của chúng.

2. Áp dụng

Ví dụ 2. Giải phương trình $(x + 1)(x + 4) = (2 - x)(2 + x)$.

Giải : Ta biến đổi phương trình đã cho thành phương trình tích như sau :

$$(x + 1)(x + 4) = (2 - x)(2 + x)$$
$$\Leftrightarrow (x + 1)(x + 4) - (2 - x)(2 + x) = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + x + 4x + 4 - 2^2 + x^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x = 0$$
$$\Leftrightarrow x(2x + 5) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } 2x + 5 = 0.$$

1) $x = 0$;

2) $2x + 5 = 0 \Leftrightarrow 2x = -5 \Leftrightarrow x = -2{,}5$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{0 ; -2{,}5\}$.

Nhận xét

Trong Ví dụ 2, ta đã thực hiện hai bước giải sau :

Bước 1. Đưa phương trình đã cho về dạng phương trình tích.

Trong bước này, ta chuyển tất cả các hạng tử sang vế trái (lúc này, vế phải là 0), rút gọn rồi *phân tích đa thức thu được ở vế trái thành nhân tử.*

Bước 2. Giải phương trình tích rồi kết luận.

?3 *Giải phương trình* $(x - 1)(x^2 + 3x - 2) - (x^3 - 1) = 0$.

• Trường hợp vế trái là tích của nhiều hơn hai nhân tử, ta cũng giải tương tự.

Ví dụ 3. Giải phương trình $2x^3 = x^2 + 2x - 1$.

Giải : Ta có

$$2x^3 = x^2 + 2x - 1$$
$$\Leftrightarrow 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (2x^3 - 2x) - (x^2 - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x(x^2 - 1) - (x^2 - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(2x - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 1)(2x - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow x + 1 = 0 \text{ hoặc } x - 1 = 0 \text{ hoặc } 2x - 1 = 0.$$

1) $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$;

2) $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$;

3) $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0{,}5$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{-1 ; 1 ; 0{,}5\}$.

?4 *Giải phương trình $(x^3 + x^2) + (x^2 + x) = 0$.*

BÀI TẬP

21. Giải các phương trình :

a) $(3x - 2)(4x + 5) = 0$;
b) $(2{,}3x - 6{,}9)(0{,}1x + 2) = 0$;
c) $(4x + 2)(x^2 + 1) = 0$;
d) $(2x + 7)(x - 5)(5x + 1) = 0$.

22. Bằng cách phân tích vế trái thành nhân tử, giải các phương trình sau :

a) $2x(x - 3) + 5(x - 3) = 0$;
b) $(x^2 - 4) + (x - 2)(3 - 2x) = 0$;
c) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$;
d) $x(2x - 7) - 4x + 14 = 0$;
e) $(2x - 5)^2 - (x + 2)^2 = 0$;
f) $x^2 - x - (3x - 3) = 0$.

LUYỆN TẬP

23. Giải các phương trình :

a) $x(2x - 9) = 3x(x - 5)$;
b) $0{,}5x(x - 3) = (x - 3)(1{,}5x - 1)$;
c) $3x - 15 = 2x(x - 5)$;
d) $\frac{3}{7}x - 1 = \frac{1}{7}x(3x - 7)$.

24. Giải các phương trình :

a) $(x^2 - 2x + 1) - 4 = 0$;
b) $x^2 - x = -2x + 2$;
c) $4x^2 + 4x + 1 = x^2$;
d) $x^2 - 5x + 6 = 0$.

25. Giải các phương trình :

a) $2x^3 + 6x^2 = x^2 + 3x$;

b) $(3x - 1)(x^2 + 2) = (3x - 1)(7x - 10)$.

26. TRÒ CHƠI *(chạy tiếp sức)*

Chuẩn bị :

Giáo viên chia lớp thành n nhóm, mỗi nhóm gồm 4 em sao cho các nhóm đều có em học giỏi, học khá, học trung bình,... Mỗi nhóm tự đặt cho nhóm mình một cái tên, chẳng hạn, nhóm "*Con Nhím*", nhóm "*Ốc Nhồi*", nhóm "*Đoàn Kết*",... Trong mỗi nhóm, học sinh tự đánh số từ 1 đến 4. Như vậy sẽ có n học sinh số 1, n học sinh số 2,...

Giáo viên chuẩn bị 4 đề toán về *giải phương trình*, đánh số từ 1 đến 4. Mỗi đề toán được phôtôcopy thành n bản và cho mỗi bản vào một phong bì riêng. Như vậy sẽ có n bì chứa đề toán số 1, n bì chứa đề toán số 2,... Các đề toán được chọn theo nguyên tắc sau :

Đề số 1 chứa x ; đề số 2 chứa x và y ; đề số 3 chứa y và z ; đề số 4 chứa z và t. (Xem bộ đề mẫu dưới đây).

Đề số 1 : Giải phương trình $2(x - 2) + 1 = x - 1$.

Đề số 2 : Thế giá trị của x (bạn số 1 vừa tìm được) vào rồi tìm y trong phương trình $(x + 3)y = x + y$.

Đề số 3 : Thế giá trị của y (bạn số 2 vừa tìm được) vào rồi tìm z trong phương trình $\frac{1}{3} + \frac{3z + 1}{6} = \frac{3y + 1}{3}$.

Đề số 4 : Thế giá trị của z (bạn số 3 vừa tìm được) vào rồi tìm t trong phương trình

$$z(t^2 - 1) = \frac{1}{3}(t^2 + t), \text{ với điều kiện } t > 0.$$

Cách chơi :

Tổ chức mỗi nhóm học sinh ngồi theo hàng dọc, hàng ngang, hay vòng tròn quanh một cái bàn, tuỳ điều kiện riêng của lớp.

Giáo viên phát đề số 1 cho học sinh số 1 của các nhóm, đề số 2 cho học sinh số 2,...

Khi có hiệu lệnh, học sinh số 1 của các nhóm nhanh chóng mở đề số 1, giải rồi chuyển giá trị x tìm được cho bạn số 2 của nhóm mình. Khi nhận được giá trị x đó, học sinh số 2 mới được phép mở đề, thay giá trị của x vào, giải phương trình để tìm y rồi chuyển đáp số cho bạn số 3 của nhóm mình. Học sinh số 3 cũng làm tương tự... Học sinh số 4 chuyển giá trị tìm được của t cho giáo viên (đồng thời là giám khảo).

Nhóm nào nộp kết quả đúng đầu tiên thì thắng cuộc.

§5. Phương trình chứa ẩn ở mẫu

Giá trị tìm được của ẩn có là nghiệm của phương trình đã cho hay không ?

Ở những bài trước chúng ta mới chỉ xét các phương trình mà hai vế của nó đều là các biểu thức hữu tỉ của ẩn và không chứa ẩn ở mẫu. Trong bài này, ta sẽ nghiên cứu cách giải các phương trình có biểu thức *chứa ẩn ở mẫu*.

1. Ví dụ mở đầu

Ta thử giải phương trình $x + \frac{1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$ bằng phương pháp quen thuộc như sau :

Chuyển các biểu thức chứa ẩn sang một vế :

$$x + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-1} = 1.$$

Thu gọn vế trái, ta tìm được x = 1.

?1 *Giá trị x = 1 có phải là nghiệm của phương trình hay không ? Vì sao ?*

Ví dụ này cho thấy : Khi biến đổi phương trình mà làm mất mẫu chứa ẩn của phương trình thì phương trình nhận được có thể *không tương đương với phương trình ban đầu*.

Bởi vậy, khi giải phương trình chứa ẩn ở mẫu, ta phải chú ý đến một yếu tố đặc biệt, đó là *điều kiện xác định của phương trình*.

2. Tìm điều kiện xác định của một phương trình

Đối với phương trình chứa ẩn ở mẫu, các giá trị của ẩn mà tại đó ít nhất một mẫu thức trong phương trình nhận giá trị bằng 0, chắc chắn không thể là nghiệm của phương trình. Để ghi nhớ điều đó, người ta thường đặt điều kiện cho ẩn để tất cả các mẫu trong phương trình đều khác 0 và gọi đó là *điều kiện xác định* (viết tắt là ĐKXĐ) của phương trình.

Ví dụ 1. Tìm điều kiện xác định của mỗi phương trình sau :

a) $\dfrac{2x+1}{x-2} = 1$; b) $\dfrac{2}{x-1} = 1 + \dfrac{1}{x+2}$.

Giải :

a) Vì $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ nên ĐKXĐ của phương trình $\dfrac{2x+1}{x-2} = 1$ là $x \neq 2$.

b) Ta thấy $x - 1 \neq 0$ khi $x \neq 1$ và $x + 2 \neq 0$ khi $x \neq -2$. Vậy ĐKXĐ của phương trình $\dfrac{2}{x-1} = 1 + \dfrac{1}{x+2}$ là $x \neq 1$ và $x \neq -2$.

?2 *Tìm điều kiện xác định của mỗi phương trình sau :*

a) $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{x+4}{x+1}$; b) $\dfrac{3}{x-2} = \dfrac{2x-1}{x-2} - x$.

3. Giải phương trình chứa ẩn ở mẫu

Ví dụ 2. Giải phương trình $\dfrac{x+2}{x} = \dfrac{2x+3}{2(x-2)}$. (1)

Phương pháp giải :

– ĐKXĐ của phương trình là $x \neq 0$ và $x \neq 2$.

– Quy đồng mẫu hai vế của phương trình :

$$\frac{2(x+2)(x-2)}{2x(x-2)} = \frac{x(2x+3)}{2x(x-2)}.$$

Từ đó suy ra

$$2(x+2)(x-2) = x(2x+3). \qquad (1a)$$

Như vậy, ta đã *khử mẫu* trong phương trình (1).

– Giải phương trình (1a) :

$$\begin{aligned}(1a) \ &\Leftrightarrow 2(x^2-4) = x(2x+3)\\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 8 = 2x^2 + 3x\\ &\Leftrightarrow 3x = -8\\ &\Leftrightarrow x = -\frac{8}{3}.\end{aligned}$$

– Do việc khử mẫu, phương trình (1a) có thể không tương đương với phương trình (1) đã cho. Vì thế, cần thử lại xem giá trị $x = -\frac{8}{3}$ có đúng là nghiệm của phương trình (1) hay không. Muốn vậy, ta chỉ cần kiểm tra xem nó có thoả mãn ĐKXĐ hay không.

Ta thấy $x = -\frac{8}{3}$ thoả mãn ĐKXĐ nên nó là nghiệm của (1). Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là $S = \left\{-\frac{8}{3}\right\}$.

Cách giải phương trình chứa ẩn ở mẫu

Bước 1. Tìm điều kiện xác định của phương trình.

Bước 2. Quy đồng mẫu hai vế của phương trình rồi khử mẫu.

Bước 3. Giải phương trình vừa nhận được.

Bước 4 (Kết luận). Trong các giá trị của ẩn tìm được ở bước 3, *các giá trị thoả mãn điều kiện xác định* chính là các nghiệm của phương trình đã cho.

4. Áp dụng

Ví dụ 3. Giải phương trình $\dfrac{x}{2(x-3)} + \dfrac{x}{2x+2} = \dfrac{2x}{(x+1)(x-3)}$. (2)

Giải :

– ĐKXĐ : $x \neq -1$ và $x \neq 3$.

– Quy đồng mẫu hai vế và khử mẫu :

$$\frac{x(x+1)+x(x-3)}{2(x+1)(x-3)} = \frac{4x}{2(x+1)(x-3)}$$

Suy ra $\quad x(x+1) + x(x-3) = 4x.$ (2a)

– Giải phương trình (2a) :

$$\begin{aligned}(2a) &\Leftrightarrow x^2 + x + x^2 - 3x - 4x = 0\\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0\\ &\Leftrightarrow 2x(x-3) = 0\\ &\Leftrightarrow 2x = 0 \text{ hoặc } x - 3 = 0.\end{aligned}$$

1) $x = 0$ (thoả mãn ĐKXĐ) ;

2) $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ (loại vì không thoả mãn ĐKXĐ).

– *Kết luận :* Tập nghiệm của phương trình (2) là $S = \{0\}$.

?3 *Giải các phương trình trong* **?2** .

BÀI TẬP

27. Giải các phương trình :

a) $\dfrac{2x-5}{x+5} = 3$;

b) $\dfrac{x^2-6}{x} = x + \dfrac{3}{2}$;

c) $\dfrac{(x^2+2x)-(3x+6)}{x-3} = 0$;

d) $\dfrac{5}{3x+2} = 2x - 1$.

28. Giải các phương trình :

a) $\dfrac{2x-1}{x-1} + 1 = \dfrac{1}{x-1}$;

b) $\dfrac{5x}{2x+2} + 1 = -\dfrac{6}{x+1}$;

c) $x + \dfrac{1}{x} = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$;

d) $\dfrac{x+3}{x+1} + \dfrac{x-2}{x} = 2$.

LUYỆN TẬP

29. Bạn Sơn giải phương trình $\dfrac{x^2-5x}{x-5} = 5$ (1) như sau :

$$\begin{aligned}(1) \;&\Leftrightarrow x^2 - 5x = 5(x-5)\\ &\Leftrightarrow x^2 - 5x = 5x - 25\\ &\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 0\\ &\Leftrightarrow (x-5)^2 = 0\\ &\Leftrightarrow x = 5.\end{aligned}$$

Bạn Hà cho rằng Sơn giải sai vì đã nhân hai vế với biểu thức x − 5 có chứa ẩn. Hà giải bằng cách rút gọn vế trái như sau :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x(x-5)}{x-5} = 5 \Leftrightarrow x = 5.$$

Hãy cho biết ý kiến của em về hai lời giải trên.

30. Giải các phương trình :

a) $\frac{1}{x-2} + 3 = \frac{x-3}{2-x}$;

b) $2x - \frac{2x^2}{x+3} = \frac{4x}{x+3} + \frac{2}{7}$;

c) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{4}{x^2-1}$;

d) $\frac{3x-2}{x+7} = \frac{6x+1}{2x-3}$.

31. Giải các phương trình :

a) $\frac{1}{x-1} - \frac{3x^2}{x^3-1} = \frac{2x}{x^2+x+1}$;

b) $\frac{3}{(x-1)(x-2)} + \frac{2}{(x-3)(x-1)} = \frac{1}{(x-2)(x-3)}$;

c) $1 + \frac{1}{x+2} = \frac{12}{8+x^3}$;

d) $\frac{13}{(x-3)(2x+7)} + \frac{1}{2x+7} = \frac{6}{(x-3)(x+3)}$.

32. Giải các phương trình :

a) $\frac{1}{x} + 2 = \left(\frac{1}{x} + 2\right)(x^2 + 1)$;

b) $\left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x - 1 - \frac{1}{x}\right)^2$.

33. Tìm các giá trị của a sao cho mỗi biểu thức sau có giá trị bằng 2 :

a) $\frac{3a-1}{3a+1} + \frac{a-3}{a+3}$;

b) $\frac{10}{3} - \frac{3a-1}{4a+12} - \frac{7a+2}{6a+18}$.

§6. Giải bài toán bằng cách lập phương trình

Lập phương trình để giải một bài toán như thế nào ?

1. Biểu diễn một đại lượng bởi biểu thức chứa ẩn

Trong thực tế, nhiều đại lượng biến đổi phụ thuộc lẫn nhau. Nếu kí hiệu một trong các đại lượng ấy là x thì các đại lượng khác có thể được biểu diễn dưới dạng một biểu thức của biến x.

Ví dụ 1. Gọi x (km/h) là vận tốc của một ôtô. Khi đó :

Quãng đường ôtô đi được trong 5 giờ là 5x (km).

Thời gian để ôtô đi được quãng đường 100km là $\frac{100}{x}$ (h).

?1 *Giả sử hàng ngày bạn Tiến dành x phút để tập chạy. Hãy viết biểu thức với biến x biểu thị :*

a) *Quãng đường Tiến chạy được trong x phút, nếu chạy với vận tốc trung bình là 180m/ph.*

b) *Vận tốc trung bình của Tiến (tính theo km/h), nếu trong x phút Tiến chạy được quãng đường là 4500m.*

?2 *Gọi x là số tự nhiên có hai chữ số (ví dụ x = 12). Hãy lập biểu thức biểu thị số tự nhiên có được bằng cách :*

a) *Viết thêm chữ số 5 vào bên trái số x (ví dụ : $12 \rightarrow 512$, tức là $500 + 12$) ;*

b) *Viết thêm chữ số 5 vào bên phải số x (ví dụ : $12 \rightarrow 125$, tức là $12 \times 10 + 5$).*

2. Ví dụ về giải bài toán bằng cách lập phương trình

Ví dụ 2 (Bài toán cổ).

Vừa gà vừa chó
Bó lại cho tròn
Ba mươi sáu con
Một trăm chân chẵn.
Hỏi có bao nhiêu gà, bao nhiêu chó ?

Giải :

– Gọi x là số gà, với điều kiện x phải là số nguyên dương và nhỏ hơn 36.

Khi đó số chân gà là 2x. Vì cả gà lẫn chó có 36 con nên số chó là 36 – x và số chân chó là 4(36 – x). Tổng số chân là 100 nên ta có phương trình :

$$2x + 4(36 - x) = 100.$$

– Giải phương trình trên :

$$\begin{aligned} 2x + 4(36 - x) = 100 &\Leftrightarrow 2x + 144 - 4x = 100 \\ &\Leftrightarrow 44 = 2x \\ &\Leftrightarrow x = 22. \end{aligned}$$

– Kiểm tra lại, ta thấy x = 22 thoả mãn các điều kiện của ẩn. Vậy số gà là 22 (con). Từ đó suy ra số chó là 36 – 22 = 14 (con).

Tóm tắt các bước giải bài toán bằng cách lập phương trình

Bước 1. Lập phương trình :

– Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số ;

– Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết ;

– Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2. Giải phương trình.

Bước 3. Trả lời : Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thoả mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không, rồi kết luận.

?3 *Giải bài toán trong Ví dụ 2 bằng cách chọn x là số chó.*

BÀI TẬP

34. Mẫu số của một phân số lớn hơn tử số của nó là 3 đơn vị. Nếu tăng cả tử và mẫu của nó thêm 2 đơn vị thì được phân số mới bằng $\frac{1}{2}$. Tìm phân số ban đầu.

35. Học kì một, số học sinh giỏi của lớp 8A bằng $\frac{1}{8}$ số học sinh cả lớp. Sang học kì hai, có thêm 3 bạn phấn đấu trở thành học sinh giỏi nữa, do đó số học sinh giỏi bằng 20% số học sinh cả lớp. Hỏi lớp 8A có bao nhiêu học sinh ?

36. (Bài toán nói về cuộc đời nhà toán học Đi-ô-phăng, lấy trong Hợp tuyển Hi Lạp – Cuốn sách gồm 46 bài toán về số, viết dưới dạng thơ trào phúng).

Thời thơ ấu của Đi-ô-phăng chiếm $\frac{1}{6}$ cuộc đời
$\frac{1}{12}$ cuộc đời tiếp theo là thời thanh niên sôi nổi
Thêm $\frac{1}{7}$ cuộc đời nữa ông sống độc thân
Sau khi lập gia đình được 5 năm thì sinh một con trai
Nhưng số mệnh chỉ cho con sống bằng nửa đời cha
Ông đã từ trần 4 năm sau khi con mất
Đi-ô-phăng sống bao nhiêu tuổi, hãy tính cho ra ?

Có thể em chưa biết

Người ta gọi ông là Đi-ô-phăng (Diophantos) của vùng A-lếch-xăng-đri-a (Ai Cập) mà không biết rõ về năm sinh và quốc tịch của ông. Nhiều tài liệu cho rằng ông sống vào thế kỉ III (khoảng năm 250).

Ông là người có ảnh hưởng lớn đến sự phát triển của Đại số và Số học. Công trình quan trọng nhất của ông là bộ sách Arithmetica (Số học). Bộ sách phân tích lí thuyết đại số về số và nói về cách giải khoảng 130 bài toán. Phần lớn các bài toán này đều dẫn đến phương trình bậc nhất và bậc hai, đặc biệt là các phương trình vô định (tức là các phương trình có nhiều hơn một ẩn số). Ngày nay, thuật ngữ phương trình Đi-ô-phăng được dùng để chỉ các phương trình vô định mà ta chỉ quan tâm đến các nghiệm nguyên của chúng mà thôi.

Đi-ô-phăng cũng là người sớm dùng kí hiệu ζ (đọc là zêta) để chỉ số chưa biết với ghi chú rằng các chữ cái Hi Lạp khác cũng có thể dùng như vậy.

§7. Giải bài toán bằng cách lập phương trình (tiếp)

Thế mới biết việc chọn ẩn số cũng rất quan trọng.

Qua các bài toán trên, ta thấy : Để lập được phương trình, ta cần khéo chọn ẩn số và tìm sự liên quan giữa các đại lượng trong bài toán. Lập bảng biểu diễn các đại lượng trong bài toán theo ẩn số đã chọn là một phương pháp thường dùng.

Ví dụ. Một xe máy khởi hành từ Hà Nội đi Nam Định với vận tốc 35km/h. Sau đó 24 phút, trên cùng tuyến đường đó, một ôtô xuất phát từ Nam Định đi Hà Nội với vận tốc 45km/h. Biết quãng đường Nam Định – Hà Nội dài 90km. Hỏi sau bao lâu, kể từ khi xe máy khởi hành, hai xe gặp nhau ?

Phân tích bài toán :

Hai đối tượng tham gia vào bài toán là ôtô và xe máy, còn các đại lượng liên quan là vận tốc (đã biết), thời gian và quãng đường đi (chưa biết). Đối với từng đối tượng, các đại lượng ấy quan hệ với nhau theo công thức :

Quãng đường đi (km) = Vận tốc (km/h) × Thời gian đi (h).

Nếu chọn một đại lượng chưa biết làm ẩn, chẳng hạn, gọi thời gian từ lúc xe máy khởi hành đến lúc hai xe gặp nhau là x giờ, ta có thể lập bảng để biểu diễn các đại lượng trong bài toán như sau (trước hết đổi 24 phút thành $\frac{2}{5}$ giờ) :

	Vận tốc (km/h)	Thời gian đi (h)	Quãng đường đi (km)
Xe máy	35	x	35x
Ôtô	45	$x - \frac{2}{5}$	$45\left(x - \frac{2}{5}\right)$

Hai xe (đi ngược chiều) gặp nhau nghĩa là đến lúc đó tổng quãng đường hai xe đi được đúng bằng quãng đường Nam Định – Hà Nội. Do đó

$$35x + 45\left(x - \frac{2}{5}\right) = 90.$$

Đó chính là phương trình cần tìm.

Giải :

– Gọi thời gian từ lúc xe máy khởi hành đến lúc hai xe gặp nhau là x (h). Điều kiện thích hợp của x là $x > \frac{2}{5}$.

– Trong thời gian đó, xe máy đi được quãng đường là 35x (km).

Vì ôtô xuất phát sau xe máy 24 phút (tức là $\frac{2}{5}$ giờ) nên ôtô đi trong thời gian là $x - \frac{2}{5}$ (h) và đi được quãng đường là $45\left(x - \frac{2}{5}\right)$ (km).

Đến lúc hai xe gặp nhau, tổng quãng đường chúng đi được đúng bằng quãng đường Nam Định – Hà Nội (dài 90km) nên ta có phương trình

$$35x + 45\left(x - \frac{2}{5}\right) = 90.$$

– Giải phương trình :

$$35x + 45\left(x - \frac{2}{5}\right) = 90 \Leftrightarrow 35x + 45x - 18 = 90$$

$$\Leftrightarrow 80x = 108$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{108}{80} = \frac{27}{20}.$$

– Giá trị này phù hợp với điều kiện của ẩn. Vậy thời gian để hai xe gặp nhau là $\frac{27}{20}$ giờ, tức là 1 giờ 21 phút, kể từ lúc xe máy khởi hành.

?1 *Trong Ví dụ trên, hãy thử chọn ẩn số theo cách khác : Gọi s (km) là quãng đường từ Hà Nội đến điểm gặp nhau của hai xe. Điền vào bảng sau rồi lập phương trình với ẩn số s :*

	Vận tốc (km/h)	*Quãng đường đi (km)*	*Thời gian đi (h)*
Xe máy		*s*	
Ôtô			

?2 *Giải phương trình nhận được rồi suy ra đáp số của bài toán. So sánh hai cách chọn ẩn, em thấy cách nào cho lời giải gọn hơn ?*

BÀI ĐỌC THÊM

Bài toán

Một phân xưởng may lập kế hoạch may một lô hàng, theo đó mỗi ngày phân xưởng phải may xong 90 áo. Nhưng nhờ cải tiến kĩ thuật, phân xưởng đã may được 120 áo mỗi ngày. Do đó, phân xưởng không những đã hoàn thành kế hoạch trước thời hạn 9 ngày mà còn may thêm được 60 áo. Hỏi theo kế hoạch, phân xưởng phải may bao nhiêu áo ?

Phân tích bài toán :

Ở đây, ta gặp các đại lượng : *Số áo may trong 1 ngày* (đã biết), *tổng số áo may* và *số ngày may* (chưa biết) : Theo kế hoạch và thực tế đã thực hiện. Chúng có quan hệ :

Số áo may trong 1 ngày × *Số ngày may* = *Tổng số áo may*.

Chọn ẩn là một trong các đại lượng chưa biết. Ở đây, ta chọn x là số ngày may theo kế hoạch. Quy luật trên cho phép ta lập bảng biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng trong bài toán :

	Số áo may 1 ngày	Số ngày may	Tổng số áo may
Theo kế hoạch	90	x	90x
Đã thực hiện	120	x – 9	120(x – 9)

Từ đó, quan hệ giữa tổng số áo đã may được và số áo may theo kế hoạch được biểu thị bởi phương trình :

$$120(x - 9) = 90x + 60.$$

Giải :

Gọi số ngày may theo kế hoạch là x. Điều kiện : $x > 9$.

Tổng số áo may theo kế hoạch là 90x. Thực tế, phân xưởng đã thực hiện kế hoạch trong $(x - 9)$ ngày và may được $120(x - 9)$ áo.

Theo giả thiết, số áo may được nhiều hơn so với kế hoạch là 60 chiếc nên ta có phương trình :

$$120(x - 9) = 90x + 60.$$

Giải phương trình (trước hết chia cả hai vế cho 30) :

$$\begin{aligned} 120(x - 9) = 90x + 60 &\Leftrightarrow 4(x - 9) = 3x + 2 \\ &\Leftrightarrow 4x - 36 = 3x + 2 \\ &\Leftrightarrow 4x - 3x = 2 + 36 \\ &\Leftrightarrow x = 38. \end{aligned}$$

Giá trị này của x phù hợp với điều kiện của ẩn. Vậy theo kế hoạch, số áo phân xưởng phải may là $38 \times 90 = 3420$ (áo).

▶ ***Chú ý***

Trong cách giải trên đây, mặc dù bài toán hỏi tổng số áo may theo kế hoạch, nhưng chúng ta đã không chọn đại lượng đó làm ẩn. Để so sánh, em hãy chọn tổng số áo may theo kế hoạch làm ẩn t, điền vào bảng sau, suy ra phương trình ẩn t rồi giải bài toán :

	Tổng số áo may	*Số áo may 1 ngày*	*Số ngày may*
Theo kế hoạch	*t*	*90*	
Đã thực hiện		*120*	

BÀI TẬP

37. Lúc 6 giờ, một xe máy khởi hành từ A để đến B. Sau đó 1 giờ, một ôtô cũng xuất phát từ A đến B với vận tốc trung bình lớn hơn vận tốc trung bình của xe máy 20km/h. Cả hai xe đến B đồng thời vào lúc 9 giờ 30 phút cùng ngày. Tính độ dài quãng đường AB và vận tốc trung bình của xe máy.

38. Điểm kiểm tra Toán của một tổ học tập được cho trong bảng sau :

Điểm số (x)	4	5	7	8	9	
Tần số (n)	1	*	2	3	*	N = 10

Biết điểm trung bình của cả tổ là 6,6. Hãy điền các giá trị thích hợp vào hai ô còn trống (được đánh dấu *).

39. Lan mua hai loại hàng và phải trả tổng cộng 120 nghìn đồng, trong đó đã tính cả 10 nghìn đồng là thuế giá trị gia tăng (viết tắt là thuế VAT). Biết rằng thuế VAT đối với loại hàng thứ nhất là 10% ; thuế VAT đối với loại hàng thứ hai là 8%. Hỏi nếu không kể thuế VAT thì Lan phải trả mỗi loại hàng bao nhiêu tiền ?

Ghi chú. Thuế VAT là thuế mà người mua hàng phải trả, người bán hàng thu và nộp cho Nhà nước. Giả sử thuế VAT đối với mặt hàng A được quy định là 10%. Khi đó nếu giá bán của A là a đồng thì kể cả thuế VAT, người mua mặt hàng này phải trả tổng cộng là a + 10% a đồng.

LUYỆN TẬP

40. Năm nay, tuổi mẹ gấp 3 lần tuổi Phương. Phương tính rằng 13 năm nữa thì tuổi mẹ chỉ còn gấp 2 lần tuổi Phương thôi. Hỏi năm nay Phương bao nhiêu tuổi ?

41. Một số tự nhiên có hai chữ số. Chữ số hàng đơn vị gấp hai lần chữ số hàng chục. Nếu thêm chữ số 1 xen vào giữa hai chữ số ấy thì được một số mới lớn hơn số ban đầu là 370. Tìm số ban đầu.

42. Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng nếu viết thêm một chữ số 2 vào bên trái và một chữ số 2 vào bên phải số đó thì ta được một số lớn gấp 153 lần số ban đầu.

43. Tìm phân số có đồng thời các tính chất sau :

a) Tử số của phân số là số tự nhiên có một chữ số ;

b) Hiệu giữa tử số và mẫu số bằng 4 ;

c) Nếu giữ nguyên tử số và viết thêm vào bên phải của mẫu số một chữ số đúng bằng tử số, thì ta được một phân số bằng phân số $\frac{1}{5}$.

44. Điểm kiểm tra Toán của một lớp được cho trong bảng dưới đây :

Điểm (x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Tần số (n)	0	0	2	*	10	12	7	6	4	1	N = *

trong đó có hai ô còn trống (thay bằng dấu *). Hãy điền số thích hợp vào ô trống, nếu điểm trung bình của lớp là 6,06.

45. Một xí nghiệp kí hợp đồng dệt một số tấm thảm len trong 20 ngày. Do cải tiến kĩ thuật, năng suất dệt của xí nghiệp đã tăng 20%. Bởi vậy, chỉ trong 18 ngày, không những xí nghiệp đã hoàn thành số thảm cần dệt mà còn dệt thêm được 24 tấm nữa. Tính số tấm thảm len mà xí nghiệp phải dệt theo hợp đồng.

46. Một người lái ôtô dự định đi từ A đến B với vận tốc 48km/h. Nhưng sau khi đi được một giờ với vận tốc ấy, ôtô bị tàu hoả chắn đường trong 10 phút. Do đó, để kịp đến B đúng thời gian đã định, người đó phải tăng vận tốc thêm 6km/h. Tính quãng đường AB.

47. Bà An gửi vào quỹ tiết kiệm x nghìn đồng với lãi suất mỗi tháng là a% (a là một số cho trước) và lãi tháng này được tính gộp vào vốn cho tháng sau.

a) Hãy viết biểu thức biểu thị :

+ Số tiền lãi sau tháng thứ nhất ;

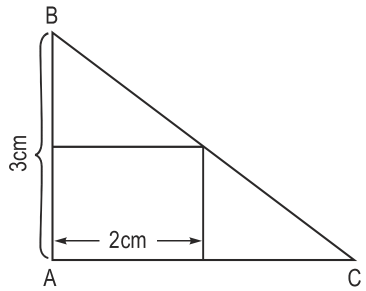
+ Số tiền (cả gốc lẫn lãi) có được sau tháng thứ nhất ;

+ Tổng số tiền lãi có được sau tháng thứ hai.

b) Nếu lãi suất là 1,2% (tức là a = 1,2) và sau 2 tháng tổng số tiền lãi là 48,288 nghìn đồng, thì lúc đầu bà An đã gửi bao nhiêu tiền tiết kiệm ?

48. Năm ngoái, tổng số dân của hai tỉnh A và B là 4 triệu. Năm nay, dân số của tỉnh A tăng thêm 1,1%, còn dân số của tỉnh B tăng thêm 1,2%. Tuy vậy, số dân của tỉnh A năm nay vẫn nhiều hơn tỉnh B là 807 200 người. Tính số dân năm ngoái của mỗi tỉnh.

49. ***Đố.*** Lan có một miếng bìa hình tam giác ABC vuông tại A, cạnh AB = 3cm. Lan tính rằng nếu cắt từ miếng bìa đó ra một hình chữ nhật có chiều dài 2cm như hình 5 thì hình chữ nhật ấy có diện tích bằng một nửa diện tích của miếng bìa ban đầu. Tính độ dài cạnh AC của tam giác ABC.



Hình 5

ÔN TẬP CHƯƠNG III

A - Câu hỏi

1. Thế nào là hai phương trình tương đương ?

2. Nhân hai vế của một phương trình với cùng một biểu thức chứa ẩn thì có thể không được phương trình tương đương. Em hãy cho một ví dụ.

3. Với điều kiện nào của a thì phương trình ax + b = 0 là một phương trình bậc nhất ? (a và b là hai hằng số).

4. Một phương trình bậc nhất một ẩn có mấy nghiệm ? Đánh dấu "×" vào ô vuông ứng với câu trả lời đúng :

☐ Vô nghiệm.

☐ Luôn có một nghiệm duy nhất.

☐ Có vô số nghiệm.

☐ Có thể vô nghiệm, có thể có một nghiệm duy nhất và cũng có thể có vô số nghiệm.

5. Khi giải phương trình chứa ẩn ở mẫu, ta phải chú ý điều gì ?

6. Hãy nêu các bước giải bài toán bằng cách lập phương trình.

B - Bài tập

50. Giải các phương trình :

a) $3 - 4x(25 - 2x) = 8x^2 + x - 300$;

b) $\dfrac{2(1-3x)}{5} - \dfrac{2+3x}{10} = 7 - \dfrac{3(2x+1)}{4}$;

c) $\dfrac{5x+2}{6} - \dfrac{8x-1}{3} = \dfrac{4x+2}{5} - 5$;

d) $\dfrac{3x+2}{2} - \dfrac{3x+1}{6} = 2x + \dfrac{5}{3}\cdot$

51. Giải các phương trình sau bằng cách đưa về phương trình tích :

a) $(2x + 1)(3x - 2) = (5x - 8)(2x + 1)$; b) $4x^2 - 1 = (2x + 1)(3x - 5)$;

c) $(x + 1)^2 = 4(x^2 - 2x + 1)$; d) $2x^3 + 5x^2 - 3x = 0$.

52. Giải các phương trình :

a) $\dfrac{1}{2x-3} - \dfrac{3}{x(2x-3)} = \dfrac{5}{x}$;

b) $\dfrac{x+2}{x-2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{x(x-2)}$;

c) $\dfrac{x+1}{x-2} + \dfrac{x-1}{x+2} = \dfrac{2(x^2+2)}{x^2-4}$;

d) $(2x+3)\left(\dfrac{3x+8}{2-7x}+1\right) = (x-5)\left(\dfrac{3x+8}{2-7x}+1\right)\cdot$

53. Giải phương trình :

$$\frac{x+1}{9}+\frac{x+2}{8}=\frac{x+3}{7}+\frac{x+4}{6}.$$

54. Một canô xuôi dòng từ bến A đến bến B mất 4 giờ và ngược dòng từ bến B về bến A mất 5 giờ. Tính khoảng cách giữa hai bến A và B, biết rằng vận tốc của dòng nước là 2km/h.

55. Biết rằng 200g một dung dịch chứa 50g muối. Hỏi phải pha thêm bao nhiêu gam nước vào dung dịch đó để được một dung dịch chứa 20% muối ?

56. Để khuyến khích tiết kiệm điện, giá điện sinh hoạt được tính theo kiểu luỹ tiến, nghĩa là nếu người sử dụng càng dùng nhiều điện thì giá mỗi số điện (1kWh) càng tăng lên theo các mức như sau :

Mức thứ nhất : Tính cho 100 số điện đầu tiên ;

Mức thứ hai : Tính cho số điện thứ 101 đến 150, mỗi số đắt hơn 150 đồng so với mức thứ nhất ;

Mức thứ ba : Tính cho số điện thứ 151 đến 200, mỗi số đắt hơn 200 đồng so với mức thứ hai ;

v.v...

Ngoài ra, người sử dụng còn phải trả thêm 10% thuế giá trị gia tăng (thuế VAT).

Tháng vừa qua, nhà Cường dùng hết 165 số điện và phải trả 95700 đồng. Hỏi mỗi số điện ở mức thứ nhất giá là bao nhiêu ?

Chương IV – BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

§1. Liên hệ giữa thứ tự và phép cộng

$-4 + c < 2 + c$ với mọi số c ?

1. Nhắc lại về thứ tự trên tập hợp số

Trên tập hợp số thực, khi so sánh hai số a và b, xảy ra một trong ba trường hợp sau :

Số a *bằng* số b, kí hiệu $a = b$.

Số a *nhỏ hơn* số b, kí hiệu $a < b$.

Số a *lớn hơn* số b, kí hiệu $a > b$.

Khi biểu diễn số thực trên trục số (vẽ theo phương nằm ngang), điểm biểu diễn số nhỏ hơn ở bên trái điểm biểu diễn số lớn hơn. Chính điều đó cho ta hình dung về thứ tự trên tập số thực.

?1 *Điền dấu thích hợp* (=, <, >) *vào ô vuông :*

a) $1{,}53 \ \square\ 1{,}8$;　　　　b) $-2{,}37\ \square\ -2{,}41$;

c) $\dfrac{12}{-18}\ \square\ \dfrac{-2}{3}$;　　　　d) $\dfrac{3}{5}\ \square\ \dfrac{13}{20}$.

Nếu số a không nhỏ hơn số b, thì phải có hoặc $a > b$, hoặc $a = b$. Khi đó, ta nói gọn là a *lớn hơn hoặc bằng* b, kí hiệu $a \geq b$. Ví dụ : $x^2 \geq 0$ với mọi x ; Nếu c là số không âm thì ta viết $c \geq 0$.

Nếu số a không lớn hơn số b, thì phải có hoặc $a < b$, hoặc $a = b$. Khi đó, ta nói gọn là a *nhỏ hơn hoặc bằng* b, kí hiệu $a \leq b$. Ví dụ : $-x^2 \leq 0$ với mọi x ; Nếu số y không lớn hơn 3 thì ta viết $y \leq 3$.

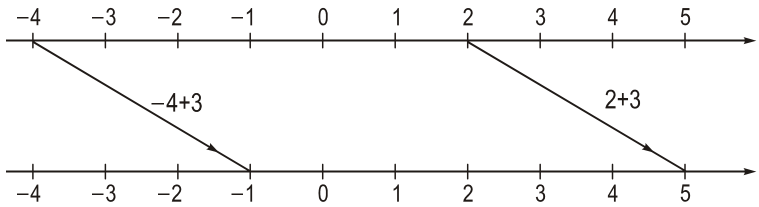
2. Bất đẳng thức

Ta gọi hệ thức dạng a < b (hay a > b, a ≤ b, a ≥ b) là *bất đẳng thức* và gọi a là *vế trái*, b là *vế phải* của bất đẳng thức.

Ví dụ 1. Bất đẳng thức 7 + (–3) > –5 có vế trái là 7 + (–3), còn vế phải là –5.

3. Liên hệ giữa thứ tự và phép cộng

Hình vẽ sau minh hoạ kết quả : Khi cộng 3 vào cả hai vế của bất đẳng thức –4 < 2 thì được bất đẳng thức –4 + 3 < 2 + 3.



?2 a) *Khi cộng –3 vào cả hai vế của bất đẳng thức – 4 < 2 thì được bất đẳng thức nào ?*

b) *Dự đoán kết quả : Khi cộng số* c *vào cả hai vế của bất đẳng thức – 4 < 2 thì được bất đẳng thức nào ?*

Tính chất. Với ba số a, b và c, ta có :

Nếu a < b thì a + c < b + c ;   nếu a ≤ b thì a + c ≤ b + c ;

Nếu a > b thì a + c > b + c ;   nếu a ≥ b thì a + c ≥ b + c.

Hai bất đẳng thức –2 < 3 và –4 < 2 (hay 5 > 1 và –3 > –7) được gọi là hai bất đẳng thức *cùng chiều*.

Khi cộng cùng một số vào cả hai vế của một bất đẳng thức ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

Có thể áp dụng tính chất trên để so sánh hai số, hoặc chứng minh bất đẳng thức.

Ví dụ 2. Chứng tỏ 2003 + (– 35) < 2004 + (– 35).

Giải :

Theo tính chất trên, cộng –35 vào cả hai vế của bất đẳng thức 2003 < 2004, ta suy ra 2003 + (– 35) < 2004 + (– 35).

?3 *So sánh –2004 + (–777) và –2005 + (–777) mà không tính giá trị từng biểu thức.*

?4 *Dựa vào thứ tự giữa $\sqrt{2}$ và 3, hãy so sánh $\sqrt{2}$ + 2 và 5.*

Chú ý. Tính chất của thứ tự cũng chính là tính chất của bất đẳng thức.

BÀI TẬP

1. Mỗi khẳng định sau đúng hay sai ? Vì sao ?

a) $(-2) + 3 \geq 2$; b) $-6 \leq 2.(-3)$;

c) $4 + (-8) < 15 + (-8)$; d) $x^2 + 1 \geq 1$.

2. Cho $a < b$, hãy so sánh :

a) $a + 1$ và $b + 1$; b) $a - 2$ và $b - 2$.

3. So sánh a và b nếu :

a) $a - 5 \geq b - 5$; b) $15 + a \leq 15 + b$.

4. ***Đố.*** Một biển báo giao thông với nền trắng, số 20 màu đen, viền đỏ (xem minh hoạ ở hình bên) cho biết vận tốc tối đa mà các phương tiện giao thông được đi trên quãng đường có biển quy định là 20km/h. Nếu một ôtô đi trên đường đó có vận tốc là a (km/h) thì a phải thoả mãn điều kiện nào trong các điều kiện sau :

$a > 20$; $a < 20$; $a \leq 20$; $a \geq 20$?

§2. Liên hệ giữa thứ tự và phép nhân

Bất đẳng thức $(-2).c < 3.c$ có luôn luôn xảy ra với số c bất kì hay không ?

1. Liên hệ giữa thứ tự và phép nhân với số dương

Hình vẽ sau minh hoạ kết quả : Khi nhân cả hai vế của bất đẳng thức $-2 < 3$ với 2 thì được bất đẳng thức $(-2).2 < 3.2$.

?1 a) *Nhân cả hai vế của bất đẳng thức $-2 < 3$ với 5091 thì được bất đẳng thức nào ?*

b) *Dự đoán kết quả : Nhân cả hai vế của bất đẳng thức $-2 < 3$ với số c dương thì được bất đẳng thức nào ?*

Tính chất. Với ba số a, b và c mà $c > 0$, ta có :

Nếu $a < b$ thì $ac < bc$; nếu $a \le b$ thì $ac \le bc$;

Nếu $a > b$ thì $ac > bc$; nếu $a \ge b$ thì $ac \ge bc$.

Khi nhân cả hai vế của bất đẳng thức với cùng một số dương ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

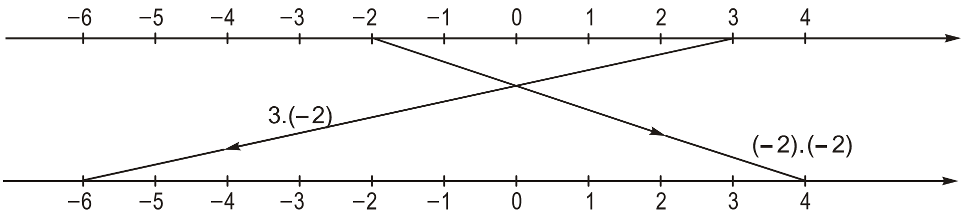
?2 *Đặt dấu thích hợp (<, >) vào ô vuông :*

a) $(-15,2) . 3,5 \ \square \ (-15,08) . 3,5$;

b) $4,15 . 2,2 \ \square \ (-5,3) . 2,2$.

2. Liên hệ giữa thứ tự và phép nhân với số âm

Hình vẽ sau minh hoạ kết quả : Khi nhân cả hai vế của bất đẳng thức $-2 < 3$ với -2 thì được bất đẳng thức $(-2) . (-2) > 3 . (-2)$.



?3 a) *Nhân cả hai vế của bất đẳng thức $-2 < 3$ với -345 thì được bất đẳng thức nào ?*

b) *Dự đoán kết quả : Nhân cả hai vế của bất đẳng thức $-2 < 3$ với số c âm thì được bất đẳng thức nào ?*

Tính chất. Với ba số a, b và c mà $c < 0$, ta có :

Nếu $a < b$ thì $ac > bc$; nếu $a \le b$ thì $ac \ge bc$;

Nếu $a > b$ thì $ac < bc$; nếu $a \ge b$ thì $ac \le bc$.

Hai bất đẳng thức $-2 < 3$ và $4 > 3,5$ (hay $-3 > -5$ và $2 < 4$) được gọi là hai bất đẳng thức *ngược chiều*.

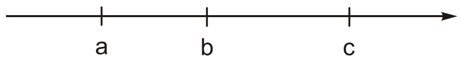
Khi nhân cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số âm ta được bất đẳng thức mới ngược chiều với bất đẳng thức đã cho.

?4 *Cho $-4a > -4b$, hãy so sánh a và b.*

?5 *Khi chia cả hai vế của bất đẳng thức cho cùng một số khác 0 thì sao ?*

3. Tính chất bắc cầu của thứ tự

Với ba số a, b và c ta thấy rằng nếu $a < b$ và $b < c$ thì $a < c$. Tính chất này gọi là tính chất *bắc cầu* :



Tương tự, các thứ tự lớn hơn (>), nhỏ hơn hoặc bằng (≤), lớn hơn hoặc bằng (≥) cũng có tính chất bắc cầu.

Có thể dùng tính chất bắc cầu để chứng minh bất đẳng thức.

Ví dụ. Cho $a > b$. Chứng minh $a + 2 > b - 1$.

Giải :

Cộng 2 vào hai vế của bất đẳng thức $a > b$, ta được

$$a + 2 > b + 2. \qquad (1)$$

Cộng b vào hai vế của bất đẳng thức $2 > -1$, ta được

$$b + 2 > b - 1. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), theo tính chất bắc cầu, suy ra

$$a + 2 > b - 1.$$

BÀI TẬP

5. Mỗi khẳng định sau đúng hay sai ? Vì sao ?

a) $(-6).5 < (-5).5$;

b) $(-6).(-3) < (-5).(-3)$;

c) $(-2003).(-2005) \leq (-2005).2004$;

d) $-3x^2 \leq 0$.

6. Cho $a < b$, hãy so sánh :

$$2a \text{ và } 2b\ ;\ 2a \text{ và } a + b\ ;\ -a \text{ và } -b.$$

7. Số a là số âm hay dương nếu :

$$12a < 15a \ ? \qquad 4a < 3a \ ? \qquad -3a > -5a \ ?$$

8. Cho a < b, chứng tỏ :

a) $2a - 3 < 2b - 3$; b) $2a - 3 < 2b + 5$.

LUYỆN TẬP

9. Cho tam giác ABC. Các khẳng định sau đúng hay sai :

a) $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} > 180^o$; b) $\widehat{A} + \widehat{B} < 180^o$;

c) $\widehat{B} + \widehat{C} \leq 180^o$; d) $\widehat{A} + \widehat{B} \geq 180^o$?

10. a) So sánh $(-2).3$ và $-4{,}5$.

b) Từ kết quả câu a) hãy suy ra các bất đẳng thức sau :

$(-2).30 < -45$; $(-2).3 + 4{,}5 < 0$.

11. Cho a < b, chứng minh :

a) $3a + 1 < 3b + 1$; b) $-2a - 5 > -2b - 5$.

12. Chứng minh :

a) $4.(-2) + 14 < 4.(-1) + 14$; b) $(-3).2 + 5 < (-3).(-5) + 5$.

13. So sánh a và b nếu :

a) $a + 5 < b + 5$; b) $-3a > -3b$;

c) $5a - 6 \geq 5b - 6$; d) $-2a + 3 \leq -2b + 3$.

14. Cho a < b, hãy so sánh :

a) $2a + 1$ với $2b + 1$; b) $2a + 1$ với $2b + 3$.

Có thể em chưa biết

Cauchy (1789 - 1857)

Cô-si (Cauchy) là nhà toán học Pháp nghiên cứu nhiều lĩnh vực Toán học khác nhau. Ông có nhiều công trình về Số học, Đại số, Giải tích,... Có một bất đẳng thức mang tên ông có rất nhiều ứng dụng trong việc chứng minh các bất đẳng thức và giải các bài toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các biểu thức.
Bất đẳng thức Cô-si cho hai số là :

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}, \text{ với } a \ge 0,\ b \ge 0.$$

Bất đẳng thức này còn được gọi là *bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân.*

Em có thể tìm được một cách chứng minh bất đẳng thức trên trong sách Bài tập.

§3. Bất phương trình một ẩn

Cũng tương tự như phương trình một ẩn ?

1. Mở đầu

Bạn Nam có 25 000 đồng. Nam muốn mua một cái bút giá 4000 đồng và một số quyển vở loại 2200 đồng một quyển. Tính số quyển vở bạn Nam có thể mua được.

Trong bài toán trên nếu kí hiệu số quyển vở bạn Nam có thể mua là x, thì x phải thoả mãn hệ thức $2200x + 4000 \le 25\,000$. Khi đó người ta nói hệ thức

$$2200x + 4000 \le 25\,000$$

là một *bất phương trình với ẩn là x*. Trong bất phương trình này, ta gọi $2200x + 4000$ là vế trái và $25\,000$ là vế phải.

Khi thay giá trị $x = 9$ vào bất phương trình $2200x + 4000 \le 25\,000$, ta được $2200.9 + 4000 \le 25\,000$ là khẳng định đúng. Ta nói số 9 (hay giá trị $x = 9$) là *một nghiệm* của bất phương trình.

Khi thay $x = 10$ vào bất phương trình $2200x + 4000 \le 25\,000$, ta được $2200.10 + 4000 \le 25\,000$ là khẳng định sai. Ta kết luận số 10 không phải là nghiệm của bất phương trình.

?1 a) *Hãy cho biết vế trái, vế phải của bất phương trình* $x^2 \le 6x - 5$.

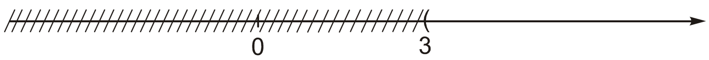
b) *Chứng tỏ các số 3 ; 4 và 5 đều là nghiệm, còn số 6 không phải là nghiệm của bất phương trình vừa nêu.*

2. Tập nghiệm của bất phương trình

Tập hợp tất cả các nghiệm của một bất phương trình được gọi là *tập nghiệm* của bất phương trình. *Giải bất phương trình* là tìm tập nghiệm của bất phương trình đó.

Ví dụ 1. Tập nghiệm của bất phương trình $x > 3$ là tập hợp các số lớn hơn 3, tức là tập hợp $\{x \mid x > 3\}$.

Để dễ hình dung, ta biểu diễn tập hợp này trên trục số như hình vẽ sau :



(Trong hình vẽ trên, tất cả các điểm bên trái điểm 3 và cả điểm 3 bị gạch bỏ).

?2 *Hãy cho biết vế trái, vế phải và tập nghiệm của bất phương trình $x > 3$, bất phương trình $3 < x$ và phương trình $x = 3$.*

Ví dụ 2. Bất phương trình $x \leq 7$ có tập nghiệm là tập hợp các số nhỏ hơn hoặc bằng 7, tức là tập hợp $\{x \mid x \leq 7\}$. Tập hợp này được biểu diễn trên trục số như sau :

(Trong hình vẽ trên, các điểm bên phải điểm 7 bị gạch bỏ nhưng điểm 7 được giữ lại).

?3 *Viết và biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình $x \geq -2$ trên trục số.*

Hướng dẫn : Trên trục số, gạch bỏ các điểm bên trái điểm -2 bằng các dấu "/ " và giữ lại điểm -2 bằng dấu "[".

?4 *Viết và biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình $x < 4$ trên trục số.*

Hướng dẫn : Trên trục số, gạch bỏ các điểm bên phải điểm 4 bằng các dấu "/ " và gạch bỏ điểm 4 bằng dấu ")".

3. Bất phương trình tương đương

Bất phương trình $x > 3$ và bất phương trình $3 < x$ có cùng tập nghiệm là $\{x \mid x > 3\}$.

Người ta gọi hai bất phương trình có cùng tập nghiệm là *hai bất phương trình tương đương* và dùng kí hiệu "$\Leftrightarrow$" để chỉ sự tương đương đó.

Ví dụ 3. $3 < x \Leftrightarrow x > 3$.

BÀI TẬP

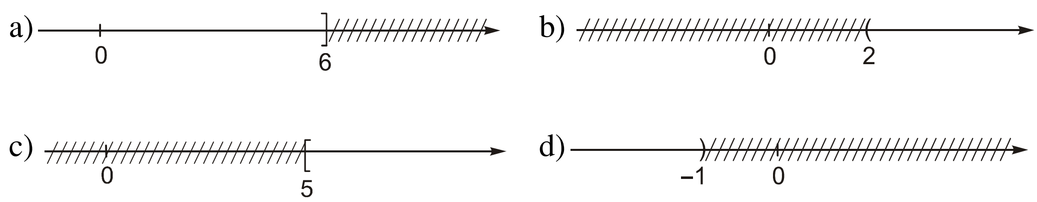
15. Kiểm tra xem giá trị x = 3 là nghiệm của bất phương trình nào trong các bất phương trình sau :

a) $2x + 3 < 9$; b) $-4x > 2x + 5$; c) $5 - x > 3x - 12$.

16. Viết và biểu diễn tập nghiệm trên trục số của mỗi bất phương trình sau :

a) $x < 4$; b) $x \le -2$; c) $x > -3$; d) $x \ge 1$.

17. Hình vẽ sau đây biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình nào ? (Chỉ nêu một bất phương trình).



18. Hãy lập bất phương trình cho bài toán sau :

Quãng đường từ A đến B dài 50km. Một ôtô đi từ A đến B, khởi hành lúc 7 giờ. Hỏi ôtô phải đi với vận tốc bao nhiêu km/h để đến B trước 9 giờ cùng ngày ?

§4. Bất phương trình bậc nhất một ẩn

Giải bất phương trình bậc nhất một ẩn như thế nào ?

1. Định nghĩa

Bất phương trình dạng $ax + b < 0$ (hoặc $ax + b > 0$, $ax + b \le 0$, $ax + b \ge 0$) trong đó a và b là hai số đã cho, $a \ne 0$, được gọi là bất phương trình bậc nhất một ẩn.

?1 *Trong các bất phương trình sau, hãy cho biết bất phương trình nào là bất phương trình bậc nhất một ẩn :*

a) $2x - 3 < 0$; b) $0.x + 5 > 0$;

c) $5x - 15 \ge 0$; d) $x^2 > 0$.

2. Hai quy tắc biến đổi bất phương trình

a) Quy tắc chuyển vế

Từ liên hệ giữa thứ tự và phép cộng, ta có quy tắc sau (gọi là *quy tắc chuyển vế*) để biến đổi tương đương bất phương trình :

> ***Khi chuyển một hạng tử của bất phương trình từ vế này sang vế kia ta phải đổi dấu hạng tử đó.***

Ví dụ 1. Giải bất phương trình $x - 5 < 18$.

Giải :

Ta có $x - 5 < 18$

$\Leftrightarrow x < 18 + 5$ (Chuyển vế -5 và đổi dấu thành 5)

$\Leftrightarrow x < 23$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\{x \mid x < 23\}$.

Ví dụ 2. Giải bất phương trình $3x > 2x + 5$ và biểu diễn tập nghiệm trên trục số.

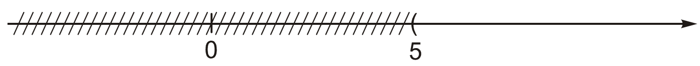
Giải :

Ta có $3x > 2x + 5$

$\Leftrightarrow 3x - 2x > 5$ (Chuyển vế $2x$ và đổi dấu thành $-2x$)

$\Leftrightarrow x > 5$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\{x \mid x > 5\}$. Tập nghiệm này được biểu diễn như sau :



?2 *Giải các bất phương trình sau :*

a) $x + 12 > 21$; b) $-2x > -3x - 5$.

b) Quy tắc nhân với một số

Từ liên hệ giữa thứ tự và phép nhân với số dương hoặc với số âm, ta có quy tắc nhân với một số (gọi tắt là *quy tắc nhân*) để biến đổi tương đương bất phương trình :

> ***Khi nhân hai vế của bất phương trình với cùng một số khác 0, ta phải :***
> ***– Giữ nguyên chiều bất phương trình nếu số đó dương ;***
> ***– Đổi chiều bất phương trình nếu số đó âm.***

Ví dụ 3. Giải bất phương trình 0,5x < 3.

Giải :

Ta có $0{,}5x < 3$

$\Leftrightarrow$ $0{,}5x.2 < 3.2$ (Nhân cả hai vế với 2)

$\Leftrightarrow$ $x < 6$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\{x \mid x < 6\}$.

Ví dụ 4. Giải bất phương trình $-\frac{1}{4}x < 3$ và biểu diễn tập nghiệm trên trục số.

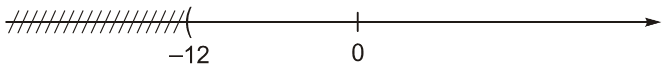
Giải :

Ta có $-\frac{1}{4}x < 3$

$\Leftrightarrow$ $-\frac{1}{4}x.(-4) > 3.(-4)$ (Nhân hai vế với – 4 và đổi chiều)

$\Leftrightarrow$ $x > -12$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\{x \mid x > -12\}$. Tập nghiệm này được biểu diễn như sau :



?3 *Giải các bất phương trình sau (dùng quy tắc nhân) :*

a) $2x < 24$; b) $-3x < 27$.

?4 *Giải thích sự tương đương :*

a) $x + 3 < 7 \Leftrightarrow x - 2 < 2$; b) $2x < -4 \Leftrightarrow -3x > 6$.

3. Giải bất phương trình bậc nhất một ẩn

Ví dụ 5. Giải bất phương trình 2x – 3 < 0 và biểu diễn tập nghiệm trên trục số.

Giải :

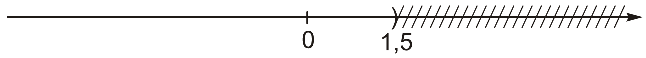
Ta có $2x - 3 < 0$

$\Leftrightarrow 2x < 3$ (Chuyển –3 sang vế phải và đổi dấu)

$\Leftrightarrow 2x : 2 < 3 : 2$ (Chia hai vế cho 2)

$\Leftrightarrow x < 1{,}5$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\{x \mid x < 1,5\}$ và được biểu diễn trên trục số như sau :



?5 *Giải bất phương trình* $-4x - 8 < 0$ *và biểu diễn tập nghiệm trên trục số.*

Hướng dẫn : Làm tương tự Ví dụ 5 nhưng lưu ý khi nhân hai vế với số âm.

▶ ***Chú ý.*** *Để cho gọn khi trình bày, ta có thể :*

– Không ghi câu giải thích ;

– Khi có kết quả $x < 1,5$ *(ở Ví dụ 5) thì coi là giải xong và viết đơn giản : Nghiệm của bất phương trình* $2x - 3 < 0$ *là* $x < 1,5$.

Ví dụ 6. Giải bất phương trình $-4x + 12 < 0$.

Giải :

Ta có $-4x + 12 < 0$

$\Leftrightarrow 12 < 4x$

$\Leftrightarrow 12 : 4 < 4x : 4$

$\Leftrightarrow 3 < x$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > 3$.

4. Giải bất phương trình đưa được về dạng $ax + b < 0$; $ax + b > 0$; $ax + b \le 0$; $ax + b \ge 0$

Ví dụ 7. Giải bất phương trình $3x + 5 < 5x - 7$.

Giải :

Ta có $3x + 5 < 5x - 7$

$\Leftrightarrow 3x - 5x < -5 - 7$

$\Leftrightarrow -2x < -12$

$\Leftrightarrow -2x : (-2) > -12 : (-2)$

$\Leftrightarrow x > 6$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > 6$.

?6 *Giải bất phương trình* $-0,2x - 0,2 > 0,4x - 2$.

BÀI TẬP

19. Giải các bất phương trình (theo quy tắc chuyển vế) :

a) $x - 5 > 3$; b) $x - 2x < -2x + 4$;

c) $-3x > -4x + 2$; d) $8x + 2 < 7x - 1$.

20. Giải các bất phương trình (theo quy tắc nhân) :

a) $0{,}3x > 0{,}6$; b) $-4x < 12$;

c) $-x > 4$; d) $1{,}5x > -9$.

21. Giải thích sự tương đương sau :

a) $x - 3 > 1 \Leftrightarrow x + 3 > 7$; b) $-x < 2 \Leftrightarrow 3x > -6$.

22. Giải các bất phương trình và biểu diễn tập nghiệm trên trục số :

a) $1{,}2x < -6$; b) $3x + 4 > 2x + 3$.

23. Giải các bất phương trình và biểu diễn tập nghiệm trên trục số :

a) $2x - 3 > 0$; b) $3x + 4 < 0$;

c) $4 - 3x \le 0$; d) $5 - 2x \ge 0$.

24. Giải các bất phương trình :

a) $2x - 1 > 5$; b) $3x - 2 < 4$;

c) $2 - 5x \le 17$; d) $3 - 4x \ge 19$.

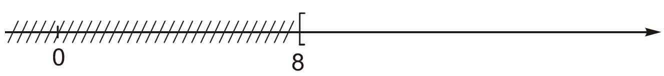
25. Giải các bất phương trình :

a) $\frac{2}{3}x > -6$; b) $-\frac{5}{6}x < 20$;

c) $3 - \frac{1}{4}x > 2$; d) $5 - \frac{1}{3}x > 2$.

26. Hình vẽ sau biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình nào ? (Kể ba bất phương trình có cùng tập nghiệm).

a) 

b) 

27. ***Đố.*** Kiểm tra xem giá trị $x = -2$ có là nghiệm của bất phương trình sau không :

a) $x + 2x^2 - 3x^3 + 4x^4 - 5 < 2x^2 - 3x^3 + 4x^4 - 6$;

b) $(-0{,}001)x > 0{,}003$.

LUYỆN TẬP

28. Cho bất phương trình $x^2 > 0$.

a) Chứng tỏ $x = 2$, $x = -3$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

b) Có phải mọi giá trị của ẩn x đều là nghiệm của bất phương trình đã cho hay không ?

29. Tìm x sao cho :

a) Giá trị của biểu thức $2x - 5$ không âm ;

b) Giá trị của biểu thức $-3x$ không lớn hơn giá trị của biểu thức $-7x + 5$.

30. Một người có số tiền không quá 70 000 đồng gồm 15 tờ giấy bạc với hai loại mệnh giá : loại 2000 đồng và loại 5000 đồng. Hỏi người đó có bao nhiêu tờ giấy bạc loại 5000 đồng ?

31. Giải các bất phương trình và biểu diễn tập nghiệm trên trục số :

a) $\dfrac{15 - 6x}{3} > 5$; b) $\dfrac{8 - 11x}{4} < 13$;

c) $\dfrac{1}{4}(x - 1) < \dfrac{x - 4}{6}$; d) $\dfrac{2 - x}{3} < \dfrac{3 - 2x}{5}$.

32. Giải các bất phương trình :

a) $8x + 3(x + 1) > 5x - (2x - 6)$; b) $2x(6x - 1) > (3x - 2)(4x + 3)$.

33. ***Đố.*** Trong một kì thi, bạn Chiến phải thi bốn môn Văn, Toán, Tiếng Anh và Hoá. Chiến đã thi ba môn và được kết quả như bảng sau :

Môn	Văn	Tiếng Anh	Hoá
Điểm	8	7	10

Kì thi quy định muốn đạt loại giỏi phải có điểm trung bình các môn thi là 8 trở lên và không có môn nào bị điểm dưới 6. Biết môn Văn và Toán được tính hệ số 2. Hãy cho biết, để đạt loại giỏi bạn Chiến phải có điểm thi môn Toán ít nhất là bao nhiêu.

34. ***Đố.*** Tìm sai lầm trong các "lời giải" sau :

a) Giải bất phương trình $-2x > 23$. Ta có :

$$-2x > 23 \Leftrightarrow x > 23 + 2 \Leftrightarrow x > 25.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > 25$.

b) Giải bất phương trình $-\frac{3}{7}x > 12$. Ta có :

$$-\frac{3}{7}x > 12 \Leftrightarrow \left(-\frac{7}{3}\right).\left(-\frac{3}{7}x\right) > \left(-\frac{7}{3}\right).12 \quad \Leftrightarrow x > -28.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > -28$.

§5. Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

Đưa về phương trình không chứa dấu giá trị tuyệt đối bằng cách nào ?

1. Nhắc lại về giá trị tuyệt đối

Giá trị tuyệt đối của số a, kí hiệu là $|a|$, được định nghĩa như sau :

$$|a| = a \text{ khi } a \geq 0 ;$$

$$|a| = -a \text{ khi } a < 0.$$

Chẳng hạn : $|5| = 5$, $|0| = 0$, $|-3{,}5| = 3{,}5$.

Theo định nghĩa trên, ta có thể bỏ dấu giá trị tuyệt đối tuỳ theo giá trị của biểu thức ở trong dấu giá trị tuyệt đối là âm hay không âm.

Ví dụ 1. Bỏ dấu giá trị tuyệt đối và rút gọn các biểu thức :

a) $A = |x - 3| + x - 2$ khi $x \geq 3$; b) $B = 4x + 5 + |-2x|$ khi $x > 0$.

Giải :

a) Khi $x \geq 3$, ta có $x - 3 \geq 0$ nên $|x - 3| = x - 3$. Vậy

$$A = x - 3 + x - 2 = 2x - 5.$$

b) Khi $x > 0$, ta có $-2x < 0$ nên $|-2x| = -(-2x) = 2x$. Vậy

$$B = 4x + 5 + 2x = 6x + 5.$$

?1 *Rút gọn các biểu thức :*

a) $C = |-3x| + 7x - 4$ *khi* $x \leq 0$; b) $D = 5 - 4x + |x - 6|$ *khi* $x < 6$.

2. Giải một số phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

Ví dụ 2. Giải phương trình $|3x| = x + 4$. (1)

Giải :

Ta có $|3x| = 3x$ khi $3x \geq 0$ hay $x \geq 0$;

$|3x| = -3x$ khi $3x < 0$ hay $x < 0$.

Vậy để giải phương trình (1) ta quy về giải hai phương trình sau :

a) Phương trình $3x = x + 4$ với điều kiện $x \geq 0$.

Ta có $3x = x + 4 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$.

Giá trị $x = 2$ thoả mãn điều kiện $x \geq 0$, nên 2 là nghiệm của phương trình (1).

b) Phương trình $-3x = x + 4$ với điều kiện $x < 0$.

Ta có $-3x = x + 4 \Leftrightarrow -4x = 4 \Leftrightarrow x = -1$.

Giá trị $x = -1$ thoả mãn điều kiện $x < 0$, nên -1 là nghiệm của phương trình (1).

Tổng hợp các kết quả trên, ta có tập nghiệm của phương trình (1) là $S = \{-1 ; 2\}$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $|x - 3| = 9 - 2x$. (2)

Giải :

Ta có $|x - 3| = x - 3$ khi $x - 3 \ge 0$ hay $x \ge 3$;

$|x - 3| = -(x - 3)$ khi $x - 3 < 0$ hay $x < 3$.

Vậy để giải phương trình (2), ta quy về giải hai phương trình sau :

a) Phương trình $x - 3 = 9 - 2x$ với điều kiện $x \ge 3$.

Ta có $x - 3 = 9 - 2x \Leftrightarrow 3x = 9 + 3 \Leftrightarrow 3x = 12 \Leftrightarrow x = 4$.

Giá trị $x = 4$ thoả mãn điều kiện $x \ge 3$, nên 4 là nghiệm của (2).

b) Phương trình $-(x - 3) = 9 - 2x$ với điều kiện $x < 3$.

Ta có $-(x - 3) = 9 - 2x \Leftrightarrow -x + 3 = 9 - 2x \Leftrightarrow x = 6$.

Giá trị $x = 6$ không thoả mãn điều kiện $x < 3$, ta loại.

Tổng hợp các kết quả trên, ta có tập nghiệm của phương trình (2) là $S = \{4\}$.

?2 *Giải các phương trình :*

a) $|x + 5| = 3x + 1$;

b) $|-5x| = 2x + 21$.

BÀI TẬP

35. Bỏ dấu giá trị tuyệt đối và rút gọn các biểu thức :

a) $A = 3x + 2 + |5x|$ trong hai trường hợp : $x \ge 0$ và $x < 0$;

b) $B = |-4x| - 2x + 12$ trong hai trường hợp : $x \le 0$ và $x > 0$;

c) $C = |x - 4| - 2x + 12$ khi $x > 5$;

d) $D = 3x + 2 + |x + 5|$.

36. Giải các phương trình :

a) $|2x| = x - 6$;

b) $|-3x| = x - 8$;

c) $|4x| = 2x + 12$;

d) $|-5x| - 16 = 3x$.

37. Giải các phương trình :

a) $|x - 7| = 2x + 3$;

b) $|x + 4| = 2x - 5$;

c) $|x + 3| = 3x - 1$;

d) $|x - 4| + 3x = 5$.

ÔN TẬP CHƯƠNG IV

A - Câu hỏi

1. Cho ví dụ về bất đẳng thức theo từng loại có chứa dấu <, ≤ , > và ≥.

2. Bất phương trình bậc nhất một ẩn có dạng như thế nào ? Cho ví dụ.

3. Hãy chỉ ra một nghiệm của bất phương trình trong ví dụ của Câu hỏi 2.

4. Phát biểu quy tắc chuyển vế để biến đổi bất phương trình. Quy tắc này dựa trên tính chất nào của thứ tự trên tập số ?

5. Phát biểu quy tắc nhân để biến đổi bất phương trình. Quy tắc này dựa trên tính chất nào của thứ tự trên tập số ?

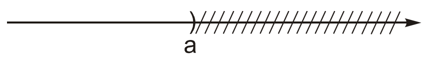
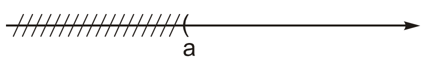
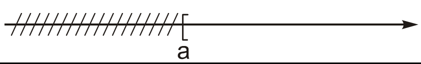
MỘT SỐ BẢNG TÓM TẮT

LIÊN HỆ GIỮA THỨ TỰ VÀ PHÉP TÍNH

(Với ba số a, b và c bất kì)

Nếu $a \le b$ thì $a + c \le b + c$	Nếu $a < b$ thì $a + c < b + c$
Nếu $a \le b$ và $c > 0$ thì $ac \le bc$	Nếu $a < b$ và $c > 0$ thì $ac < bc$
Nếu $a \le b$ và $c < 0$ thì $ac \ge bc$	Nếu $a < b$ và $c < 0$ thì $ac > bc$

TẬP NGHIỆM VÀ BIỂU DIỄN TẬP NGHIỆM CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Bất phương trình	Tập nghiệm	Biểu diễn tập nghiệm trên trục số
$x < a$	$\{x \mid x < a\}$	
$x \le a$	$\{x \mid x \le a\}$	
$x > a$	$\{x \mid x > a\}$	
$x \ge a$	$\{x \mid x \ge a\}$	

B - Bài tập

38. Cho $m > n$, chứng minh :

a) $m + 2 > n + 2$; b) $-2m < -2n$;

c) $2m - 5 > 2n - 5$; d) $4 - 3m < 4 - 3n$.

39. Kiểm tra xem -2 là nghiệm của bất phương trình nào trong các bất phương trình sau :

a) $-3x + 2 > -5$; b) $10 - 2x < 2$;

c) $x^2 - 5 < 1$; d) $|x| < 3$;

e) $|x| > 2$; f) $x + 1 > 7 - 2x$.

40. Giải các bất phương trình và biểu diễn tập nghiệm trên trục số :

a) $x - 1 < 3$; b) $x + 2 > 1$;

c) $0,2x < 0,6$; d) $4 + 2x < 5$.

41. Giải các bất phương trình :

a) $\dfrac{2 - x}{4} < 5$; b) $3 \leq \dfrac{2x + 3}{5}$;

c) $\dfrac{4x - 5}{3} > \dfrac{7 - x}{5}$; d) $\dfrac{2x + 3}{-4} \geq \dfrac{4 - x}{-3}$.

42. Giải các bất phương trình :

a) $3 - 2x > 4$; b) $3x + 4 < 2$;

c) $(x - 3)^2 < x^2 - 3$; d) $(x - 3)(x + 3) < (x + 2)^2 + 3$.

43. Tìm x sao cho :

a) Giá trị của biểu thức $5 - 2x$ là số dương ;

b) Giá trị của biểu thức $x + 3$ nhỏ hơn giá trị của biểu thức $4x - 5$;

c) Giá trị của biểu thức $2x + 1$ không nhỏ hơn giá trị của biểu thức $x + 3$;

d) Giá trị của biểu thức $x^2 + 1$ không lớn hơn giá trị của biểu thức $(x - 2)^2$.

44. ***Đố.***

Trong một cuộc thi đố vui, Ban tổ chức quy định mỗi người dự thi phải trả lời 10 câu hỏi ở vòng sơ tuyển. Mỗi câu hỏi này có sẵn 4 đáp án, nhưng trong đó chỉ có 1 đáp án đúng. Người dự thi chọn đáp án đúng sẽ được 5 điểm, chọn đáp án sai sẽ bị trừ đi 1 điểm. Ở vòng sơ tuyển, Ban tổ chức tặng cho mỗi người dự thi 10 điểm và quy định người nào có tổng số điểm từ 40 trở lên mới được dự thi ở vòng tiếp theo. Hỏi người dự thi phải trả lời chính xác bao nhiêu câu hỏi ở vòng sơ tuyển thì mới được dự thi tiếp ở vòng sau ?

45. Giải các phương trình :

a) $|3x| = x + 8$;

b) $|-2x| = 4x + 18$;

c) $|x - 5| = 3x$;

d) $|x + 2| = 2x - 10$.

Phần HÌNH HỌC

Chương III – TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

§1. Định lí Ta-lét trong tam giác

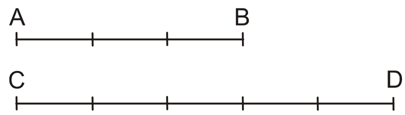
Định lí Ta-lét cho ta biết thêm điều gì mới lạ ?

1. Tỉ số của hai đoạn thẳng

Ở lớp 6, ta đã nói đến tỉ số của hai số. Đối với hai đoạn thẳng, ta cũng có khái niệm về tỉ số. Tỉ số của hai đoạn thẳng là gì ?

?1 *Cho* $AB = 3cm$; $CD = 5cm$; $\frac{AB}{CD} = ?$

$EF = 4dm$; $MN = 7dm$; $\frac{EF}{MN} = ?$



Hình 1

Định nghĩa

Tỉ số của hai đoạn thẳng là tỉ số độ dài của chúng theo cùng một đơn vị đo.

Tỉ số của hai đoạn thẳng AB và CD được kí hiệu là $\frac{AB}{CD}$.

Ví dụ 1. Nếu AB = 300cm, CD = 400cm thì $\frac{AB}{CD} = \frac{300}{400} = \frac{3}{4}$.

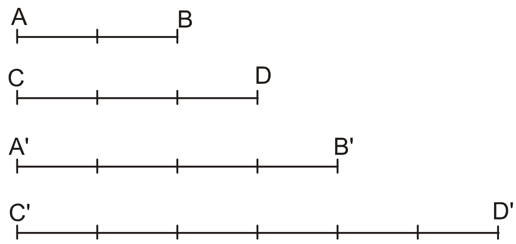
Nếu AB = 3m, CD = 4m thì ta cũng có $\frac{AB}{CD} = \frac{3}{4}$.

▶ ***Chú ý.*** *Tỉ số của hai đoạn thẳng không phụ thuộc vào cách chọn đơn vị đo.*

2. Đoạn thẳng tỉ lệ

?2 *Cho bốn đoạn thẳng AB, CD, A'B', C'D' (h.2). So sánh các tỉ số*

$$\frac{AB}{CD} \text{ và } \frac{A'B'}{C'D'}.$$



Hình 2

Định nghĩa

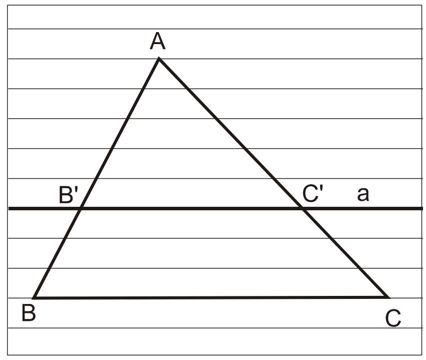
> ***Hai đoạn thẳng AB và CD gọi là tỉ lệ với hai đoạn thẳng A'B' và C'D' nếu có tỉ lệ thức :***
>
> $$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \text{ hay } \frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}.$$

3. Định lí Ta-lét trong tam giác

?3 *Vẽ tam giác ABC trên giấy kẻ học sinh như trên hình 3. Dựng đường thẳng a song song với cạnh BC, cắt hai cạnh AB, AC theo thứ tự tại B' và C'.*

Đường thẳng a định ra trên cạnh AB ba đoạn thẳng AB', B'B và AB, và định ra trên cạnh AC ba đoạn thẳng tương ứng là AC', C'C và AC.

So sánh các tỉ số :



Hình 3

a) $\frac{AB'}{AB}$ *và* $\frac{AC'}{AC}$; b) $\frac{AB'}{B'B}$ *và* $\frac{AC'}{C'C}$; c) $\frac{B'B}{AB}$ *và* $\frac{C'C}{AC}$.

Hướng dẫn : Vì các đường kẻ ngang là các đường thẳng song song cách đều nên ta có :

– Các đoạn thẳng liên tiếp trên cạnh AB bằng nhau, chúng được gọi là các đoạn chắn trên AB.

– Các đoạn thẳng liên tiếp trên cạnh AC cũng bằng nhau, chúng được gọi là các đoạn chắn trên AC.

– Hãy lấy một đoạn chắn trên mỗi cạnh làm đơn vị đo độ dài các đoạn thẳng trên cạnh đó rồi tính từng tỉ số đã nêu ở trên.

Trên đây chỉ là một trường hợp cụ thể. Tổng quát, ta có định lí sau :

Định lí Ta-lét. (Thừa nhận, không chứng minh).

> ***Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.***

GT	ΔABC , $B'C' \,//\, BC$ ($B' \in AB$, $C' \in AC$)
KL	$\dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{AC'}{AC}$; $\dfrac{AB'}{B'B} = \dfrac{AC'}{C'C}$; $\dfrac{B'B}{AB} = \dfrac{C'C}{AC}$

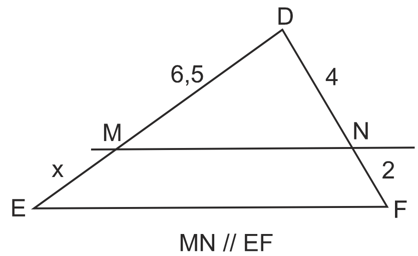
Ví dụ 2. Tính độ dài x trong hình 4(*).

Giải :

Vì MN // EF, theo định lí Ta-lét ta có :

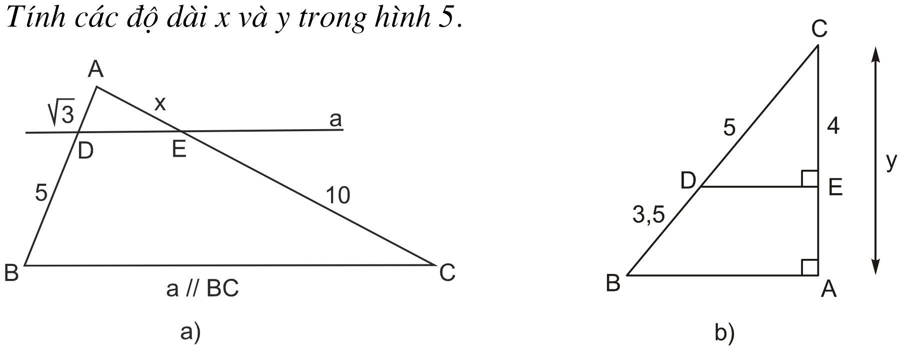
$$\frac{DM}{ME} = \frac{DN}{NF} \text{ hay } \frac{6,5}{x} = \frac{4}{2}.$$

Suy ra : $x = \dfrac{2.6,5}{4} = 3,25$.



Hình 4

?4 *Tính các độ dài x và y trong hình 5.*



Hình 5

BÀI TẬP

1. Viết tỉ số của các cặp đoạn thẳng có độ dài như sau :

a) AB = 5cm và CD = 15cm ;

b) EF = 48cm và GH = 16dm ;

c) PQ = 1,2m và MN = 24cm.

(*) Các số chỉ kích thước trên mỗi hình có cùng đơn vị đo.

2. Cho biết $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{3}{4}$ và CD = 12cm. Tính độ dài của AB.

3. Cho biết độ dài của AB gấp 5 lần độ dài của CD và độ dài của A'B' gấp 12 lần độ dài của CD. Tính tỉ số của hai đoạn thẳng AB và A'B'.

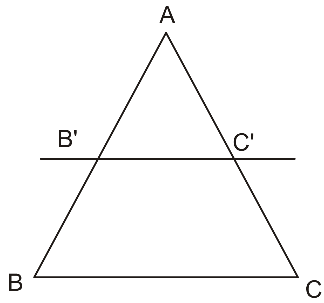
4. Cho biết $\dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{AC'}{AC}$ (h.6).

Chứng minh rằng :

a) $\dfrac{AB'}{B'B} = \dfrac{AC'}{C'C}$;

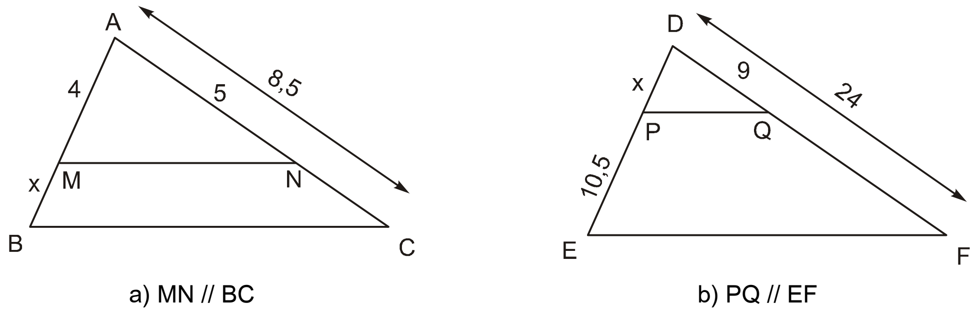
b) $\dfrac{BB'}{AB} = \dfrac{CC'}{AC}$.

Hướng dẫn : Áp dụng tính chất của tỉ lệ thức.



Hình 6

5. Tính x trong các trường hợp sau (h.7) :



Hình 7

§2. Định lí đảo và hệ quả của định lí Ta-lét

Có thêm một cách nhận biết hai đường thẳng song song.

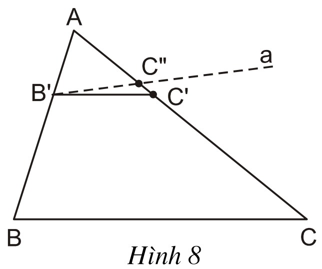
1. Định lí đảo

?1 *Tam giác ABC có AB = 6cm ; AC = 9cm.*

Lấy trên cạnh AB điểm B′, trên cạnh AC điểm C′ sao cho AB′ = 2cm ; AC′ = 3cm (h.8).

1) *So sánh các tỉ số* $\frac{AB'}{AB}$ *và* $\frac{AC'}{AC}$.

2) *Vẽ đường thẳng a đi qua B′ và song song với BC, đường thẳng a cắt AC tại điểm C″.*



Hình 8

a) *Tính độ dài đoạn thẳng AC″.*

b) *Có nhận xét gì về C' và C" và về hai đường thẳng BC và B'C' ?*

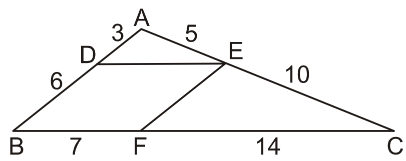
Ta thừa nhận không chứng minh định lí đảo sau đây :

Định lí Ta-lét đảo

> ***Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.***

GT	ΔABC, $B' \in AB$, $C' \in AC$ $\frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}$
KL	$B'C' \parallel BC$

?2 *Quan sát hình 9.*



Hình 9

a) *Trong hình đã cho có bao nhiêu cặp đường thẳng song song với nhau ?*

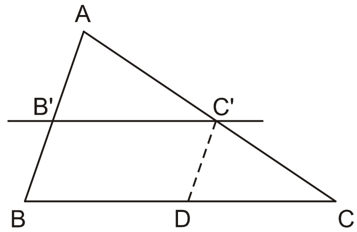
b) *Tứ giác BDEF là hình gì ?*

c) *So sánh các tỉ số* $\frac{AD}{AB}$; $\frac{AE}{AC}$; $\frac{DE}{BC}$ *và cho nhận xét về mối liên hệ giữa các cặp cạnh tương ứng của hai tam giác ADE và ABC.*

2. Hệ quả của định lí Ta-lét

> ***Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của tam giác đã cho.***

GT	ΔABC $B'C' \parallel BC$ ($B' \in AB$; $C' \in AC$)
KL	$\dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{AC'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC}$



Hình 10

Chứng minh :

– Vì $B'C' \parallel BC$ (h.10), nên theo định lí Ta-lét ta có :

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}. \qquad (1)$$

– Từ C' kẻ $C'D \parallel AB$ ($D \in BC$), theo định lí Ta-lét ta có :

$$\frac{AC'}{AC} = \frac{BD}{BC}. \qquad (2)$$

– Tứ giác B'C'DB là hình bình hành (vì có các cặp cạnh đối song song) nên ta có :

$$B'C' = BD.$$

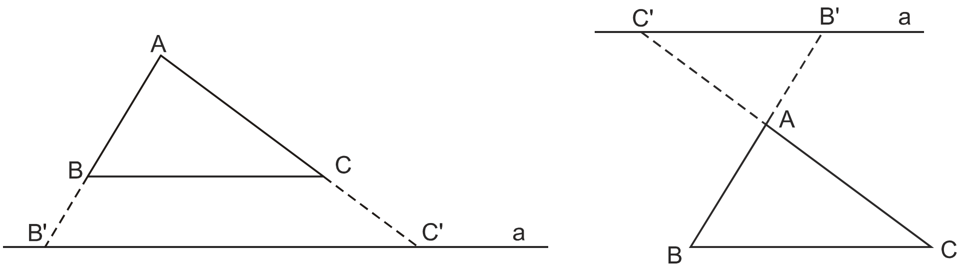
– Từ (1) và (2), thay BD bằng B'C', ta có :

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}.$$

▶ ***Chú ý***

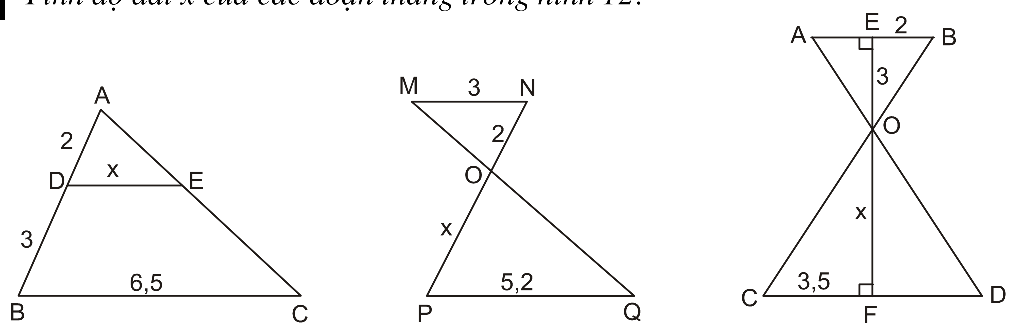
Hệ quả trên vẫn đúng cho trường hợp đường thẳng a song song với một cạnh của tam giác và cắt phần kéo dài của hai cạnh còn lại (h.11) :

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}.$$



Hình 11

?3 *Tính độ dài x của các đoạn thẳng trong hình 12.*

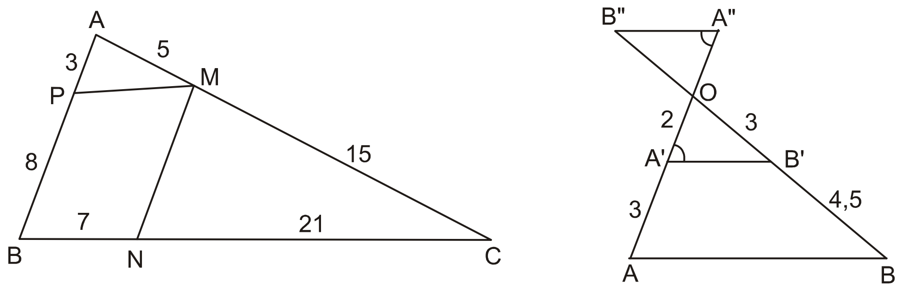


a) DE // BC   b) MN // PQ   c)

Hình 12

BÀI TẬP

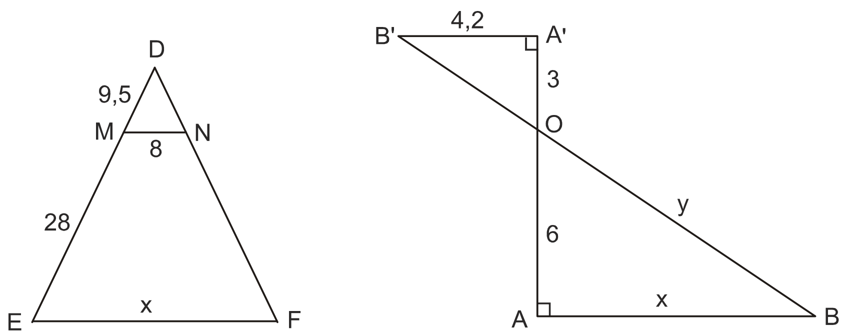
6. Tìm các cặp đường thẳng song song trong hình 13 và giải thích vì sao chúng song song.



a)   b)

Hình 13

7. Tính các độ dài x, y trong hình 14.



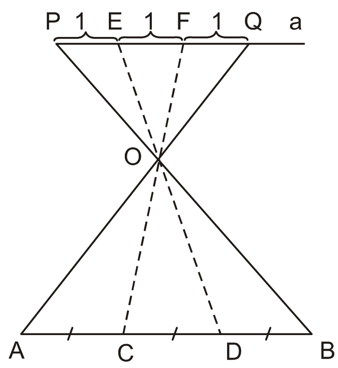
a) MN // EF   b)

Hình 14

8. a) Để chia đoạn thẳng AB thành ba đoạn thẳng bằng nhau, người ta đã làm như hình 15.

Hãy mô tả cách làm trên và giải thích vì sao các đoạn thẳng AC, CD, DB bằng nhau ?

b) Bằng cách làm tương tự, hãy chia đoạn thẳng AB cho trước thành 5 đoạn bằng nhau. Hỏi có cách nào khác với cách làm như trên mà vẫn có thể chia đoạn thẳng AB cho trước thành 5 đoạn thẳng bằng nhau ?



Hình 15

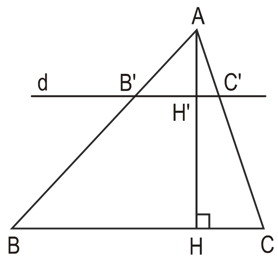
9. Cho tam giác ABC và điểm D trên cạnh AB sao cho AD = 13,5cm, DB = 4,5cm. Tính tỉ số các khoảng cách từ các điểm D và B đến cạnh AC.

LUYỆN TẬP

10. Tam giác ABC có đường cao AH. Đường thẳng d song song với BC, cắt các cạnh AB, AC và đường cao AH theo thứ tự tại các điểm B', C' và H' (h.16).

a) Chứng minh rằng :

$$\frac{AH'}{AH} = \frac{B'C'}{BC}.$$



Hình 16

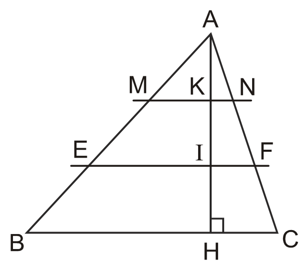
b) Áp dụng : Cho biết $AH' = \frac{1}{3}$ AH và diện tích tam giác ABC là 67,5cm^2.

Tính diện tích tam giác AB'C'.

11. Tam giác ABC có BC = 15cm. Trên đường cao AH lấy các điểm I, K sao cho AK = KI = IH. Qua I và K vẽ các đường EF // BC, MN // BC (h.17).

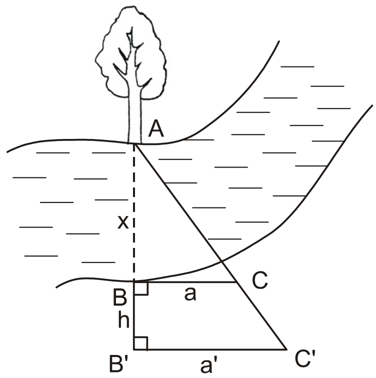
a) Tính độ dài các đoạn thẳng MN và EF.

b) Tính diện tích tứ giác MNFE, biết rằng diện tích của tam giác ABC là 270cm^2.



Hình 17

12. *Có thể đo được chiều rộng của một khúc sông mà không cần phải sang bờ bên kia hay không ?*



Hình 18

Người ta tiến hành đo đạc các yếu tố hình học cần thiết để tính chiều rộng của khúc sông mà không cần phải sang bờ bên kia (h.18). Nhìn hình vẽ đã cho, hãy mô tả những công việc cần làm và tính khoảng cách AB = x theo BC = a, B'C' = a', BB' = h.

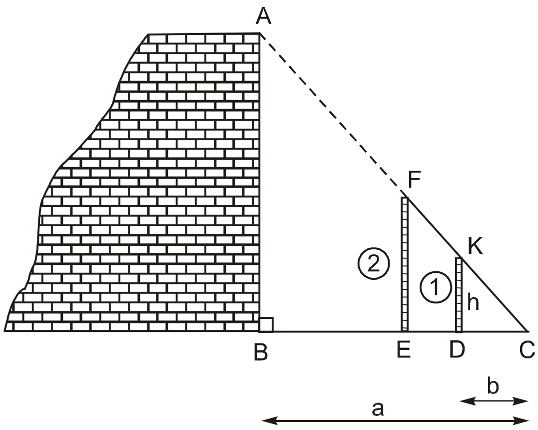
13. *Có thể đo gián tiếp chiều cao của một bức tường khá cao bằng dụng cụ đơn giản được không ?*

Hình 19 thể hiện cách đo chiều cao AB của một bức tường bằng các dụng cụ đơn giản gồm :

Hai cọc thẳng đứng (cọc ① cố định ; cọc ② có thể di động được) và sợi dây FC. Cọc ① có chiều cao DK = h. Các khoảng cách BC = a, DC = b đo được bằng thước dây thông dụng.

a) Em hãy cho biết người ta tiến hành đo đạc như thế nào ?

b) Tính chiều cao AB theo h, a, b.



Hình 19

14. Cho ba đoạn thẳng có độ dài là m, n, p (cùng đơn vị đo).

Dựng đoạn thẳng có độ dài x sao cho :

a) $\frac{x}{m} = 2$; b) $\frac{x}{n} = \frac{2}{3}$; c) $\frac{m}{x} = \frac{n}{p}$.

Hướng dẫn :

Câu b) – Vẽ hai tia Ox, Oy.

– Trên tia Ox đặt đoạn thẳng OA = 2 đơn vị, OB = 3 đơn vị.

– Trên tia Oy đặt đoạn thẳng OB' = n và xác định điểm A' sao cho

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}.$$

– Từ đó ta có OA' = x.

§3. Tính chất đường phân giác của tam giác

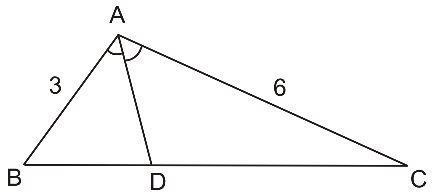
Đường phân giác của một góc trong tam giác chia cạnh đối diện với góc đó thành hai đoạn thẳng theo tỉ số nào ?

1. Định lí

?1 *Vẽ tam giác ABC, biết :*

$AB = 3cm$; $AC = 6cm$; $\widehat{A} = 100^o$.

Dựng đường phân giác AD của góc A (bằng compa, thước thẳng), đo độ dài các đoạn thẳng DB, DC rồi so sánh các tỉ số $\frac{AB}{AC}$ và $\frac{DB}{DC}$ (h.20).



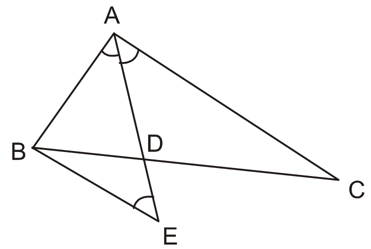
Hình 20

Ta có $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$ (đường phân giác AD chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn ấy). Kết quả trên đúng với *tất cả các tam giác* nhờ định lí sau đây :

Định lí

Trong tam giác, đường phân giác của một góc chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn ấy.

GT	ΔABC AD là tia phân giác của $\widehat{BAC}$ $(D \in BC)$
KL	$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$



Hình 21

Chứng minh :

Qua đỉnh B vẽ đường thẳng song song với AC, cắt đường thẳng AD tại điểm E (h.21).

Ta có :

$\widehat{BAE} = \widehat{CAE}$ (giả thiết).

Vì BE // AC, nên $\widehat{BEA} = \widehat{CAE}$ (so le trong).

Suy ra $\widehat{BAE} = \widehat{BEA}$. Do đó tam giác ABE cân tại B, suy ra

$$BE = AB. \qquad (1)$$

Áp dụng hệ quả của định lí Ta-lét đối với tam giác DAC, ta có :

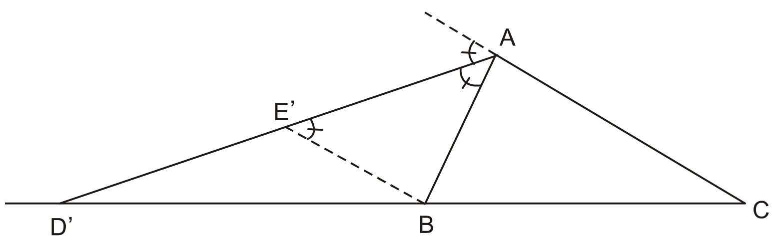
$$\frac{DB}{DC} = \frac{BE}{AC}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

2. Chú ý

Định lí vẫn đúng đối với tia phân giác của góc ngoài của tam giác. Trong hình 22 ta có :

$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC} \; (AB \neq AC).$$

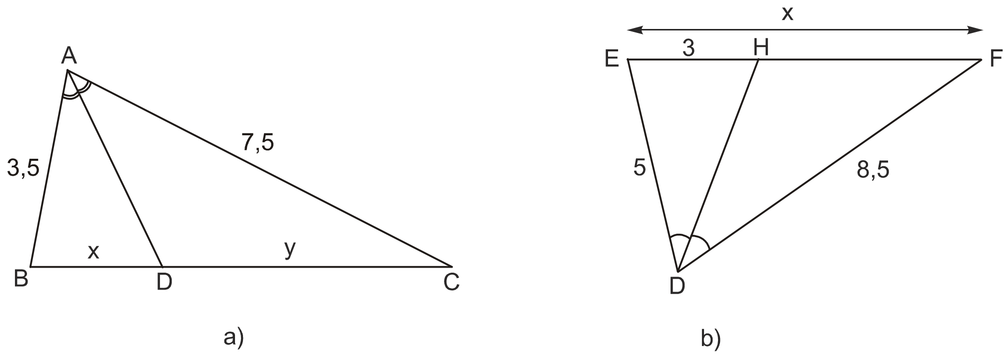


Hình 22

?2 *Xem hình 23a.*

a) *Tính* $\frac{x}{y}$.

b) *Tính x khi y = 5.*

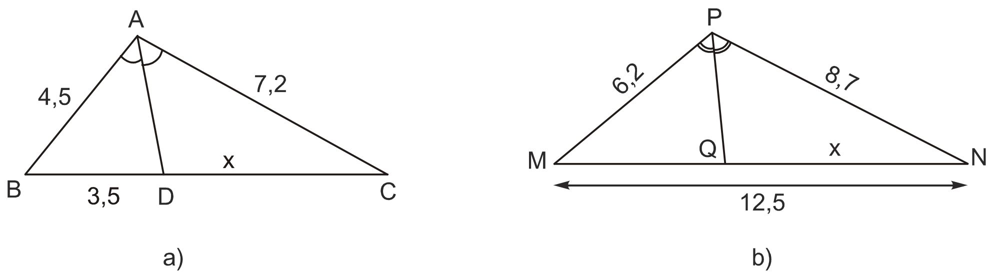


Hình 23

?3 *Tính x trong hình 23b.*

BÀI TẬP

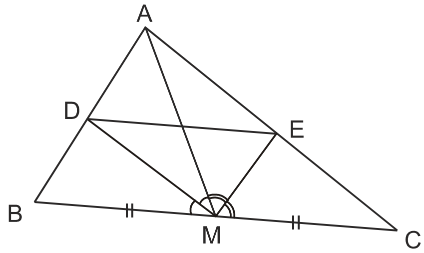
15. Tính x trong hình 24 và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất.



Hình 24

16. Tam giác ABC có độ dài các cạnh AB = m, AC = n và AD là đường phân giác. Chứng minh rằng tỉ số diện tích của tam giác ABD và diện tích của tam giác ACD bằng $\frac{m}{n}$.

17. Cho tam giác ABC với đường trung tuyến AM. Tia phân giác của góc AMB cắt cạnh AB ở D, tia phân giác của góc AMC cắt cạnh AC ở E. Chứng minh rằng DE // BC (h.25).



Hình 25

LUYỆN TẬP

18. Tam giác ABC có AB = 5cm, AC = 6cm và BC = 7cm. Tia phân giác của góc BAC cắt cạnh BC tại E. Tính các đoạn EB, EC.

19. Cho hình thang ABCD (AB // CD).

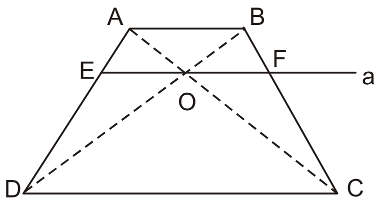
Đường thẳng a song song với DC, cắt các cạnh AD và BC theo thứ tự tại E và F.

Chứng minh rằng :

a) $\dfrac{AE}{ED} = \dfrac{BF}{FC}$; b) $\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{BF}{BC}$; c) $\dfrac{DE}{DA} = \dfrac{CF}{CB}$.

20. Cho hình thang ABCD (AB // CD). Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Đường thẳng a qua O và song song với đáy của hình thang cắt các cạnh bên AD, BC theo thứ tự tại E và F (h.26).

Chứng minh rằng OE = OF.



Hình 26

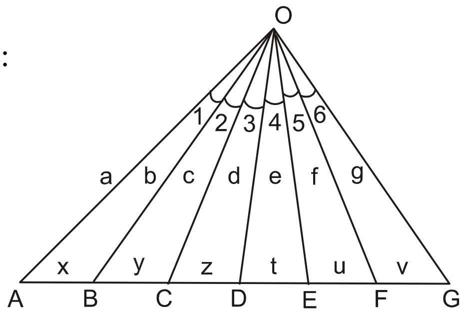
21. a) Cho tam giác ABC với đường trung tuyến AM và đường phân giác AD. Tính diện tích tam giác ADM, biết AB = m, AC = n (n > m) và diện tích của tam giác ABC là S.

b) Cho n = 7cm, m = 3cm, hỏi diện tích tam giác ADM chiếm bao nhiêu phần trăm diện tích tam giác ABC ?

22. ***Đố.*** Hình 27 cho biết có 6 góc bằng nhau :

$\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 = \widehat{O}_3 = \widehat{O}_4 = \widehat{O}_5 = \widehat{O}_6$.

Kích thước các đoạn thẳng đã được ghi trên hình. Hãy thiết lập những tỉ lệ thức từ các kích thước đã cho.

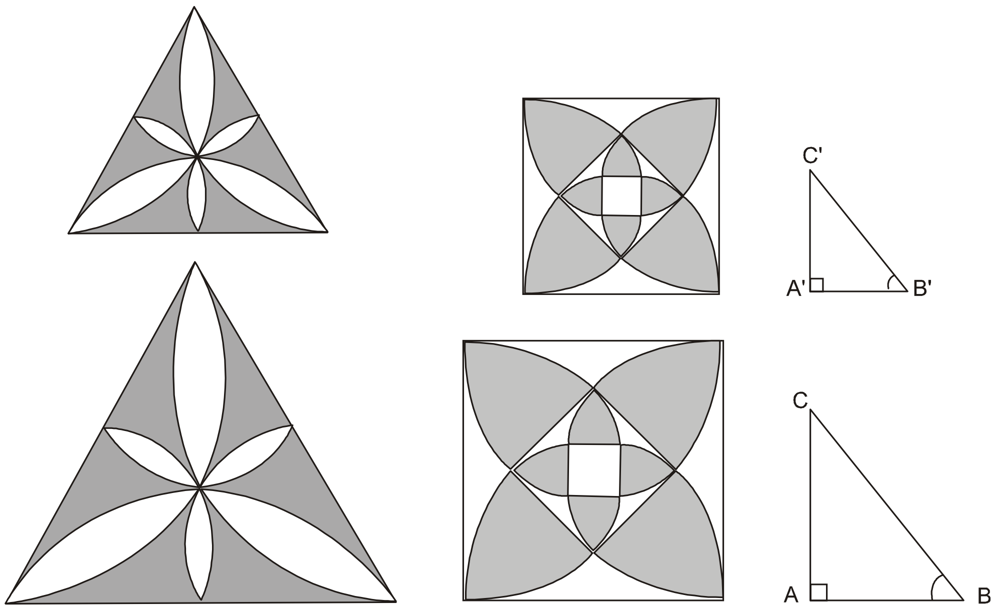


Hình 27

§4. Khái niệm hai tam giác đồng dạng

Thế nào là hai tam giác đồng dạng với nhau ?

Trong thực tế, ta thường gặp những hình có hình dạng giống nhau nhưng kích thước có thể khác nhau. Ví dụ như các cặp hình trong hình 28.



Hình 28

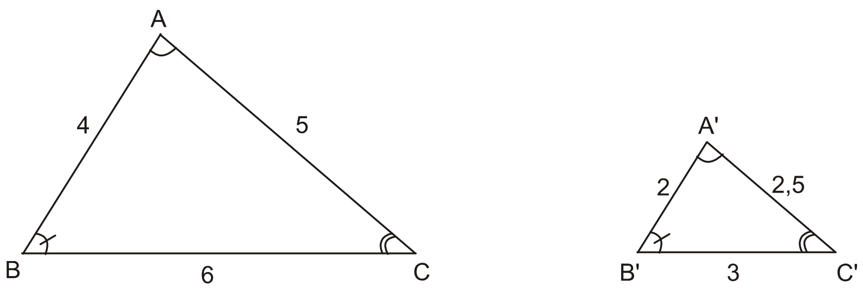
Những cặp hình như thế gọi là những *hình đồng dạng*.

Ở đây ta chỉ xét các tam giác đồng dạng.

1. Tam giác đồng dạng

a) Định nghĩa

?1 *Cho hai tam giác ABC và A'B'C' (h.29).*



Hình 29

Nhìn vào hình vẽ hãy viết các cặp góc bằng nhau.

Tính các tỉ số $\frac{A'B'}{AB}$; $\frac{B'C'}{BC}$; $\frac{C'A'}{CA}$ *rồi so sánh các tỉ số đó.*

Ta có định nghĩa về hai tam giác đồng dạng như sau :

Định nghĩa

Tam giác A'B'C' gọi là đồng dạng với tam giác ABC nếu : $\widehat{A'} = \widehat{A}$; $\widehat{B'} = \widehat{B}$; $\widehat{C'} = \widehat{C}$; $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$.

Tam giác A'B'C' đồng dạng với tam giác ABC được kí hiệu là ΔA'B'C' ∽ ΔABC (viết theo thứ tự cặp đỉnh tương ứng).

Tỉ số các cạnh tương ứng $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = k$ gọi là *tỉ số đồng dạng*.

Trong **?1** ta có ΔA'B'C' ∽ ΔABC với tỉ số đồng dạng là $k = \frac{1}{2}$.

b) Tính chất

?2 1) *Nếu ΔA'B'C' = ΔABC thì tam giác A'B'C' có đồng dạng với tam giác ABC không ? Tỉ số đồng dạng là bao nhiêu ?*

2) *Nếu ΔA'B'C' ∽ ΔABC theo tỉ số k thì ΔABC ∽ ΔA'B'C' theo tỉ số nào ?*

Từ định nghĩa về hai tam giác đồng dạng, ta suy ra các tính chất đơn giản của hai tam giác đồng dạng :

Tính chất 1. Mỗi tam giác đồng dạng với chính nó.

Tính chất 2. Nếu ΔA'B'C' ∽ ΔABC thì ΔABC ∽ ΔA'B'C'.

Tính chất 3. Nếu ΔA'B'C' ∽ ΔA''B''C'' và ΔA''B''C'' ∽ ΔABC thì ΔA'B'C' ∽ ΔABC.

Do Tính chất 2 ta nói hai tam giác A'B'C' và ABC *đồng dạng (với nhau).*

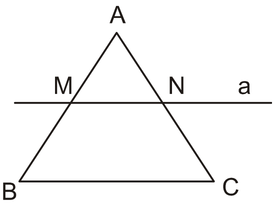
2. Định lí

?3 *Cho tam giác ABC. Kẻ đường thẳng a song song với cạnh BC và cắt hai cạnh AB, AC theo thứ tự tại M và N. Hai tam giác AMN và ABC có các góc và các cạnh tương ứng như thế nào ?*

Định lí

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới đồng dạng với tam giác đã cho.

GT	ΔABC $MN \,//\, BC$ ($M \in AB$; $N \in AC$)
KL	$\Delta AMN \backsim \Delta ABC$



Hình 30

Chứng minh :

Xét tam giác ABC và MN // BC (h.30).

Hai tam giác AMN và ABC có :

$$\widehat{AMN} = \widehat{ABC}\ ;\ \widehat{ANM} = \widehat{ACB}$$ (các cặp góc đồng vị) ;

$\widehat{BAC}$ là góc chung.

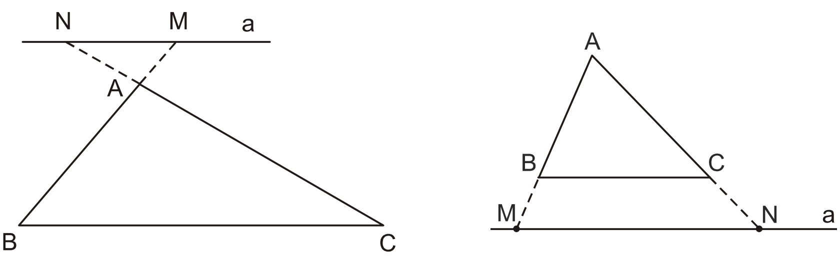
Mặt khác, theo hệ quả của định lí Ta-lét, hai tam giác AMN và ABC có ba cặp cạnh tương ứng tỉ lệ :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

Vậy $\Delta AMN \backsim \Delta ABC$.

▶ ***Chú ý***

Định lí cũng đúng cho trường hợp đường thẳng a cắt phần kéo dài hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại (h.31).



Hình 31

BÀI TẬP

23. Trong hai mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng ? Mệnh đề nào sai ?

a) Hai tam giác bằng nhau thì đồng dạng với nhau.

b) Hai tam giác đồng dạng với nhau thì bằng nhau.

24. $\Delta A'B'C' \backsim \Delta A''B''C''$ theo tỉ số đồng dạng k_1, $\Delta A''B''C'' \backsim \Delta ABC$ theo tỉ số đồng dạng k_2. Hỏi tam giác A'B'C' đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số nào ?

25. Cho tam giác ABC. Hãy vẽ một tam giác đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số $\frac{1}{2}$.

LUYỆN TẬP

26. Cho tam giác ABC, vẽ tam giác A'B'C' đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số đồng dạng $k = \frac{2}{3}$.

27. Từ điểm M thuộc cạnh AB của tam giác ABC với $AM = \frac{1}{2}MB$, kẻ các tia song song với AC và BC, chúng cắt BC và AC lần lượt tại L và N.

a) Nêu tất cả các cặp tam giác đồng dạng.

b) Đối với mỗi cặp tam giác đồng dạng, hãy viết các cặp góc bằng nhau và tỉ số đồng dạng tương ứng.

28. $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ theo tỉ số đồng dạng $k = \frac{3}{5}$.

a) Tính tỉ số chu vi của hai tam giác đã cho.

b) Cho biết hiệu chu vi của hai tam giác trên là 40dm, tính chu vi của mỗi tam giác.

Có thể em chưa biết

Thalès (625 - 547 tr. C.N)

Nhìn lại lịch sử phát triển của Toán học, người ta có thể xem Ta-lét (Thalès) là một trong những nhà hình học đầu tiên của Hi Lạp.

Ta-lét sinh vào khoảng năm 625 và mất vào khoảng năm 547 trước Công nguyên, tại thành phố Mi-lê – một thành phố giàu có nhất thời cổ Hi Lạp, nằm trên bờ biển Địa Trung Hải ấm áp và thơ mộng.

Hồi còn trẻ, Ta-lét đã có lần đến thăm Ai Cập, và nhờ đó ông đã có dịp được tiếp xúc với các nhà khoa học đương thời.

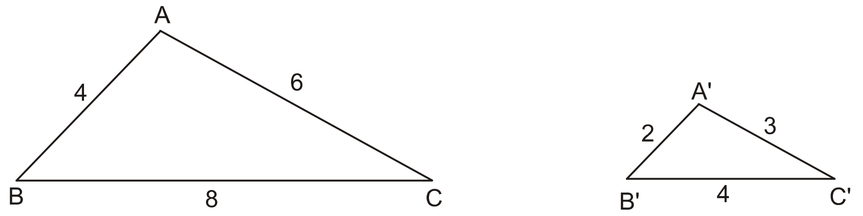
Ta-lét đã giải được bài toán đo chiều cao của một Kim tự tháp Ai Cập bằng một phương pháp hết sức đơn giản. Lịch sử ghi lại rằng, Ta-lét đã tính được chiều cao của tháp đó nhờ áp dụng tính chất của tam giác đồng dạng. Ta-lét đã chọn đúng thời điểm khi các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc 45^{o} để tính chiều cao của tháp. Tại thời điểm này độ dài bóng của một vật đặt thẳng đứng trên mặt đất bằng chính chiều cao của vật đó. Ta-lét chỉ việc đo độ dài bóng của tháp, từ đó suy ra được chiều cao của tháp. Công việc mà ngày nay tưởng chừng như đơn giản thì lúc đó lại có ý nghĩa thật là vĩ đại.

§5. Trường hợp đồng dạng thứ nhất

Không cần đo góc cũng có cách nhận biết được hai tam giác đồng dạng với nhau.

1. Định lí

?1 *Hai tam giác ABC và A'B'C' có kích thước như trong hình 32 (có cùng đơn vị đo là xentimét).*



Hình 32

Trên các cạnh AB và AC của tam giác ABC lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho AM = A'B' = 2cm ; AN = A'C' = 3cm.

Tính độ dài đoạn thẳng MN.

Có nhận xét gì về mối quan hệ giữa các tam giác ABC, AMN và A'B'C' ?

Trong trường hợp tổng quát ta có định lí sau :

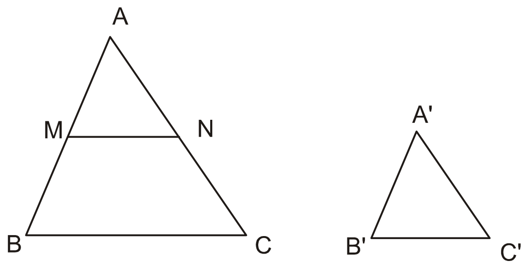
Định lí

Nếu ba cạnh của tam giác này tỉ lệ với ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng.

GT	$\Delta ABC, \Delta A'B'C'$ $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC}$ (1)
KL	$\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$

Chứng minh :

Đặt trên tia AB đoạn thẳng AM = A'B'. Vẽ đường thẳng MN // BC, N $\in$ AC (h.33). Xét các tam giác AMN, ABC và A'B'C'.



Hình 33

Vì MN // BC, nên ΔAMN ∽ ΔABC. Do đó

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), với chú ý AM = A'B', ta có $\frac{A'C'}{AC} = \frac{AN}{AC}$ và $\frac{B'C'}{BC} = \frac{MN}{BC}$, suy ra AN = A'C' và MN = B'C'.

Hai tam giác AMN và A'B'C' có ba cạnh bằng nhau từng đôi một :

AM = A'B' (cách dựng) ; AN = A'C' và MN = B'C' (theo chứng minh trên).

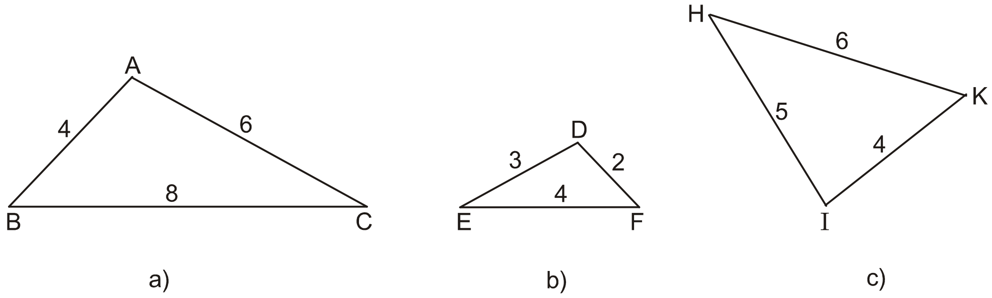
Do đó :

$$\Delta AMN = \Delta A'B'C' \text{ (c.c.c)}.$$

Vì ΔAMN ∽ ΔABC, nên ΔA'B'C' ∽ ΔABC.

2. Áp dụng

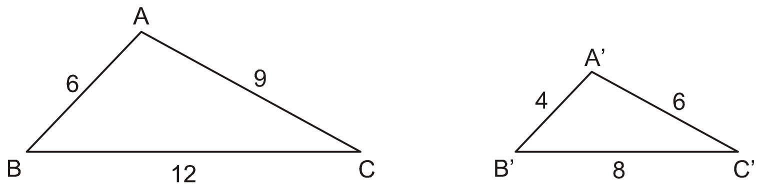
?2 *Tìm trong hình 34 các cặp tam giác đồng dạng :*



Hình 34

BÀI TẬP

29. Cho hai tam giác ABC và A'B'C' có kích thước như trong hình 35.



Hình 35

a) ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có đồng dạng với nhau không ? Vì sao ?

b) Tính tỉ số chu vi của hai tam giác đó.

30. Tam giác ABC có độ dài các cạnh là AB = 3cm, AC = 5cm, BC = 7cm. Tam giác A'B'C' đồng dạng với tam giác ABC và có chu vi bằng 55cm.

Hãy tính độ dài các cạnh của tam giác A'B'C' (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

31. Cho hai tam giác đồng dạng có tỉ số chu vi là $\frac{15}{17}$ và hiệu độ dài hai cạnh tương ứng của chúng là 12,5cm. Tính hai cạnh đó.

§6. Trường hợp đồng dạng thứ hai

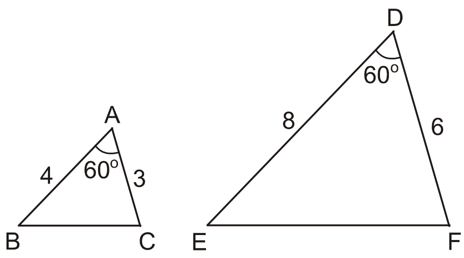
Thêm một cách nữa để nhận biết hai tam giác đồng dạng.

1. Định lí

?1 *Cho hai tam giác ABC và DEF có kích thước như trong hình 36.*

– So sánh các tỉ số $\frac{AB}{DE}$ *và* $\frac{AC}{DF}$.

– Đo các đoạn thẳng BC, EF. Tính tỉ số $\frac{BC}{EF}$, *so sánh với các tỉ số trên và dự đoán sự đồng dạng của hai tam giác ABC và DEF.*

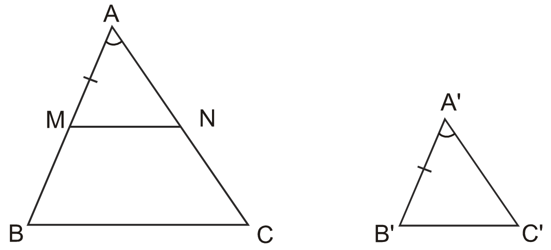


Hình 36

Định lí

Nếu hai cạnh của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh của tam giác kia và hai góc tạo bởi các cặp cạnh đó bằng nhau, thì hai tam giác đồng dạng.

GT	ΔABC, $\Delta A'B'C'$ $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC}$ (1), $\widehat{A'} = \widehat{A}$
KL	$\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$



Hình 37

Chứng minh :

Trên tia AB, đặt đoạn thẳng AM = A'B'. Qua M kẻ đường thẳng MN // BC ($N \in AC$) (h.37).

Ta có : $\Delta AMN \backsim \Delta ABC$, do đó $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$.

– Vì AM = A'B', nên suy ra $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra AN = A'C'.

– Hai tam giác AMN và A'B'C' có AM = A'B' (cách dựng), $\widehat{A} = \widehat{A'}$ (giả thiết) và AN = A'C' (chứng minh ở trên), nên chúng bằng nhau (c.g.c).

Từ $\Delta AMN = \Delta A'B'C'$ suy ra $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$.

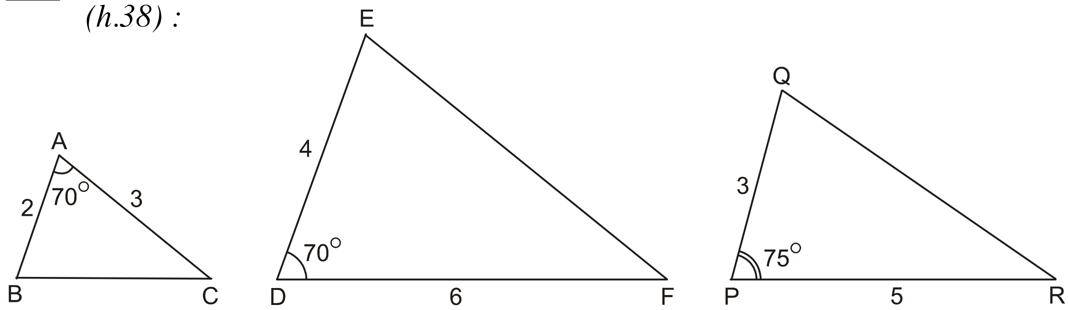
Trở lại câu hỏi **?1** ban đầu, ta thấy rằng :

ΔABC và ΔDEF có $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$ (vì $\dfrac{4}{8} = \dfrac{3}{6}$) ; $\widehat{A} = \widehat{D}$ (vì cùng bằng 60^o).

Vậy theo định lí vừa chứng minh, $\Delta ABC \backsim \Delta DEF$.

2. Áp dụng

?2 *Hãy chỉ ra các cặp tam giác đồng dạng với nhau từ các tam giác sau đây (h.38) :*



a) b) c)

Hình 38

?3 a) *Vẽ tam giác ABC có* $\widehat{BAC} = 50^o$, *AB = 5cm, AC = 7,5cm (h.39).*

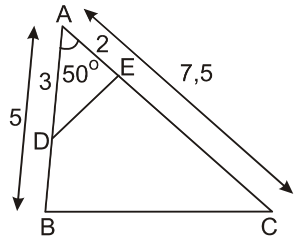
b) *Lấy trên các cạnh AB, AC lần lượt hai điểm D, E sao cho AD = 3cm, AE = 2cm. Hai tam giác AED và ABC có đồng dạng với nhau không ? Vì sao ?*

Hướng dẫn :

– Vẽ hình (theo yêu cầu đề ra).

– Hai tam giác ABC và AED có góc A chung.

So sánh các tỉ số $\frac{AE}{AB}$ và $\frac{AD}{AC}$ rồi rút ra kết luận.



Hình 39

BÀI TẬP

32. Trên một cạnh của góc xOy ($\widehat{xOy} \neq 180^o$), đặt các đoạn thẳng OA = 5cm, OB = 16cm. Trên cạnh thứ hai của góc đó, đặt các đoạn thẳng OC = 8cm, OD = 10cm.

a) Chứng minh hai tam giác OCB và OAD đồng dạng.

b) Gọi giao điểm của các cạnh AD và BC là I, chứng minh rằng hai tam giác IAB và ICD có các góc bằng nhau từng đôi một.

33. Chứng minh rằng nếu tam giác A'B'C' đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số k, thì tỉ số của hai đường trung tuyến tương ứng của hai tam giác đó cũng bằng k.

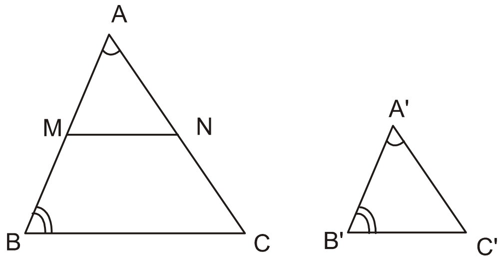
34. Dựng tam giác ABC, biết $\widehat{A} = 60^o$, tỉ số $\frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$ và đường cao AH = 6cm.

§7. Trường hợp đồng dạng thứ ba

Không cần đo độ dài các cạnh cũng có cách nhận biết hai tam giác đồng dạng.

1. Định lí

Bài toán. Cho hai tam giác ABC và A'B'C' với $\widehat{A} = \widehat{A'}$; $\widehat{B} = \widehat{B'}$ (h.40). Chứng minh $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$.



Hình 40

Giải :

Đặt trên tia AB đoạn thẳng AM = A'B'. Qua M kẻ đường thẳng MN // BC ($N \in AC$).

Vì MN // BC nên ta có :

$$\Delta AMN \backsim \Delta ABC.$$

Xét hai tam giác AMN và A'B'C', ta thấy $\widehat{A} = \widehat{A'}$ (theo giả thiết), AM = A'B' (theo cách dựng), $\widehat{AMN} = \widehat{B}$ (hai góc đồng vị). Nhưng $\widehat{B} = \widehat{B'}$ (theo giả thiết), do đó $\widehat{AMN} = \widehat{B'}$.

Vậy $\Delta AMN = \Delta A'B'C'$ (g.c.g), suy ra $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$.

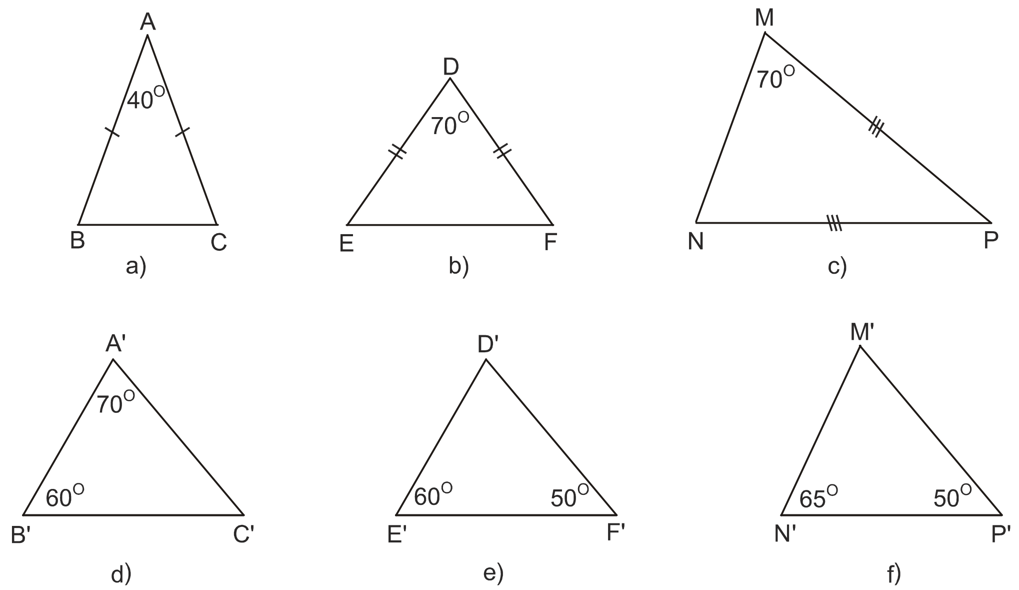
Từ kết quả chứng minh trên ta có định lí sau :

Định lí

> ***Nếu hai góc của tam giác này lần lượt bằng hai góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.***

2. Áp dụng

?1 *Trong các tam giác dưới đây, những cặp tam giác nào đồng dạng với nhau ? Hãy giải thích (h.41).*

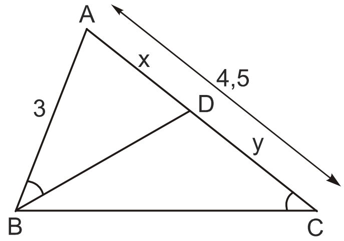


Hình 41

?2 *Ở hình 42 cho biết AB = 3cm ; AC = 4,5cm và $\widehat{ABD} = \widehat{BCA}$.*

a) Trong hình vẽ này có bao nhiêu tam giác ? Có cặp tam giác nào đồng dạng với nhau không ?

b) Hãy tính các độ dài x và y (AD = x, DC = y).



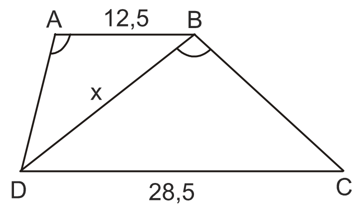
Hình 42

c) Cho biết thêm BD là tia phân giác của góc B. Hãy tính độ dài các đoạn thẳng BC và BD.

BÀI TẬP

35. Chứng minh rằng nếu tam giác A'B'C' đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số k thì tỉ số của hai đường phân giác tương ứng của chúng cũng bằng k.

36. Tính độ dài x của đoạn thẳng BD trong hình 43 (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất), biết rằng ABCD là hình thang (AB // CD) ; AB = 12,5cm ; CD = 28,5cm ; $\widehat{DAB} = \widehat{DBC}$.



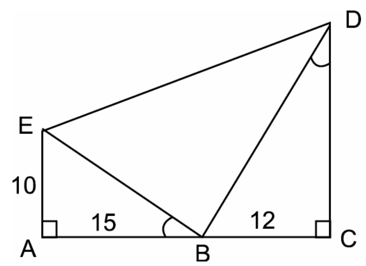
Hình 43

37. Hình 44 cho biết $\widehat{EBA} = \widehat{BDC}$.

a) Trong hình vẽ có bao nhiêu tam giác vuông ? Hãy kể tên các tam giác đó.

b) Cho biết AE = 10cm, AB = 15cm, BC = 12cm. Hãy tính độ dài các đoạn thẳng CD, BE, BD và ED (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

c) So sánh diện tích tam giác BDE với tổng diện tích của hai tam giác AEB và BCD.



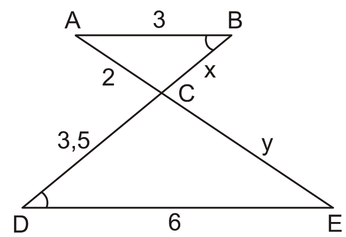
Hình 44

LUYỆN TẬP 1

38. Tính các độ dài x, y của các đoạn thẳng trong hình 45.

39. Cho hình thang ABCD (AB // CD). Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

a) Chứng minh rằng OA . OD = OB . OC.



Hình 45

b) Đường thẳng qua O vuông góc với AB và CD theo thứ tự tại H và K.

Chứng minh rằng $\dfrac{OH}{OK} = \dfrac{AB}{CD}$.

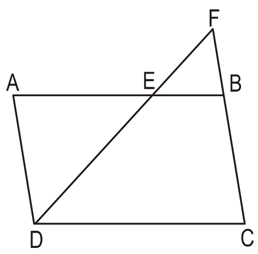
40. Cho tam giác ABC, trong đó AB = 15cm, AC = 20cm. Trên hai cạnh AB và AC lần lượt lấy hai điểm D và E sao cho AD = 8cm, AE = 6cm. Hai tam giác ABC và ADE có đồng dạng với nhau không ? Vì sao ?

LUYỆN TẬP 2

41. Tìm các dấu hiệu để nhận biết hai tam giác cân đồng dạng.

42. So sánh các trường hợp đồng dạng của tam giác với các trường hợp bằng nhau của tam giác (nêu lên những điểm giống nhau và khác nhau).

43. Cho hình bình hành ABCD (h.46) có độ dài các cạnh AB = 12cm, BC = 7cm. Trên cạnh AB lấy một điểm E sao cho AE = 8cm. Đường thẳng DE cắt cạnh CB kéo dài tại F.



Hình 46

a) Trong hình vẽ đã cho có bao nhiêu cặp tam giác đồng dạng với nhau ? Hãy viết các cặp tam giác đồng dạng với nhau theo các đỉnh tương ứng.

b) Tính độ dài các đoạn thẳng EF và BF, biết rằng DE = 10cm.

44. Cho tam giác ABC có các cạnh AB = 24cm, AC = 28cm. Tia phân giác của góc A cắt cạnh BC tại D. Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu của B và C trên đường thẳng AD.

a) Tính tỉ số $\dfrac{BM}{CN}$.

b) Chứng minh rằng $\dfrac{AM}{AN} = \dfrac{DM}{DN}$.

45. Hai tam giác ABC và DEF có $\widehat{A} = \widehat{D}$, $\widehat{B} = \widehat{E}$, AB = 8cm, BC = 10cm, DE = 6cm. Tính độ dài các cạnh AC, DF và EF, biết rằng cạnh AC dài hơn cạnh DF là 3cm.

§8. Các trường hợp đồng dạng của tam giác vuông

Có những cách riêng để nhận biết hai tam giác vuông đồng dạng.

1. Áp dụng các trường hợp đồng dạng của tam giác vào tam giác vuông

Từ các trường hợp đồng dạng của hai tam giác đã xét trước đây, ta suy ra :

Hai tam giác vuông đồng dạng với nhau nếu :

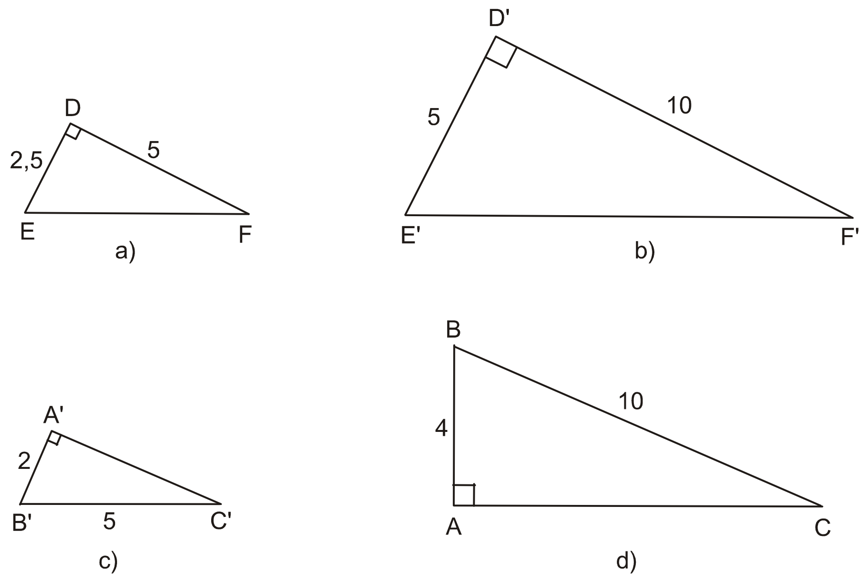
a) Tam giác *vuông* này có *một góc nhọn* bằng *góc nhọn* của tam giác *vuông* kia ;

Hoặc

b) Tam giác *vuông* này có *hai cạnh góc vuông* tỉ lệ với *hai cạnh góc vuông* của tam giác *vuông* kia.

2. Dấu hiệu đặc biệt nhận biết hai tam giác vuông đồng dạng

? *Hãy chỉ ra các cặp tam giác đồng dạng trong hình 47.*



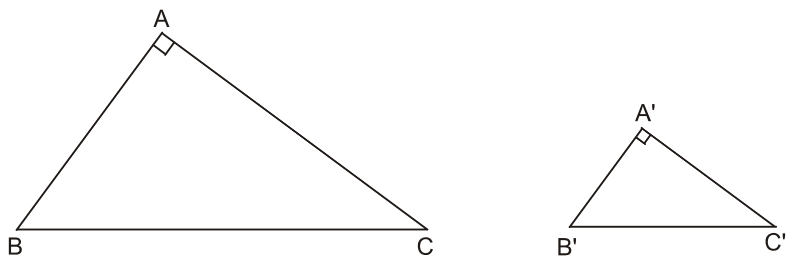
Hình 47

Để xét xem hai tam giác vuông ABC và A'B'C' đã cho có đồng dạng với nhau không, ta còn có định lí sau :

Định lí 1

Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỉ lệ với cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng.

GT	$\Delta ABC, \Delta A'B'C', \widehat{A'} = \widehat{A} = 90^o$ $\dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{A'B'}{AB}$ (1)
KL	$\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$



Hình 48

Chứng minh :

Từ giả thiết (1), bình phương hai vế ta được :

$$\frac{B'C'^2}{BC^2} = \frac{A'B'^2}{AB^2}.$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{B'C'^2}{BC^2} = \frac{A'B'^2}{AB^2} = \frac{B'C'^2 - A'B'^2}{BC^2 - AB^2}.$$

Ta lại có : $B'C'^2 - A'B'^2 = A'C'^2$;

$BC^2 - AB^2 = AC^2$ (suy ra từ định lí Py-ta-go).

Do đó : $$\frac{B'C'^2}{BC^2} = \frac{A'B'^2}{AB^2} = \frac{A'C'^2}{AC^2}. \quad (2)$$

Từ (2), suy ra : $\dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC}$.

Vậy $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ (trường hợp đồng dạng thứ nhất).

Áp dụng kết quả của định lí đối với hai tam giác vuông A'B'C' và ABC đã cho ở **?** ta thấy rằng :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} \text{ (vì } \frac{2}{4} = \frac{5}{10}\text{)}.$$

Vậy $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ (theo tỉ số đồng dạng $k = \frac{1}{2}$).

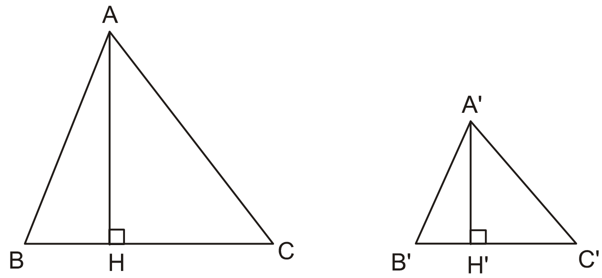
3. Tỉ số hai đường cao, tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng

Định lí 2

> ***Tỉ số hai đường cao tương ứng của hai tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng.***

Học sinh tự chứng minh theo hướng dẫn sau :

Vẽ hai tam giác đồng dạng ABC và A'B'C' với tỉ số đồng dạng là $k = \dfrac{A'B'}{AB}$, hai đường cao tương ứng là AH và A'H' (h.49). Chứng minh $\Delta A'B'H' \backsim \Delta ABH$ rồi suy ra $\dfrac{A'H'}{AH} = k$.



Hình 49

Từ Định lí 2, suy ra :

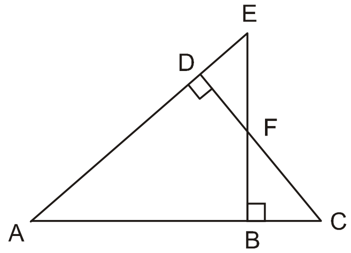
Định lí 3

> ***Tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng.***

(Học sinh tự chứng minh).

BÀI TẬP

46. Trên hình 50, hãy chỉ ra các tam giác đồng dạng. Viết các tam giác này theo thứ tự các đỉnh tương ứng và giải thích vì sao chúng đồng dạng ?



Hình 50

47. Tam giác ABC có độ dài các cạnh là 3cm, 4cm, 5cm. Tam giác A'B'C' đồng dạng với tam giác ABC và có diện tích là $54cm^2$. Tính độ dài các cạnh của tam giác A'B'C'.

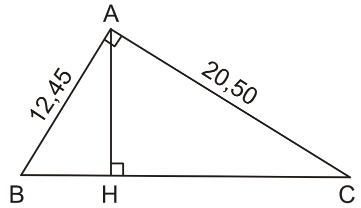
48. Bóng của một cột điện trên mặt đất có độ dài là 4,5m. Cùng thời điểm đó, một thanh sắt cao 2,1m cắm vuông góc với mặt đất có bóng dài 0,6m. Tính chiều cao của cột điện.

LUYỆN TẬP

49. Ở hình 51, tam giác ABC vuông ở A và có đường cao AH.

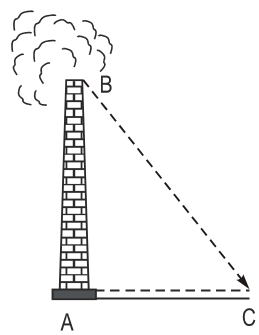
a) Trong hình vẽ có bao nhiêu cặp tam giác đồng dạng với nhau ? (Hãy chỉ rõ từng cặp tam giác đồng dạng và viết theo các đỉnh tương ứng).

b) Cho biết AB = 12,45cm, AC = 20,50cm. Tính độ dài các đoạn thẳng BC, AH, BH và CH.



Hình 51

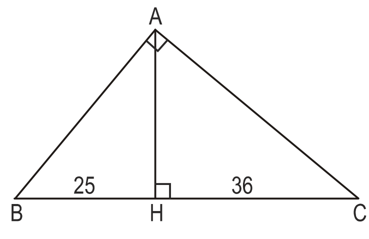
50. Bóng của một ống khói nhà máy trên mặt đất có độ dài là 36,9m. Cùng thời điểm đó, một thanh sắt cao 2,1m cắm vuông góc với mặt đất có bóng dài 1,62m. Tính chiều cao của ống khói (h.52).



Hình 52

51. Chân đường cao AH của tam giác vuông ABC chia cạnh huyền BC thành hai đoạn thẳng có độ dài 25cm và 36cm. Tính chu vi và diện tích của tam giác vuông đó (h.53).

Hướng dẫn : Trước tiên tìm cách tính AH từ các tam giác vuông đồng dạng, sau đó tính các cạnh của tam giác ABC.



Hình 53

52. Cho một tam giác vuông, trong đó cạnh huyền dài 20cm và một cạnh góc vuông dài 12cm. Tính độ dài hình chiếu cạnh góc vuông kia trên cạnh huyền.

§9. Ứng dụng thực tế của tam giác đồng dạng

Có thể đo chiều cao của một cây mà không cần lên đến ngọn ?

1. Đo gián tiếp chiều cao của vật

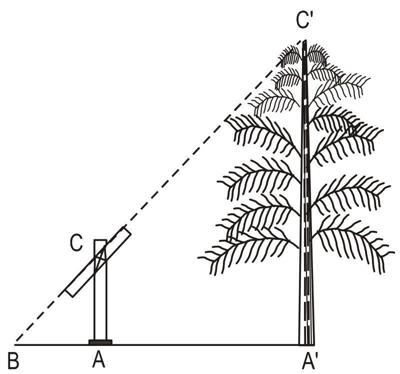
Giả sử cần phải xác định chiều cao của một toà nhà, của một ngọn tháp hay của một cây nào đó, ta có thể làm như sau :

a) Tiến hành đo đạc

– Đặt cọc AC thẳng đứng trên đó có gắn thước ngắm quay được quanh một cái chốt của cọc (h.54).

– Điều khiển thước ngắm sao cho hướng thước đi qua đỉnh C' của cây (hoặc tháp), sau đó xác định giao điểm B của đường thẳng CC' với AA'.

– Đo khoảng cách BA và BA'.



Hình 54

b) Tính chiều cao của cây hoặc tháp

Ta có $\Delta A'BC' \backsim \Delta ABC$ với

tỉ số đồng dạng $k = \dfrac{A'B}{AB}$.

Từ đó suy ra A'C' = k.AC.

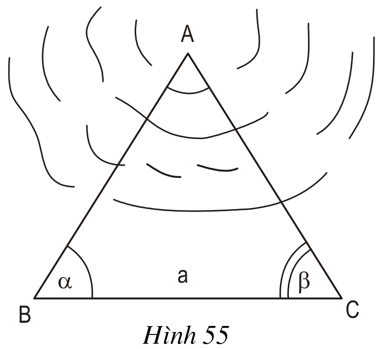
Áp dụng bằng số : AC = 1,50m ; AB = 1,25m ; A'B = 4,2m.

Ta có

$$A'C' = k.AC = \frac{A'B}{AB} \cdot AC = \frac{4,2}{1,25} \cdot 1,50 = 5,04 \text{ (m)}.$$

2. Đo khoảng cách giữa hai địa điểm trong đó có một địa điểm không thể tới được

Giả sử phải đo khoảng cách AB trong đó địa điểm A có ao hồ bao bọc không thể tới được (h.55).



Hình 55

a) Tiến hành đo đạc

– Chọn một khoảng đất bằng phẳng rồi vạch một đoạn BC và đo độ dài của nó (BC = a).

– Dùng thước đo góc (giác kế), đo các góc : $\widehat{ABC} = \alpha$, $\widehat{ACB} = \beta$.

b) Tính khoảng cách AB

Vẽ trên giấy tam giác A'B'C' với B'C' = a', $\hat{B}' = \alpha$, $\hat{C}' = \beta$. Khi đó $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ theo tỉ số $k = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{a'}{a}$. Đo A'B' trên hình vẽ, từ đó suy ra $AB = \dfrac{A'B'}{k}$.

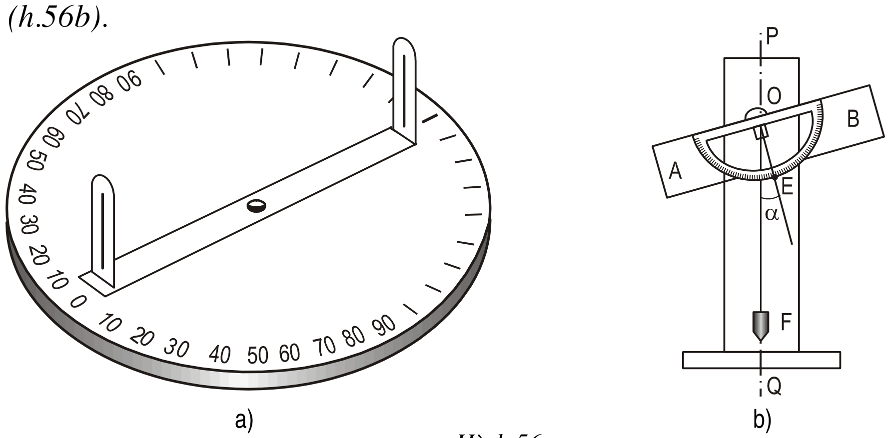
• Áp dụng bằng số : a = 100m, a' = 4cm. Ta có :

$$k = \frac{a'}{a} = \frac{4}{10\,000} = \frac{1}{2500}.$$

Đo A'B' được A'B' = 4,3cm. Vậy AB = $4,3 . 2500$ = 10750(cm) = 107,5(m).

▶ ***Ghi chú***

Khi đo góc ta dùng giác kế. Giác kế cho phép ta xác định được độ lớn của một góc tuỳ ý. Có hai loại giác kế : Giác kế ngang (h.56a) và giác kế đứng (h.56b).



Hình 56

– *Giác kế ngang (đã được biết ở lớp 6) dùng để đo góc trên mặt đất.*

– *Giác kế đứng dùng để đo góc theo phương thẳng đứng.*

Bộ phận chính của giác kế đứng là một thước đo góc có thể quay quanh trục O *cắm vuông góc với cọc* PQ *đặt ở vị trí thẳng đứng. Ở hai đầu của thước ngắm có gắn hai chiếc đinh* A *và* B. *Tại* O *có treo một dây dọi* OF. *Gọi* E *là vạch ứng với điểm ghi* 0^o *trên thước đo góc (*OE *vuông góc với* AB *tại* O*). Khi đó góc tạo bởi* OF *và* OE *bằng góc tạo bởi phương ngắm và phương nằm ngang (hai góc cùng phụ với góc thứ ba).*

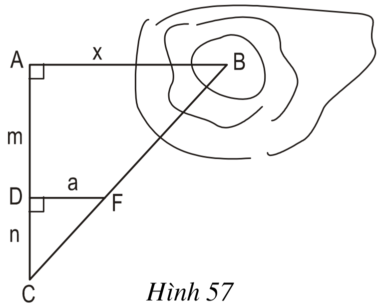
BÀI TẬP

53. Một người đo chiều cao của một cây nhờ một cọc chôn xuống đất, cọc cao 2m và đặt xa cây 15m. Sau khi người ấy lùi ra xa cách cọc 0,8m thì nhìn thấy đầu cọc và đỉnh cây cùng nằm trên một đường thẳng. Hỏi cây cao bao nhiêu, biết rằng khoảng cách từ chân đến mắt người ấy là 1,6m ?

54. Để đo khoảng cách giữa hai địa điểm A và B, trong đó B không tới được, người ta tiến hành đo và tính khoảng cách AB như hình 57 : AB // DF ; AD = m ; DC = n ; DF = a.

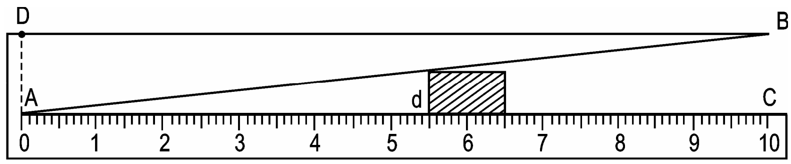
a) Em hãy nói rõ cách đo như thế nào.

b) Tính độ dài x của khoảng cách AB.



Hình 57

55. Hình 58 dưới đây mô tả dụng cụ đo bề dày của một số loại sản phẩm. Dụng cụ này gồm thước AC được chia đến 1mm và gắn với một bản kim loại hình tam giác ABD, khoảng cách BC = 10mm.



Hình 58

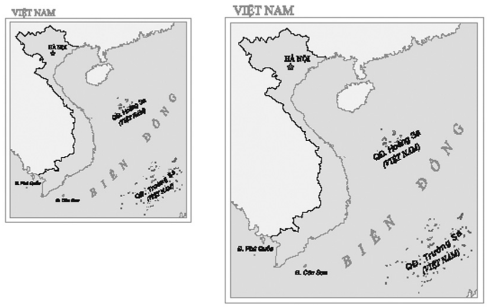
Muốn đo bề dày của vật, ta kẹp vật vào giữa bản kim loại và thước (đáy của vật áp vào bề mặt của thước AC). Khi đó, trên thước AC ta đọc được "bề dày" d của vật (trên hình vẽ ta có d = 5,5mm).

Hãy chỉ rõ định lí nào của hình học là cơ sở để ghi các vạch trên thước AC (d ≤ 10mm).

Có thể em chưa biết

Để vẽ hình đồng dạng với một hình cho trước, chẳng hạn phải vẽ thu nhỏ hoặc phóng to một bản đồ Việt Nam lớn gấp 2 lần, 3 lần,... người ta dùng một dụng cụ vẽ gọi là thước vẽ truyền (h.60).

– Dụng cụ này gồm có bốn thanh kim loại hay gỗ mảnh dài bằng nhau. Trên mỗi thanh kim loại có các lỗ khoan thẳng hàng và các tâm lỗ cách đều nhau.



Hình 59

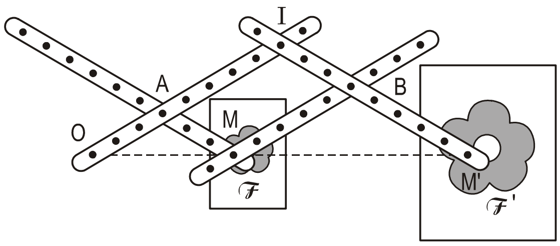
– Bốn thanh của thước được liên kết với nhau nhờ bốn chốt và tạo thành hình bình hành AMBI, trong đó các chốt A, B có thể thay đổi vị trí. Các điểm O, M, M' luôn thẳng hàng, $\frac{OI}{OA} = \frac{OM'}{OM}$ và OA = AM.

– Ở điểm O có gắn mũi nhọn để có thể cắm vào mặt bàn hoặc giá vẽ. Ở các điểm M và M' có gắn đầu chì.

Cách sử dụng

Trên bàn vẽ hoặc giá vẽ, cắm cố định mũi nhọn O ở vị trí thích hợp.

Di chuyển mũi chì M trên hình $\mathcal{F}$ cho trước (đã được ghim cố định trên bàn vẽ) thì mũi chì M' vạch nên hình $\mathcal{F}'$ đồng dạng với $\mathcal{F}$ theo tỉ số $\frac{OM'}{OM} > 1$.



Hình 60

Trong trường hợp này, hình $\mathcal{F}'$ là hình phóng đại của hình $\mathcal{F}$.

– Ngược lại, nếu di chuyển mũi chì M' trên hình $\mathcal{F}'$ cho trước thì mũi chì M vạch nên hình $\mathcal{F}$. Trong trường hợp này $\mathcal{F}$ là hình thu nhỏ của $\mathcal{F}'$.

– Khi muốn thu nhỏ hoặc phóng to theo tỉ số nào đó, cần điều chỉnh tỉ số $\frac{OI}{OA}$, nghĩa là phải di chuyển chốt A và B đến vị trí tương ứng.

ÔN TẬP CHƯƠNG III

A - Câu hỏi

1. Phát biểu và viết tỉ lệ thức biểu thị hai đoạn thẳng AB và CD tỉ lệ với hai đoạn thẳng A'B' và C'D'.

2. Phát biểu, vẽ hình, ghi giả thiết và kết luận của định lí Ta-lét trong tam giác.

3. Phát biểu, vẽ hình, ghi giả thiết và kết luận của định lí Ta-lét đảo.

4. Phát biểu, vẽ hình, ghi giả thiết và kết luận về hệ quả của định lí Ta-lét.

5. Phát biểu định lí về tính chất của đường phân giác trong tam giác (vẽ hình, ghi giả thiết và kết luận).

6. Phát biểu định nghĩa hai tam giác đồng dạng.

7. Phát biểu định lí về đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh (hoặc phần kéo dài của hai cạnh) còn lại.

8. Phát biểu các định lí về ba trường hợp đồng dạng của hai tam giác.

9. Phát biểu định lí về trường hợp đồng dạng đặc biệt của hai tam giác vuông (trường hợp cạnh huyền và một cạnh góc vuông).

TÓM TẮT CHƯƠNG III

1. Đoạn thẳng tỉ lệ

a) Định nghĩa :

$$\text{AB, CD tỉ lệ với A'B', C'D'} \Leftrightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}.$$

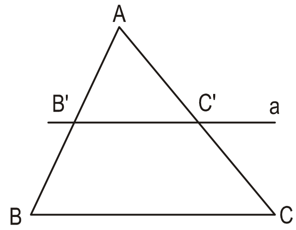
b) Tính chất :

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \Rightarrow \begin{cases} AB\,.\,C'D' = CD\,.\,A'B' \\ \dfrac{AB \pm CD}{CD} = \dfrac{A'B' \pm C'D'}{C'D'} \\ \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{A'B'}{C'D'} = \dfrac{AB \pm A'B'}{CD \pm C'D'} \end{cases}$$

2. Định lí Ta-lét thuận và đảo

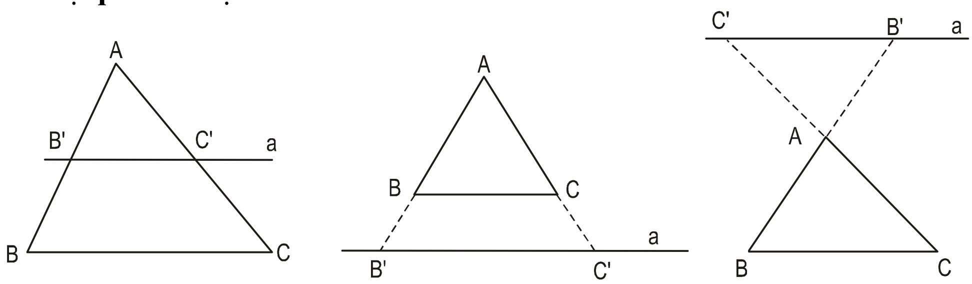
Cho tam giác ABC (h.61).

$$a \parallel BC \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{AC'}{AC} \\ \dfrac{AB'}{BB'} = \dfrac{AC'}{CC'} \\ \dfrac{BB'}{AB} = \dfrac{CC'}{AC}. \end{array}\right.$$



Hình 61

3. Hệ quả của định lí Ta-lét



Hình 62

Cho tam giác ABC.

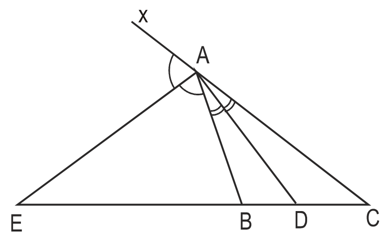
$$a \parallel BC \quad \Rightarrow \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}.$$

4. Tính chất của đường phân giác trong tam giác

AD là tia phân giác của góc BAC,

AE là tia phân giác của góc BAx (h.63).

Ta có : $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DB}{DC} = \dfrac{EB}{EC}$.



Hình 63

5. Tam giác đồng dạng

a) Định nghĩa :

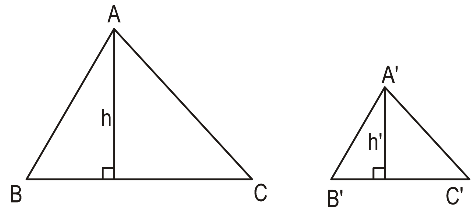
$$\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A'} = \widehat{A}\ ;\ \widehat{B'} = \widehat{B}\ ;\ \widehat{C'} = \widehat{C} \\ \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{C'A'}{CA} = k. \end{cases}$$

(Tỉ số đồng dạng k)

b) Tính chất :

$$\frac{h'}{h} = k$$

(h', h tương ứng là đường cao của tam giác A'B'C' và tam giác ABC) ;



Hình 64

$$\frac{p'}{p} = k \;;\; \frac{S'}{S} = k^2$$

(p', p tương ứng là nửa chu vi của tam giác A'B'C' và tam giác ABC ; S', S tương ứng là diện tích của tam giác A'B'C' và tam giác ABC).

6. Liên hệ giữa các trường hợp đồng dạng và các trường hợp bằng nhau của hai tam giác ABC và A'B'C'

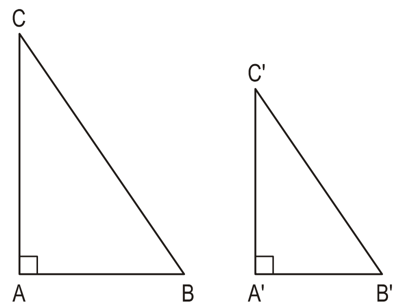
Các trường hợp đồng dạng :	Các trường hợp bằng nhau :
a) $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$ (c.c.c).	a) A'B' = AB ; B'C' = BC và A'C' = AC (c.c.c).
b) $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$ và $\widehat{B'} = \widehat{B}$ (c.g.c).	b) A'B' = AB ; B'C' = BC và $\widehat{B'} = \widehat{B}$ (c.g.c).
c) $\widehat{A'} = \widehat{A}$ và $\widehat{B'} = \widehat{B}$ (g.g).	c) $\widehat{A'} = \widehat{A}$; $\widehat{B'} = \widehat{B}$ và A'B' = AB (g.c.g).

7. Các trường hợp đồng dạng của hai tam giác vuông ABC và A'B'C' ($\widehat{A} = \widehat{A'} = 90^o$)

a) $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$.

b) $\widehat{B'} = \widehat{B}$ hoặc $\widehat{C'} = \widehat{C}$.

c) $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$.



Hình 65

B - Bài tập

56. Xác định tỉ số của hai đoạn thẳng AB và CD trong các trường hợp sau :

a) AB = 5cm, CD = 15cm ;

b) AB = 45dm, CD = 150cm ;

c) AB = 5CD.

57. Cho tam giác ABC (AB < AC). Vẽ đường cao AH, đường phân giác AD, đường trung tuyến AM. Có nhận xét gì về vị trí của ba điểm H, D, M.

58. Cho tam giác cân ABC (AB = AC), vẽ các đường cao BH, CK (h.66).

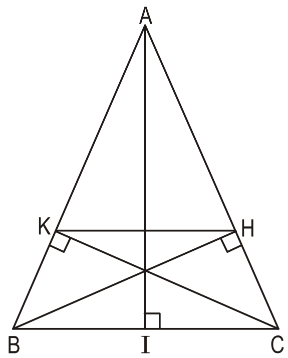
a) Chứng minh BK = CH.

b) Chứng minh KH // BC.

c) Cho biết BC = a, AB = AC = b. Tính độ dài đoạn thẳng HK.

Hướng dẫn câu c) :

– Vẽ thêm đường cao AI, xét hai tam giác đồng dạng IAC và HBC rồi tính CH.



Hình 66

– Tiếp theo, xét hai tam giác đồng dạng AKH và ABC rồi tính HK.

59. Hình thang ABCD (AB // CD) có AC và BD cắt nhau tại O, AD và BC cắt nhau tại K. Chứng minh rằng OK đi qua trung điểm của các cạnh AB và CD.

60. Cho tam giác vuông ABC, $\widehat{A} = 90^o$, $\widehat{C} = 30^o$ và đường phân giác BD (D thuộc cạnh AC).

a) Tính tỉ số $\frac{AD}{CD}$.

b) Cho biết độ dài AB = 12,5cm, hãy tính chu vi và diện tích của tam giác ABC.

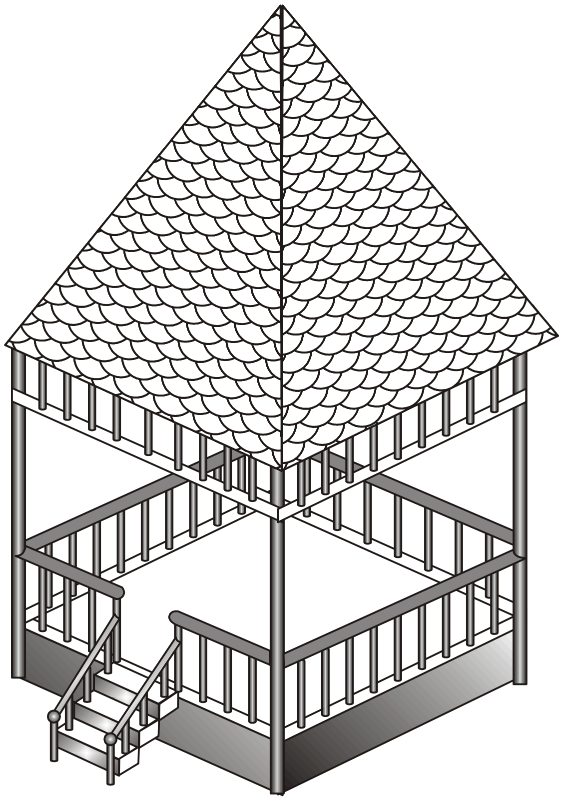
61. Tứ giác ABCD có AB = 4cm, BC = 20cm, CD = 25cm, DA = 8cm, đường chéo BD = 10cm.

a) Nêu cách vẽ tứ giác ABCD có kích thước đã cho ở trên.

b) Các tam giác ABD và BDC có đồng dạng với nhau không ? Vì sao ?

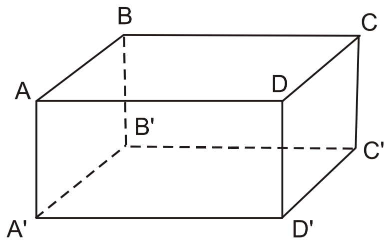
c) Chứng minh rằng AB // CD.

Chương IV – HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG. HÌNH CHÓP ĐỀU

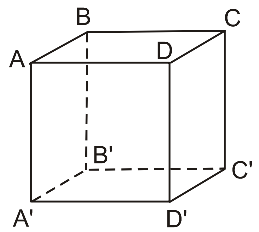


MỘT SỐ VẬT THỂ TRONG KHÔNG GIAN

Chúng ta đã làm quen với một số hình trong không gian như hình hộp chữ nhật, hình lập phương (h.67), đồng thời cũng gặp trong đời sống hàng ngày một số hình không gian khác (h.68).

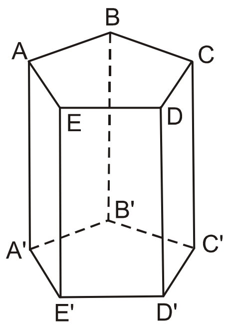


Hình hộp chữ nhật

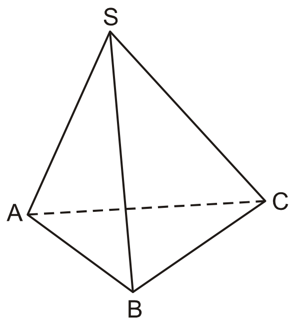


Hình lập phương

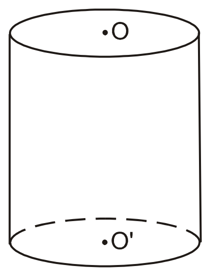
Hình 67



Hình lăng trụ đứng



Hình chóp tam giác



Hình trụ

Hình 68

Đó là những hình mà *các điểm của chúng có thể không cùng nằm trong một mặt phẳng*.

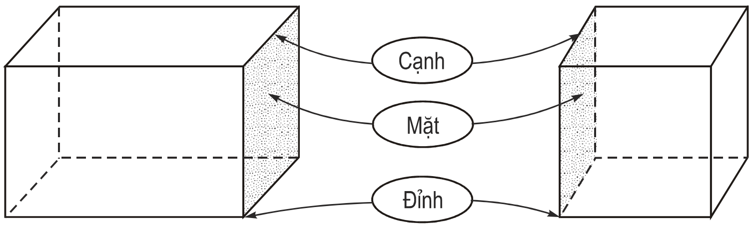
A - HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG

§1. Hình hộp chữ nhật

Bao diêm có dạng một hình hộp chữ nhật.

1. Hình hộp chữ nhật

Hãy quan sát hình 69 :



Hình 69

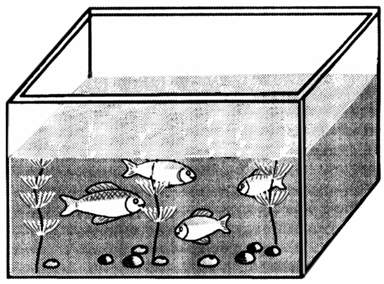
• Hình 69 cho ta hình ảnh của *hình hộp chữ nhật*, nó có *6 mặt* là *những hình chữ nhật*(*).

• Hình hộp chữ nhật có : 6 mặt, 8 đỉnh và 12 cạnh.

• Hai mặt của hình hộp chữ nhật không có cạnh chung gọi là hai *mặt đối diện* và có thể xem chúng là hai *mặt đáy* của hình hộp chữ nhật, khi đó các mặt còn lại được xem là các *mặt bên*.

• *Hình lập phương* là hình hộp chữ nhật có 6 mặt là những hình vuông.

Ví dụ. Bể nuôi cá cảnh có dạng một hình hộp chữ nhật (h.70).

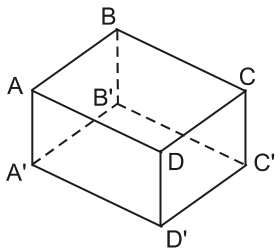


Hình 70

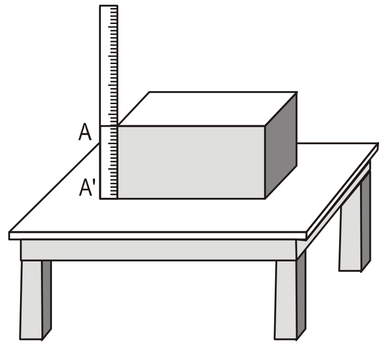
(*) Cùng với các điểm trong của nó.

2. Mặt phẳng và đường thẳng

? *Quan sát hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' (h.71a). Hãy kể tên các mặt, các đỉnh và các cạnh của hình hộp.*



a)



Độ dài đoạn thẳng AA' gọi là chiều cao của hình hộp chữ nhật

b)

Hình 71

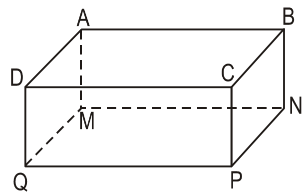
Ta có thể xem :

- Các *đỉnh* : A, B, C, ... như là các *điểm*.
- Các *cạnh* : AD, DC, CC', ... như là các *đoạn thẳng*.
- Mỗi mặt, chẳng hạn mặt ABCD, là một phần của mặt phẳng (ta hình dung mặt phẳng trải rộng về mọi phía).

Đường thẳng qua hai điểm A, B của mặt phẳng (ABCD) thì nằm trọn trong mặt phẳng đó (tức là mọi điểm của nó đều thuộc mặt phẳng).

BÀI TẬP

1. Hãy kể tên những cạnh bằng nhau của hình hộp chữ nhật ABCD.MNPQ (h.72).

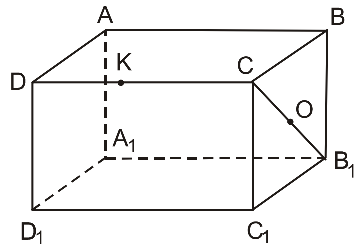


Hình 72

2. ABCD.$A_1B_1C_1D_1$ là một hình hộp chữ nhật (h.73).

a) Nếu O là trung điểm của đoạn CB_1 thì O có là điểm thuộc đoạn BC_1 hay không ?

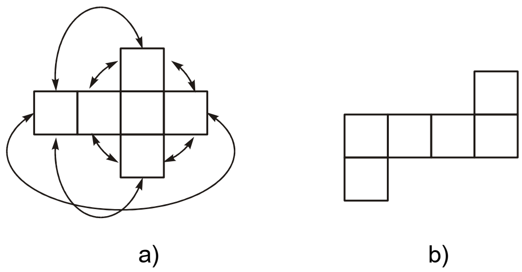
b) K là điểm thuộc cạnh CD, liệu K có thể là điểm thuộc cạnh BB_1 hay không ?



Hình 73

3. Các kích thước của hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là : DC = 5cm, CB = 4cm, BB_1 = 3cm. Hỏi các độ dài DC_1 và CB_1 là bao nhiêu xentimét ?

4. Xem hình 74a, các mũi tên hướng dẫn cách ghép các cạnh với nhau để có được một hình lập phương.



Hình 74

Hãy điền thêm vào hình 74b các mũi tên như vậy.

§2. Hình hộp chữ nhật (tiếp)

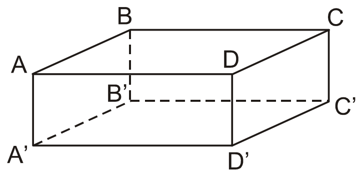
1. Hai đường thẳng song song trong không gian

?1 *Quan sát hình hộp chữ nhật ở hình 75 :*

– Hãy kể tên các mặt của hình hộp.

– BB′ và AA′ có cùng nằm trong một mặt phẳng hay không ?

– BB′ và AA′ có điểm chung hay không ?



Hình 75

• Trong không gian, hai đường thẳng a và b gọi là *song song* với nhau nếu chúng nằm trong cùng một mặt phẳng và không có điểm chung. Chẳng hạn, các đường thẳng AA', BB' song song với nhau (h.75).

Quan sát hình 76, ta có những nhận xét sau :

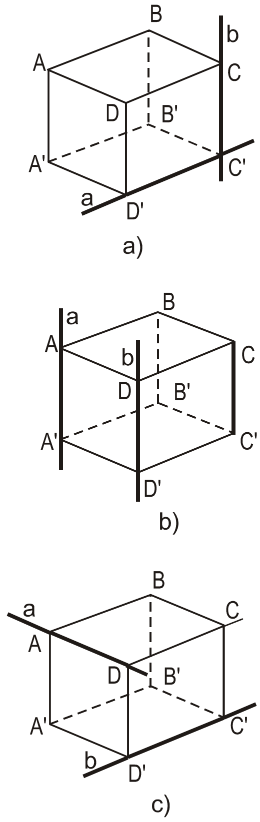
Với hai đường thẳng phân biệt a, b trong không gian, chúng có thể :

a) Cắt nhau. Chẳng hạn D'C' và CC' cắt nhau ở C', chúng cùng nằm trong mặt phẳng (DCC'D') (h.76a).

b) Song song. Chẳng hạn AA' song song với DD', kí hiệu AA' // DD', chúng cùng nằm trong mặt phẳng (AA'D'D) (h.76b).

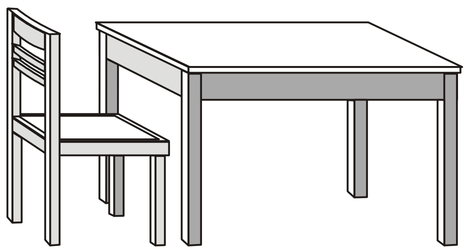
c) Không cùng nằm trong một mặt phẳng nào, chẳng hạn các đường thẳng AD và D'C' (h.76c).

• Hai đường thẳng phân biệt, cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau. Chẳng hạn AB và D'C' song song, vì chúng cùng song song với DC (h.76a).



Hình 76

2. Đường thẳng song song với mặt phẳng. Hai mặt phẳng song song



Mặt bàn và mặt ghế cho ta hình ảnh của hai mặt phẳng song song.

?2 *Quan sát hình hộp chữ nhật ở hình 77 :*

– AB có song song với A'B' hay không ? Vì sao ?

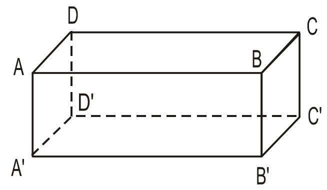
– AB có nằm trong mặt phẳng (A'B'C'D') hay không ?

• Khi AB không nằm trong mặt phẳng (A'B'C'D') mà AB song song với một đường thẳng của mặt phẳng này, chẳng hạn AB // A'B', thì người ta nói AB *song song với mặt phẳng* (A'B'C'D') và kí hiệu : AB // mp (A'B'C'D').

?3 *Tìm trên hình 77 các đường thẳng song song với mặt phẳng (A'B'C'D').*

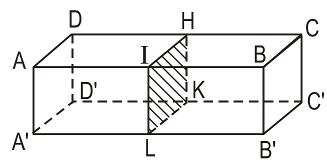
Nhận xét. Trên hình hộp chữ nhật (h.77), xét hai mặt phẳng (ABCD) và (A'B'C'D'). Mặt phẳng (ABCD) chứa hai đường thẳng cắt nhau AB, AD và mặt phẳng (A'B'C'D') chứa hai đường thẳng cắt nhau A'B', A'D', hơn nữa AB song song với A'B' và AD song song với A'D', khi đó người ta nói *mặt phẳng* (ABCD) *song song với mặt phẳng* (A'B'C'D') và kí hiệu :

mp(ABCD) // mp(A'B'C'D').



Hình 77

Ví dụ. Nếu bác thợ mộc cắt một thanh gỗ hình hộp chữ nhật (như hình 78) qua bốn trung điểm I, H, K, L theo thứ tự của các cạnh AB, DC, D'C' và A'B' thì mp(ADD'A') // mp(IHKL).



Hình 78

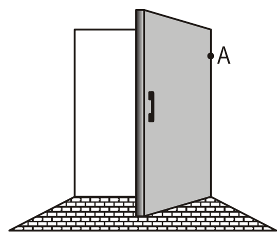
?4 *Trên hình 78 còn có những cặp mặt phẳng nào song song với nhau ?*

Nhận xét

• Nếu một đường thẳng song song với một mặt phẳng thì chúng không có điểm chung.

• Hai mặt phẳng song song thì không có điểm chung.

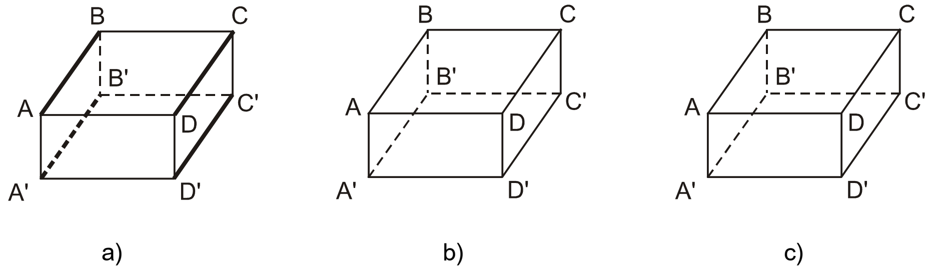
• Hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có chung một đường thẳng đi qua điểm đó (h.79). Ta nói hai mặt phẳng này cắt nhau.



Hình 79

BÀI TẬP

5. Người ta tô đậm những cạnh song song và bằng nhau của một hình hộp chữ nhật như ở hình 80a. Hãy thực hiện điều đó đối với hình 80b và 80c.

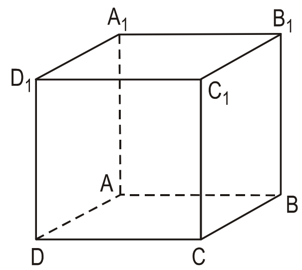


Hình 80

6. $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là một hình lập phương (h. 81). Quan sát hình và cho biết :

a) Những cạnh nào song song với cạnh C_1C.

b) Những cạnh nào song song với cạnh A_1D_1.



Hình 81

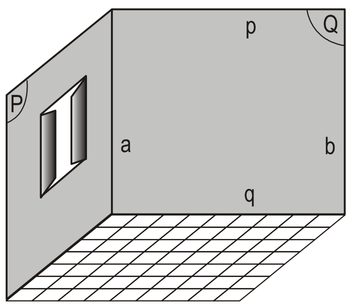
7. Một căn phòng dài 4,5m, rộng 3,7m và cao 3,0m.

Người ta muốn quét vôi trần nhà và bốn bức tường. Biết rằng tổng diện tích các cửa là $5{,}8m^2$. Hãy tính diện tích cần quét vôi.

8. Hình 82 vẽ một phòng ở. Quan sát hình và giải thích vì sao :

a) Đường thẳng b song song với mp(P).

b) Đường thẳng p song song với sàn nhà.



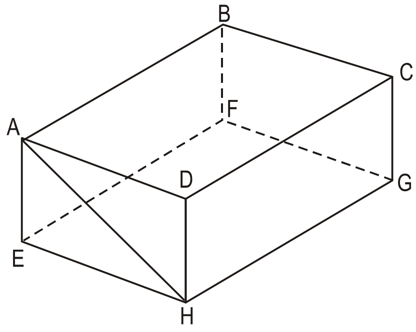
Hình 82

9. Hình hộp chữ nhật ABCD.EFGH (h.83) có cạnh AB song song với mặt phẳng (EFGH).

a) Hãy kể tên các cạnh khác song song với mặt phẳng (EFGH).

b) Cạnh CD song song với những mặt phẳng nào của hình hộp chữ nhật ?

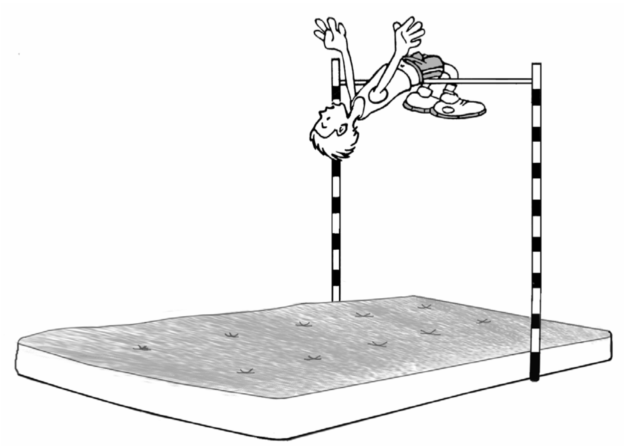
c) Đường thẳng AH không song song với mặt phẳng (EFGH), hãy chỉ ra mặt phẳng song song với đường thẳng đó.



Hình 83

§3. Thể tích của hình hộp chữ nhật

1. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng. Hai mặt phẳng vuông góc



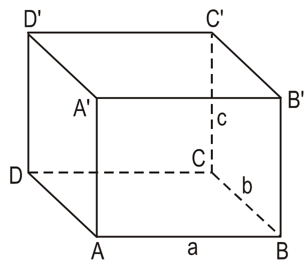
Nhảy cao
ở sân tập thể dục.

?1 *Quan sát hình hộp chữ nhật (h.84) :*

– A'A có vuông góc với AD hay không ? Vì sao ?

– A'A có vuông góc với AB hay không ? Vì sao ?

• Khi đường thẳng A'A vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau AD và AB của mặt phẳng (ABCD) ta nói A'A *vuông góc với mặt phẳng* (ABCD) tại A và kí hiệu :



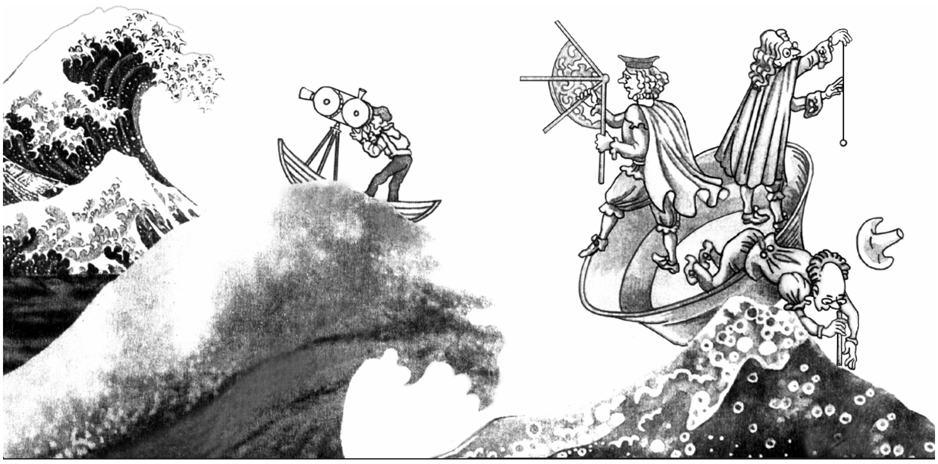
Hình 84

$$A'A \perp mp(ABCD).$$

Nhận xét. Nếu một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng tại điểm A thì nó vuông góc với mọi đường thẳng đi qua A và nằm trong mặt phẳng đó.

• Khi một trong hai mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng còn lại thì người ta nói hai mặt phẳng đó *vuông góc với nhau* và kí hiệu (chẳng hạn với trường hợp vừa xét) :

$$\text{mp}(ADD'A') \perp \text{mp}(ABCD).$$



Hình 85. Từ thời cổ xưa, con người đã dùng dây dọi để kiểm tra tính vuông góc, tính song song.

?2 *Tìm trên hình 84 các đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD).*

Ở hình 84 :

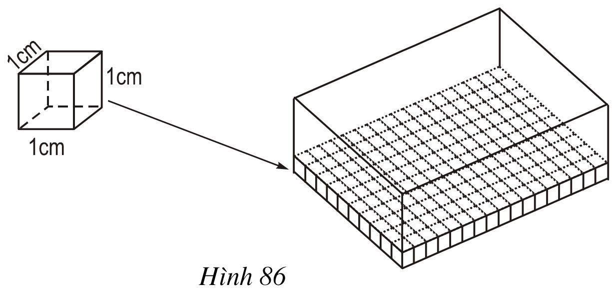
– Đường thẳng AB có nằm trong mặt phẳng (ABCD) hay không ? Vì sao ?

– Đường thẳng AB có vuông góc với mặt phẳng (ADD'A') hay không ? Vì sao ?

?3 *Tìm trên hình 84 các mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (A'B'C'D').*

2. Thể tích của hình hộp chữ nhật

Cho hình hộp chữ nhật có các kích thước 17cm, 10cm và 6cm. Ta chia hình hộp này thành các hình lập phương đơn vị với cạnh là 1cm (h.86).



Hình 86

Trong hình hộp có 6 lớp hình lập phương đơn vị, mỗi lớp gồm 17.10 hình. Như vậy hình hộp bao gồm $17.10.6$ hình lập phương đơn vị. Mỗi hình lập phương đơn vị có thể tích $1cm^3$ nên thể tích hình hộp chữ nhật là $17.10.6$ (cm^3).

Tổng quát, nếu các kích thước của hình hộp chữ nhật là a, b, c (cùng đơn vị độ dài) thì thể tích của hình hộp chữ nhật đó là :

$$\boxed{\mathbf{V = abc}}$$

Đặc biệt, thể tích hình lập phương cạnh a là :

$$\boxed{\mathbf{V = a^3}}$$

Ví dụ. Tính thể tích của một hình lập phương, biết diện tích toàn phần của nó là $216cm^2$.

Giải : Hình lập phương có 6 mặt bằng nhau, vậy diện tích mỗi mặt là :

$$216 : 6 = 36\ (cm^2).$$

Độ dài cạnh hình lập phương :

$$a = \sqrt{36} = 6\ (cm).$$

Thể tích hình lập phương :

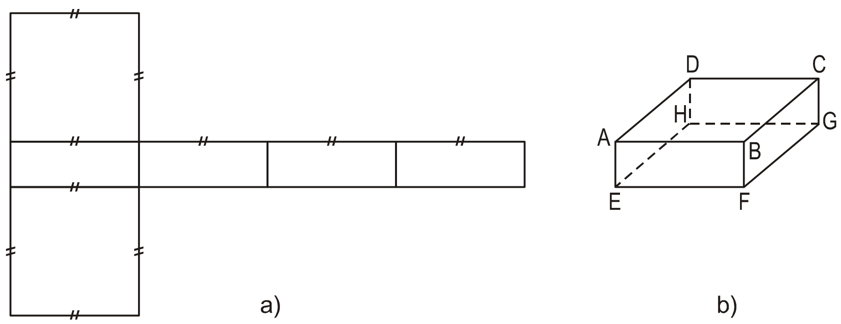
$$V = a^3 = 6^3 = 216\ (cm^3).$$

Đáp số : $V = 216cm^3$.

BÀI TẬP

10. 1) Gấp hình 87a theo các nét đã chỉ ra thì có được một hình hộp chữ nhật hay không ?

2) Kí hiệu các đỉnh hình hộp gấp được như hình 87b.



Hình 87

a) Đường thẳng BF vuông góc với những mặt phẳng nào ?

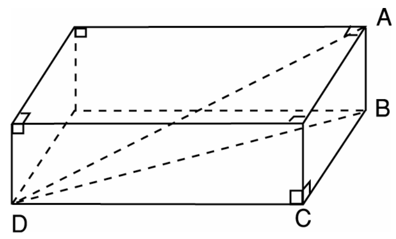
b) Hai mặt phẳng (AEHD) và (CGHD) vuông góc với nhau, vì sao ?

11. a) Tính các kích thước của một hình hộp chữ nhật, biết rằng chúng tỉ lệ với 3, 4, 5 và thể tích của hình hộp này là $480cm^3$.

b) Diện tích toàn phần của một hình lập phương là $486m^2$. Thể tích của nó là bao nhiêu ?

12. A, B, C và D là những đỉnh của hình hộp chữ nhật cho ở hình 88. Hãy điền số thích hợp vào các ô trống ở bảng sau :

AB	6	13	14	
BC	15	16		34
CD	42		70	62
DA		45	75	75



Hình 88

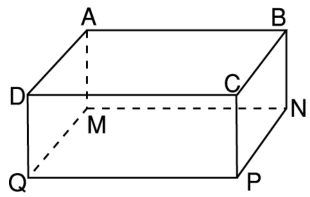
Kết quả bài 12 minh hoạ công thức quan trọng sau :

$$DA = \sqrt{AB^2 + BC^2 + CD^2}\ .$$

13. a) Viết công thức tính thể tích của hình hộp chữ nhật ABCD.MNPQ (h.89).

b) Điền số thích hợp vào các ô trống ở bảng sau :

Chiều dài	22	18	15	20
Chiều rộng	14			
Chiều cao	5	6	8	
Diện tích một đáy		90		260
Thể tích			1320	2080



Hình 89

LUYỆN TẬP

14. Một bể nước hình hộp chữ nhật có chiều dài 2m. Lúc đầu bể không có nước. Sau khi đổ vào bể 120 thùng nước, mỗi thùng chứa 20 lít thì mực nước của bể cao 0,8m.

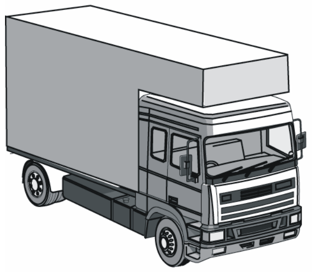
a) Tính chiều rộng của bể nước.

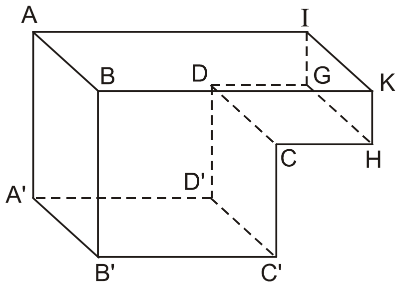
b) Người ta đổ thêm vào bể 60 thùng nước nữa thì đầy bể.

Hỏi bể cao bao nhiêu mét ?

15. Một cái thùng hình lập phương, cạnh 7dm, có chứa nước với độ sâu của nước là 4dm. Người ta thả 25 viên gạch có chiều dài 2dm, chiều rộng 1dm và chiều cao 0,5dm vào thùng. Hỏi nước trong thùng dâng lên cách miệng thùng bao nhiêu đêximét ? (Giả thiết toàn bộ gạch ngập trong nước và chúng hút nước không đáng kể).

16. Thùng chứa của một xe chở hàng đông lạnh có dạng như hình 90. Một số mặt là những hình chữ nhật, chẳng hạn (ABKI), (DCC'D'),... Quan sát hình và trả lời các câu hỏi sau :





Hình 90

a) Những đường thẳng nào song song với mặt phẳng (ABKI) ?

b) Những đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng (DCC'D') ?

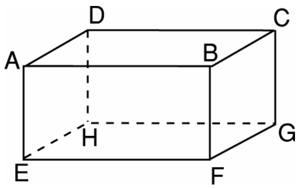
c) Mặt phẳng (A'D'C'B') có vuông góc với mặt phẳng (DCC'D') hay không ?

17. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.EFGH (h.91).

a) Kể tên các đường thẳng song song với mp(EFGH).

b) Đường thẳng AB song song với những mặt phẳng nào ?

c) Đường thẳng AD song song với những đường thẳng nào ?

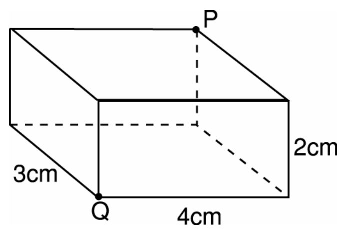


Hình 91

18. ***Đố.*** Các kích thước của một hình hộp chữ nhật là 4cm, 3cm và 2cm. Một con kiến bò theo mặt của hình hộp đó từ Q đến P (h.92).

a) Hỏi con kiến bò theo đường nào là ngắn nhất ?

b) Độ dài ngắn nhất đó là bao nhiêu xentimét ?



Hình 92

§4. Hình lăng trụ đứng

Chiếc đèn lồng cho ta hình ảnh hình lăng trụ đứng.

1. Hình lăng trụ đứng

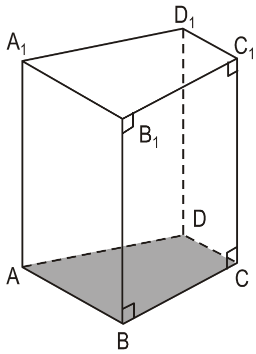
Hình 93 là một *hình lăng trụ đứng* (còn gọi tắt là *lăng trụ đứng*). Trong hình này :

• A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 là các *đỉnh*.

• Các mặt ABB_1A_1, BCC_1B_1, ... là những hình chữ nhật. Chúng được gọi là các *mặt bên*.

• Các đoạn AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 song song với nhau và bằng nhau, chúng được gọi là các *cạnh bên*.

• Hai mặt ABCD, $A_1B_1C_1D_1$ là *hai đáy*.



Hình 93

Hình lăng trụ trên hình 93 có hai đáy là tứ giác nên gọi là *lăng trụ đứng tứ giác*, kí hiệu $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

?1 *Hai mặt phẳng chứa hai đáy của một lăng trụ đứng có song song với nhau hay không ?*

– Các cạnh bên có vuông góc với hai mặt phẳng đáy hay không ?

– Các mặt bên có vuông góc với hai mặt phẳng đáy hay không ?

Hình hộp chữ nhật, hình lập phương cũng là những hình lăng trụ đứng.

Hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành được gọi là *hình hộp đứng*.

?2 *Trên hình 94 là tấm lịch để bàn, nó có dạng một lăng trụ đứng. Hãy chỉ rõ các đáy, mặt bên, cạnh bên của lăng trụ.*

Hình 94

2. Ví dụ

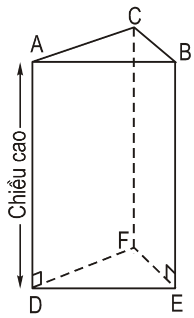
Hình 95 cho ta hình ảnh một lăng trụ đứng tam giác.

Trong hình lăng trụ đó :

– Hai mặt đáy ABC và DEF là những tam giác bằng nhau (và nằm trong hai mặt phẳng song song).

– Các mặt bên ADEB, BEFC, CFDA là những hình chữ nhật.

– Độ dài một cạnh bên được gọi là *chiều cao*. Trên hình 95, chiều cao của lăng trụ bằng độ dài đoạn thẳng AD.



Hình 95

▶ ***Chú ý***

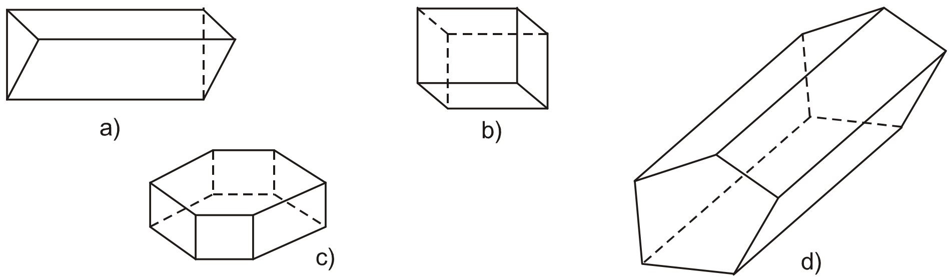
– BCFE là một hình chữ nhật, khi vẽ nó trên mặt phẳng, ta thường vẽ thành hình bình hành.

– Các cạnh song song vẽ thành các đoạn thẳng song song.

– Các cạnh vuông góc có thể không vẽ thành các đoạn thẳng vuông góc (EB và EF chẳng hạn).

BÀI TẬP

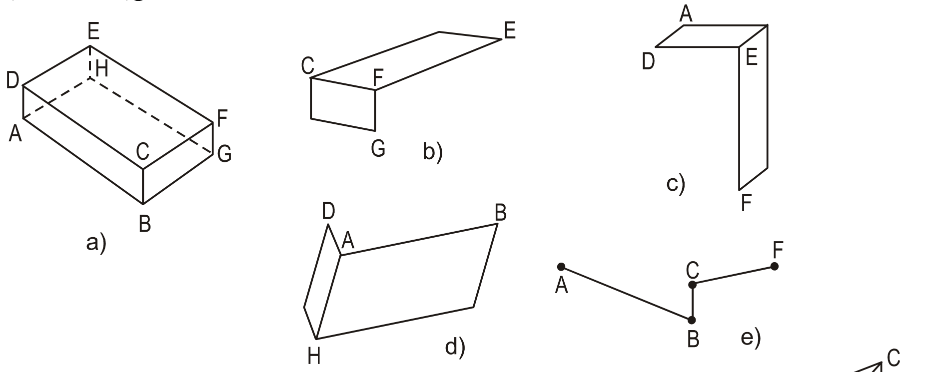
19. Quan sát các lăng trụ đứng trong hình 96 rồi điền số thích hợp vào các ô trống ở bảng dưới đây :



Hình 96

Hình	a	b	c	d
Số cạnh của một đáy	3			
Số mặt bên		4		
Số đỉnh			12	
Số cạnh bên				5

20. Vẽ lại các hình sau vào vở rồi vẽ thêm các cạnh vào các hình 97b, c, d, e để có một hình hộp hoàn chỉnh (như hình 97a).



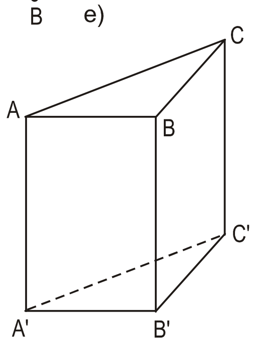
Hình 97

21. ABC.A'B'C' là một lăng trụ đứng tam giác (h.98).

a) Những cặp mặt nào song song với nhau ?

b) Những cặp mặt nào vuông góc với nhau ?

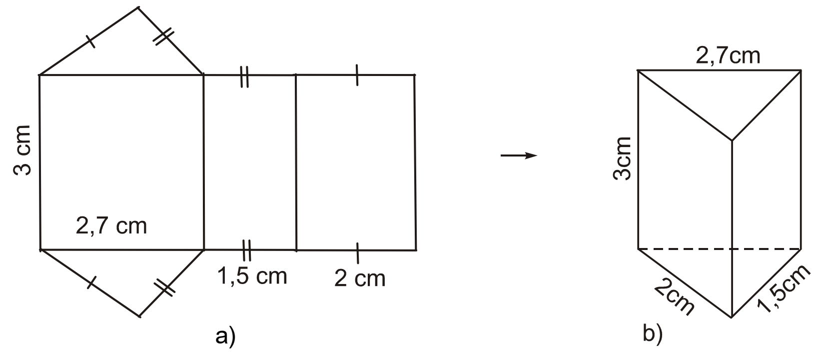
c) Sử dụng kí hiệu "// " và "⊥" để điền vào các ô trống ở bảng sau :



Hình 98

Cạnh / Mặt	AA'	CC'	BB'	A'C'	B'C'	A'B'	AC	CB	AB
ACB		$\perp$				//			
A'C'B'									
ABB'A'									

22. Vẽ theo hình 99a rồi cắt và gấp lại để được lăng trụ đứng như hình 99b.



Hình 99

§5. Diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng

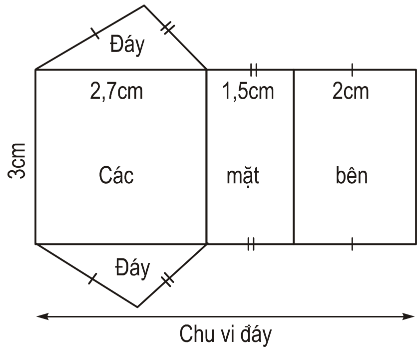
1. Công thức tính diện tích xung quanh

? *Quan sát hình khai triển của một lăng trụ đứng tam giác (h.100) :*

– Độ dài các cạnh của hai đáy là bao nhiêu ?

– Diện tích của mỗi hình chữ nhật là bao nhiêu ?

– Tổng diện tích của cả ba hình chữ nhật là bao nhiêu ?



Hình 100

• Diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng bằng tổng diện tích của các mặt bên. Ta có công thức

$$\boxed{S_{xq} = 2p.h}$$

(p là nửa chu vi đáy, h là chiều cao).

Diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng bằng chu vi đáy nhân với chiều cao.

• Diện tích toàn phần của lăng trụ đứng bằng tổng của diện tích xung quanh và diện tích hai đáy.

2. Ví dụ

Tính diện tích toàn phần của một lăng trụ đứng, đáy là tam giác vuông, theo các kích thước ở hình 101.

Giải :

– Trong tam giác vuông ABC (vuông tại A), theo định lí Py-ta-go, ta có :

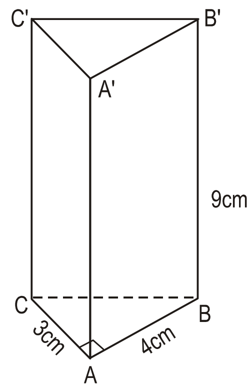
$$CB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ (cm)}.$$

– Diện tích xung quanh :

$$S_{xq} = (3 + 4 + 5).9 = 108 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

– Diện tích hai đáy :

$$2 . \frac{1}{2} . 3 . 4 = 12 \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Hình 101

– Diện tích toàn phần :

$$S_{tp} = 108 + 12 = 120\ (cm^2).$$

Đáp số : $S_{tp} = 120\ cm^2$.

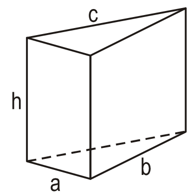
BÀI TẬP

23. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của các lăng trụ đứng sau đây (h.102) :

Hình 102

24. Quan sát lăng trụ đứng tam giác (h.103) rồi điền số thích hợp vào các ô trống ở bảng sau :

a (cm)	5	3	12	7
b (cm)	6	2	15	
c (cm)	7		13	6
h (cm)	10	5		
Chu vi đáy (cm)		9		21
S_{xq} (cm^2)			80	63

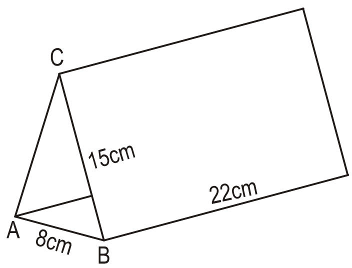


Hình 103

25. Tấm lịch để bàn (xem lại hình 94) có dạng một lăng trụ đứng, ACB là một tam giác cân (h.104).

a) Hãy vẽ thêm nét khuất, điền thêm chữ vào các đỉnh rồi cho biết AC song song với những cạnh nào.

b) Tính diện tích miếng bìa dùng để làm một tấm lịch như trên.



Hình 104

26. a) Từ hình khai triển (h.105), có thể gấp theo các cạnh để có được một lăng trụ đứng hay không ? (Các tứ giác trên hình đều là những hình chữ nhật).

b) Trong hình vừa gấp được, xét xem các phát biểu dưới đây, phát biểu nào đúng :

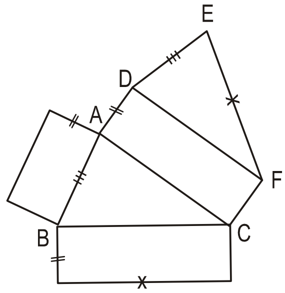
– Cạnh AD vuông góc với cạnh AB.

– EF và CF là hai cạnh vuông góc với nhau.

– Cạnh DE và cạnh BC vuông góc với nhau.

– Hai đáy (ABC) và (DEF) nằm trên hai mặt phẳng song song với nhau.

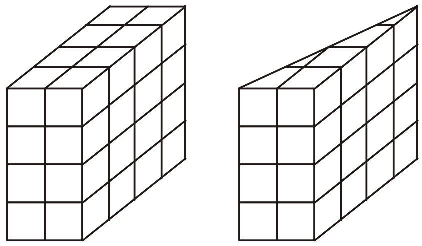
– Mặt phẳng (ABC) song song với mặt phẳng (ACFD).



Hình 105

§6. Thể tích của hình lăng trụ đứng

Tính thể tích hình lăng trụ đứng như thế nào ?

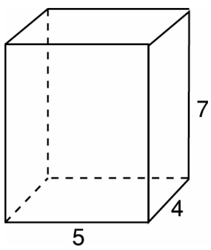


1. Công thức tính thể tích

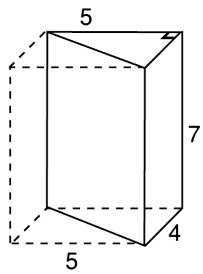
Ở §3 ta đã biết : Thể tích của hình hộp chữ nhật với các kích thước a, b, c được tính theo công thức

$$V = abc \text{ hay } V = \text{Diện tích đáy} \times \text{Chiều cao}$$

? *Quan sát các lăng trụ đứng ở hình 106.*



a) Lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật



b) Lăng trụ đứng có đáy là tam giác vuông

Hình 106

– *So sánh thể tích của lăng trụ đứng tam giác và thể tích hình hộp chữ nhật.*

– *Thể tích lăng trụ đứng tam giác có bằng diện tích đáy nhân với chiều cao hay không ? Vì sao ?*

Tổng quát, ta có công thức tính thể tích hình lăng trụ đứng :

$$\boxed{V = S.h}$$

(S là diện tích đáy, h là chiều cao).

Thể tích hình lăng trụ đứng bằng diện tích đáy nhân với chiều cao.

2. Ví dụ

Cho lăng trụ đứng ngũ giác với các kích thước ở hình 107 (đơn vị xentimét). Hãy tính thể tích của lăng trụ.

Giải : Lăng trụ đã cho gồm một hình hộp chữ nhật và một lăng trụ đứng tam giác có cùng chiều cao.

Thể tích hình hộp chữ nhật :

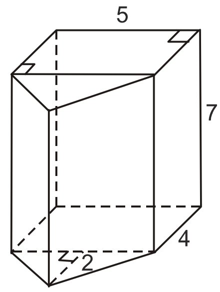
$$V_1 = 4.5.7 = 140 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Thể tích lăng trụ đứng tam giác :

$$V_2 = \frac{1}{2}.5.2.7 = 35 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Thể tích lăng trụ đứng ngũ giác :

$$V = V_1 + V_2 = 175 \text{ (cm}^3\text{)}.$$



Lăng trụ đứng
có đáy là ngũ giác

Hình 107

Nhận xét. Có thể tính diện tích đáy của lăng trụ đứng ngũ giác

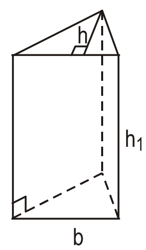
$$S_{\text{đáy}} = 5.4 + \frac{1}{2}.5.2 = 25 \text{ (cm}^2\text{)}$$

rồi suy ra thể tích lăng trụ.

BÀI TẬP

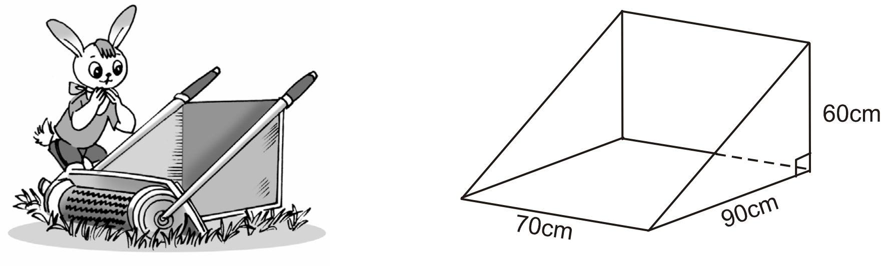
27. Quan sát hình 108 rồi điền số thích hợp vào các ô trống ở bảng sau :

b	5	6	4	
h	2			4
h_1	8	5		10
Diện tích một đáy		12	6	
Thể tích			12	50



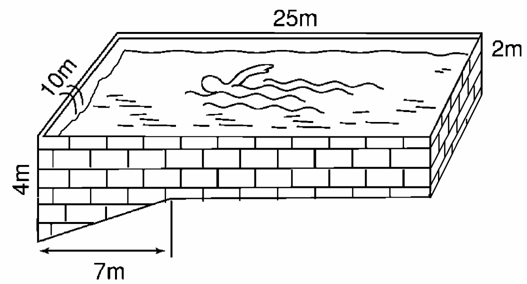
Hình 108

28. Thùng đựng của một máy cắt cỏ có dạng lăng trụ đứng tam giác (h.109). Hãy tính dung tích của thùng.



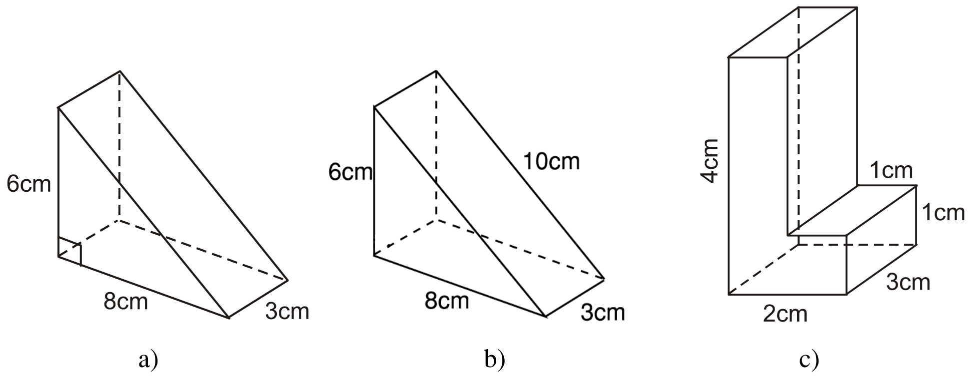
Hình 109

29. Các kích thước của một bể bơi được cho trên hình 110 (mặt nước có dạng hình chữ nhật). Hãy tính xem bể chứa được bao nhiêu mét khối nước khi nó đầy ắp nước.



Hình 110

30. Các hình a, b, c (h.111) gồm một hoặc nhiều lăng trụ đứng. Hãy tính thể tích và diện tích toàn phần của chúng theo các kích thước đã cho trên hình.



Hình 111

LUYỆN TẬP

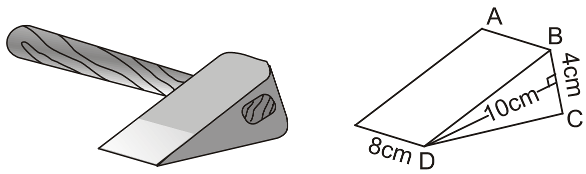
31. Điền số thích hợp vào các ô trống ở bảng sau :

	Lăng trụ 1	Lăng trụ 2	Lăng trụ 3
Chiều cao của lăng trụ đứng tam giác	5cm	7cm	
Chiều cao của tam giác đáy			5cm
Cạnh tương ứng với đường cao của tam giác đáy	3cm	5cm	
Diện tích đáy	$6cm^2$		$15cm^2$
Thể tích lăng trụ đứng		$49cm^3$	$0{,}045l$

32. Hình 112b biểu diễn một lưỡi rìu bằng sắt, nó có dạng một lăng trụ đứng, BDC là một tam giác cân.

a) Hãy vẽ thêm nét khuất, điền thêm chữ vào các đỉnh rồi cho biết AB song song với những cạnh nào.

b) Tính thể tích lưỡi rìu.



a) b)

Hình 112

c) Tính khối lượng của lưỡi rìu, biết khối lượng riêng của sắt là $7{,}874kg/dm^3$ (phần cán gỗ bên trong lưỡi rìu là không đáng kể).

33. Hình 113 là một lăng trụ đứng, đáy là hình thang vuông.

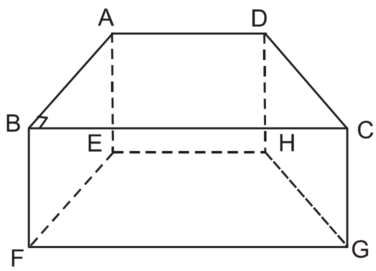
Hãy kể tên :

a) Các cạnh song song với cạnh AD ;

b) Cạnh song song với cạnh AB ;

c) Các đường thẳng song song với mặt phẳng (EFGH) ;

d) Các đường thẳng song song với mặt phẳng (DCGH).

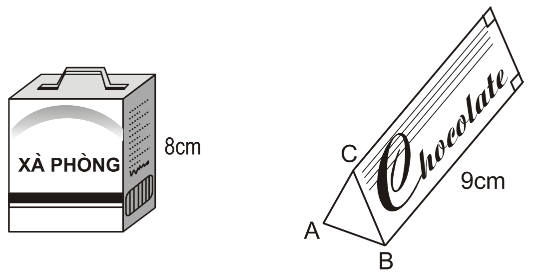


Hình 113

34. Tính thể tích của hộp xà phòng và hộp sô-cô-la trên hình 114, biết :

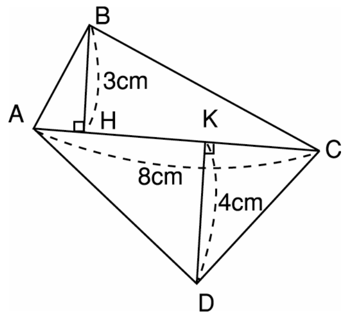
a) Diện tích đáy hộp xà phòng là 28cm^2 (h.114a) ;

b) Diện tích tam giác ABC ở hình 114b là 12cm^2.



a) $S_{đáy} = 28cm^2$ b) $S_{ABC} = 12cm^2$

Hình 114



Hình 115

35. Đáy của một lăng trụ đứng là tứ giác, các kích thước cho theo hình 115. Biết chiều cao của lăng trụ là 10cm. Hãy tính thể tích của nó.

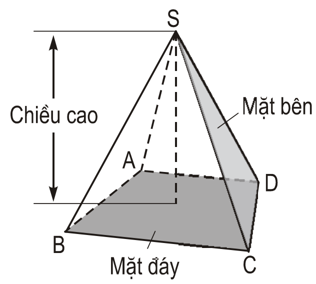
B - HÌNH CHÓP ĐỀU

§7. Hình chóp đều và hình chóp cụt đều

1. Hình chóp

• Hình 116 là một hình chóp. Nó có mặt đáy là một đa giác và các mặt bên là những tam giác(*) có chung một đỉnh. Đỉnh chung này gọi là *đỉnh* của hình chóp.

• Đường thẳng đi qua đỉnh và vuông góc với mặt phẳng đáy gọi là *đường cao* của hình chóp.



Hình 116

• Trong hình 116, hình chóp S.ABCD có đỉnh là S, đáy là tứ giác ABCD, ta gọi đó là *hình chóp tứ giác*.

(*) Cùng với các điểm trong của nó.

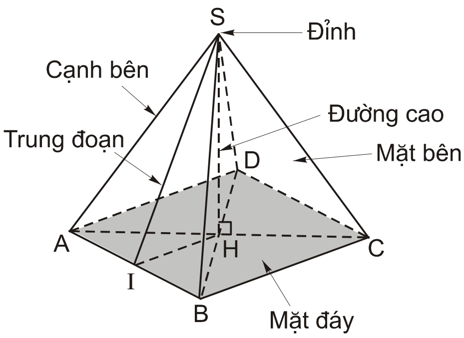
2. Hình chóp đều

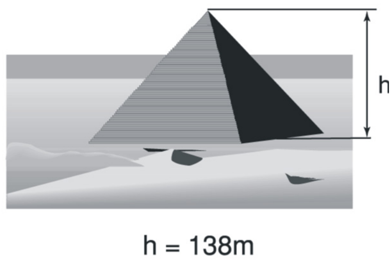
Hình chóp S.ABCD trên hình 117 có đáy là hình vuông, các mặt bên SAB, SBC, SCD và SDA là những tam giác cân bằng nhau. Ta gọi S.ABCD là *hình chóp tứ giác đều*.

• *Hình chóp đều* là hình chóp có mặt đáy là một đa giác đều, các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau có chung đỉnh (là đỉnh của hình chóp).

Trên hình chóp đều S.ABCD (h.117) :

– Chân đường cao H là tâm của đường tròn đi qua các đỉnh của mặt đáy.



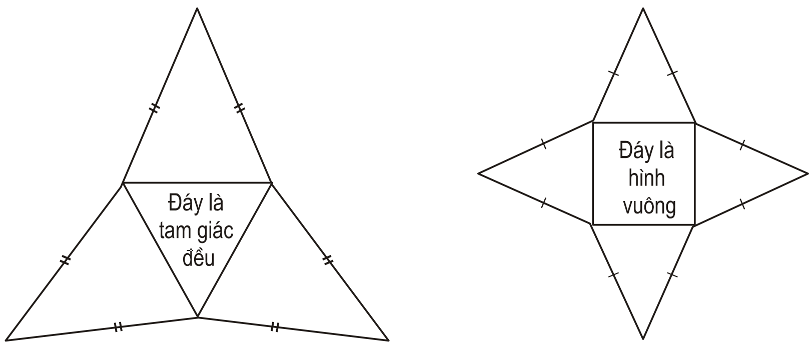


Chiều cao của kim tự tháp Kê-ốp ở Ai Cập là h = 138m.

Hình 117

– Đường cao vẽ từ đỉnh S của mỗi mặt bên của hình chóp đều được gọi là *trung đoạn* của hình chóp đó.

? *Cắt từ tấm bìa cứng thành các hình như ở hình 118 rồi gấp lại để có những hình chóp đều.*

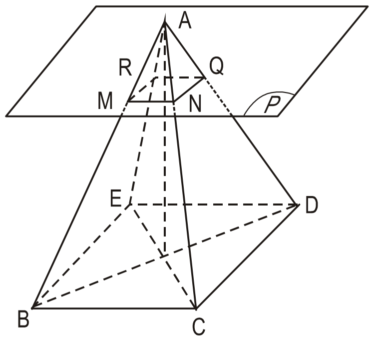


Hình 118

3. Hình chóp cụt đều

Cắt hình chóp đều bằng một mặt phẳng song song với đáy (h.119). Phần hình chóp nằm giữa mặt phẳng đó và mặt phẳng đáy của hình chóp gọi là *hình chóp cụt đều*.

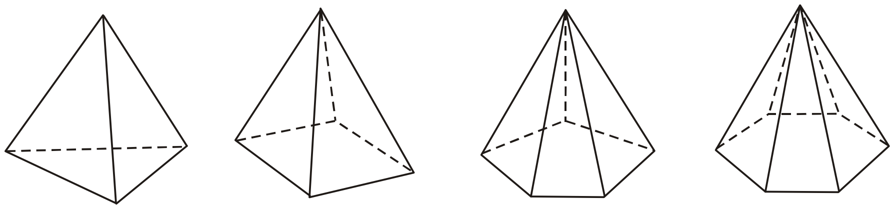
Nhận xét. Mỗi *mặt bên* của hình chóp cụt đều là một hình thang cân. Chẳng hạn mặt bên MNCB là một hình thang cân.



Hình 119

BÀI TẬP

36. Quan sát hình 120 và điền cụm từ và số thích hợp vào các ô trống ở bảng sau, biết rằng các hình đã cho là những hình chóp đều.



Hình 120

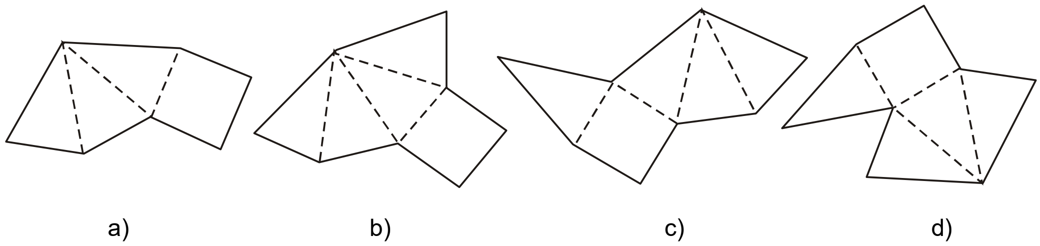
	Chóp tam giác đều	Chóp tứ giác đều	Chóp ngũ giác đều	Chóp lục giác đều
Đáy	Tam giác đều			
Mặt bên		Tam giác cân		
Số cạnh đáy			5	
Số cạnh			10	
Số mặt		5		

37. Hãy xét sự đúng, sai của các phát biểu sau :

a) Hình chóp đều có đáy là hình thoi và chân đường cao trùng với giao điểm hai đường chéo của đáy.

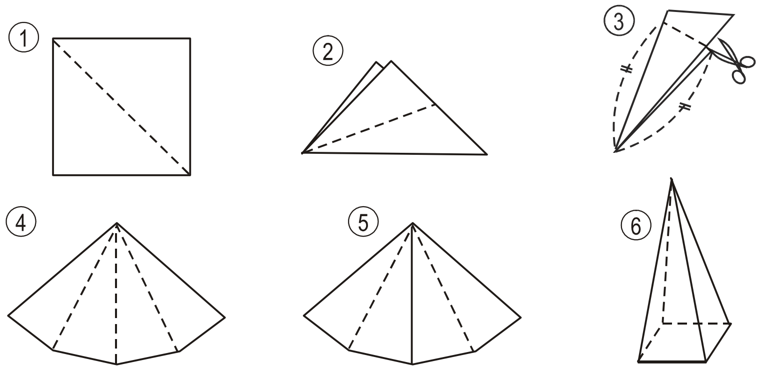
b) Hình chóp đều có đáy là hình chữ nhật và chân đường cao trùng với giao điểm hai đường chéo của đáy.

38. Trong các tấm bìa ở hình 121, em gấp lại tấm bìa nào thì có được một hình chóp đều ?



Hình 121

39. *Thực hành*. Từ tờ giấy cắt ra một hình vuông rồi thực hiện các thao tác theo thứ tự từ 1 đến 6 để có thể ghép được các mặt bên của một hình chóp tứ giác đều (h.122).



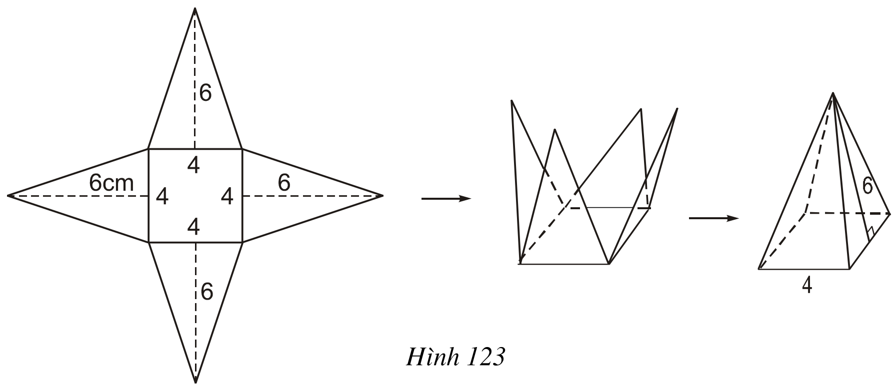
Hình 122

§8. Diện tích xung quanh của hình chóp đều

Tính diện tích xung quanh của hình chóp đều như thế nào ?

1. Công thức tính diện tích xung quanh

? *Vẽ, cắt và gấp miếng bìa như ở hình 123. Quan sát hình gấp được, hãy điền số thích hợp vào chỗ trống (...) ở các câu dưới đây :*



Hình 123

a) *Số các mặt bằng nhau trong một hình chóp tứ giác đều là ...*

b) *Diện tích mỗi mặt tam giác là ... cm^2 .*

c) *Diện tích đáy của hình chóp đều là ... cm^2 .*

d) *Tổng diện tích tất cả các mặt bên của hình chóp đều là ... cm^2 .*

Ta có :

• *Diện tích xung quanh của hình chóp đều bằng tích của nửa chu vi đáy với trung đoạn :*

$$\boxed{\mathbf{S_{xq} = p \, . \, d}}$$

(p là nửa chu vi đáy ; d là trung đoạn của hình chóp đều).

• Diện tích toàn phần của hình chóp bằng tổng của diện tích xung quanh và diện tích đáy.

2. Ví dụ

Hình chóp S.ABC có bốn mặt là những tam giác đều bằng nhau. H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC, bán kính HC = R = $\sqrt{3}$ (cm). Biết rằng $AB = R\sqrt{3}$, tính diện tích xung quanh của hình chóp (h.124).

Giải : Dễ thấy S.ABC là hình chóp đều. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC là R = $\sqrt{3}$, nên :

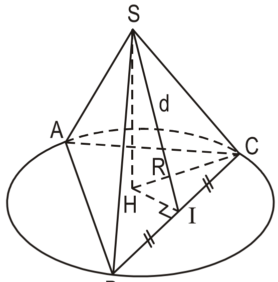
$AB = R\sqrt{3} = \sqrt{3}.\sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 = 3(cm)$.

Diện tích xung quanh của hình chóp :

$$S_{xq} = p\,d = \frac{9}{2}.\frac{3}{2}\cdot\sqrt{3} = \frac{27}{4}\sqrt{3}\ (cm^2).$$

• Có thể tính theo cách khác như sau :

$$S_{xq} = 3.S_{ABC} = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{27}{4}\sqrt{3}(cm^2).$$



Hình 124

BÀI TẬP

40. Một hình chóp tứ giác đều có độ dài cạnh bên bằng 25cm, đáy là hình vuông ABCD cạnh 30cm.

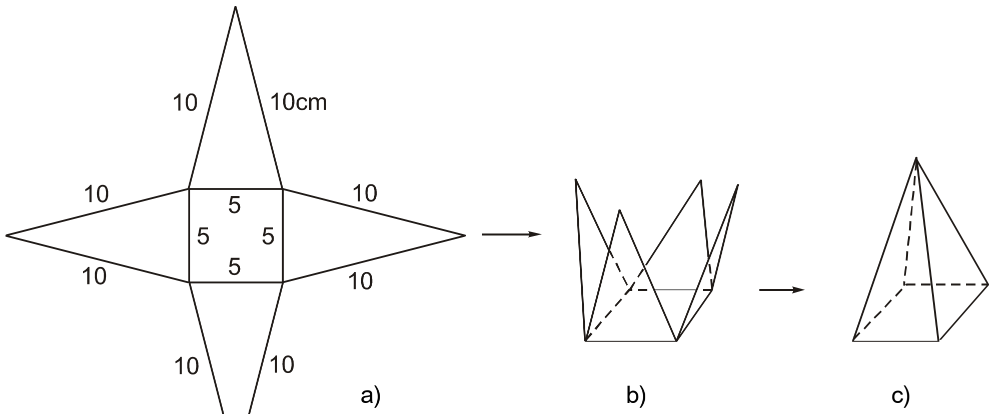
Tính diện tích toàn phần của hình chóp.

41. Vẽ, cắt và gấp miếng bìa như đã chỉ ra ở hình 125 để được hình chóp tứ giác đều.

a) Trong hình 125a, có bao nhiêu tam giác cân bằng nhau ?

b) Sử dụng định lí Py-ta-go để tính chiều cao ứng với đáy của mỗi tam giác.

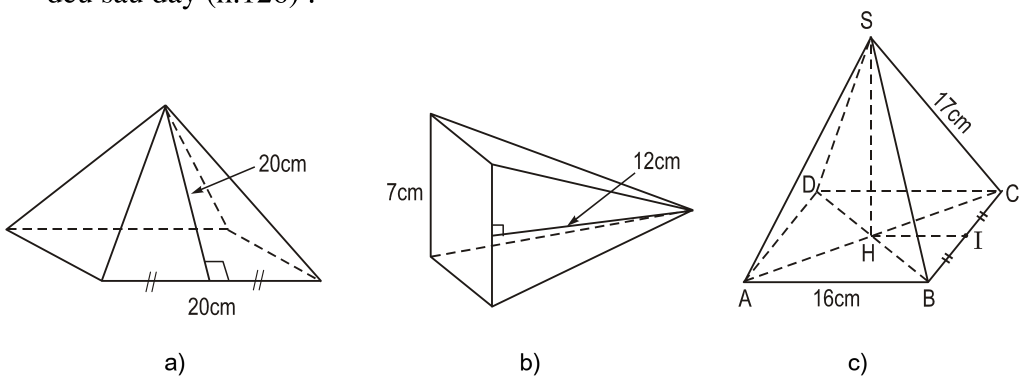
c) Diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình chóp đều này là bao nhiêu ?



Hình 125

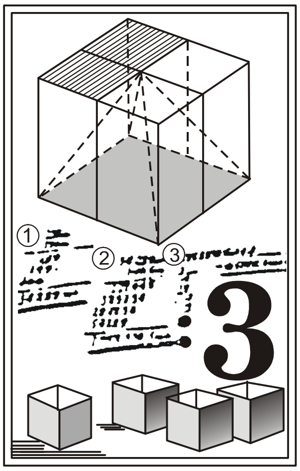
42. Tính độ dài đường cao của hình chóp tứ giác đều với các kích thước cho trên hình 125.

43. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của các hình chóp tứ giác đều sau đây (h.126) :



Hình 126

§9. Thể tích của hình chóp đều



Tính thể tích hình chóp đều như thế nào ?

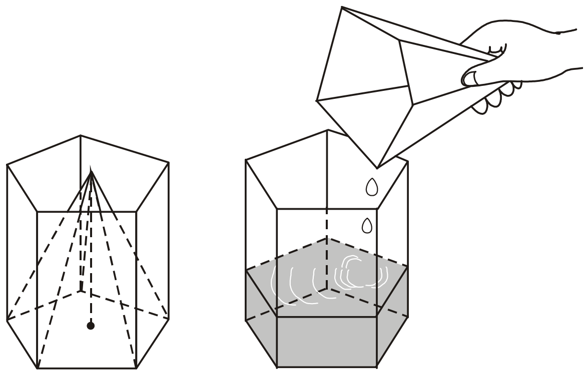
1. Công thức tính thể tích

Có hai dụng cụ đựng nước hình lăng trụ đứng và hình chóp đều có các đáy là hai đa giác đều có thể đặt chồng khít lên nhau. Chiều cao của lăng trụ bằng chiều cao của hình chóp (h.127).

Nếu ta lấy dụng cụ hình chóp đều nói trên, múc đầy nước rồi đổ hết vào lăng trụ thì thấy chiều cao của cột nước này chỉ bằng $\frac{1}{3}$ chiều cao của lăng trụ. Như vậy :

$$V_{\text{chóp}} = \frac{1}{3} V_{\text{lăng trụ}} = \frac{1}{3} S.h .$$

Người ta chứng minh được công thức này cũng đúng cho mọi hình chóp đều :



Hình 127

$$\boxed{V = \frac{1}{3} S.h}$$

(S là diện tích đáy ; h là chiều cao).

2. Ví dụ

Tính thể tích của một hình chóp tam giác đều, biết chiều cao của hình chóp là 6cm, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đáy bằng 6cm và $\sqrt{3} \approx 1{,}73$.

Giải :

Cạnh của tam giác đáy :

$$a = R\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

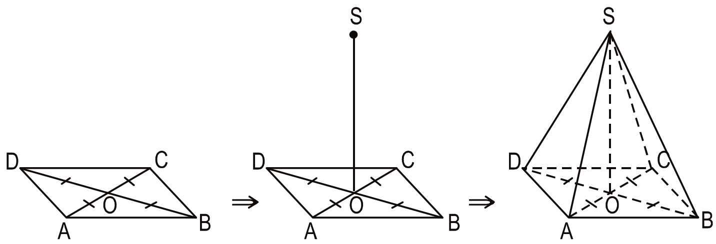
Diện tích tam giác đáy :

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 27\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Thể tích của hình chóp :

$$V = \frac{1}{3}S.h \approx 93{,}42 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

? *Thực hiện các bước vẽ hình chóp đều theo chiều mũi tên đã chỉ ra trên hình 128.*



Hình 128

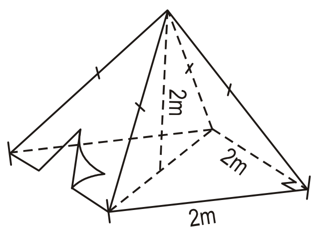
▶ ***Chú ý.*** *Người ta cũng nói "Thể tích của khối lăng trụ, khối chóp..." thay cho "Thể tích của hình lăng trụ, hình chóp...".*

BÀI TẬP

44. Hình 129 là một cái lều ở trại hè của học sinh kèm theo các kích thước.

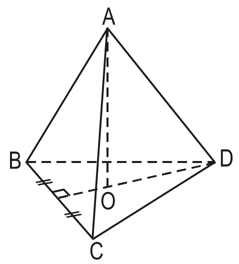
a) Thể tích không khí bên trong lều là bao nhiêu ?

b) Xác định số vải bạt cần thiết để dựng lều (không tính đến đường viền, nếp gấp,... biết $\sqrt{5} \approx 2{,}24$).



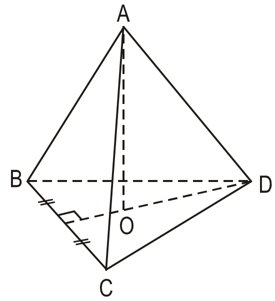
Hình 129

45. Tính thể tích của mỗi hình chóp đều dưới đây (h.130, h.131) :



Đường cao AO = 12cm,
BC = 10cm ($\sqrt{75} \approx 8,66$)

Hình 130



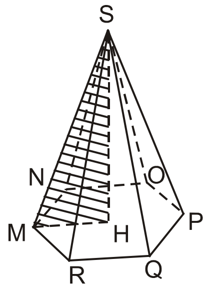
Đường cao AO = 16,2cm,
BC = 8cm ($\sqrt{48} \approx 6,93$)

Hình 131

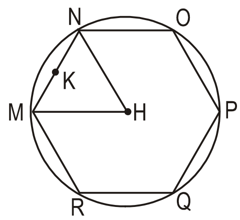
46. S.MNOPQR là một hình chóp lục giác đều (h.132). Bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy (đường tròn tâm H, đi qua sáu đỉnh của đáy) HM = 12cm (h.133), chiều cao SH = 35cm. Hãy tính :

a) Diện tích đáy và thể tích của hình chóp (biết $\sqrt{108} \approx 10,39$) ;

b) Độ dài cạnh bên SM và diện tích toàn phần của hình chóp (biết $\sqrt{1333} \approx 36,51$).



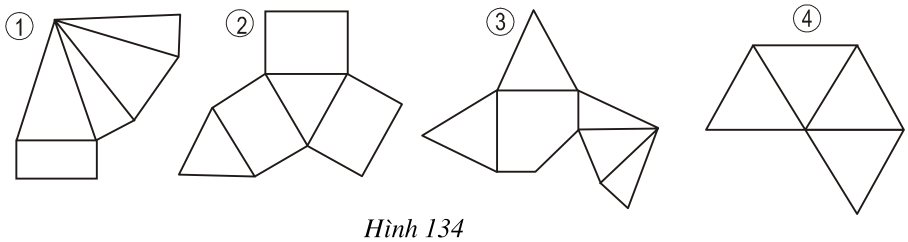
Hình 132



Hình 133

LUYỆN TẬP

47. Trong các miếng bìa ở hình 134, miếng nào khi gấp và dán lại thì được một hình chóp đều ?



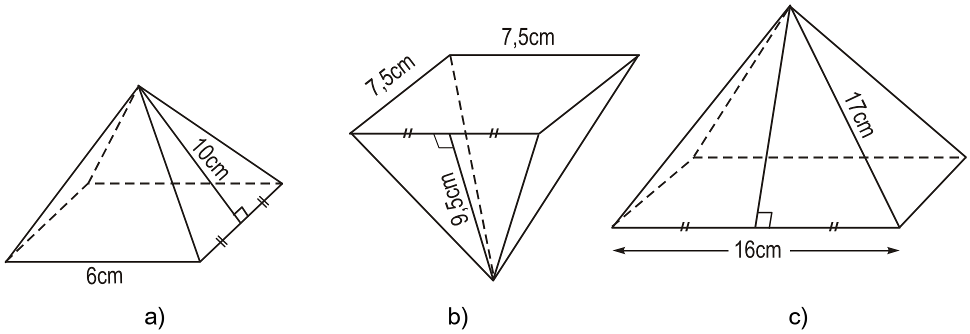
Hình 134

48. Tính diện tích toàn phần của :

a) Hình chóp tứ giác đều, biết cạnh đáy a = 5cm, cạnh bên b = 5cm, $\sqrt{18,75} \approx 4,33$;

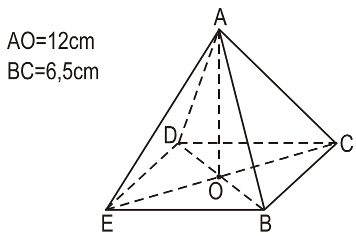
b) Hình chóp lục giác đều, biết cạnh đáy a = 6cm, cạnh bên b = 10cm, $\sqrt{3} \approx 1,73$; $\sqrt{91} \approx 9,54$.

49. Tính diện tích xung quanh của các hình chóp tứ giác đều sau đây (h.135) :

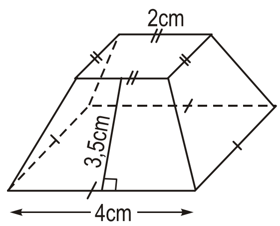


Hình 135

50. a) Tính thể tích của hình chóp đều (h.136).



Hình 136



Hình 137

b) Tính diện tích xung quanh của hình chóp cụt đều (h.137).

(*Hướng dẫn :* Diện tích cần tính bằng tổng diện tích các mặt xung quanh. Các mặt xung quanh là những hình thang cân với cùng chiều cao, các cạnh đáy tương ứng bằng nhau, các cạnh bên bằng nhau).

ÔN TẬP CHƯƠNG IV

A - Câu hỏi

1. Hãy quan sát phần trong của lớp học rồi chỉ ra :

a) Các đường thẳng song song với nhau ;

b) Các đường thẳng cắt nhau ;

c) Các mặt phẳng song song với nhau ;

d) Các đường thẳng vuông góc với nhau ;

e) Các đường thẳng vuông góc với các mặt phẳng ;

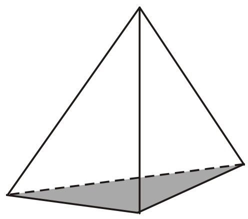
f) Các mặt phẳng vuông góc với nhau.

2. a) Hình lập phương có mấy mặt, mấy cạnh, mấy đỉnh ? Các mặt là những hình gì ?

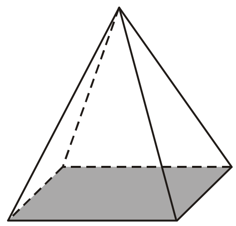
b) Hình hộp chữ nhật có mấy mặt, mấy cạnh, mấy đỉnh ?

c) Hình lăng trụ đứng tam giác có mấy cạnh, mấy đỉnh, mấy mặt ?

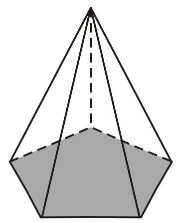
3. Hãy gọi tên các hình chóp theo những hình vẽ dưới đây :



Hình 138

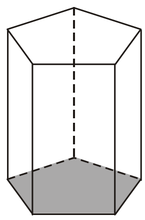


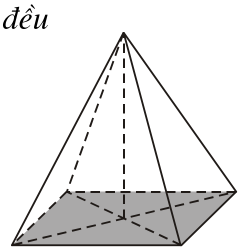
Hình 139



Hình 140

HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG, HÌNH HỘP, HÌNH CHÓP ĐỀU

Hình	Diện tích xung quanh	Diện tích toàn phần	Thể tích
 *Hình 141a* – *Lăng trụ đứng :* Hình có các mặt bên là những hình chữ nhật, đáy là một đa giác. – *Lăng trụ đều :* Lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.	$S_{xq} = 2p.h$ p : nửa chu vi đáy h : chiều cao	$S_{tp} = S_{xq} + 2S_đ$	V = S.h S : diện tích đáy h : chiều cao

Hình	Diện tích xung quanh	Diện tích toàn phần	Thể tích
– *Hình hộp chữ nhật :* Hình có sáu mặt là những hình chữ nhật.	$S_{xq} = 2(a+b)c$ a, b : hai cạnh đáy c : chiều cao	$S_{tp} = 2(ab + ac + bc)$	V = abc
– *Hình lập phương :* Hình hộp chữ nhật có ba kích thước bằng nhau (các mặt đều là hình vuông).	$S_{xq} = 4a^2$ a: cạnh hình lập phương	$S_{tp} = 6a^2$	$V = a^3$
Chóp đều  *Hình 141 b* Hình chóp đều là hình chóp có mặt đáy là một đa giác đều, các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau có chung đỉnh.	$S_{xq} = p.d$ p : nửa chu vi đáy d : chiều cao của mặt bên (trung đoạn)	$S_{tp} = S_{xq} + S_đ$	$V = \frac{1}{3}S.h$ S : diện tích đáy h : chiều cao

B - Bài tập

51. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của lăng trụ đứng có chiều cao h và đáy lần lượt là :

a) Hình vuông cạnh a ;

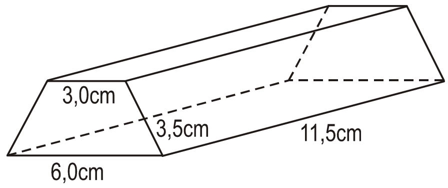
b) Tam giác đều cạnh a ;

c) Lục giác đều cạnh a ;

d) Hình thang cân, đáy lớn là 2a, các cạnh còn lại bằng a ;

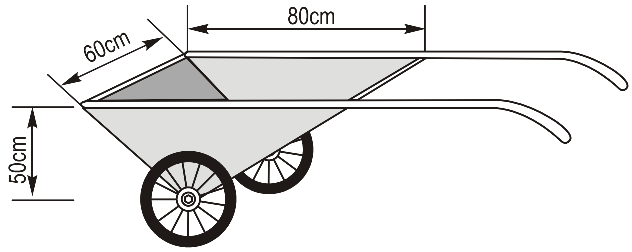
e) Hình thoi có hai đường chéo là 6a và 8a.

52. Tính diện tích toàn phần của thanh gỗ như ở hình 142 (mặt trước, mặt sau của thanh gỗ là những hình thang cân, bốn mặt còn lại đều là những hình chữ nhật, cho biết $\sqrt{10} \approx 3,16$).



Hình 142

53. Thùng chứa của xe ở hình 143 có dạng lăng trụ đứng tam giác, các kích thước cho trên hình. Hỏi dung tích của thùng chứa là bao nhiêu ?

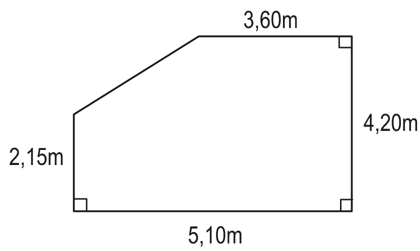


Hình 143

54. Người ta muốn đổ một tấm bê tông dày 3cm, bề mặt của tấm bê tông có các kích thước như ở hình 144.

a) Số bê tông cần phải có là bao nhiêu ?

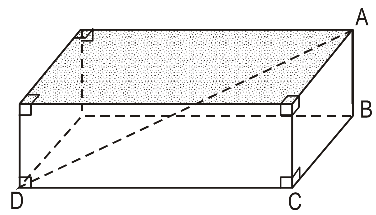
b) Cần phải có bao nhiêu chuyến xe để chở số bê tông cần thiết đến chỗ đổ bê tông, nếu mỗi xe chứa được $0,06\ m^3$? (Không tính số bê tông dư thừa hoặc rơi vãi).



Hình 144

55. A, B, C, D là các đỉnh của một hình hộp chữ nhật. Hãy quan sát hình 145 rồi điền số thích hợp vào các ô trống ở bảng sau :

AB	BC	CD	AD
1	2	2	
2	3		7
2		9	11
	12	20	25



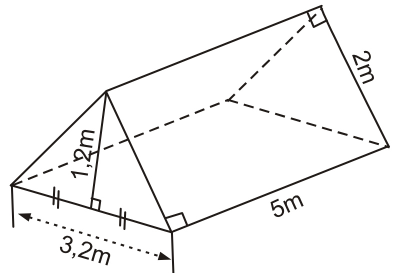
Hình 145

56. Một cái lều ở trại hè có dạng lăng trụ đứng tam giác (với các kích thước trên hình 146).

a) Tính thể tích khoảng không ở bên trong lều.

b) Số vải bạt cần phải có để dựng lều đó là bao nhiêu ?

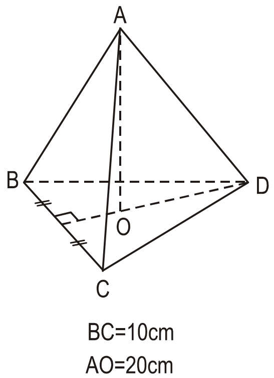
(Không tính các mép và nếp gấp của lều).



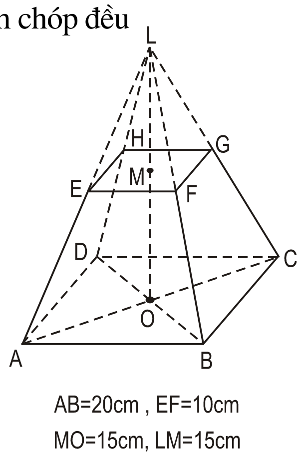
Hình 146

57. Tính thể tích của hình chóp đều, hình chóp cụt đều sau đây (h.147 và h.148), ($\sqrt{3} \approx 1,73$).

Hướng dẫn : Hình chóp L.EFGH cũng là hình chóp đều

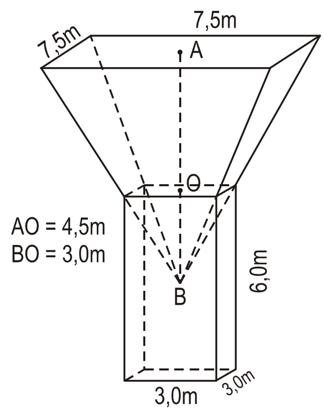


Hình 147



Hình 148

58. Tính thể tích của hình cho trên hình 149 với các kích thước kèm theo.



Hình 149

BÀI TẬP ÔN CUỐI NĂM

A - Phần đại số

1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $a^2 - b^2 - 4a + 4$; b) $x^2 + 2x - 3$;

c) $4x^2y^2 - (x^2 + y^2)^2$; d) $2a^3 - 54b^3$.

2. a) Thực hiện phép chia :

$$(2x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 2x - 3) : (2x^2 - 1).$$

b) Chứng tỏ rằng thương tìm được trong phép chia trên luôn luôn dương với mọi giá trị của x.

3. Chứng minh rằng hiệu các bình phương của hai số lẻ bất kì thì chia hết cho 8.

4. Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức sau tại $x = -\frac{1}{3}$:

$$\left[\frac{x+3}{(x-3)^2} + \frac{6}{x^2-9} - \frac{x-3}{(x+3)^2}\right]\left[1 : \left(\frac{24x^2}{x^4-81} - \frac{12}{x^2+9}\right)\right].$$

5. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} = \frac{b^2}{a+b} + \frac{c^2}{b+c} + \frac{a^2}{c+a}.$$

6. Tìm các giá trị nguyên của x để phân thức M có giá trị là một số nguyên :

$$M = \frac{10x^2 - 7x - 5}{2x - 3}.$$

7. Giải các phương trình :

a) $\frac{4x+3}{5} - \frac{6x-2}{7} = \frac{5x+4}{3} + 3$;

b) $\frac{3(2x-1)}{4} - \frac{3x+1}{10} + 1 = \frac{2(3x+2)}{5}$;

c) $\frac{x+2}{3} + \frac{3(2x-1)}{4} - \frac{5x-3}{6} = x + \frac{5}{12}$.

8. Giải các phương trình :

a) $|2x - 3| = 4$; b) $|3x - 1| - x = 2$.

9. Giải phương trình :

$$\frac{x+2}{98}+\frac{x+4}{96}=\frac{x+6}{94}+\frac{x+8}{92}.$$

10. Giải các phương trình :

a) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{5}{x-2}=\dfrac{15}{(x+1)(2-x)}$;   b) $\dfrac{x-1}{x+2}-\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{5x-2}{4-x^2}$.

11. Giải các phương trình :

a) $3x^2+2x-1=0$;   b) $\dfrac{x-3}{x-2}+\dfrac{x-2}{x-4}=3\dfrac{1}{5}$.

12. Một người đi xe máy từ A đến B với vận tốc 25km/h. Lúc về người đó đi với vận tốc 30km/h nên thời gian về ít hơn thời gian đi là 20 phút. Tính quãng đường AB.

13. Một xí nghiệp dự định sản xuất 1500 sản phẩm trong 30 ngày. Nhưng nhờ tổ chức lao động hợp lí nên thực tế đã sản xuất mỗi ngày vượt 15 sản phẩm. Do đó xí nghiệp đã sản xuất không những vượt mức dự định 255 sản phẩm mà còn hoàn thành trước thời hạn. Hỏi thực tế xí nghiệp đã rút ngắn được bao nhiêu ngày ?

14. Cho biểu thức :

$$A=\left(\frac{x}{x^2-4}+\frac{2}{2-x}+\frac{1}{x+2}\right):\left((x-2)+\frac{10-x^2}{x+2}\right).$$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của A tại x, biết $|x|=\dfrac{1}{2}$.

c) Tìm giá trị của x để $A<0$.

15. Giải bất phương trình : $\dfrac{x-1}{x-3}>1$.

B - Phần hình học

1. Dựng hình thang ABCD (AB // CD), biết ba cạnh : AD = 2cm, CD = 4cm, BC = 3cm và đường chéo AC = 5cm.

2. Cho hình thang ABCD (AB // CD) có hai đường chéo cắt nhau ở O và tam giác ABO là tam giác đều. Gọi E, F, G theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng OA, OD và BC. Chứng minh rằng tam giác EFG là tam giác đều.

3. Tam giác ABC có các đường cao BD, CE cắt nhau tại H. Đường vuông góc với AB tại B và đường vuông góc với AC tại C cắt nhau ở K. Tam giác ABC phải có điều kiện gì thì tứ giác BHCK là :

a) Hình thoi ?   b) Hình chữ nhật ?

4. Cho hình bình hành ABCD. Các điểm M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Gọi E là giao điểm của AN và DM, K là giao điểm của BN và CM. Hình bình hành ABCD phải có điều kiện gì để tứ giác MENK là :

a) Hình thoi ?

b) Hình chữ nhật ?

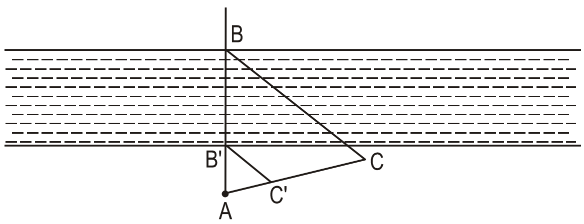
c) Hình vuông ?

5. Trong tam giác ABC, các đường trung tuyến AA' và BB' cắt nhau ở G. Tính diện tích tam giác ABC biết rằng diện tích tam giác ABG bằng S.

6. Cho tam giác ABC và đường trung tuyến BM. Trên đoạn thẳng BM lấy điểm D sao cho $\frac{BD}{DM} = \frac{1}{2}$. Tia AD cắt BC ở K. Tìm tỉ số diện tích của tam giác ABK và tam giác ABC.

7. Cho tam giác ABC (AB < AC). Tia phân giác của góc A cắt BC ở K. Qua trung điểm M của BC kẻ một tia song song với KA cắt đường thẳng AB ở D, cắt AC ở E. Chứng minh BD = CE.

8. Trên hình 151 cho thấy ta có thể xác định chiều rộng BB' của khúc sông bằng cách xét hai tam giác đồng dạng ABC và AB'C'. Hãy tính BB' nếu AC = 100m, AC' = 32m, AB' = 34m.



Hình 151

9. Cho tam giác ABC có AB < AC, D là một điểm nằm giữa A và C. Chứng minh rằng : $\widehat{ABD} = \widehat{ACB} \Leftrightarrow AB^2 = AC \cdot AD$.

10. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = 12cm, AD = 16cm, AA' = 25cm.

a) Chứng minh các tứ giác ACC'A', BDD'B' là những hình chữ nhật.

b) Chứng minh rằng $AC'^2 = AB^2 + AD^2 + AA'^2$.

c) Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật.

11. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy AB = 20cm, cạnh bên SA = 24cm.

a) Tính chiều cao SO rồi tính thể tích của hình chóp.

b) Tính diện tích toàn phần của hình chóp.

MỤC LỤC

Trang

Chịu trách nhiệm xuất bản : Chủ tịch Hội đồng Thành viên **NGUYỄN ĐỨC THÁI**
Tổng Giám đốc **HOÀNG LÊ BÁCH**

Chịu trách nhiệm nội dung : Tổng biên tập **PHAN XUÂN THÀNH**

Biên tập lần đầu : **NGUYỄN TRỌNG BÁ – NGUYỄN XUÂN BÌNH**
Biên tập tái bản : **ĐẶNG THỊ MINH THU**
Biên tập kĩ thuật và trình bày : **NGUYỄN THANH THUÝ – TRẦN THANH HẰNG**
Trình bày bìa : **BÙI QUANG TUẤN**
Sửa bản in : **NGUYỄN NGỌC TÚ**
Chế bản : **CÔNG TY CP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI**

TOÁN 8 - TẬP HAI

Mã số : 2H802T0

In.............. cuốn (QĐ in số : ....), khổ 17 × 24 cm.
Đơn vị in : .... địa chỉ ....
Cơ sở in : .... địa chỉ ....
Số ĐKXB : 01 - 2020/CXBIPH/309 - 869/GD
Số QĐXB : ... / QĐ-GD ngày ... tháng ... năm ....
In xong và nộp lưu chiểu tháng ... năm ...
Mã số ISBN : Tập một : 978-604-0-18587-7
Tập hai : 978-604-0-18588-4