BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

HÌNH HỌC

NÂNG CAO

10

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐOÀN QUỲNH (Tổng Chủ biên) - VĂN NHƯ CƯƠNG (Chủ biên)
PHẠM VŨ KHUÊ - BÙI VĂN NGHỊ

HÌNH HỌC

NÂNG CAO

10

(Tái bản lần thứ mười bốn)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Hãy bảo quản, giữ gìn sách giáo khoa để dành tặng cho các em học sinh lớp sau !

NHỮNG ĐIỀU HỌC SINH CẦN CHÚ Ý KHI SỬ DỤNG SÁCH GIÁO KHOA

1. Khi nghe thầy cô giáo giảng bài, luôn luôn có SGK trước mặt. Tuy nhiên không viết, vẽ thêm vào SGK, để năm sau các bạn khác có thể dùng được.

2. Về trình bày, sách giáo khoa có hai mảng : mảng chính và mảng phụ.

Mảng chính gồm các định nghĩa, định lí, tính chất,... và thường được đóng khung hoặc có đường viền ở mép trái. Mảng này được in lùi vào trong.

3. Khi gặp **Câu hỏi** $\boxed{?}$, cần phải suy nghĩ, trả lời nhanh và đúng.

4. Khi gặp **Hoạt động**, các em phải dùng bút và giấy nháp để thực hiện những yêu cầu mà hoạt động đòi hỏi.

01 – 2020/CXBIPH/735 – 869/GD Mã số : NH002T0

CHƯƠNG I

VECTƠ

Vectơ là một khái niệm toán học mới đối với các em.

Học chương này, các em phải hiểu được vectơ là gì, thế nào là tổng, hiệu của hai vectơ, tích của một vectơ với một số. Những kiến thức này rất quan trọng, chúng là cơ sở để học môn Hình học của cả ba lớp 10, 11 và 12.

§1 CÁC ĐỊNH NGHĨA

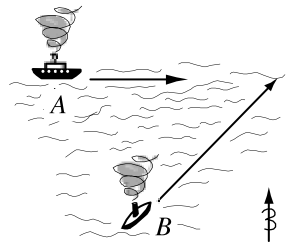
1. Vectơ là gì ?

Trong Vật lí, những đại lượng như vận tốc, gia tốc, lực,... được gọi là *đại lượng có hướng*. Để xác định các đại lượng đó, ngoài cường độ của chúng, ta còn phải biết hướng của chúng nữa.

Ví dụ : *Một chiếc tàu thuỷ chuyển động thẳng đều với tốc độ* 20 *hải lí một giờ, hiện nay đang ở vị trí M. Hỏi sau* 3 *giờ nữa nó sẽ ở đâu ?*

$\boxed{?1}$ *Các em có thể trả lời câu hỏi đó không ? Vì sao ?*

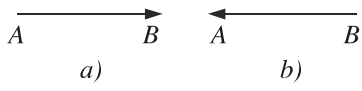
Hình 1 là hải đồ một vùng biển tại một thời điểm nào đó. Có hai tàu thuỷ chuyển động thẳng đều mà vận tốc được biểu thị bằng mũi tên. Các mũi tên vận tốc cho ta thấy : Tàu A chuyển động theo hướng Đông, còn tàu B chuyển động theo hướng Đông – Bắc. Tốc độ tàu A bằng một nửa tốc độ tàu B (do mũi tên của tàu A dài bằng một nửa mũi tên của tàu B).



Hình 1

Như vậy, các đại lượng có hướng thường được biểu thị bằng những mũi tên được gọi là những VECTƠ. Vectơ là một đoạn thẳng nhưng có hướng. Để biểu thị cho hướng của đoạn thẳng ta thêm một dấu "►" vào một trong hai điểm mút của đoạn thẳng đó.

Giả sử ta có đoạn thẳng AB (cũng có thể viết là đoạn thẳng BA). Nếu thêm dấu "►" vào điểm B thì ta có vectơ với điểm đầu là A và điểm cuối là B (h. 2a). Nếu ta thêm dấu "►" vào điểm A thì ta được vectơ với điểm đầu là B và điểm cuối là A (h. 2b).



Hình 2

Như vậy, vectơ là một đoạn thẳng đã xác định một hướng nào đó trong hai hướng có thể có của đoạn thẳng đã cho. Hướng của vectơ là hướng đi từ điểm đầu đến điểm cuối.

ĐỊNH NGHĨA

> ***Vectơ** là một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là trong hai điểm mút của đoạn thẳng, đã chỉ rõ điểm nào là điểm đầu, điểm nào là điểm cuối.*

Kí hiệu

Nếu vectơ có điểm đầu là M và điểm cuối là N thì ta kí hiệu vectơ đó là $\overrightarrow{MN}$.

Nhiều khi để thuận tiện, ta cũng kí hiệu một vectơ xác định nào đó bằng một chữ in thường, với mũi tên ở trên. Chẳng hạn vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$, ...

Vectơ-không

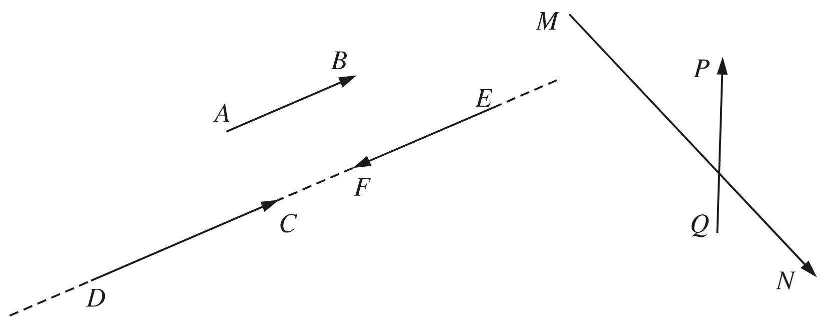
Ta biết rằng mỗi vectơ có một điểm đầu và một điểm cuối ; mỗi vectơ hoàn toàn được xác định nếu cho biết điểm đầu và điểm cuối của nó.

Bây giờ, với mỗi điểm M bất kì, ta quy ước có một vectơ mà điểm đầu là M và điểm cuối cũng là M. Vectơ đó được kí hiệu là $\overrightarrow{MM}$ và gọi là *vectơ-không* (có gạch nối giữa hai từ).

> *Vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau gọi là **vectơ-không**.*

2. Hai vectơ cùng phương, cùng hướng

Với mỗi vectơ $\overrightarrow{AB}$ (khác vectơ-không), đường thẳng AB được gọi là ***giá*** của vectơ $\overrightarrow{AB}$. Còn đối với vectơ-không $\overrightarrow{AA}$ thì mọi đường thẳng đi qua A đều gọi là giá của nó.



Hình 3

a) Trên hình 3, ta có các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{QP}$.

Hãy chú ý đến hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$, chúng có giá song song với nhau. Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EF}$ cũng có giá song song. Còn hai vectơ $\overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{EF}$ thì có giá trùng nhau.

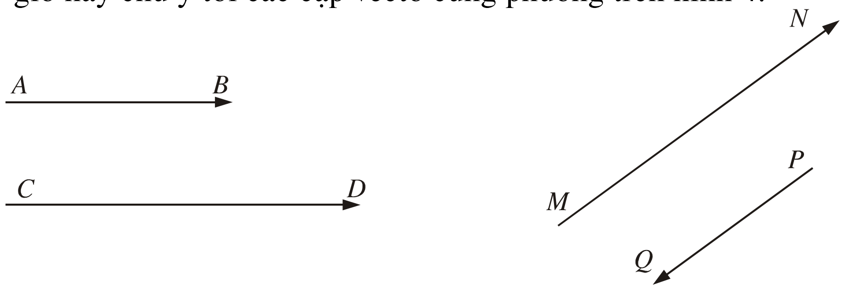
Trong các trường hợp đó, ta nói rằng : Các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{EF}$ *có cùng phương,* hay đơn giản là *cùng phương.*

Hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{QP}$ có giá cắt nhau. Ta nói hai vectơ đó không cùng phương. Vậy ta có định nghĩa

> *Hai vectơ được gọi là* ***cùng phương*** *nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.*

Rõ ràng vectơ-không cùng phương với mọi vectơ.

b) Bây giờ hãy chú ý tới các cặp vectơ cùng phương trên hình 4.



Hình 4

Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng phương, và hơn thế các mũi tên biểu thị $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ có cùng hướng, cụ thể là hướng từ trái sang phải.

Trong trường hợp này, ta nói : Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ ***cùng hướng***.

Hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PQ}$ cùng phương, tuy nhiên ta thấy rằng chúng không cùng hướng vì vectơ $\overrightarrow{MN}$ hướng lên phía trên, còn vectơ $\overrightarrow{PQ}$ thì hướng xuống phía dưới.

Trong trường hợp này, ta nói : Hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PQ}$ ***ngược hướng***.

Như vậy

Nếu hai vectơ cùng phương thì hoặc chúng cùng hướng, hoặc chúng ngược hướng.

☞ CHÚ Ý

Ta quy ước rằng vectơ-không cùng hướng với mọi vectơ.

3. Hai vectơ bằng nhau

Mỗi vectơ đều có một ***độ dài***, đó là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó. Độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$.

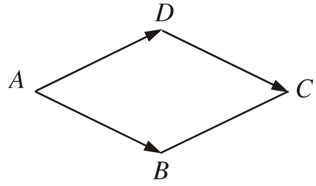
Như vậy, đối với vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PQ}$,... ta có

$$|\overrightarrow{AB}| = AB = BA, \; |\overrightarrow{PQ}| = PQ = QP, \; ...$$

?2 *Theo định nghĩa độ dài ở trên thì vectơ-không có độ dài bằng bao nhiêu ?*

Ta biết rằng hai đoạn thẳng gọi là bằng nhau nếu độ dài của chúng bằng nhau. Trên hình 5 ta có hình thoi $ABCD$. Bốn cạnh của hình thoi là bốn đoạn thẳng bằng nhau. Bởi vậy ta viết

$$AB = AD = DC = BC.$$



Hình 5

?3 *Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$ trên hình 5 cũng có độ dài bằng nhau, nhưng liệu chúng ta có nên nói rằng chúng bằng nhau và viết $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$ hay không ? Vì sao vậy ?*

Còn đối với hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$ thì có nhận xét gì về độ dài và hướng của chúng ?

Một cách tự nhiên ta định nghĩa hai vectơ bằng nhau như sau

ĐỊNH NGHĨA

*Hai vectơ được gọi là **bằng nhau** nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.*

Nếu hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng nhau thì ta viết $\vec{a} = \vec{b}$.

CHÚ Ý

Theo định nghĩa trên thì các vectơ-không đều bằng nhau : $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{PP} = ...$ Bởi vậy, từ nay các vectơ-không được kí hiệu chung là $\vec{0}$.

1

Hãy vẽ một tam giác ABC với các trung tuyến AD, BE, CF, rồi chỉ ra các bộ ba vectơ khác $\vec{0}$ và đôi một bằng nhau (các vectơ này có điểm đầu và điểm cuối được lấy trong sáu điểm A, B, C, D, E, F).

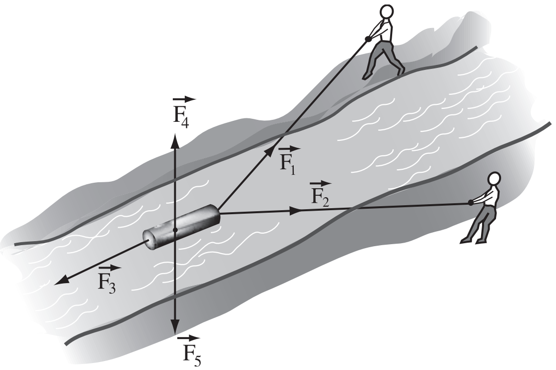
Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì có thể viết $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GD}$ hay không ? Vì sao ?

2

Cho vectơ $\vec{a}$ và một điểm O bất kì. Hãy xác định điểm A sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. Có bao nhiêu điểm A như vậy ?

Trong Vật lí, một lực thường được biểu thị bởi một vectơ. Độ dài của vectơ biểu thị cho cường độ của lực, hướng của vectơ biểu thị cho hướng của lực tác dụng. Điểm đầu của vectơ đặt ở vật chịu tác dụng của lực (vật đó thường được xem như một điểm).

Trên hình 6, hai người đi dọc hai bên bờ kênh và cùng kéo một khúc gỗ đi ngược dòng. Khi đó có các lực sau đây tác dụng vào khúc gỗ : hai lực kéo $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ của hai người, lực $\vec{F}_3$ của dòng nước, lực đẩy Ác-si-mét $\vec{F}_4$ của nước lên khúc gỗ và trọng lực $\vec{F}_5$ của khúc gỗ.



Hình 6

Uy-li-am Ha-min-tơn (William Hamilton) là nhà toán học người Ai-len. Ông đã viết một trong những công trình toán học đầu tiên về vectơ. Ông là người xây dựng khái niệm qua-téc-ni-ông, một đại lượng giống như vectơ, có nhiều ứng dụng trong Vật lí.

Câu hỏi và bài tập

1. Vectơ khác với đoạn thẳng như thế nào ?

2. Các khẳng định sau đây có đúng không ?

a) Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba thì cùng phương.

b) Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba khác $\vec{0}$ thì cùng phương.

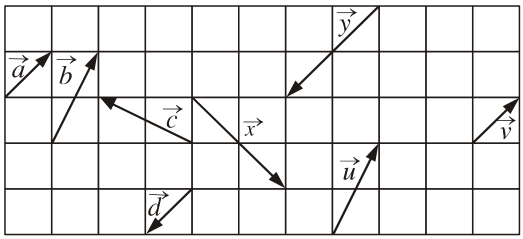
c) Hai vectơ cùng hướng với một vectơ thứ ba thì cùng hướng.

d) Hai vectơ cùng hướng với một vectơ thứ ba khác $\vec{0}$ thì cùng hướng.

e) Hai vectơ ngược hướng với một vectơ khác $\vec{0}$ thì cùng hướng.

f) Điều kiện cần và đủ để hai vectơ bằng nhau là chúng có độ dài bằng nhau.

3. Trong hình 7 dưới đây, hãy chỉ ra các vectơ cùng phương, các vectơ cùng hướng và các vectơ bằng nhau.



Hình 7

4. Gọi C là trung điểm của đoạn thẳng AB. Các khẳng định sau đây đúng hay sai ?

a) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng ;

b) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng ;

c) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ ngược hướng ;

d) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$;

e) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$;

f) $|\overrightarrow{AB}| = 2|\overrightarrow{BC}|$.

5. Cho lục giác đều $ABCDEF$. Hãy vẽ các vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$ và có

a) Các điểm đầu là B, F, C ;

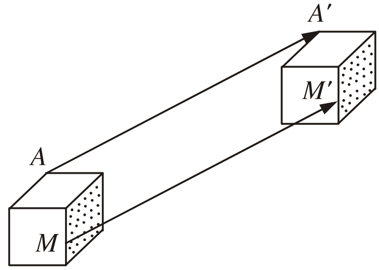
b) Các điểm cuối là F, D, C.

§2 TỔNG CỦA HAI VECTƠ

Chúng ta đã biết vectơ là gì và thế nào là hai vectơ bằng nhau. Tuy các vectơ không phải là những con số, nhưng ta cũng có thể cộng hai vectơ với nhau để được tổng của chúng, cũng có thể trừ đi nhau để được hiệu của chúng. Học sinh cần nắm vững cách xác định tổng và hiệu của hai vectơ cũng như các tính chất của phép cộng và phép trừ vectơ.

1. Định nghĩa tổng của hai vectơ

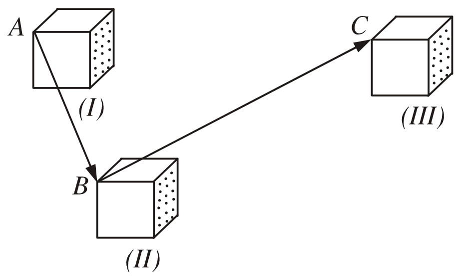
Hình 8 mô tả một vật được dời sang vị trí mới sao cho các điểm A, M, ... của vật được dời đến các điểm A', M',... mà $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MM'} = \ldots$. Khi đó ta nói rằng : Vật được "tịnh tiến" theo vectơ $\overrightarrow{AA'}$.



Hình 8

?1 *Trên hình 9, chuyển động của một vật được mô tả như sau : Từ vị trí (I), nó được tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$ để đến vị trí (II). Sau đó nó lại được tịnh tiến một lần nữa theo vectơ $\overrightarrow{BC}$ để đến vị trí (III).*

Vật có thể được tịnh tiến chỉ một lần để từ vị trí (I) đến vị trí (III) hay không ? Nếu có, thì tịnh tiến theo vectơ nào ?



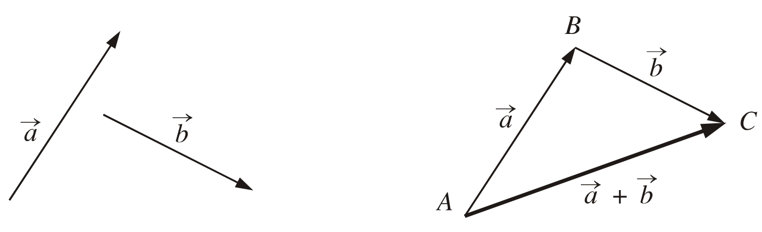
Hình 9

Như vậy có thể nói : Tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AC}$ "bằng" tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$ rồi tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BC}$.

Trong Toán học, những điều trình bày trên đây được nói một cách ngắn gọn : *Vectơ $\overrightarrow{AC}$ là tổng của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$.*

Ta đi đến định nghĩa (h. 10)

> *Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A nào đó rồi xác định các điểm B và C sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là* ***tổng*** *của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Kí hiệu*
>
> $$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}.$$
>
> *Phép lấy tổng của hai vectơ được gọi là* ***phép cộng vectơ****.*



Hình 10

1

Hãy vẽ một tam giác ABC, rồi xác định các vectơ tổng sau đây

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$;

b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.

2

Hãy vẽ hình bình hành $ABCD$ với tâm O (O là giao điểm hai đường chéo). Hãy viết vectơ $\overrightarrow{AB}$ dưới dạng tổng của hai vectơ mà các điểm mút của chúng được lấy trong năm điểm A, B, C, D, O.

2. Các tính chất của phép cộng vectơ

3

Chúng ta biết rằng phép cộng hai số có tính chất giao hoán. Đối với phép cộng hai vectơ, tính chất đó có đúng hay không ? Hãy kiểm chứng bằng hình vẽ.

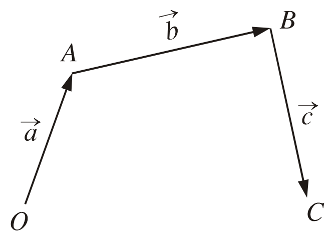
4

Hãy vẽ các vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$ như trên hình 11. Trên hình vẽ đó

a) Hãy chỉ ra vectơ nào là vectơ $\vec{a} + \vec{b}$, và do đó, vectơ nào là vectơ $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

b) Hãy chỉ ra vectơ nào là vectơ $\vec{b} + \vec{c}$ và do đó vectơ nào là vectơ $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

c) Từ đó có thể rút ra kết luận gì ?



Hình 11

Từ các hoạt động trên, chúng ta suy ra các tính chất sau đây của phép cộng vectơ (cũng giống như các tính chất của phép cộng các số)

1) Tính chất giao hoán : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;

2) Tính chất kết hợp : $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;

3) Tính chất của vectơ-không : $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

CHÚ Ý

Do tính chất 2, các vectơ $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ và $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ bằng nhau, bởi vậy, từ nay chúng được viết một cách đơn giản là $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, và gọi là ***tổng của ba vectơ*** $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

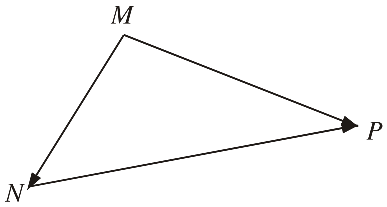
3. Các quy tắc cần nhớ

Từ định nghĩa tổng của hai vectơ ta suy ra hai quy tắc sau đây

QUY TẮC BA ĐIỂM (h.12)

Với ba điểm bất kì M, N, P, ta có

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}.$$

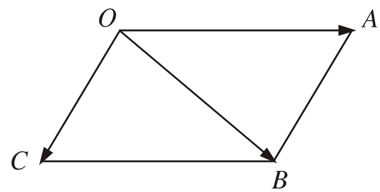


Hình 12

QUY TẮC HÌNH BÌNH HÀNH (h.13)

Nếu $OABC$ là hình bình hành thì ta có

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}.$$



Hình 13

?2 *a) Hãy giải thích tại sao ta có quy tắc hình bình hành.*

b) Hãy giải thích tại sao ta có $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| \le \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$.

Bài toán 1. *Chứng minh rằng với bốn điểm bất kì A, B, C, D, ta có*

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}.$$

Giải. Dùng quy tắc ba điểm ta có thể viết $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$. Bởi vậy

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} \text{ (do tính chất giao hoán)}$$

$$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \text{ (quy tắc ba điểm đối với } B, D, C\text{)}.$$

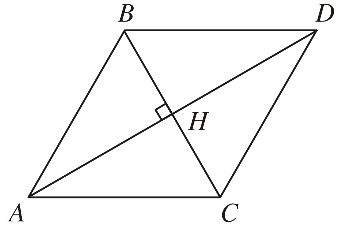
5

Dùng quy tắc ba điểm, ta cũng có thể viết $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Hãy tiếp tục để có một cách chứng minh khác của Bài toán 1.

Bài toán 2. *Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tính độ dài của vectơ tổng* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Giải. Ta lấy điểm D sao cho $ABDC$ là hình bình hành (h. 14). Theo quy tắc hình bình hành ta có

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.$$



Hình 14

Vậy $$\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right| = AD.$$

Vì ABC là tam giác đều nên $ABDC$ là hình thoi và độ dài AD bằng hai lần đường cao AH của tam giác ABC, do đó $AD = 2 \times \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Tóm lại, $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = a\sqrt{3}$.

Bài toán 3

a) Gọi M là trung điểm đoạn thẳng AB. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

b) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

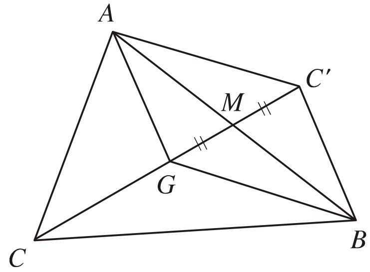
Giải

a) Theo quy tắc ba điểm, ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MM} = \vec{0}$. Mặt khác, vì M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. Vậy

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}.$$

b) (h. 15) Trọng tâm G nằm trên trung tuyến CM và $GC = 2GM$. Để tìm tổng $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}$, ta dựng hình bình hành $AGBC'$. Muốn vậy, ta chỉ cần lấy điểm C' sao cho M là trung điểm GC'. Khi đó $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GC'} = \overrightarrow{CG}$. Bởi vậy

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{CC} = \vec{0}.$$



Hình 15

?3 *Trong lời giải của Bài toán 3, ta đã dùng đẳng thức* $\overrightarrow{GC'} = \overrightarrow{CG}$. *Hãy giải thích tại sao có đẳng thức đó.*

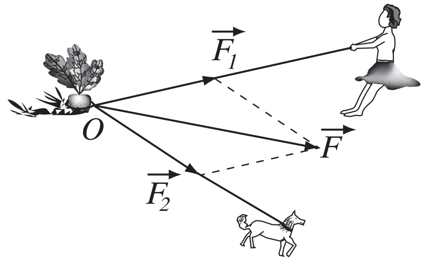
GHI NHỚ

> *Nếu M là trung điểm đoạn thẳng AB thì* $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$;
>
> *Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì* $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

☞ CHÚ Ý

Quy tắc hình bình hành thường được áp dụng trong Vật lí để xác định hợp lực của hai lực cùng tác dụng lên một vật.

Trên hình 16, có hai lực $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$ cùng tác dụng vào một vật tại điểm O. Khi đó có thể xem vật chịu tác dụng của lực $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$, là hợp lực của hai lực $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$. Lực $\vec{F}$ được xác định theo quy tắc hình bình hành.



Hình 16

Câu hỏi và bài tập

6. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ thì $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

7. Tứ giác $ABCD$ là hình gì nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$?

8. Cho bốn điểm bất kì M, N, P, Q. Chứng minh các đẳng thức sau

a) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MQ}$;

b) $\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{MQ}$;

c) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{PN}$.

9. Các hệ thức sau đây đúng hay sai (với mọi $\vec{a}$ và $\vec{b}$) ?

a) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$;

b) $|\vec{a} + \vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

10. Cho hình bình hành $ABCD$ với tâm O. Hãy điền vào chỗ trống (...) để được đẳng thức đúng

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} =$ ....

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} =$ ....

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} =$ ....

d) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} =$ ....

e) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} =$ ....

11. Cho hình bình hành $ABCD$ với tâm O. Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai ?

a) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BD}|$;

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}$;

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$;

d) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

12. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O.

a) Hãy xác định các điểm M, N, P sao cho

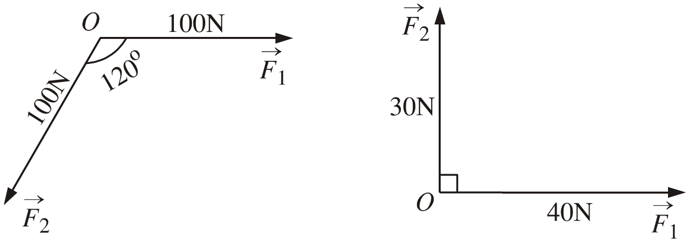
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \ ; \quad \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \ ; \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}.$$

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

13. Cho hai lực $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ cùng có điểm đặt tại O (h.17). Tìm cường độ lực tổng hợp của chúng trong các trường hợp sau

a) $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ đều có cường độ là 100N, góc hợp bởi $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ bằng 120^o (h. 17a) ;

b) Cường độ của $\overrightarrow{F_1}$ là 40N, của $\overrightarrow{F_2}$ là 30N và góc giữa $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ bằng 90^o (h. 17b).



a) *b)*

Hình 17

§3 HIỆU CỦA HAI VECTƠ

1. Vectơ đối của một vectơ

> *Nếu tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là vectơ-không, thì ta nói $\vec{a}$ là* ***vectơ đối*** *của $\vec{b}$, hoặc $\vec{b}$ là* ***vectơ đối*** *của $\vec{a}$.*

?1 *Cho đoạn thẳng AB. Vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là vectơ nào ? Phải chăng mọi vectơ cho trước đều có vectơ đối ?*

Vectơ đối của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $-\vec{a}$.

Như vậy $\quad\quad \vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$.

Ta có nhận xét sau đây

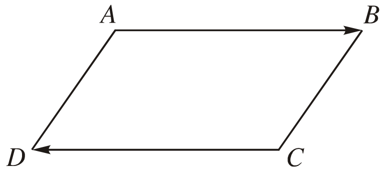
> *Vectơ đối của vectơ $\vec{a}$ là vectơ ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ và có cùng độ dài với vectơ $\vec{a}$.*
>
> *Đặc biệt, vectơ đối của vectơ $\vec{0}$ là vectơ $\vec{0}$.*

Ví dụ. Giả sử $ABCD$ là hình bình hành (h.18). Khi đó hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ có cùng độ dài nhưng ngược hướng. Bởi vậy

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} \text{ và } \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}.$$

Tương tự, ta có

$$\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA} \text{ và } \overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{BC}.$$



Hình 18

1

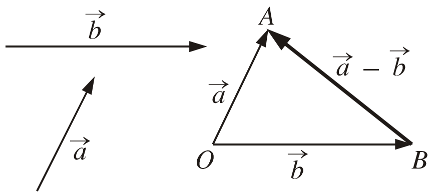
Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$. Hãy chỉ ra các cặp vectơ đối nhau mà có điểm đầu là O và điểm cuối là đỉnh của hình bình hành đó.

2. Hiệu của hai vectơ

ĐỊNH NGHĨA

> ***Hiệu** của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} - \vec{b}$, là tổng của vectơ $\vec{a}$ và vectơ đối của vectơ $\vec{b}$, tức là*
>
> $$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$
>
> *Phép lấy hiệu của hai vectơ gọi là **phép trừ vectơ**.*

Sau đây là cách dựng hiệu $\vec{a} - \vec{b}$ nếu đã cho vectơ $\vec{a}$ và vectơ $\vec{b}$ (h. 19). Lấy một điểm O tuỳ ý rồi vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Khi đó $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$.



Hình 19

?2 *Hãy giải thích vì sao ta lại có $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$ (h. 19).*

Quy tắc về hiệu vectơ

Quy tắc sau đây cho phép ta biểu thị một vectơ bất kì thành hiệu của hai vectơ có chung điểm đầu.

> *Nếu $\overrightarrow{MN}$ là một vectơ đã cho thì với điểm O bất kì, ta luôn có*
>
> $$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}.$$

Bài toán. *Cho bốn điểm bất kì A, B, C, D. Hãy dùng quy tắc về hiệu vectơ để chứng minh rằng*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$$

Giải. Lấy một điểm O tuỳ ý, theo quy tắc về hiệu vectơ, ta có

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}.$$

So sánh hai đẳng thức trên ta suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

2 *(Giải bài toán trên bằng những cách khác)*

a) Đẳng thức cần chứng minh tương đương với đẳng thức $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$. Từ đó hãy nêu ra cách chứng minh thứ hai của bài toán.

b) Đẳng thức cần chứng minh cũng tương đương với đẳng thức $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD}$. Từ đó hãy nêu cách chứng minh thứ ba của bài toán.

c) Hiển nhiên ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$. Hãy nêu cách chứng minh thứ tư.

Câu hỏi và bài tập

14. Trả lời các câu hỏi sau đây

a) Vectơ đối của vectơ $-\vec{a}$ là vectơ nào ?

b) Vectơ đối của vectơ $\vec{0}$ là vectơ nào ?

c) Vectơ đối của vectơ $\vec{a} + \vec{b}$ là vectơ nào ?

15. Chứng minh các mệnh đề sau đây

a) Nếu $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ thì $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$, $\vec{b} = \vec{c} - \vec{a}$;

b) $\vec{a} - (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$;

c) $\vec{a} - (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

16. Cho hình bình hành $ABCD$ với tâm O. Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai ?

a) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$;

b) $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$;

c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$;

d) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$;

e) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BO}$.

17. Cho hai điểm A, B phân biệt.

a) Tìm tập hợp các điểm O sao cho $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$;

b) Tìm tập hợp các điểm O sao cho $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$.

18. Cho hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

19. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ khi và chỉ khi trung điểm của hai đoạn thẳng AD và BC trùng nhau.

20. Cho sáu điểm A, B, C, D, E, F. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}.$$

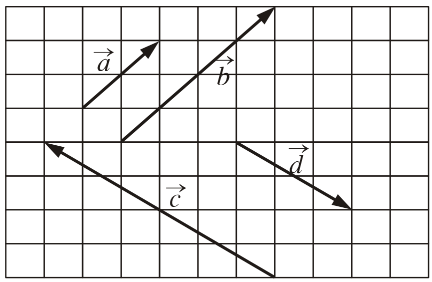
§4 TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ

Ta đã biết thế nào là tổng của hai vectơ. Bây giờ nếu ta lấy vectơ $\vec{a}$ cộng với chính nó thì ta có thể nói kết quả là hai lần vectơ $\vec{a}$, viết là $2\vec{a}$, và gọi là tích của số 2 với vectơ $\vec{a}$, hay là tích của $\vec{a}$ với 2.

Trong mục này ta sẽ nói đến tích của một vectơ với một số thực bất kì.

1. Định nghĩa tích của một vectơ với một số

Xét các vectơ trên hình 20. Ta hãy chú ý đến hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Hai vectơ đó có cùng hướng, và độ dài vectơ $\vec{b}$ bằng hai lần độ dài vectơ $\vec{a}$, tức là $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$. Trong trường hợp đó ta viết $\vec{b} = 2\vec{a}$ và nói rằng : *Vectơ $\vec{b}$ bằng 2 nhân với vectơ $\vec{a}$ (hoặc bằng vectơ $\vec{a}$ nhân với 2), hoặc vectơ $\vec{b}$ là tích của vectơ $\vec{a}$ với số 2.*



Hình 20

Lại chú ý đến hai vectơ $\vec{c}$ và $\vec{d}$. Hai vectơ này ngược hướng, và $|\vec{c}| = 2|\vec{d}|$. Khi đó ta viết $\vec{c} = (-2)\vec{d}$ và nói rằng : *Vectơ $\vec{c}$ bằng -2 nhân với vectơ $\vec{d}$ (hoặc bằng vectơ $\vec{d}$ nhân với -2), hoặc vectơ $\vec{c}$ là tích của vectơ $\vec{d}$ với -2.*

1

Vẽ hình bình hành $ABCD$.

a) Xác định điểm E sao cho $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{BC}$.

b) Xác định điểm F sao cho $\overrightarrow{AF} = \left(-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{CA}$.

ĐỊNH NGHĨA

> *Tích của vectơ $\vec{a}$ với số thực k là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau*
>
> *1) Nếu $k \geq 0$ thì vectơ $k\vec{a}$ cùng hướng với vectơ $\vec{a}$;*
>
> *Nếu $k < 0$ thì vectơ $k\vec{a}$ ngược hướng với vectơ $\vec{a}$;*
>
> *2) Độ dài vectơ $k\vec{a}$ bằng $|k|.|\vec{a}|$.*
>
> *Phép lấy tích của một vectơ với một số gọi là* ***phép nhân vectơ với số*** *(hoặc phép nhân số với vectơ).*

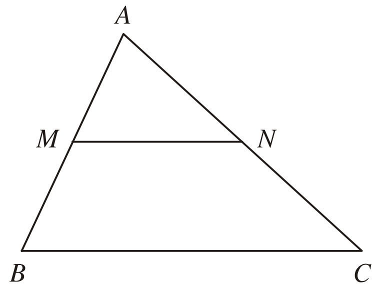
Nhận xét. Từ định nghĩa ta thấy ngay $1\vec{a} = \vec{a}$, $(-1)\vec{a}$ là vectơ đối của $\vec{a}$, tức là $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

Ví dụ. Trên hình 21, ta có tam giác *ABC* với *M* và *N* lần lượt là trung điểm hai cạnh *AB* và *AC*. Khi đó ta có

a) $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}$; $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$;

b) $\overrightarrow{BC} = (-2)\overrightarrow{NM}$; $\overrightarrow{MN} = \left(-\dfrac{1}{2}\right)\overrightarrow{CB}$;

c) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{MB}$; $\overrightarrow{AN} = \left(-\dfrac{1}{2}\right)\overrightarrow{CA}$.



Hình 21

2. Các tính chất của phép nhân vectơ với số

Dựa vào định nghĩa phép nhân vectơ với số ta có thể chứng minh các tính chất sau đây

> *Với hai vectơ bất kì $\vec{a}$, $\vec{b}$ và mọi số thực k, l, ta có*
>
> *1) $k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}$;*
>
> *2) $(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$;*
>
> *3) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$; $k(\vec{a} - \vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b}$;*
>
> *4) $k\vec{a} = \vec{0}$ khi và chỉ khi $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.*

2 (*Để kiểm chứng tính chất* 3 *với* $k = 3$)

a) Vẽ tam giác ABC với giả thiết $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

b) Xác định điểm A' sao cho $\overrightarrow{A'B} = 3\vec{a}$ và điểm C' sao cho $\overrightarrow{BC'} = 3\vec{b}$.

c) Có nhận xét gì về hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{A'C'}$?

d) Hãy kết thúc việc chứng minh tính chất 3 bằng cách dùng quy tắc ba điểm.

CHÚ Ý

1) Do tính chất 1, ta có $(-k)\vec{a} = (-1.k)\vec{a} = (-1)(k\vec{a}) = -(k\vec{a})$. Bởi vậy cả hai vectơ $(-k)\vec{a}$ và $-(k\vec{a})$ đều có thể viết đơn giản là $-k\vec{a}$.

2) Vectơ $\frac{m}{n}\vec{a}$ có thể viết là $\frac{m\vec{a}}{n}$. Chẳng hạn $\frac{1}{3}\vec{a}$ có thể viết là $\frac{\vec{a}}{3}$.

Bài toán 1. *Chứng minh rằng điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi với điểm M bất kì, ta có* $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

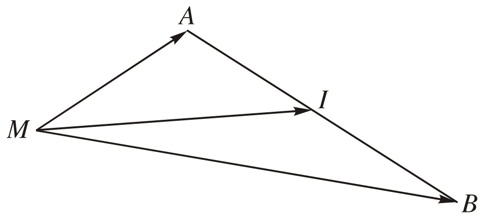
Giải. (h. 22) Với điểm M bất kì, ta có

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA},$$

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}.$$

Như vậy

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}.$$



Hình 22

Ta biết rằng I là trung điểm của AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

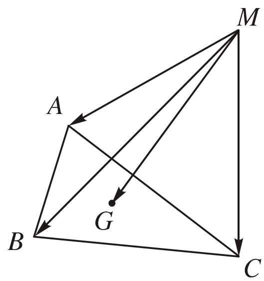
Bài toán 2. *Cho tam giác ABC với trọng tâm G. Chứng minh rằng với điểm M bất kì, ta có*

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$$

3 (*Để giải Bài toán 2*) (h. 23)

a) Tương tự Bài toán 1, hãy biểu thị các vectơ $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{MC}$ qua vectơ $\overrightarrow{MG}$ và từng vectơ $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GC}$.

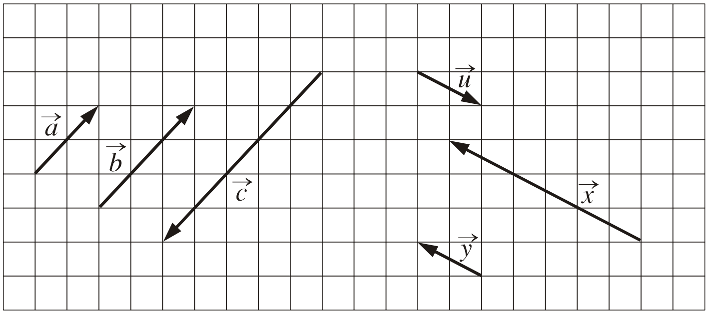
b) Tính tổng $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$. Với chú ý rằng G là trọng tâm tam giác ABC, hãy suy ra điều phải chứng minh.



Hình 23

3. Điều kiện để hai vectơ cùng phương

Ta đã biết rằng nếu $\vec{b} = k\vec{a}$ thì hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương. Điều ngược lại có đúng hay không ?



Hình 24

?1 *Xem hình 24. Hãy tìm các số k, m, n, p, q sao cho* $\vec{b} = k\vec{a}$; $\vec{c} = m\vec{a}$; $\vec{b} = n\vec{c}$; $\vec{x} = p\vec{u}$; $\vec{y} = q\vec{u}$.

Một cách tổng quát ta có

> *Vectơ* $\vec{b}$ *cùng phương với vectơ* $\vec{a}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$) *khi và chỉ khi có số k sao cho* $\vec{b} = k\vec{a}$.

?2 *Trong phát biểu ở trên, tại sao phải có điều kiện* $\vec{a} \neq \vec{0}$ *?*

Điều kiện để ba điểm thẳng hàng

> *Điều kiện cần và đủ để ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng là có số k sao cho* $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

Chứng minh. Ba điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương. Bởi vậy theo trên ta phải có $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

Bài toán 3. *Cho tam giác ABC có trực tâm H, trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp O.*

a) Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OI}$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

c) Chứng minh ba điểm O, G, H thẳng hàng.

Giải (h. 25)

a) Dễ thấy $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OI}$ nếu tam giác ABC vuông.

Nếu tam giác ABC không vuông, gọi D là điểm đối xứng của A qua O. Khi đó

$BH \parallel DC$ (vì cùng vuông góc với AC),

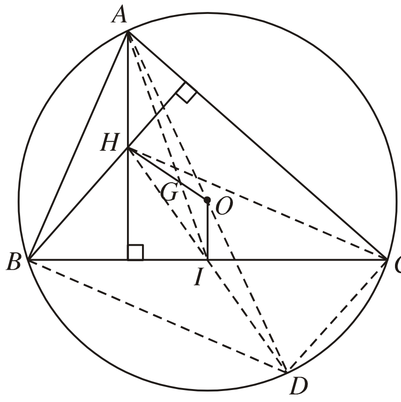
$BD \parallel CH$ (vì cùng vuông góc với AB).

Suy ra $BDCH$ là hình bình hành, do đó I là trung điểm của HD. Từ đó

$$\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OI}.$$

b) Ta có

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{AH}$$



Hình 25

nên

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH}.$$

c) Ta đã biết $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$. Vậy $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

Suy ra ba điểm O, G, H thẳng hàng.

Đường thẳng đi qua ba điểm này gọi là ***đường thẳng Ơ-le*** của tam giác ABC.

4. Biểu thị một vectơ qua hai vectơ không cùng phương

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Nếu vectơ $\vec{c}$ có thể viết dưới dạng $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$, với m và n là hai số thực nào đó, thì ta nói rằng : ***Vectơ $\vec{c}$ biểu thị được qua hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.***

Một câu hỏi đặt ra là : *Nếu đã cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thì phải chăng mọi vectơ đều có thể biểu thị được qua hai vectơ đó ?*

Ta có định lí sau đây

ĐỊNH LÍ

Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khi đó mọi vectơ $\vec{x}$ đều có thể biểu thị được một cách duy nhất qua hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số m và n sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

Chứng minh

Từ một điểm O nào đó, ta vẽ các vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OX} = \vec{x}$ (h. 26).

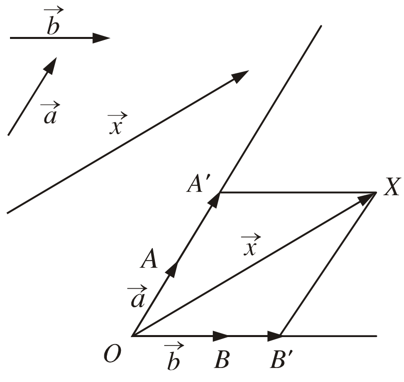
Nếu điểm X nằm trên đường thẳng OA thì ta có số m sao cho $\overrightarrow{OX} = m\overrightarrow{OA}$.

Vậy ta có

$$\vec{x} = m\vec{a} + 0\vec{b} \text{ (lúc này } n = 0).$$

Tương tự, nếu điểm X nằm trên đường thẳng OB thì ta có

$$\vec{x} = 0\vec{a} + n\vec{b} \text{ (lúc này } m = 0).$$



Hình 26

Nếu điểm X không nằm trên OA và OB thì ta có thể lấy điểm A' trên OA và điểm B' trên OB sao cho $OA'XB'$ là hình bình hành. Khi đó ta có $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$, và do đó có các số m, n sao cho $\overrightarrow{OX} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$, hay

$$\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}.$$

Bây giờ nếu còn có hai số m' và n' sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} = m'\vec{a} + n'\vec{b}$, thì $(m - m')\vec{a} = (n' - n)\vec{b}$.

Khi đó, nếu $m \neq m'$ thì $\vec{a} = \dfrac{n' - n}{m - m'}\vec{b}$, tức là hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương, trái với giả thiết, vậy $m = m'$. Chứng minh tương tự ta cũng có $n = n'$.

Câu hỏi và bài tập

21. Cho tam giác vuông cân OAB với $OA = OB = a$. Hãy dựng các vectơ sau đây và tính độ dài của chúng

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}; \qquad \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}; \qquad 3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB};$$

$$\frac{21}{4}\overrightarrow{OA} + 2{,}5\overrightarrow{OB}; \qquad \frac{11}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{3}{7}\overrightarrow{OB}.$$

22. Cho tam giác OAB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm hai cạnh OA và OB. Hãy tìm các số m và n thích hợp trong mỗi đẳng thức sau đây

$$\overrightarrow{OM} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}; \qquad \overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB};$$

$$\overrightarrow{AN} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}; \qquad \overrightarrow{MB} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}.$$

23. Gọi M và N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB và CD. Chứng minh rằng

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}.$$

24. Cho tam giác ABC và điểm G. Chứng minh rằng

a) Nếu $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ thì G là trọng tâm tam giác ABC ;

b) Nếu có điểm O sao cho $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$ thì G là trọng tâm tam giác ABC.

25. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{GA}$ và $\vec{b} = \overrightarrow{GB}$. Hãy biểu thị mỗi vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ qua các vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

26. Chứng minh rằng nếu G và G' lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ thì

$$3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}.$$

Từ đó hãy suy ra điều kiện cần và đủ để hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có trọng tâm trùng nhau.

27. Cho lục giác $ABCDEF$. Gọi P, Q, R, S, T, U lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh rằng hai tam giác PRT và QSU có trọng tâm trùng nhau.

28. Cho tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng

a) Có một điểm G duy nhất sao cho $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Điểm G như thế gọi là *trọng tâm của bốn điểm A, B, C, D*. Tuy nhiên, người ta vẫn quen gọi G là *trọng tâm của tứ giác ABCD*.

b) Trọng tâm G là trung điểm của mỗi đoạn thẳng nối các trung điểm hai cạnh đối của tứ giác, nó cũng là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm hai đường chéo của tứ giác.

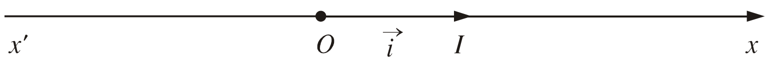
c) Trọng tâm G nằm trên các đoạn thẳng nối một đỉnh của tứ giác và trọng tâm của tam giác tạo bởi ba đỉnh còn lại.

§5 TRỤC TOẠ ĐỘ VÀ HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ

Ở lớp 7, chúng ta đã làm quen với trục và hệ trục toạ độ Đề-các vuông góc. Trong phần này, chúng ta sẽ nói kĩ hơn về các khái niệm đó.

1. Trục toạ độ

> ***Trục toạ độ*** *(còn gọi là* ***trục****, hay* ***trục số****) là một đường thẳng trên đó đã xác định một điểm O và một vectơ* $\vec{i}$ *có độ dài bằng* 1.



Hình 27

Điểm O gọi là ***gốc toạ độ***, vectơ $\vec{i}$ gọi là ***vectơ đơn vị*** của trục toạ độ.

Trục toạ độ như vậy được kí hiệu là $(O; \vec{i})$. Ta lấy điểm I sao cho $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, tia OI còn được kí hiệu là Ox, tia đối của Ox là Ox'. Khi đó trục $(O; \vec{i})$ còn gọi là trục $x'Ox$ hay trục Ox (h. 27).

Toạ độ của vectơ và của điểm trên trục

Cho vectơ $\vec{u}$ nằm trên trục $(O; \vec{i})$. Khi đó có số a xác định để $\vec{u} = a\vec{i}$. Số a như thế gọi là ***toạ độ của vectơ*** $\vec{u}$ ***đối với trục*** $(O; \vec{i})$.

Cho điểm M nằm trên trục $(O; \vec{i})$. Khi đó có số m xác định để $\overrightarrow{OM} = m\vec{i}$. Số m như thế gọi là ***toạ độ của điểm M đối với trục*** $(O; \vec{i})$ (cũng là toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$).

1
Trên trục Ox cho hai điểm A và B lần lượt có toạ độ là a và b. Tìm toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ và vectơ $\overrightarrow{BA}$. Tìm toạ độ trung điểm của đoạn thẳng AB.

Độ dài đại số của vectơ trên trục

Nếu hai điểm A, B nằm trên trục Ox thì toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $\overline{AB}$ và gọi là ***độ dài đại số*** của vectơ $\overrightarrow{AB}$ trên trục Ox.

Như vậy

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\,\vec{i}.$$

Từ định nghĩa trên ta suy ra các khẳng định sau đây : Trên trục số,

1) Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ bằng nhau khi và chỉ khi $\overline{AB} = \overline{CD}$ (hiển nhiên) ;

2) Hệ thức $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ tương đương với hệ thức $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ (hệ thức Sa-lơ).

Thật vậy, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overline{AB}\,\vec{i} + \overline{BC}\,\vec{i} = \overline{AC}\,\vec{i}$

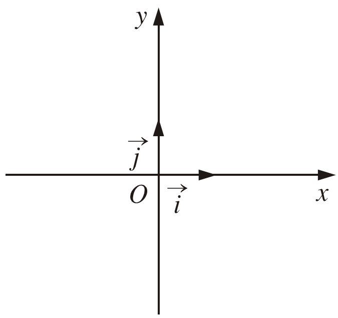
$$\Leftrightarrow (\overline{AB} + \overline{BC})\vec{i} = \overline{AC}\,\vec{i} \Leftrightarrow \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

2. Hệ trục toạ độ

Trên hình 28, ta có một hệ trục toạ độ vuông góc. Nó bao gồm hai trục toạ độ Ox và Oy vuông góc với nhau.

Vectơ đơn vị trên trục Ox là $\vec{i}$, vectơ đơn vị trên trục Oy là $\vec{j}$.

Điểm O gọi là ***gốc toạ độ***. Trục Ox gọi là ***trục hoành***, trục Oy gọi là ***trục tung***.



Hình 28

Hệ trục toạ độ vuông góc như trên còn gọi đơn giản là ***hệ trục toạ độ*** và thường được kí hiệu là Oxy hay $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

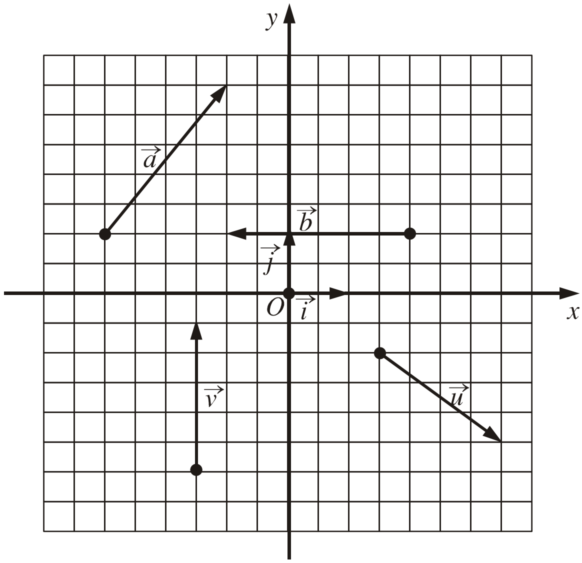
CHÚ Ý

Khi trong mặt phẳng đã cho (hay đã chọn) một hệ trục toạ độ, ta sẽ gọi mặt phẳng đó là ***mặt phẳng toạ độ***.

3. Toạ độ của vectơ đối với hệ trục toạ độ

2

Quan sát hình 29. Hãy biểu thị mỗi vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ qua hai vectơ $\vec{i}, \vec{j}$ dưới dạng $x\vec{i} + y\vec{j}$ với x, y là hai số thực nào đó.



Hình 29

ĐỊNH NGHĨA

> *Đối với hệ trục toạ độ $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, nếu $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ thì cặp số $(x\,;\,y)$ được gọi là* ***toạ độ của vectơ*** *$\vec{a}$, kí hiệu là $\vec{a} = (x\,;\,y)$ hay $\vec{a}(x\,;\,y)$. Số thứ nhất x gọi là* ***hoành độ****, số thứ hai y gọi là* ***tung độ*** *của vectơ $\vec{a}$.*

?1 a) *Tìm toạ độ của các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ trên hình 29.*

b) *Đối với hệ trục toạ độ $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, hãy chỉ ra toạ độ của các vectơ* $\vec{0}$, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{i}+\vec{j}$, $2\vec{j}-\vec{i}$, $\dfrac{1}{3}\vec{i}-3\vec{j}$, $\sqrt{3}\,\vec{i}+0,14\vec{j}$.

Nhận xét. Từ định nghĩa toạ độ của vectơ, ta thấy hai vectơ bằng nhau khi và chỉ khi chúng có cùng toạ độ, nghĩa là

$$\vec{a}(x;\,y) = \vec{b}(x';\,y') \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y'. \end{cases}$$

4. Biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ

Trong mục này ta nói về biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ sau : phép cộng, phép trừ vectơ và phép nhân vectơ với số.

3

Cho hai vectơ $\vec{a} = (-3\,;2)$ và $\vec{b} = (4\,;5)$.

a) Hãy biểu thị các vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ qua hai vectơ $\vec{i}, \vec{j}$.

b) Tìm toạ độ của các vectơ $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$; $\vec{d} = 4\vec{a}$; $\vec{u} = 4\vec{a} - \vec{b}$.

Một cách tổng quát, ta có

Cho $\vec{a} = (x\,;y)$ và $\vec{b} = (x'\,;y')$. Khi đó

1) $\vec{a} + \vec{b} = (x + x'; y + y')$; $\vec{a} - \vec{b} = (x - x'; y - y')$;

2) $k\vec{a} = (kx\,;ky)$ với $k \in \mathbb{R}$;

3) Vectơ $\vec{b}$ cùng phương với vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ khi và chỉ khi có số k sao cho $x' = kx, y' = ky$.

?2 *Mỗi cặp vectơ sau có cùng phương không ?*

a) $\vec{a} = (0\,;5)$ *và* $\vec{b} = (-1\,;7)$;

b) $\vec{u} = (2003\,;0)$ *và* $\vec{v} = (1\,;0)$;

c) $\vec{e} = (4\,;-8)$ *và* $\vec{f} = (-0,5\,;1)$;

d) $\vec{m} = (\sqrt{2}\,;3)$ *và* $\vec{n} = (3\,;\sqrt{2})$.

5. Toạ độ của điểm

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, mỗi điểm M được xác định hoàn toàn bởi vectơ $\overrightarrow{OM}$. Do vậy, nếu biết toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ thì điểm M sẽ được xác định. Vì lẽ đó người ta định nghĩa

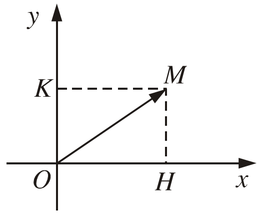
*Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là **toạ độ của điểm** M.*

Như vậy, cặp số $(x\,;y)$ là toạ độ của điểm M khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = (x\,;y)$. Khi đó ta viết $M(x\,;y)$ hoặc $M = (x\,;y)$.

Số x gọi là ***hoành độ*** của điểm M, số y gọi là ***tung độ*** của điểm M.

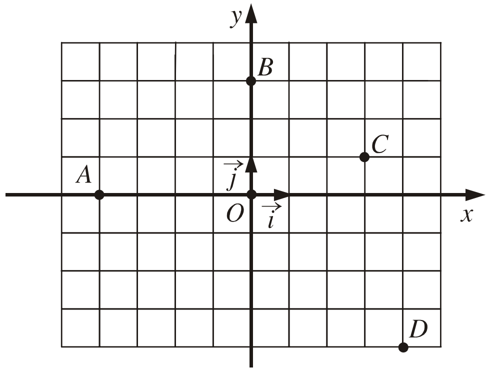
Nhận xét. (h. 30) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M trên Ox và Oy. Khi đó, nếu $M = (x\ ;\ y)$ thì $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK}$. Suy ra

$$x\vec{i} = \overrightarrow{OH} \text{ hay } x = \overline{OH}\ ;$$
$$y\vec{j} = \overrightarrow{OK} \text{ hay } y = \overline{OK}.$$



Hình 30

4
Trên hình 31
a) Toạ độ của mỗi điểm O, A, B, C, D bằng bao nhiêu ?
b) Hãy tìm điểm E có toạ độ (4 ; –4).
c) Tìm toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$.



Hình 31

Tổng quát, ta có

> *Với hai điểm $M(x_M\ ; y_M)$ và $N(x_N\ ; y_N)$ thì*
> $$\overrightarrow{MN} = (x_N - x_M\ ;\ y_N - y_M).$$

$\boxed{?3}$ *Hãy giải thích vì sao có kết quả trên.*

☞ CHÚ Ý

Để thuận tiện, ta thường dùng kí hiệu $(x_M\ ;\ y_M)$ để chỉ toạ độ của điểm M.

6. Toạ độ trung điểm của đoạn thẳng và toạ độ của trọng tâm tam giác

5
Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai điểm $M(x_M\ ;\ y_M)$, $N(x_N\ ;\ y_N)$. Gọi P là trung điểm của đoạn thẳng MN.
a) Hãy biểu thị vectơ $\overrightarrow{OP}$ qua hai vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{ON}$.
b) Từ đó hãy tìm toạ độ điểm P theo toạ độ của M và N.

Vậy ta có

> *Nếu P là trung điểm của đoạn thẳng MN thì*
> $$x_P = \frac{x_M + x_N}{2}\ ;\ y_P = \frac{y_M + y_N}{2}.$$

6

Tìm toạ độ điểm M' đối xứng với điểm $M(7\ ;\ -3)$ qua điểm $A(1\ ;\ 1)$.

7

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC với trọng tâm G.

a) Hãy viết hệ thức giữa các vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ và $\overrightarrow{OG}$.

b) Từ đó suy ra toạ độ của G theo toạ độ của A, B, C.

Vậy ta có

> *Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì*
> $$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}\ ;\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

Ví dụ. *Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các điểm* $A(2\ ;\ 0)$, $B(0\ ;\ 4)$, $C(1\ ;\ 3)$.

a) Chứng minh A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Tìm toạ độ của trọng tâm tam giác ABC.

Giải. a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; 4)$ và $\overrightarrow{AC} = (-1; 3)$. Do $\frac{-2}{-1} \neq \frac{4}{3}$ nên $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương, suy ra A, B, C không thẳng hàng và chúng là ba đỉnh của một tam giác.

b) Ta có $\frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{2+0+1}{3} = 1$ và $\frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{0+4+3}{3} = \frac{7}{3}$.

Vậy toạ độ của trọng tâm tam giác ABC là $\left(1\ ;\ \frac{7}{3}\right)$.

Câu hỏi và bài tập

29. Trong mặt phẳng toạ độ, mỗi mệnh đề sau đúng hay sai ?

a) Hai vectơ $\vec{a}(26; 9)$ và $\vec{b}(9; 26)$ bằng nhau.

b) Hai vectơ bằng nhau khi và chỉ khi chúng có hoành độ bằng nhau và tung độ bằng nhau.

c) Hai vectơ đối nhau thì chúng có hoành độ đối nhau.

d) Vectơ $\vec{a}$ cùng phương với vectơ $\vec{i}$ nếu $\vec{a}$ có hoành độ bằng 0.

e) Vectơ $\vec{a}$ có hoành độ bằng 0 thì nó cùng phương với vectơ $\vec{j}$.

30. Tìm toạ độ của các vectơ sau trong mặt phẳng toạ độ

$\vec{a} = -\vec{i}$; $\vec{b} = 5\vec{j}$; $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$;

$\vec{d} = \frac{1}{2}(\vec{j} - \vec{i})$; $\vec{e} = 0{,}15\vec{i} + 1{,}3\vec{j}$; $\vec{f} = \pi\vec{i} - (\cos 24^{o})\vec{j}$.

31. Cho $\vec{a} = (2 ; 1)$, $\vec{b} = (3; 4)$, $\vec{c} = (7; 2)$.

a) Tìm toạ độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

b) Tìm toạ độ của vectơ $\vec{x}$ sao cho $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$.

c) Tìm các số *k*, *l* để $\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b}$.

32. Cho $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$, $\vec{v} = k\vec{i} - 4\vec{j}$.

Tìm các giá trị của *k* để hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ cùng phương.

33. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

a) Toạ độ của điểm *A* bằng toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OA}$, với *O* là gốc toạ độ.

b) Hoành độ của một điểm bằng 0 thì điểm đó nằm trên trục hoành.

c) Điểm *A* nằm trên trục tung thì *A* có hoành độ bằng 0.

d) *P* là trung điểm của đoạn thẳng *AB* khi và chỉ khi hoành độ điểm *P* bằng trung bình cộng các hoành độ của hai điểm *A*, *B*.

e) Tứ giác *ABCD* là hình bình hành khi và chỉ khi $x_A + x_C = x_B + x_D$ và $y_A + y_C = y_B + y_D$.

34. Trong mặt phẳng toạ độ, cho ba điểm *A*(–3 ; 4), *B*(1 ; 1), *C*(9 ; –5).

a) Chứng minh ba điểm *A*, *B*, *C* thẳng hàng.

b) Tìm toạ độ điểm *D* sao cho *A* là trung điểm của *BD*.

c) Tìm toạ độ điểm *E* trên trục *Ox* sao cho *A*, *B*, *E* thẳng hàng.

35. Cho điểm *M*(*x* ; *y*). Tìm toạ độ của các điểm

a) M_1 đối xứng với *M* qua trục *Ox* ;

b) M_2 đối xứng với *M* qua trục *Oy* ;

c) M_3 đối xứng với *M* qua gốc toạ độ *O*.

36. Trong mặt phẳng toạ độ, cho ba điểm *A*(– 4 ; 1), *B*(2 ; 4), *C*(2 ; – 2).

a) Tìm toạ độ của trọng tâm tam giác *ABC*.

b) Tìm toạ độ điểm *D* sao cho *C* là trọng tâm tam giác *ABD*.

c) Tìm toạ độ điểm *E* sao cho *ABCE* là hình bình hành.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

I - Tóm tắt những kiến thức cần nhớ

1. Vectơ

– Vectơ khác $\vec{0}$ là một đoạn thẳng có hướng. Vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau. Vectơ-không có độ dài bằng 0, có phương và hướng tuỳ ý.

– Hai vectơ bằng nhau nếu chúng có cùng hướng và cùng độ dài.

2. Tổng và hiệu các vectơ

– *Quy tắc ba điểm :* Với ba điểm M, N, P bất kì, ta có

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}.$$

– *Quy tắc hình bình hành :* Nếu $OABC$ là hình bình hành thì

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}.$$

– *Quy tắc về hiệu vectơ :* Cho vectơ $\overrightarrow{MN}$. Với điểm O bất kì, ta có

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}.$$

3. Tích của một vectơ với một số

– Nếu $\vec{b} = k\vec{a}$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$ thì $|\vec{b}| = |k|.|\vec{a}|$ và

$\vec{b}$ cùng hướng với $\vec{a}$ khi $k \geq 0$,

$\vec{b}$ ngược hướng với $\vec{a}$ khi $k < 0$.

– Các tính chất

1) $k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}$;

2) $(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$;

3) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$;

4) $k\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.

– Điểm I là trung điểm đoạn thẳng AB khi và chỉ khi với điểm O bất kì, ta có

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

– Điểm G là trọng tâm tam giác ABC khi và chỉ khi với điểm O bất kì, ta có

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

4. Toạ độ của vectơ và của điểm

– Đối với hệ trục $(O\,;\,\vec{i}, \vec{j}\,)$ hay Oxy

1) $\vec{u} = (a; b) \Leftrightarrow \vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$;

2) $M = (x; y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x; y)$.

– Nếu $A = (x; y)$, $B = (x'; y')$ thì $\overrightarrow{AB} = (x' - x; y' - y)$.

– Nếu $\vec{u} = (x; y)$ và $\vec{v} = (x'; y')$ thì

1) $\vec{u} + \vec{v} = (x + x'; y + y')$;

2) $k\vec{u} = (kx; ky)$.

II - Câu hỏi tự kiểm tra

1. Hãy nói rõ vectơ khác đoạn thẳng như thế nào.

2. Nếu hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ bằng nhau và có giá không trùng nhau thì bốn đỉnh A, B, C, D có là bốn đỉnh của một hình bình hành hay không ?

3. Nếu có nhiều vectơ thì xác định tổng của chúng như thế nào ?

4. Hiệu hai vectơ được định nghĩa qua khái niệm tổng hai vectơ như thế nào ?

5. Cho hai điểm A, B phân biệt. Với một điểm O bất kì, mỗi đẳng thức sau đây đúng hay sai ?

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$; b) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$;

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{BA}$; d) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} = -\overrightarrow{AB}$.

6. Có thể dùng phép nhân vectơ với một số để định nghĩa vectơ đối của một vectơ hay không ?

7. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Trong các vectơ $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$ sau đây, hãy chỉ ra các vectơ cùng hướng và các vectơ ngược hướng

$$\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\ ; \qquad \vec{d} = -\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\ ; \qquad \vec{u} = 3\vec{a} + 4\vec{b}\ ;$$

$$\vec{v} = 3\vec{a} - \vec{b}\ ; \qquad \vec{x} = -\frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}\ ; \qquad \vec{y} = -9\vec{a} + 3\vec{b}.$$

Hai vectơ $\vec{c}$ và $\vec{d}$ có cùng phương hay không ? Tại sao ?

8. Cho tam giác ABC với trung tuyến AM và trọng tâm G. Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai ?

a) $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AG}$; b) $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$; c) $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$;

d) $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$; e) $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG}$.

9. Cho biết toạ độ hai điểm A và B. Làm thế nào để

a) Tìm toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$?

b) Tìm toạ độ trung điểm của đoạn thẳng AB ?

10. Cho biết toạ độ ba đỉnh của một tam giác. Làm thế nào để tìm toạ độ của trọng tâm tam giác đó ?

III - Bài tập

1. Cho tam giác ABC. Hãy xác định các vectơ

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\ ; \quad \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}\ ; \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}\ ; \quad \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}\ ;$$

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}\ ; \quad \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\ ; \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}\ ; \quad \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}.$$

2. Cho ba điểm O, A, B không thẳng hàng. Tìm điều kiện cần và đủ để vectơ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ có giá là đường phân giác của góc AOB.

3. Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng với điểm M bất kì, ta có

$$\overrightarrow{MO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}).$$

4. Cho tam giác ABC.

a) Tìm các điểm M và N sao cho

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \text{ và } 2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}.$$

b) Với các điểm M, N ở câu a), tìm các số p và q sao cho

$$\overrightarrow{MN} = p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AC}.$$

5. Cho đoạn thẳng AB và điểm I sao cho $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

a) Tìm số k sao cho $\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AB}$.

b) Chứng minh rằng với mọi điểm M, ta có

$$\overrightarrow{MI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{MA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{MB}.$$

6. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho ba điểm $A(-1 ; 3)$, $B(4 ; 2)$, $C(3 ; 5)$.

a) Chứng minh rằng ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Tìm toạ độ điểm D sao cho $\overrightarrow{AD} = -3\overrightarrow{BC}$.

c) Tìm toạ độ điểm E sao cho O là trọng tâm tam giác ABE.

IV - Bài tập trắc nghiệm

1. Cho tam giác ABC. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Vectơ $\overrightarrow{A'B'}$ cùng hướng với vectơ nào trong các vectơ sau đây ?

(A) $\overrightarrow{AB}$; (B) $\overrightarrow{AC'}$;

(C) $\overrightarrow{BA}$; (D) $\overrightarrow{C'B}$.

2. Cho ba điểm M, N, P thẳng hàng, trong đó điểm N nằm giữa hai điểm M và P. Khi đó các cặp vectơ nào sau đây cùng hướng ?

(A) $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$; (B) $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$;

(C) $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$; (D) $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{NP}$.

3. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Trong các đẳng thức dưới đây, đẳng thức nào đúng ?

(A) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$; (B) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$.

(C) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$; (D) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

4. Cho tam giác đều ABC với đường cao AH. Đẳng thức nào dưới đây đúng ?

(A) $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HC}$; (B) $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{HC}$;

(C) $\left|\overrightarrow{AH}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}\left|\overrightarrow{BC}\right|$; (D) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

5. Cho điểm B nằm giữa hai điểm A và C với $AB = 2a$, $CB = 5a$. Độ dài vectơ $\overrightarrow{AC}$ bằng bao nhiêu ?

(A) $7a$; (B) $3a$;

(C) $\dfrac{5a}{2}$; (D) $10a^2$.

6. Cho bốn điểm A, B, C, D. Đẳng thức nào dưới đây đúng ?

(A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$; (B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$;

(C) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$; (D) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC}$.

7. Cho sáu điểm A, B, C, D, E, F. Đẳng thức nào dưới đây đúng ?

(A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \vec{0}$;

(B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AF}$;

(C) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$;

(D) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD}$.

8. Cho hình thang $ABCD$ với hai cạnh đáy là $AB = 3a$ và $CD = 6a$. Khi đó $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right|$ bằng bao nhiêu ?

(A) $9a$; (B) $3a$;

(C) $-3a$; (D) 0.

9. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Khi đó giá trị $\left|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right|$ bằng bao nhiêu?

(A) $2a\sqrt{2}$; (B) $2a$;

(C) a ; (D) 0.

10. Cho ba điểm bất kì A, B, C. Đẳng thức nào dưới đây đúng ?

(A) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$; (B) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$;

(C) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA}$; (D) $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$.

11. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Giá trị $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}\right|$ bằng bao nhiêu ?

(A) $2a$; (B) a ;

(C) $a\sqrt{3}$; (D) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

12. Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$ lần lượt có trọng tâm là G và G'. Đẳng thức nào dưới đây là **sai** ?

(A) $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$;   (B) $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CA'}$;

(C) $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{CB'}$;   (D) $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$.

13. Cho điểm B nằm giữa hai điểm A và C, với $AB = 2a$, $AC = 6a$. Đẳng thức nào dưới đây đúng ?

(A) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$;   (B) $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AB}$;

(C) $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{AB}$;   (D) $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{BA}$.

14. Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Nếu $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$ thì đẳng thức nào dưới đây đúng ?

(A) $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{AC}$;   (B) $\overrightarrow{BC} = -4\overrightarrow{AC}$;

(C) $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$;   (D) $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AC}$.

15. Điều kiện nào dưới đây là cần và đủ để điểm O là trung điểm của đoạn thẳng AB ?

(A) $OA = OB$;   (B) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$;

(C) $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BO}$;   (D) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$.

16. Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì đẳng thức nào dưới đây đúng ?

(A) $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$;   (B) $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}$;

(C) $\overrightarrow{AG} = \dfrac{3\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)}{2}$;   (D) $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)}{3}$.

17. Gọi AM là trung tuyến của tam giác ABC, và I là trung điểm của AM. Đẳng thức nào sau đây là đúng ?

(A) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$;   (B) $-\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$;

(C) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$;   (D) $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

18. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai điểm $A(-1 ; 4)$ và $B(3 ; -5)$. Khi đó toạ độ của vectơ $\overrightarrow{BA}$ là cặp số nào ?

(A) $(2 ; -1)$;

(B) $(-4 ; 9)$;

(C) $(4 ; -9)$;

(D) $(4 ; 9)$.

19. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai điểm $A(0 ; 5)$ và $B(2 ; -7)$. Toạ độ trung điểm của đoạn thẳng AB là cặp số nào ?

(A) $(2 ; -2)$;

(B) $(-2 ; 12)$;

(C) $(-1 ; 6)$;

(D) $(1 ; -1)$.

20. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai điểm $M(8 ; -1)$ và $N(3 ; 2)$. Nếu P là điểm đối xứng với điểm M qua điểm N thì toạ độ của P là cặp số nào ?

(A) $(-2 ; 5)$;

(B) $\left(\frac{11}{2} ; \frac{1}{2}\right)$;

(C) $(13 ; -3)$;

(D) $(11 ; -1)$.

21. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho ba điểm $A(5 ; -2)$, $B(0 ; 3)$ và $C(-5 ; -1)$. Khi đó trọng tâm tam giác ABC có toạ độ là cặp số nào ?

(A) $(1 ; -1)$;

(B) $(0 ; 0)$;

(C) $(0 ; 11)$;

(D) $(10 ; 0)$.

22. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho tam giác ABC với trọng tâm G. Biết rằng $A = (-1 ; 4)$, $B = (2 ; 5)$, $G = (0 ; 7)$. Hỏi toạ độ đỉnh C là cặp số nào ?

(A) $(2 ; 12)$;

(B) $(-1 ; 12)$;

(C) $(3 ; 1)$;

(D) $(1 ; 12)$.

23. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho bốn điểm $A(3 ; 1)$, $B(2 ; 2)$, $C(1 ; 6)$, $D(1 ; -6)$. Hỏi điểm $G(2 ; -1)$ là trọng tâm của tam giác nào sau đây ?

(A) Tam giác ABC ;

(B) Tam giác ABD ;

(C) Tam giác ACD ;

(D) Tam giác BCD.

CHƯƠNG II

TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

Ngoài tích của một vectơ với một số, còn có tích vô hướng của hai vectơ, tức là phép nhân vô hướng hai vectơ với nhau. Kết quả của phép nhân này cho ta một số, vì vậy người ta gọi tích đó là tích vô hướng.

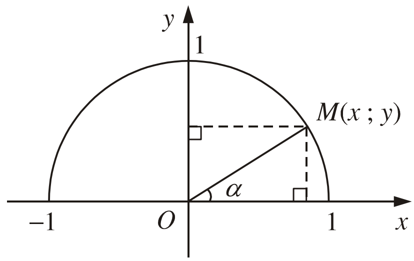
Chương này trình bày các tính chất cơ bản của tích vô hướng và những ứng dụng của chúng. đặc biệt là những hệ thức quan trọng trong tam giác : định lí côsin, định lí sin, công thức trung tuyến, các công thức tính diện tích tam giác,...

Học sinh phải biết vận dụng các kiến thức cơ bản nêu trên để giải một số bài toán hình học và bài toán thực tế.

§1 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KÌ (từ 0^o đến 180^o)

Ở lớp 9, các em đã biết về các giá trị lượng giác (tỉ số lượng giác) : sin, côsin, tang, côtang của một góc nhọn α và kí hiệu là $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$.

Trên hình 32 có một hệ toạ độ Oxy và một nửa đường tròn tâm O bán kính $R = 1$, nằm phía trên trục Ox. Ta gọi nó là ***nửa đường tròn đơn vị***.



Hình 32

Nếu cho trước một góc nhọn α thì ta có thể xác định một điểm M duy nhất trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{MOx} = \alpha$.

1
Giả sử $(x ; y)$ là toạ độ của điểm M (h. 32). Hãy chứng tỏ rằng

$$\sin\alpha = y \ ; \ \cos\alpha = x \ ; \ \tan\alpha = \frac{y}{x} \ ; \ \cot\alpha = \frac{x}{y}.$$

Bây giờ chúng ta mở rộng định nghĩa giá trị lượng giác cho góc α bất kì $(0^o \le \alpha \le 180^o)$. Ta làm điều đó bằng cách vẫn dùng nửa đường tròn đơn vị như trên.

1. Định nghĩa

Với mỗi góc α $(0^o \le \alpha \le 180^o)$, ta xác định điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{MOx} = \alpha$. Giả sử điểm M có toạ độ (x ; y). Khi đó

*Tung độ y của điểm M gọi là **sin** của góc α, kí hiệu là $\sin\alpha$;*

*Hoành độ x của điểm M gọi là **côsin** của góc α, kí hiệu là $\cos\alpha$;*

> *Tỉ số* $\dfrac{y}{x}$ *(với* $x \neq 0$*) gọi là* ***tang*** *của góc* α*, kí hiệu là* $\tan\alpha$ *;*
>
> *Tỉ số* $\dfrac{x}{y}$ *(với* $y \neq 0$*) gọi là* ***côtang*** *của góc* α*, kí hiệu là* $\cot\alpha$*.*

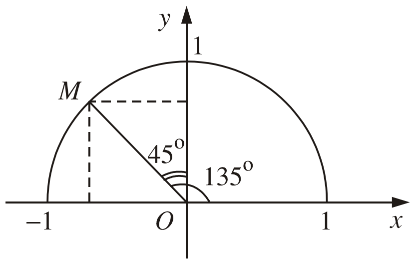
Các số $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ gọi là các ***giá trị lượng giác*** của góc α.

Như vậy $\sin\alpha = y$, $\cos\alpha = x$, $\tan\alpha = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cot\alpha = \dfrac{x}{y} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Ví dụ 1. *Tìm các giá trị lượng giác của góc* 135^{o}.

Giải. (h. 33) Ta lấy điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{MOx} = 135^{\text{o}}$. Khi đó hiển nhiên $\widehat{MOy} = 45^{\text{o}}$. Từ đó suy ra toạ độ của điểm M là

$$M = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \; ; \; \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$



Hình 33

Vậy $\sin 135^{\text{o}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 135^{\text{o}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan 135^{\text{o}} = -1$; $\cot 135^{\text{o}} = -1$.

?1 *Tìm các giá trị lượng giác của các góc* 0^{o}*,* 180^{o}*,* 90^{o}.

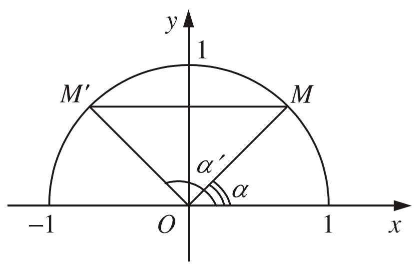
?2 *Với các góc* α *nào thì* $\sin\alpha < 0$ *? Với các góc* α *nào thì* $\cos\alpha < 0$ *?*

2 (h. 34)

Lấy hai điểm M và M' trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $MM' \parallel Ox$.

a) Tìm sự liên hệ giữa hai góc $\alpha = \widehat{MOx}$ và $\alpha' = \widehat{M'Ox}$.

b) Hãy so sánh các giá trị lượng giác của hai góc α và α'.



Hình 34

Từ đó ta suy ra các tính chất sau đây

Nếu hai góc bù nhau thì sin của chúng bằng nhau, còn côsin, tang và côtang của chúng đối nhau ; nghĩa là

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha \;;$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha \;;$$

$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan\alpha \qquad (\alpha \neq 90^\circ)\;;$$

$$\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot\alpha \qquad (0^\circ < \alpha < 180^\circ).$$

Ví dụ 2. *Tìm các giá trị lượng giác của góc* 150°.

Giải. Góc 150° bù với góc 30° nên

$$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}\;; \qquad \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}\;;$$

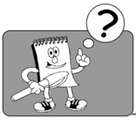
$$\tan 150^\circ = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}\;; \qquad \cot 150^\circ = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}\,.$$

2. Giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt

Sau đây là giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt mà ta nên nhớ (trong bảng dưới đây, kxđ là viết tắt của nhóm từ *không xác định*). Giá trị lượng giác của các góc bất kì có thể tìm thấy trong bảng số hoặc bằng máy tính bỏ túi.

Góc	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	kxđ	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cot	kxđ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	kxđ

Em có biết ?



CÁC TỪ SIN, CÔSIN, TANG, CÔTANG

Từ xa xưa, do nhu cầu đo đạc thiên văn, nhiều nhà toán học đã lập bảng độ dài dây cung căng bởi cung tròn (bán kính cho trước) có số đo 1^o, 2^o, 3^o, ..., 180^o, trong đó có Hip-pac (Hipparque) ở thế kỉ thứ II trước công nguyên, Ptô-lê-mê (Ptolemey) ở thế kỉ thứ II sau công nguyên, v.v... Đó là nguồn gốc của khái niệm sin. Qua nhiều giai đoạn lịch sử, từ "jiva" (tiếng Ấn, có nghĩa là "dây cung") được diễn dịch, phiên âm, đổi dần thành từ sinus bởi các nhà thiên văn, toán học như An Bat-ta-ni (Al Battani) ở thế kỉ thứ X, Giê-ra Crê-môn (Gérard Crémone) ở thế kỉ thứ XII, v.v...

Khái niệm tang, côtang nảy sinh từ việc khảo sát bóng của vật thẳng đứng trên nền nằm ngang để tìm giờ trong ngày. Từ xa xưa, người ta cũng đã lập bảng các "bóng" (tức bảng tang, côtang).

Đến thế kỉ thứ XVI mới xuất hiện kí hiệu sin, tang (Tô-mat Phin (Thomas Finck)) và đầu thế kỉ thứ XVII mới xuất hiện kí hiệu côsin, côtang để chỉ sin, tang của góc phụ (Et-mơn Gơn-tơ (Edmund Gunter)). Các kí hiệu này dần dần được chấp nhận và sử dụng phổ cập.

Câu hỏi và bài tập

1. Tính giá trị đúng của các biểu thức sau (không dùng máy tính bỏ túi hoặc bảng số)

a) $(2\sin 30^o + \cos 135^o - 3\tan 150^o)(\cos 180^o - \cot 60^o)$;

b) $\sin^2 90^o + \cos^2 120^o + \cos^2 0^o - \tan^2 60^o + \cot^2 135^o$.

2. Đơn giản các biểu thức

a) $\sin 100^o + \sin 80^o + \cos 16^o + \cos 164^o$;

b) $2\sin(180^o - \alpha)\cot\alpha - \cos(180^o - \alpha)\tan\alpha\cot(180^o - \alpha)$ với $0^o < \alpha < 90^o$.

3. Chứng minh các hệ thức sau

a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

b) $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $(\alpha \neq 90^o)$;

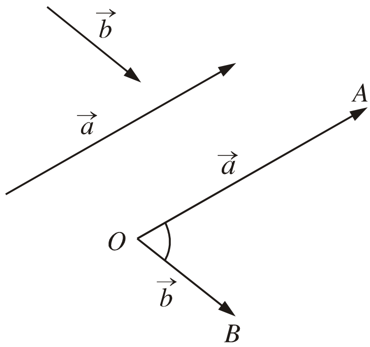
c) $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ $(0^o < \alpha < 180^o)$.

§2 TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

1. Góc giữa hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$.

Từ một điểm O nào đó, ta vẽ các vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (h. 35). Khi đó



Hình 35

> *Số đo của góc AOB được gọi là số đo của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, hoặc đơn giản là **góc giữa hai vectơ** $\vec{a}$ và $\vec{b}$.*

Trong trường hợp có ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ hoặc $\vec{b}$ là vectơ $\vec{0}$ thì ta xem góc giữa hai vectơ đó là tuỳ ý (từ 0^o đến 180^o).

Rõ ràng cách xác định góc giữa hai vectơ không phụ thuộc vào việc chọn điểm O ; cho nên *góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được kí hiệu là* $(\vec{a}, \vec{b})$.

> *Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^o$ thì ta nói rằng hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ **vuông góc với nhau**, kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$.*

?1 *Khi nào góc giữa hai vectơ bằng 0^o ? Bằng 180^o ?*

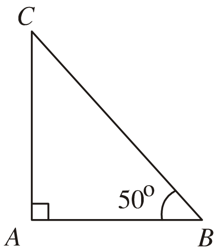
1

Cho tam giác ABC vuông tại A và có $\widehat{B} = 50^o$ (h. 36). Tính các góc

$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$;

$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$; $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})$;

$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})$; $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA})$.

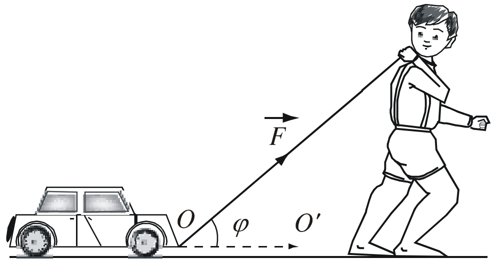


Hình 36

2. Định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ

Trong Vật lí, ta có khái niệm "*công sinh bởi một lực*".

Giả sử một lực không đổi $\vec{F}$ tác dụng lên một vật làm cho vật đó di chuyển từ điểm O đến điểm O' (h. 37).



Hình 37

Khi đó lực $\vec{F}$ đã sinh ra một công A tính theo công thức

$$A = |\vec{F}|.|\overrightarrow{OO'}|\cos\varphi,$$

trong đó $|\vec{F}|$ là cường độ của lực $\vec{F}$ tính bằng Niutơn (kí hiệu là N), $|\overrightarrow{OO'}|$ là độ dài vectơ $\overrightarrow{OO'}$ tính bằng mét (kí hiệu là m), φ là góc giữa hai vectơ $\vec{F}$ và $\overrightarrow{OO'}$. Công A được tính bằng Jun (kí hiệu là J). Như vậy J = N. m.

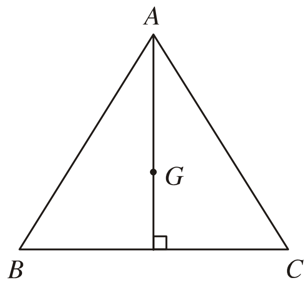
Trong Toán học, giá trị A trong biểu thức trên (không kể đơn vị đo) được gọi là *tích vô hướng* của hai vectơ $\vec{F}$ và $\overrightarrow{OO'}$.

> ***Tích vô hướng của hai vectơ*** *$\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$, được xác định bởi*
>
> $$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

Ví dụ 1. *Cho tam giác đều ABC có cạnh a và trọng tâm G (h. 38). Tính các tích vô hướng sau đây*

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\ ;\quad \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}\ ;\quad \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AB}\ ;$$

$$\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}\ ;\quad \overrightarrow{BG}.\overrightarrow{GA}\ ;\quad \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{BC}.$$



Hình 38

Giải. Theo định nghĩa, ta có

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a.a.\cos 60^o = \frac{1}{2}a^2\ ;$$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = a.a.\cos 120^o = -\frac{1}{2}a^2\ ;$$

$$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AB} = a\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot a\cdot\cos 30^o = a^2\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}a^2\ ;$$

$$\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} = a\frac{\sqrt{3}}{3}.a\frac{\sqrt{3}}{3}\cos 120^{\circ} = -\frac{a^2}{6};$$

$$\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{GA} = a\frac{\sqrt{3}}{3}.a\frac{\sqrt{3}}{3}\cos 60^{\circ} = \frac{a^2}{6};$$

$$\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{BC} = a\frac{\sqrt{3}}{3}.a.\cos 90^{\circ} = 0.$$

?2 *Trong trường hợp nào thì tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 0 ?*

Bình phương vô hướng

Với vectơ $\vec{a}$ tuỳ ý, tích vô hướng $\vec{a}.\vec{a}$ được kí hiệu là $(\vec{a})^2$ hay đơn giản hơn là $\vec{a}^2$ và gọi là ***bình phương vô hướng*** của vectơ $\vec{a}$.

Từ định nghĩa của tích vô hướng ta có

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|.|\vec{a}|.\cos 0^{\circ} = |\vec{a}|^2.$$

Vậy

Bình phương vô hướng của một vectơ bằng bình phương độ dài của vectơ đó.

Héc-man Grat-xơ-man (Hermann Grassmann 1808 - 1877), nhà toán học Đức, là cha đẻ của tích vô hướng của hai vectơ mà ông đã kí hiệu là $\vec{u} \frown \vec{v}$. Chính việc nghiên cứu thuỷ triều dẫn ông đến các khảo sát về vectơ.

3. Tính chất của tích vô hướng

?3 *Với hai số thực a và b, ta có ab = ba. Vậy với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ta có tính chất tương tự hay không ?*

ĐỊNH LÍ

Với ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tuỳ ý và mọi số thực k, ta có

1) $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ *(tính chất giao hoán) ;*

2) $\vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$;

3) $(k\vec{a}).\vec{b} = \vec{a}.(k\vec{b}) = k(\vec{a}.\vec{b})$;

4) $\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$ *(tính chất phân phối đối với phép cộng) ;*

$\vec{a}.(\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} - \vec{a}.\vec{c}$ *(tính chất phân phối đối với phép trừ).*

Ta có thể dễ dàng chứng minh được các tính chất 1, 2, 3. Tính chất 4 được thừa nhận, không chứng minh.

Dùng các tính chất của tích vô hướng, ta có thể chứng minh các hệ thức sau

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}.\vec{b}\ ; \qquad (1)$$

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}.\vec{b}\ ; \qquad (2)$$

$$(\vec{a} + \vec{b}).(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2. \qquad (3)$$

Sau đây ta chứng minh hệ thức 3. Theo tính chất phân phối, ta có

$$(\vec{a} + \vec{b}).(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}.(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b}.(\vec{a} - \vec{b})$$
$$= \vec{a}^2 - \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{a} - \vec{b}^2 = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2.$$

2
Hãy chứng minh các hệ thức (1) và (2).

?4 *Ta biết rằng với hai số thực bất kì a và b, luôn có* $(ab)^2 = a^2b^2$. *Vậy với hai vectơ bất kì* $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$, *đẳng thức* $(\vec{a}.\vec{b})^2 = \vec{a}^2.\vec{b}^2$ *có đúng không ? Viết thế nào mới đúng ?*

Bài toán 1. *Cho tứ giác ABCD.*

a) Chứng minh rằng

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD}.$$

b) Từ câu a), hãy chứng minh rằng : Điều kiện cần và đủ để tứ giác có hai đường chéo vuông góc là tổng bình phương các cặp cạnh đối diện bằng nhau.

Giải. (h. 39)

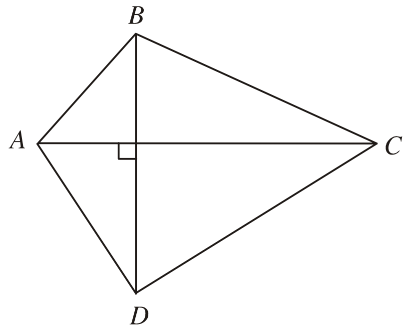
a) Ta có

$$AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2$$

$$= (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})^2 + CD^2 - CB^2 - (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA})^2$$

$$= -2\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CA}$$

$$= 2\overrightarrow{CA}.(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}) = 2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD}.$$



Hình 39

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

b) Từ a) ta có ngay :

$$CA \perp BD \Leftrightarrow \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD} = 0 \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2.$$

Bài toán 2. *Cho đoạn thẳng AB có độ dài 2a và số k^2. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k^2$.*

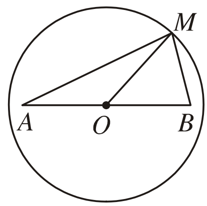
Giải. (h. 40) Gọi O là trung điểm đoạn thẳng AB, ta có

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})$$

$$= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA})$$

$$= \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2$$

$$= MO^2 - OA^2 = MO^2 - a^2.$$



Hình 40

Do đó

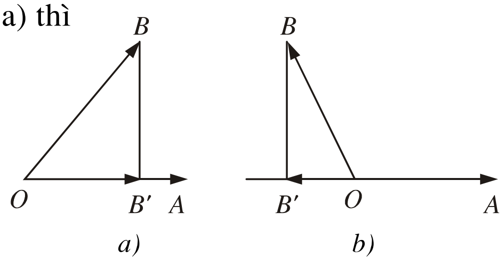
$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k^2 \Leftrightarrow MO^2 - a^2 = k^2 \Leftrightarrow MO^2 = k^2 + a^2.$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm O, bán kính $R = \sqrt{k^2 + a^2}$.

Bài toán 3. *Cho hai vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$. Gọi B' là hình chiếu của B trên đường thẳng OA. Chứng minh rằng*

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB'}.$$

Chứng minh. Nếu $\widehat{AOB} < 90^{\circ}$ (h. 41a) thì



Hình 41

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA.OB.\cos\widehat{AOB}$$
$$= OA.OB'$$
$$= OA.OB'.\cos 0^{\circ}$$
$$= \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB'}.$$

Còn nếu $\widehat{AOB} \geq 90^{\circ}$ (h. 41b) thì

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA.OB.\cos\widehat{AOB} = -OA.OB.\cos\widehat{B'OB}$$
$$= -OA.OB' = OA.OB'.\cos 180^{\circ} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB'}.$$

> *Vectơ $\overrightarrow{OB'}$ gọi là **hình chiếu** của vectơ $\overrightarrow{OB}$ trên đường thẳng OA.*
>
> *Công thức $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB'}$ gọi là **công thức hình chiếu**.*

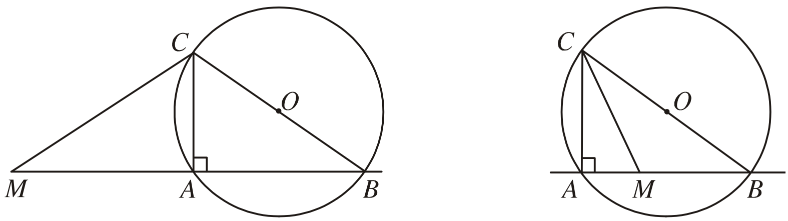
3

Hãy phát biểu bằng lời kết luận của Bài toán 3.

Bài toán 4. *Cho đường tròn (O ; R) và điểm M cố định. Một đường thẳng Δ thay đổi, luôn đi qua M, cắt đường tròn đó tại hai điểm A và B. Chứng minh rằng*

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MO^2 - R^2 .$$

Chứng minh. (h. 42) Vẽ đường kính BC của đường tròn (O ; R). Ta có $\overrightarrow{MA}$ là hình chiếu của $\overrightarrow{MC}$ trên đường thẳng MB. Theo công thức hình chiếu, ta có



Hình 42

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}).(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})$$
$$= (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OB}).(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OB}^2$$
$$= d^2 - R^2 \text{ (với } d = MO).$$

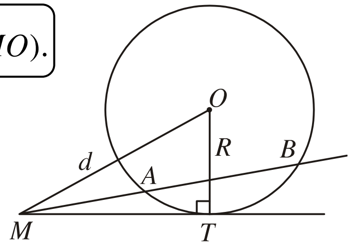
☞ CHÚ Ý

1) Giá trị không đổi $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = d^2 - R^2$ nói trong Bài toán 4 gọi là ***phương tích*** của điểm M đối với đường tròn (O) và kí hiệu là $\mathscr{P}_{M/(O)}$

$$\boxed{\mathscr{P}_{M/(O)} = \overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = d^2 - R^2 \quad (d = MO).}$$

2) (h. 43) Khi điểm M nằm ngoài đường tròn (O), MT là tiếp tuyến của đường tròn đó (T là tiếp điểm), thì

$$\mathscr{P}_{M/(O)} = \overrightarrow{MT}^2 = MT^2.$$



Hình 43

4. Biểu thức toạ độ của tích vô hướng

4

Trong hệ toạ độ $(O\,;\ \vec{i}, \vec{j})$, cho $\vec{a} = (x\,;\,y)$ và $\vec{b} = (x'\,;\,y')$. Tính

a) $\vec{i}^2$, $\vec{j}^2$, $\vec{i}.\vec{j}$; b) $\vec{a}.\vec{b}$; c) $\vec{a}^2$; d) $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$.

Các hệ thức quan trọng

> *Cho hai vectơ* $\vec{a} = (x\,;\,y)$ *và* $\vec{b} = (x'\,;\,y')$. *Khi đó*
>
> *1)* $\vec{a}.\vec{b} = xx' + yy'$;
>
> *2)* $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$;
>
> *3)* $\cos(\vec{a},\ \vec{b}) = \dfrac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x'^2 + y'^2}} \qquad \left(\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}\right).$
>
> *Đặc biệt :* $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0.$

5

Cho hai vectơ $\vec{a} = (1\,;\,2)$ và $\vec{b} = (-1\,;\,m)$.

a) Tìm m để $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau.

b) Tìm độ dài của $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Tìm m để $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

HỆ QUẢ

Trong mặt phẳng toạ độ, khoảng cách giữa hai điểm $M(x_M\,;\,y_M)$ *và* $N(x_N\,;\,y_N)$ *là*

$$MN = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}\,.$$

Ví dụ 2. *Trong mặt phẳng toạ độ, cho hai điểm* $M(-2\,;\,2)$ *và* $N(4\,;\,1)$.

a) Tìm trên trục Ox điểm P cách đều hai điểm M, N.

b) Tính côsin của góc MON.

Giải

a) Vì P thuộc trục Ox nên P có toạ độ $(p\,;\,0)$. Khi đó

$$MP = NP \Leftrightarrow MP^2 = NP^2 \Leftrightarrow (p+2)^2 + 2^2 = (p-4)^2 + 1^2.$$

Từ đó ta được phương trình $12p = 9$, suy ra $p = \dfrac{3}{4}$. Vậy $P = \left(\dfrac{3}{4}\,;\,0\right)$.

b) Ta có $\overrightarrow{OM} = (-2\,;\,2)$ và $\overrightarrow{ON} = (4\,;\,1)$. Vậy

$$\cos\widehat{MON} = \cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = \frac{-2.4 + 2.1}{\sqrt{8}.\sqrt{17}} = -\frac{3}{\sqrt{34}}.$$

Câu hỏi và bài tập

4. Trong trường hợp nào tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$ có giá trị dương, có giá trị âm, bằng 0 ?

5. Cho tam giác ABC. Tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$ có thể nhận giá trị nào trong các giá trị sau : 90° ; 180° ; 270° ; 360° ?

6. Cho tam giác ABC vuông ở A và $\widehat{B} = 30^\circ$. Tính giá trị của các biểu thức sau

a) $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + \sin(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + \tan\dfrac{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})}{2}$;

b) $\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA})$.

7. Cho bốn điểm bất kì A, B, C, D. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB}=0.$$

Từ đó suy ra một cách chứng minh định lí : "*Ba đường cao của một tam giác đồng quy*".

8. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC vuông tại A là

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=AB^2.$$

9. Cho tam giác ABC với ba đường trung tuyến AD, BE, CF. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF}=0.$$

10. Cho hai điểm M, N nằm trên đường tròn đường kính $AB=2R$. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AM và BN.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI}$.

b) Tính $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI}$ theo R.

11. Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau tại M. Trên a có hai điểm A và B, trên b có hai điểm C và D đều khác M sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.

12. Cho đoạn thẳng AB cố định, $AB=2a$ và một số k^2. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $MA^2-MB^2=k^2$.

13. Trong mặt phẳng toạ độ, cho $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{i}-5\vec{j}$ và $\vec{v}=k\vec{i}-4\vec{j}$.

a) Tìm các giá trị của k để $\vec{u}\perp\vec{v}$;

b) Tìm các giá trị của k để $|\vec{u}|=|\vec{v}|$.

14. Trong mặt phẳng toạ độ, cho tam giác ABC có các đỉnh $A(-4\ ;\ 1)$, $B(2\ ;\ 4)$, $C(2\ ;\ -2)$.

a) Tính chu vi và diện tích của tam giác đó.

b) Tìm toạ độ của trọng tâm G, trực tâm H và tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Từ đó hãy kiểm tra tính chất thẳng hàng của ba điểm I, G, H.

§3 HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

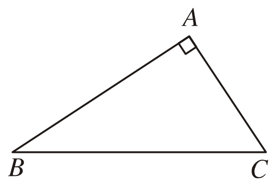
Ta biết rằng một tam giác hoàn toàn được xác định nếu biết ba cạnh, hoặc hai cạnh và góc xen giữa, hoặc một cạnh và hai góc kề ; nghĩa là số đo các cạnh, các góc còn lại của tam giác này hoàn toàn xác định. Như vậy, giữa các yếu tố của tam giác có những mối liên hệ nào đó, mà ta sẽ gọi chúng là các ***hệ thức lượng trong tam giác***. Trong mục này ta sẽ làm quen với một số hệ thức đó.

1. Định lí côsin trong tam giác

Nếu ABC là tam giác vuông tại A (h. 44) thì theo định lí Py-ta-go ta có

$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$

hay $$\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2. \qquad (*)$$



Hình 44

Có thể chứng minh ngắn gọn đẳng thức (*) như sau

$$\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2.$$

$\boxed{?1}$ *Trong chứng minh trên, giả thiết góc A vuông được sử dụng như thế nào ?*

Bây giờ ta hãy xét một tam giác ABC tuỳ ý.

1

Hãy làm tương tự như chứng minh trên, rồi đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, để đi đến công thức

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Như vậy ta được định lí sau đây, gọi là ***định lí côsin*** trong tam giác.

ĐỊNH LÍ

Trong tam giác ABC, với BC = a, CA = b, AB = c, ta có

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A\ ;$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B\ ;$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

2 Từ định lí trên, hãy phát biểu bằng lời công thức tính một cạnh của tam giác theo hai cạnh còn lại và côsin của góc xen giữa hai cạnh đó.

?2 *Khi ABC là tam giác vuông, chẳng hạn* $\widehat{A} = 90^o$, *định lí côsin trở thành định lí quen thuộc nào ?*

3 Từ định lí côsin hãy viết công thức tính giá trị $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ theo a, b, c.

Từ hoạt động này ta có hệ quả sau đây trong tam giác *ABC*

HỆ QUẢ

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Ví dụ 1. *Hai chiếc tàu thuỷ cùng xuất phát từ một vị trí A, đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc* 60^o. *Tàu B chạy với tốc độ* 20 *hải lí một giờ. Tàu C chạy với tốc độ* 15 *hải lí một giờ. Sau* 2 *giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lí ?* (1 hải lí ≈ 1,852 km).

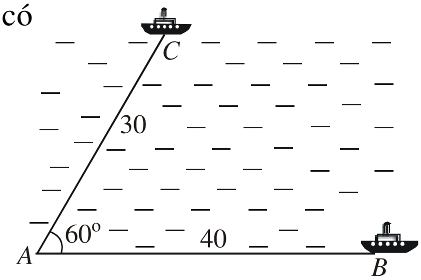
Giải. (h. 45) Sau *2* giờ tàu *B* đi được 40 hải lí, tàu *C* đi được 30 hải lí. Vậy tam giác *ABC* có *AB* = 40, *AC* = 30, $\widehat{A} = 60^o$.

Áp dụng định lí côsin vào tam giác *ABC*, ta có

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$= 30^2 + 40^2 - 2.30.40.\cos 60^o$$
$$= 900 + 1600 - 1200 = 1300.$$

Vậy $BC = \sqrt{1300} \approx 36$ (hải lí).

Sau 2 giờ, hai tàu cách nhau khoảng 36 hải lí.



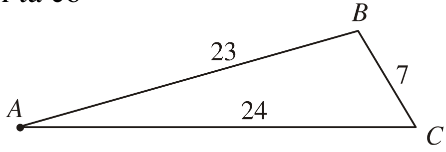
Hình 45

Ví dụ 2. *Các cạnh của tam giác ABC là $a = 7$, $b = 24$, $c = 23$. Tính góc A.*

Giải. (h. 46) Theo hệ quả của định lí côsin ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{24^2 + 23^2 - 7^2}{2.24.23} \approx 0{,}9565.$$



Hình 46

Từ đó ta được $\widehat{A} \approx 16^o58'$.

CHÚ Ý

Nếu sử dụng máy tính bỏ túi (MTBT) để tính góc A khi biết $\cos A = 0{,}9565$, ta có thể làm như sau

1) Đối với MTBT CASIO *fx*-220 hoặc *fx*-500A thì ấn

0.9565 $\boxed{SHIFT}$ $\boxed{\cos}$ $\boxed{SHIFT}$ $\boxed{\circ ,,,}$. Kết quả : $\widehat{A} \approx 16^o58'$.

2) Đối với MTBT CASIO *fx*-500MS thì ấn

$\boxed{SHIFT}$ $\boxed{\cos}$ 0.9565 $\boxed{=}$ $\boxed{\circ ,,,}$. Kết quả : $\widehat{A} \approx 16^o58'$.

Ngoài ra, có thể dùng một số loại MTBT khác để tính toán, như CANON, SHARP hoặc các MTBT có chức năng tương đương.

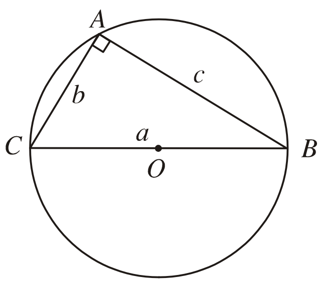
2. Định lí sin trong tam giác

Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ nội tiếp đường tròn $(O\ ;\ R)$.

Nếu góc A vuông (h. 47) thì $a = 2R$ và dễ thấy

$$a = 2R\sin A,\quad b = 2R\sin B,\quad c = 2R\sin C.\quad (1)$$

Bây giờ xét trường hợp góc A không vuông. Ta chứng minh các công thức (1) vẫn đúng.

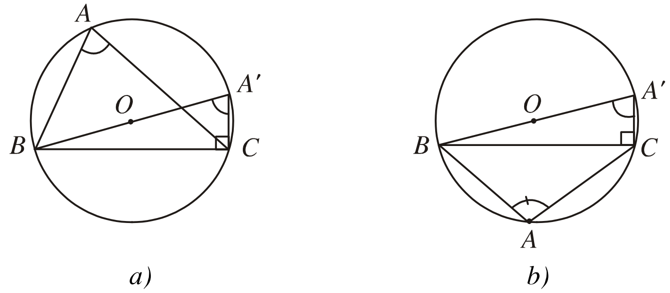


Hình 47

4 *(Để chứng minh các công thức (1))*

Gọi $(O\ ;\ R)$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, vẽ đường kính BA' của đường tròn.

Hãy chứng tỏ $\sin\widehat{BAC} = \sin\widehat{BA'C}$ trong cả hai trường hợp : Góc BAC là góc nhọn (h. 48a), là góc tù (h. 48b). Từ đó hãy kết thúc chứng minh.



Hình 48

Từ đó ta có định lí

> *Với mọi tam giác ABC, ta có*
> $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$
> *trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.*

Ví dụ 3. *Từ hai vị trí A và B của một toà nhà, người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi (h. 49). Biết rằng độ cao AB bằng* 70 m, *phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang góc* 30^o, *phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang góc* $15^o30'$. *Hỏi ngọn núi đó cao bao nhiêu mét so với mặt đất ?*

Giải. (h. 49) Từ giả thiết, ta suy ra tam giác *ABC* có

$$\widehat{CAB} = 60^o,\ \widehat{ABC} = 105^o30',\ c = 70.$$

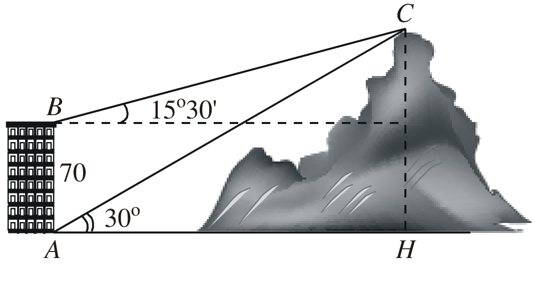
$$\widehat{C} = 180^o - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 180^o - 165^o30' = 14^o30'.$$

Theo định lí sin ta có

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

hay

$$\frac{b}{\sin 105^o30'} = \frac{70}{\sin 14^o30'}.$$



Hình 49

Do đó $AC = b = \dfrac{70.\sin 105^o30'}{\sin 14^o30'} \approx 269{,}4$ (m).

Gọi *CH* là khoảng cách từ *C* đến mặt đất. Tam giác vuông *ACH* có cạnh *CH* đối diện với góc 30^o nên

$$CH = \frac{AC}{2} \approx \frac{269,4}{2} = 134,7 \text{ (m)}.$$

Vậy ngọn núi cao khoảng 135 m.

CHÚ Ý

Nếu sử dụng MTBT để tính biểu thức $b = \dfrac{70.\sin 105^{\mathrm{o}}30'}{\sin 14^{\mathrm{o}}30'}$ thì ta có thể làm như sau

1) Đối với MTBT CASIO *fx*-220 hoặc *fx*-500A thì ấn

70 $\boxed{\times}$ $\boxed{[(...}$ 105 $\boxed{\circ,,,}$ 30 $\boxed{\circ,,,}$ $\boxed{\sin}$ $\boxed{...)]}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{[(...}$ 14 $\boxed{\circ,,,}$ 30 $\boxed{\circ,,,}$ $\boxed{\sin}$ $\boxed{...)]}$ $\boxed{=}$. Kết quả : $b \approx 269,4$.

2) Đối với MTBT CASIO *fx*-500MS thì ấn

70 $\boxed{\times}$ $\boxed{\sin}$ 105 $\boxed{\circ,,,}$ 30 $\boxed{\circ,,,}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\sin}$ 14 $\boxed{\circ,,,}$ 30 $\boxed{\circ,,,}$ $\boxed{=}$.

Kết quả : $b \approx 269,4$.

Ví dụ 4. *Cho tam giác ABC có* $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$. *Chứng minh rằng*

$$\sin A - 2\sin B + \sin C = 0.$$

Giải. Gọi R là bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Từ định lí sin, ta có

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{b}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R}.$$

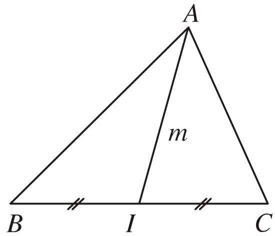
Vậy $\quad \sin A - 2\sin B + \sin C = \dfrac{1}{2R}(a - 2b + c) = \dfrac{1}{2R}(4 - 10 + 6) = 0.$

AL Kashi

Định lí côsin trong tam giác còn được gọi là định lí An Ka-si (AL Kashi) – tên của nhà thiên văn học và toán học Trung Á, một trong những nhà bác học lớn cuối cùng của trường phái Xa-mác-kan (Samarkand) đầu thế kỉ XV.

3. Tổng bình phương hai cạnh và độ dài đường trung tuyến của tam giác

Bài toán 1. Cho ba điểm A, B, C, trong đó $BC = a > 0$. Gọi I là trung điểm của BC, biết $AI = m$ (h. 50). Hãy tính $AB^2 + AC^2$ theo a và m.



Hình 50

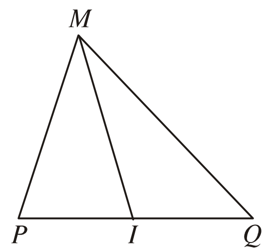
?3 *Nếu* $m = \dfrac{a}{2}$ *thì có thể thấy ngay* $AB^2 + AC^2$ *bằng bao nhiêu hay không ?*

5 (Để giải Bài toán 1)

Hãy viết $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}$ rồi tính $\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2$ để đi đến kết quả

$$AB^2 + AC^2 = 2m^2 + \frac{a^2}{2}.$$

Bài toán 2. Cho hai điểm phân biệt P, Q. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $MP^2 + MQ^2 = k^2$, trong đó k là số cho trước.



Hình 51

Hướng dẫn. (h. 51) Gọi I là trung điểm của PQ và đặt $PQ = a$. Theo Bài toán 1, ta có

$$MP^2 + MQ^2 = 2MI^2 + \frac{a^2}{2}.$$

Vậy $MP^2 + MQ^2 = k^2$ khi và chỉ khi $2MI^2 + \dfrac{a^2}{2} = k^2$ hay

$$MI^2 = \frac{k^2}{2} - \frac{a^2}{4}. \qquad (*)$$

6

Từ (*) hãy suy ra lời giải của Bài toán 2.

Bài toán 3. Cho tam giác ABC. Gọi m_a, m_b, m_c là độ dài các đường trung tuyến lần lượt ứng với các cạnh $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Chứng minh các công thức sau đây, gọi là ***công thức trung tuyến***

$$\boxed{m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}\ ; \quad m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}\ ; \quad m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.}$$

Giải. Từ kết quả của Bài toán 1, ta suy ra ngay các công thức cần chứng minh.

4. Diện tích tam giác

Với tam giác ABC, ta kí hiệu h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao lần lượt ứng với các cạnh BC, CA, AB ; R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ; $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi tam giác.

Ta có thể tính diện tích S của tam giác ABC bằng các công thức sau đây

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c \;; \qquad (1)$$

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A \;; \qquad (2)$$

$$S = \frac{abc}{4R} \;; \qquad (3)$$

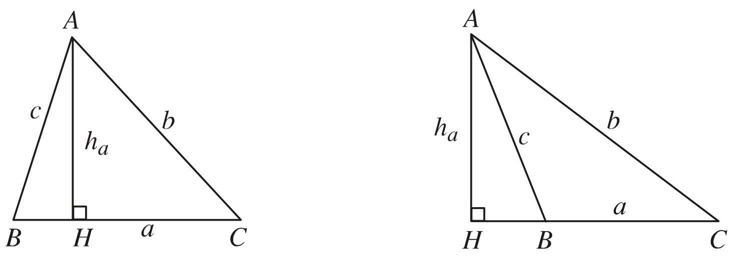
$$S = pr \;; \qquad (4)$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,. \qquad (5)$$

(Công thức (5) gọi là ***công thức Hê-rông***).

7 (h. 52)

Hãy tính h_a trong tam giác AHB theo cạnh c và góc B, rồi thay vào công thức $S = \frac{1}{2}ah_a$ để được công thức (2) (chú ý xét cả hai trường hợp H nằm trong, H nằm ngoài đoạn BC).



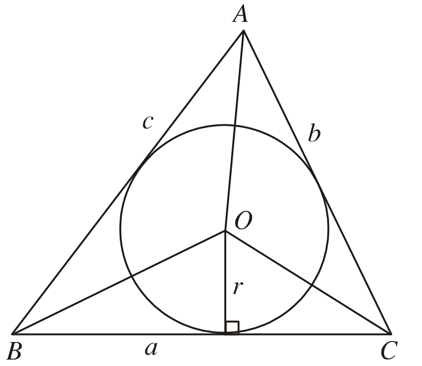
Hình 52

8

Từ công thức (2) và định lí sin, hãy suy ra công thức (3).

9 (h. 53)

Gọi $(O\ ;\ r)$ là đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Để ý rằng S là tổng diện tích các tam giác OBC, OCA, OAB. Hãy áp dụng công thức (1) để suy ra công thức (4).



Hình 53

• *Chứng minh công thức Hê-rông*

Ta có $S = \frac{1}{2}bc\sin A$, suy ra

$$S^2 = \frac{1}{4}b^2c^2(1 - \cos^2 A)$$

$$= \frac{1}{4}b^2c^2\left[1 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}\right]$$

$$= \frac{1}{16}(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)$$

$$= \frac{1}{16}\left[(b + c)^2 - a^2)\right]\left[a^2 - (b - c)^2\right]$$

$$= \frac{b + c + a}{2} \cdot \frac{b + c - a}{2} \cdot \frac{a - b + c}{2} \cdot \frac{a + b - c}{2}$$

$$= p(p - a)(p - b)(p - c).$$

Vậy $\quad S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$

• Người ta gọi tam giác có độ dài các cạnh là ba số nguyên liên tiếp và có diện tích bằng một số nguyên là ***tam giác Hê-rông***. Các tam giác có độ dài các cạnh như sau

3 ; 4 ; 5,

13 ; 14 ; 15,

51 ; 52 ; 53,

....

là những tam giác Hê-rông.

10

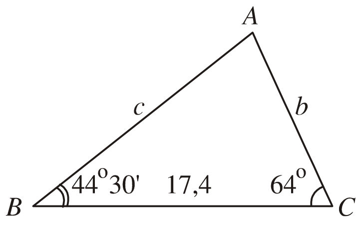
Hãy tính diện tích của ba tam giác Hê-rông ở trên.

5. Giải tam giác và ứng dụng thực tế

Giải tam giác là tính các cạnh và các góc của tam giác dựa trên một số điều kiện cho trước.

Ví dụ 5. *Cho tam giác ABC. Biết* $a = 17,4$; $\widehat{B} = 44^o30'$; $\widehat{C} = 64^o$. *Tính góc A và các cạnh b, c của tam giác đó.*

Giải. (h. 54)



Hình 54

Ta có

$$\widehat{A} = 180^o - (\widehat{B} + \widehat{C})$$

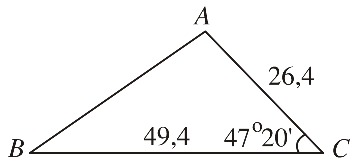
$$= 180^o - (44^o30' + 64^o) = 71^o30'.$$

Theo định lí sin ta có

$$b = \frac{a.\sin B}{\sin A} = \frac{17,4.\sin 44^o30'}{\sin 71^o30'} \approx 12,9$$

$$c = \frac{a.\sin C}{\sin A} = \frac{17,4.\sin 64^o}{\sin 71^o30'} \approx 16,5.$$

Ví dụ 6. *Cho tam giác ABC. Biết* $a = 49,4$; $b = 26,4$; $\widehat{C} = 47^o20'$. *Tính hai góc A, B và cạnh c.*



Hình 55

Giải. (h. 55)

Theo định lí côsin ta có

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = (49,4)^2 + (26,4)^2 - 2.49,4.26,4.\cos 47^o20'$$

$$\approx 1369,58.$$

Vậy $c \approx \sqrt{1369,58} \approx 37,0$.

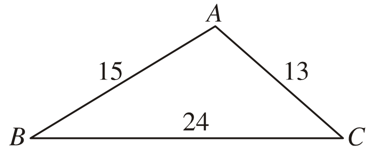
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \approx \frac{696,96 + 1369,58 - 2440,36}{2.26,4.37} \approx -0,1913.$$

Dùng bảng số hoặc MTBT, tìm được $\widehat{A} \approx 101^o2'$. Từ đó

$$\widehat{B} \approx 180^o - (101^o2' + 47^o20') = 31^o38'.$$

Ví dụ 7. *Cho tam giác ABC. Biết $a = 24$; $b = 13$; $c = 15$. Tính các góc A, B, C.*

Giải. (h. 56)



Hình 56

Theo hệ quả của định lí côsin, ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{169 + 225 - 576}{2.13.15} = -\frac{7}{15} \approx -0,4667.$$

Vậy $\widehat{A} \approx 117^o49'$.

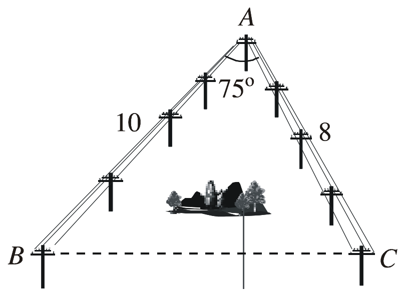
Vì $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$ nên

$$\sin B = \frac{b.\sin A}{a} \approx \frac{13.\sin 117^o49'}{24} = \frac{13.\sin 62^o11'}{24} \approx 0,4791.$$

Vì cạnh AC ngắn nhất nên góc B nhọn. Suy ra

$$\widehat{B} \approx 28^o38' \ ; \ \widehat{C} \approx 180^o - (117^o49' + 28^o38') = 33^o33'.$$

Ví dụ 8. *Đường dây cao thế nối thẳng từ vị trí A đến vị trí B dài* 10 km, *từ vị trí A đến vị trí C dài* 8 km, *góc tạo bởi hai đường dây trên bằng* 75^o. *Tính khoảng cách từ vị trí B đến vị trí C (h. 57).*



Hình 57

Giải. Áp dụng định lí côsin vào tam giác ABC, ta có

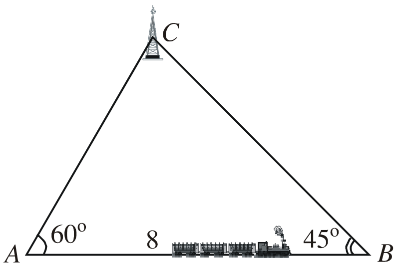
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$

$$\approx 8^2 + 10^2 - 2.8.10.\cos 75^o \approx 123.$$

Suy ra $a \approx 11$ (km).

Vậy khoảng cách từ B đến C xấp xỉ 11 km.

Ví dụ 9. *(h. 58) Một người ngồi trên tàu hoả đi từ ga A đến ga B. Khi tàu đỗ ở ga A, qua ống nhòm người đó nhìn thấy một tháp C. Hướng nhìn từ người đó đến tháp tạo với hướng đi của tàu một góc* 60°. *Khi tàu đỗ ở ga B, người đó nhìn lại vẫn thấy tháp C, hướng nhìn từ người đó đến tháp tạo với hướng ngược với hướng đi của tàu một góc* 45°. *Biết rằng đoạn đường tàu nối thẳng ga A với ga B dài* 8 km. *Hỏi khoảng cách từ ga A đến tháp C là bao nhiêu ?*



Hình 58

Giải. Xét tam giác ABC. Ta có

$$\widehat{C} = 180^{\circ} - (60^{\circ} + 45^{\circ}) = 75^{\circ}.$$

Áp dụng định lí sin vào tam giác ABC, ta được $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

Suy ra $b = 8.\dfrac{\sin 45^{\circ}}{\sin 75^{\circ}} \approx 6$ (km).

Vậy khoảng cách từ ga A đến tháp C xấp xỉ 6 km.

Em có biết ?

GIẢI TAM GIÁC VÀ MÉT MẪU

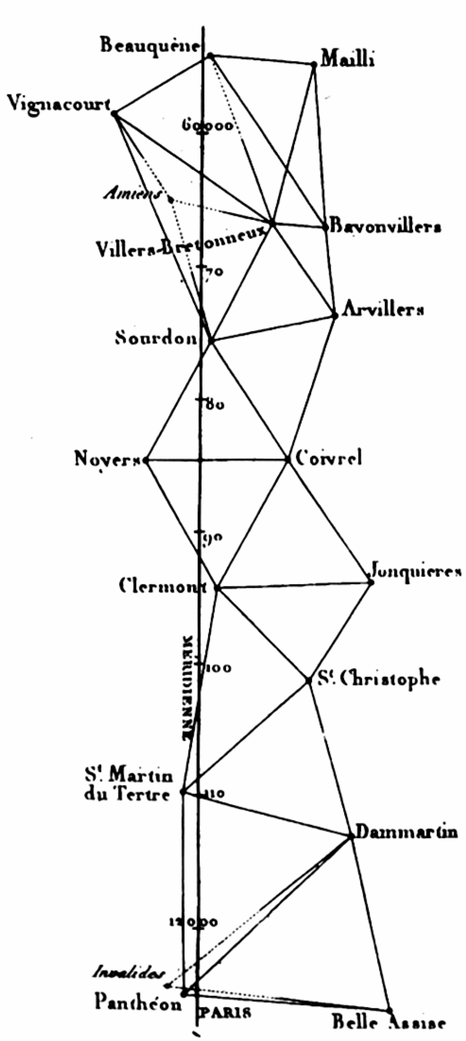
Ngay sau Cách mạng 1789 ở Pháp, người ta quyết định xây dựng một hệ đo lường phổ cập, trong đó có đo độ dài.

Về độ dài, người ta lấy độ dài vòng kinh tuyến của Trái Đất làm cơ sở ("dưới chân mỗi người đều có kinh tuyến"). Người ta coi vòng kinh tuyến Trái Đất dài 40000 km, tức 4×10^7 mét, vậy một mét là $\dfrac{1}{10^7}$ của một phần tư độ dài vòng kinh tuyến. Bằng cách nào có được một mét để làm mẫu ?

Các nhà thiên văn Pi-e Mê-sanh (Pierre Méchain) và Giăng Đờ-lam-brơ (Jean Delambre) được giao nhiệm vụ đo độ dài cung kinh tuyến nối hai thành phố Đơn-kec (Dunkerque ở Bắc Pháp) và Bác-xơ-lo-na (Barcelona, Tây Ban Nha). Các phương pháp thiên văn thời đó đã cho biết hai thành phố đó có cùng kinh độ và có vĩ độ khác nhau 10,8 độ.

Trên mặt đất, việc đo góc dễ hơn đo độ dài nên người ta xét dãy tam giác sắp xếp kề nhau dọc theo kinh tuyến đi qua hai thành phố nói trên (mỗi tam giác có đỉnh là các địa điểm dễ xác định vị trí như đỉnh lâu đài, nóc nhà thờ v.v...). Trong 7 năm lao động kiên nhẫn miệt mài, Mê-sanh, Đờ-lam-brơ dùng khoảng 500000 phép đo để giải hàng trăm tam giác sắp xếp như thế. Sau đó, qua nhiều tháng kiểm nghiệm đo đạc, tính toán bởi một hội đồng gồm nhiều nhà bác học tên tuổi (trong đó có các nhà toán học Pháp La-pla-xơ (Laplace), Lơ-giăng-đrơ (Legendre), La-grăng-giơ (Lagrange) v.v...), kết quả cuối cùng đã được công nhận vào năm 1799 và đã có mẫu một mét bằng bạch kim đặt tại Viện đo lường Pa-ri (Paris) (mẫu một mét "cho mọi thời đại", "cho mọi dân tộc").

Ngày nay, dùng các phương pháp của Vật lí hiện đại, ta có thể xác định đơn vị đo độ dài chính xác hơn nhiều.



Câu hỏi và bài tập

15. Tam giác ABC có $a = 12$, $b = 13$, $c = 15$. Tính $\cos A$ và góc A.

16. Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 8$, $\widehat{A} = 60^o$. Kết quả nào trong các kết quả sau là độ dài cạnh BC ?

a) $\sqrt{129}$; b) 7 ;

c) 49 ; d) $\sqrt{69}$.

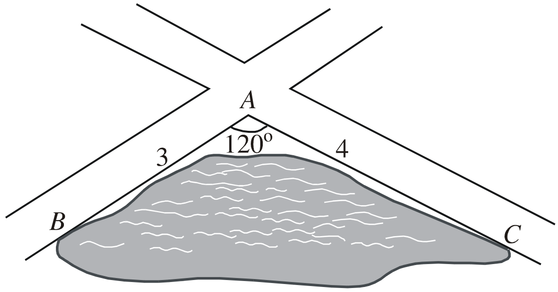
17. Hình 59 vẽ một hồ nước nằm ở góc tạo bởi hai con đường. Bốn bạn An, Cường, Trí, Đức dự đoán khoảng cách từ B đến C như sau

An : 5 km

Cường : 6 km

Trí : 7 km

Đức : 5,5 km.



Hình 59

Biết rằng khoảng cách từ A đến B là 3 km, khoảng cách từ A đến C là 4 km, góc BAC là 120°.

Hỏi dự đoán của bạn nào sát với thực tế nhất ?

18. Cho tam giác ABC. Chứng minh các khẳng định sau

a) Góc A nhọn khi và chỉ khi $a^2 < b^2 + c^2$;

b) Góc A tù khi và chỉ khi $a^2 > b^2 + c^2$;

c) Góc A vuông khi và chỉ khi $a^2 = b^2 + c^2$.

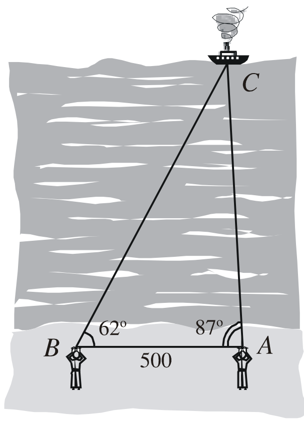
19. Tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^{\circ}$, $\widehat{B} = 45^{\circ}$, $b = 4$. Tính hai cạnh a và c.

20. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^{\circ}$, $a = 6$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

21. Chứng minh rằng nếu ba góc của tam giác ABC thoả mãn hệ thức $\sin A = 2\sin B.\cos C$ thì ABC là tam giác cân.

22. Hình 60 vẽ một chiếc tàu thuỷ đang neo đậu ở vị trí C trên biển và hai người ở các vị trí quan sát A và B cách nhau 500 m. Họ đo được góc CAB bằng 87° và góc CBA bằng 62°.

Tính các khoảng cách AC và BC.



Hình 60

23. Gọi H là trực tâm của tam giác không vuông ABC. Chứng minh rằng bán kính các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, HBC, HCA, HAB bằng nhau.

24. Tam giác ABC có $a = 7$, $b = 8$, $c = 6$. Tính m_a.

25. Tam giác ABC có $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$. Lấy điểm D đối xứng với B qua C. Tính độ dài AD.

26. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 4$, $BC = 5$, $BD = 7$. Tính AC.

27. Chứng minh rằng trong một hình bình hành, tổng bình phương các cạnh bằng tổng bình phương của hai đường chéo.

28. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông ở A khi và chỉ khi $5m_a^2 = m_b^2 + m_c^2$.

29. Tam giác ABC có $b = 6{,}12$; $c = 5{,}35$; $\widehat{A} = 84^{\circ}$. Tính diện tích tam giác đó.

30. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BD. Chứng minh rằng

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2.$$

31. Gọi S là diện tích và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

32. Chứng minh rằng diện tích của một tứ giác bằng nửa tích hai đường chéo và sin của góc hợp bởi hai đường chéo đó.

33. Giải tam giác ABC, biết

a) $c = 14$, $\widehat{A} = 60^{\circ}$, $\widehat{B} = 40^{\circ}$;

b) $b = 4{,}5$, $\widehat{A} = 30^{\circ}$, $\widehat{C} = 75^{\circ}$;

c) $c = 35$, $\widehat{A} = 40^{\circ}$, $\widehat{C} = 120^{\circ}$;

d) $a = 137{,}5$, $\widehat{B} = 83^{\circ}$, $\widehat{C} = 57^{\circ}$.

34. Giải tam giác ABC, biết

a) $a = 6{,}3$, $b = 6{,}3$, $\widehat{C} = 54^{\circ}$;

b) $b = 32$, $c = 45$, $\widehat{A} = 87^{\circ}$;

c) $a = 7$, $b = 23$, $\widehat{C} = 130^{\circ}$.

35. Giải tam giác ABC, biết

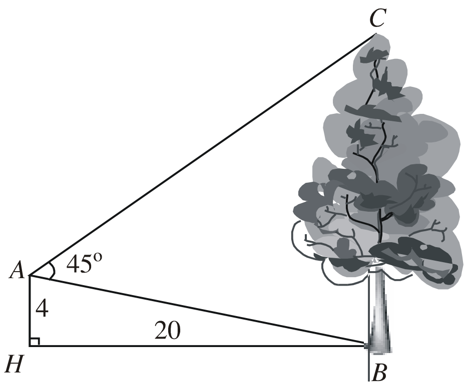
a) $a = 14$, $b = 18$, $c = 20$;

b) $a = 6$, $b = 7{,}3$, $c = 4{,}8$;

c) $a = 4$, $b = 5$, $c = 7$.

36. Biết hai lực cùng tác dụng vào một vật và tạo với nhau góc 40°. Cường độ của hai lực đó là 3N và 4N. Tính cường độ của lực tổng hợp.

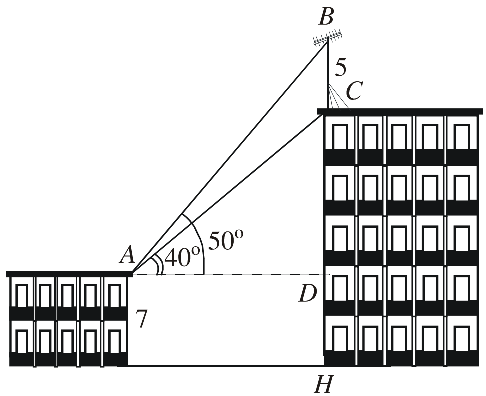
37. Từ vị trí A người ta quan sát một cây cao (h. 61).



Hình 61

Biết $AH = 4$ m, $HB = 20$ m, $\widehat{BAC} = 45^{\circ}$. Tính chiều cao của cây.

38. Trên nóc một toà nhà có một cột ăng-ten cao 5 m. Từ vị trí quan sát A cao 7 m so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten dưới góc 50° và 40° so với phương nằm ngang. Tính chiều cao của toà nhà (h. 62).



Hình 62

ÔN TẬP CHƯƠNG II

I - Tóm tắt những kiến thức cần nhớ

1. Giá trị lượng giác của một góc

– Với mỗi góc α $(0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ)$, ta xác định điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{MOx} = \alpha$. Giả sử điểm M có toạ độ $(x\ ;\ y)$. Khi đó

$\sin\alpha = y,$ $\qquad$ $\cos\alpha = x,$

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $(\cos\alpha \neq 0),$ $\qquad$ $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $(\sin\alpha \neq 0).$

– Hai góc bù nhau có *sin* bằng nhau ; còn *côsin, tang, côtang* của chúng đối nhau.

2. Tích vô hướng của hai vectơ

– Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

– Các tính chất

1) $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$;

2) $(k\vec{a}).\vec{b} = k(\vec{a}.\vec{b})$;

3) $\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$;

4) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$;

5) $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

– Biểu thức toạ độ của tích vô hướng và khoảng cách giữa hai điểm

1) Nếu $\vec{a} = (x\ ;\ y)$, $\vec{b} = (x'\ ;\ y')$ thì

$$\vec{a}.\vec{b} = xx' + yy' \ ;$$

2) Nếu $M = (x_M\ ;\ y_M)$, $N = (x_N\ ;\ y_N)$ thì

$$MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}\,.$$

3. Định lí côsin trong tam giác

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

4. Định lí sin trong tam giác

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

5. Công thức trung tuyến của tam giác

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

6. Các công thức tính diện tích tam giác

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

II - Câu hỏi tự kiểm tra

1. Phát biểu định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ. Khi nào thì tích vô hướng của hai vectơ là số dương, là số âm, bằng 0 ?

2. Để giải tam giác ta thường dùng định lí côsin trong những trường hợp nào ? Dùng định lí sin trong những trường hợp nào ?

3. Cho biết độ dài ba cạnh của tam giác. Làm thế nào để tính

a) Các góc của tam giác ?

b) Các đường cao của tam giác ?

c) Bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ?

d) Diện tích tam giác ?

4. Trong mặt phẳng toạ độ, biết toạ độ ba đỉnh của tam giác, làm thế nào để tìm chu vi, diện tích, toạ độ trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ?

III - Bài tập

1. Chứng minh các công thức sau

a) $\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2\right)$; b) $\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{4}\left(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2\right)$.

2. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng với mọi điểm M, ta luôn có

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

b) Tìm tập hợp các điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2 = k^2$, trong đó k là một số cho trước.

3. Cho hình bình hành $ABCD$. Tìm tập hợp các điểm M sao cho

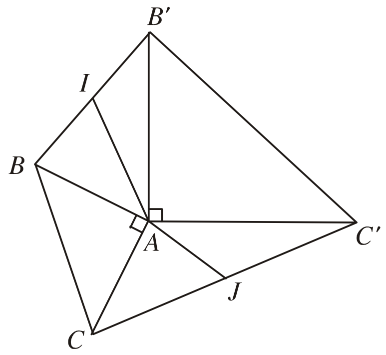
$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k^2,$$

trong đó k là một số cho trước.

4. Trên hình 63 có vẽ hai tam giác vuông cân ABC và $AB'C'$ có chung đỉnh A. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của hai đoạn thẳng BB' và CC'. Chứng minh rằng

a) $AI \perp CC'$, $AJ \perp BB'$;

b) $BC' \perp B'C$.



Hình 63

5. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi N là trung điểm của CD, M là điểm trên AC sao cho

$$AM = \frac{1}{4}AC.$$

a) Tính các cạnh của tam giác BMN.

b) Có nhận xét gì về tam giác BMN ? Tính diện tích tam giác đó.

c) Gọi I là giao điểm của BN và AC. Tính CI.

d) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BDN.

6. Trong mặt phẳng toạ độ, cho $\vec{e} = (4 ; 1)$ và $\vec{f} = (1 ; 4)$.

a) Tìm góc giữa các vectơ $\vec{e}$ và $\vec{f}$.

b) Tìm m để vectơ $\vec{a} = \vec{e} + m\vec{f}$ vuông góc với trục hoành.

c) Tìm n để vectơ $\vec{b} = n\vec{e} + \vec{f}$ tạo với vectơ $\vec{i} + \vec{j}$ một góc 45°.

7. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau là

$$b^2 + c^2 = 5a^2.$$

8. Trong các tam giác có hai cạnh là a và b, tìm tam giác có diện tích lớn nhất.

9. Cho tam giác ABC có $a = 12$, $b = 16$, $c = 20$. Tính diện tích S, chiều cao h_a, các bán kính R, r của đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác đó.

10. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

a) $\cot A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$ (S là diện tích tam giác ABC) ;

b) $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$.

11. Cho hai đường tròn $(O\ ;\ R)$ và $(O'\ ;\ R')$ cắt nhau tại hai điểm A và B. Trên đường thẳng AB, lấy điểm C ở ngoài hai đường tròn và kẻ hai tiếp tuyến CE, CF đến hai đường tròn đó (E, F là các tiếp điểm). Chứng minh rằng $CE = CF$.

12. Cho đường tròn $(O\ ;\ R)$ và một điểm P cố định ở bên trong đường tròn đó. Hai dây cung thay đổi AB và CD luôn đi qua P và vuông góc với nhau.

a) Chứng minh rằng $AB^2 + CD^2$ không đổi.

b) Chứng minh rằng $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm P.

IV - Bài tập trắc nghiệm

1. Giá trị $\cos 45^o + \sin 45^o$ bằng bao nhiêu ?

(A) 1 ; (B) $\sqrt{2}$; (C) $\sqrt{3}$; (D) 0.

2. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng ?

(A) $\sin(180^o - \alpha) = -\cos\alpha$; (B) $\sin(180^o - \alpha) = -\sin\alpha$;

(C) $\sin(180^o - \alpha) = \sin\alpha$; (D) $\sin(180^o - \alpha) = \cos\alpha$.

3. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **sai** ?

(A) $\sin 0^o + \cos 0^o = 0$; (B) $\sin 90^o + \cos 90^o = 1$;

(C) $\sin 180^o + \cos 180^o = -1$; (D) $\sin 60^o + \cos 60^o = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

4. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào **không đúng** ?

(A) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$;

(B) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - 2\sin\alpha\cos\alpha$;

(C) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;

(D) $\cos^4\alpha + \sin^4\alpha = 1$.

5. Cho O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều MNP. Góc nào sau đây bằng 120° ?

(A) $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP})$; (B) $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{ON})$;

(C) $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{OP})$; (D) $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP})$.

6. Cho M, N, P, Q là bốn điểm tuỳ ý. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào **sai** ?

(A) $\overrightarrow{MN}.(\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PQ}$;

(B) $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP}$;

(C) $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{MN}$;

(D) $(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PQ}).(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}) = MN^2 - PQ^2$.

7. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào đúng ?

(A) $\left|\vec{a}.\vec{b}\right| = |\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|$; (B) $\sqrt{\vec{a}^2} = |\vec{a}|$;

(C) $\sqrt{\vec{a}^2} = \vec{a}$; (D) $\vec{a} = \pm|\vec{a}|$.

8. Trong mặt phẳng toạ độ, cho $\vec{a} = (3 ; 4)$, $\vec{b} = (4 ; -3)$. Kết luận nào sau đây là **sai** ?

(A) $\vec{a}.\vec{b} = 0$; (B) $\vec{a} \perp \vec{b}$;

(C) $\left|\vec{a}.\vec{b}\right| = 0$; (D) $|\vec{a}|.\left|\vec{b}\right| = 0$.

9. Trong mặt phẳng toạ độ, cho $\vec{a} = (9 ; 3)$. Vectơ nào sau đây **không vuông góc** với vectơ $\vec{a}$?

(A) $\vec{v}\,(1 ; -3)$; (B) $\vec{v}\,(2 ; -6)$;

(C) $\vec{v}\,(1 ; 3)$; (D) $\vec{v}\,(-1 ; 3)$.

10. Tam giác ABC có $a = 14$, $b = 18$, $c = 20$. Kết quả nào sau đây là gần đúng nhất ?

(A) $\widehat{B} \approx 42^{\circ}50'$; (B) $\widehat{B} \approx 60^{\circ}56'$;

(C) $\widehat{B} \approx 119^{\circ}04'$; (D) $\widehat{B} \approx 90^{\circ}$.

11. Nếu tam giác MNP có $MP = 5$, $PN = 8$ và $\widehat{MPN} = 120^{o}$ thì độ dài cạnh MN (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất) là

(A) 11,4 ; (B) 12,4 ;

(C) 7,0 ; (D) 12,0.

12. Cho tam giác MPQ vuông tại P. Trên cạnh MQ lấy hai điểm E, F sao cho các góc MPE, EPF, FPQ bằng nhau.

Đặt $MP = q, PQ = m, PE = x, PF = y$ (h. 64).

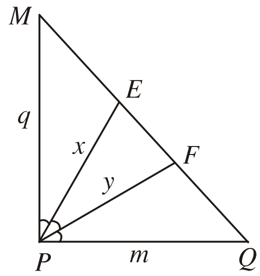
Trong các hệ thức sau, hệ thức nào đúng ?

(A) $ME = EF = FQ$;

(B) $ME^2 = q^2 + x^2 - xq$;

(C) $MF^2 = q^2 + y^2 - yq$;

(D) $MQ^2 = q^2 + m^2 - 2qm$.



Hình 64

13. Tam giác ABC có $BC = 10$, $\widehat{A} = 30^{o}$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng bao nhiêu ?

(A) 5 ; (B) 10 ;

(C) $\dfrac{10}{\sqrt{3}}$; (D) $10\sqrt{3}$.

14. Tam giác với ba cạnh là 5, 12 và 13 có diện tích bằng bao nhiêu ?

(A) 30 ; (B) $20\sqrt{2}$;

(C) $10\sqrt{3}$; (D) 20.

15. Tam giác ABC có ba cạnh là 6, 10, 8. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó bằng bao nhiêu ?

(A) $\sqrt{3}$; (B) 4 ;

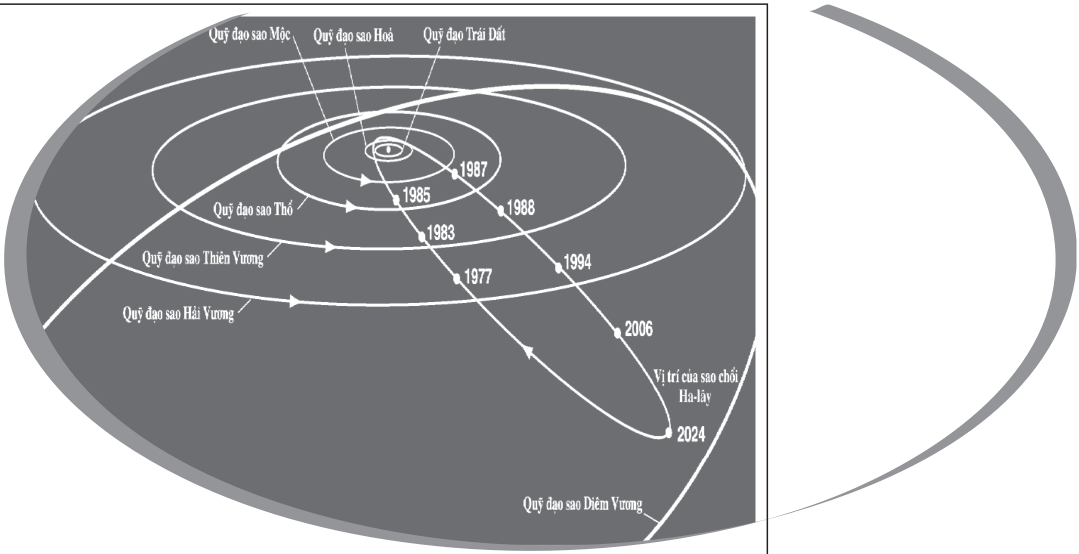
(C) 2 ; (D) 1.

16. Tam giác ABC có $\widehat{B} = 60^{o}$, $\widehat{C} = 45^{o}$, $AB = 5$. Hỏi cạnh AC bằng bao nhiêu ?

(A) $5\sqrt{3}$; (B) $5\sqrt{2}$;

(C) $\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$; (D) 10.

CHƯƠNG III



PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

Bằng cách đưa vào mặt phẳng một hệ trục toạ độ, mỗi vectơ, mỗi điểm trên mặt phẳng đó đều được xác định bởi toạ độ của nó. Khi đó chúng ta có thể chuyển nhiều bài toán hình học sang bài toán đại số và ngược lại, từ kết quả của đại số suy ra được một số tính chất và mối quan hệ giữa các hình hình học.

Yêu cầu đối với các em khi học chương này là

- Lập được phương trình đường thẳng, đường tròn, đường cônic khi biết các yếu tố xác định mỗi đường.

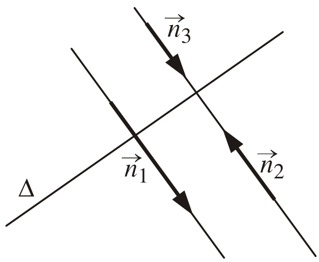
- Từ phương trình của các đường, thấy được các tính chất và quan hệ giữa các đường.

- Nhớ và vận dụng được các biểu thức toạ độ vào việc tính khoảng cách, tính góc.

§1 PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐƯỜNG THẲNG

1. Phương trình tổng quát của đường thẳng

Trên hình 65, ta có các vectơ $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, $\vec{n}_3$ khác $\vec{0}$ mà giá của chúng đều vuông góc với đường thẳng Δ. Khi đó, ta gọi $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, $\vec{n}_3$ là những *vectơ pháp tuyến* của Δ.



Hình 65

ĐỊNH NGHĨA

Vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$, có giá vuông góc với đường thẳng Δ gọi là ***vectơ pháp tuyến*** *của đường thẳng Δ.*

?1 *Mỗi đường thẳng có bao nhiêu vectơ pháp tuyến ? Chúng liên hệ với nhau như thế nào ?*

?2 *Cho điểm I và vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$. Có bao nhiêu đường thẳng đi qua I và nhận $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến ?*

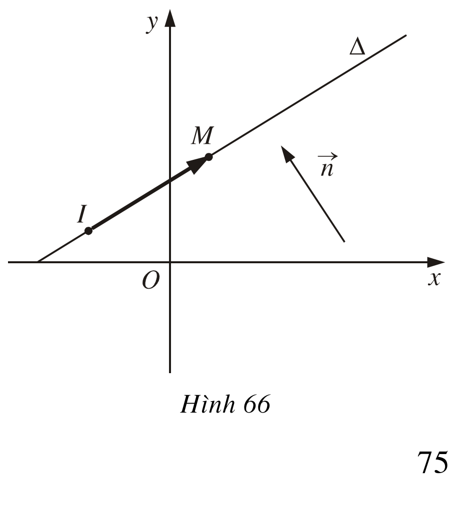
Bài toán

Trong mặt phẳng toạ độ, cho điểm $I(x_0 ; y_0)$ và vectơ $\vec{n}(a ; b) \neq \vec{0}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua I, có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}$. Tìm điều kiện của x và y để điểm $M(x ; y)$ nằm trên Δ.

Giải. (h. 66)

Điểm M nằm trên Δ khi và chỉ khi $\overrightarrow{IM} \perp \vec{n}$, hay

$$\overrightarrow{IM} . \vec{n} = 0. \qquad (*)$$



Hình 66

Ta có $\overrightarrow{IM} = (x - x_0 ; y - y_0)$ và $\vec{n} = (a ; b)$ nên (*) tương đương với

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0. \qquad (1)$$

Đây chính là điều kiện cần và đủ để $M(x ; y)$ nằm trên Δ.

Biến đổi (1) về dạng $ax + by - ax_0 - by_0 = 0$ và đặt $-ax_0 - by_0 = c$, ta được phương trình

$$ax + by + c = 0 \ (a^2 + b^2 \neq 0)$$

và gọi là ***phương trình tổng quát*** của đường thẳng Δ.

Tóm lại,

> *Trong mặt phẳng toạ độ, mọi đường thẳng đều có phương trình tổng quát dạng*
>
> $$ax + by + c = 0, \text{ với } a^2 + b^2 \neq 0.$$

Ngược lại, ta có thể chứng minh được rằng : Mỗi phương trình dạng

$$ax + by + c = 0, \text{ với } a^2 + b^2 \neq 0$$

đều là phương trình tổng quát của một đường thẳng xác định, nhận $\vec{n} = (a ; b)$ là vectơ pháp tuyến.

?3 *Mỗi phương trình sau có phải là phương trình tổng quát của đường thẳng không ? Hãy chỉ ra một vectơ pháp tuyến của đường thẳng đó :*

$$7x - 5 = 0 ; \quad mx + (m + 1)y - 3 = 0 ; \quad kx - \sqrt{2}\,ky + 1 = 0.$$

1

Cho đường thẳng Δ có phương trình tổng quát là $3x - 2y + 1 = 0$.

a) Hãy chỉ ra một vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ.

b) Trong các điểm sau đây, điểm nào thuộc Δ, điểm nào không thuộc Δ ?

$$M(1 ; 1), \ N(-1 ; -1), \ P\left(0 ; \frac{1}{2}\right), \ Q(2 ; 3), \ E\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{4}\right).$$

Ví dụ. *Cho tam giác có ba đỉnh $A = (-1 ; -1)$, $B = (-1 ; 3)$, $C = (2 ; -4)$. Viết phương trình tổng quát của đường cao kẻ từ A.*

Giải. Đường cao cần tìm là đường thẳng đi qua A và nhận $\overrightarrow{BC}$ là một vectơ pháp tuyến. Ta có $\overrightarrow{BC} = (3 ; -7)$ và $A = (-1 ; -1)$ nên theo (1), phương trình tổng quát của đường cao đó là $3(x + 1) - 7(y + 1) = 0$ hay $3x - 7y - 4 = 0$.

Các dạng đặc biệt của phương trình tổng quát

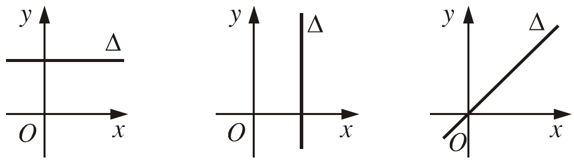
2
Cho đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$. Em có nhận xét gì về vị trí tương đối của Δ và các trục toạ độ khi $a = 0$? Khi $b = 0$? Khi $c = 0$?

GHI NHỚ

Đường thẳng $by + c = 0$ *song song hoặc trùng với trục* Ox (h. 67a).

Đường thẳng $ax + c = 0$ *song song hoặc trùng với trục* Oy (h. 67b).

Đường thẳng $ax + by = 0$ *đi qua gốc toạ độ* (h. 67c).

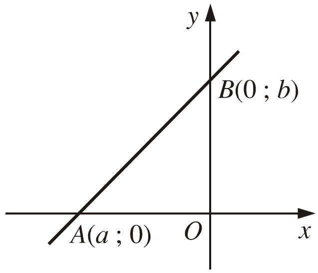


a) *b)* *c)*

Hình 67

3
Cho hai điểm $A(a ; 0)$ và $B(0 ; b)$, với $ab \neq 0$ (h. 68).
a) Hãy viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ đi qua A và B.
b) Chứng tỏ rằng phương trình tổng quát của Δ tương đương với phương trình

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$



Hình 68

GHI NHỚ

Đường thẳng có phương trình

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \ (a \neq 0,\ b \neq 0) \qquad (2)$$

đi qua hai điểm $A(a ; 0)$ *và* $B(0 ; b)$.

Phương trình dạng (2) được gọi là ***phương trình đường thẳng theo đoạn chắn***.

?4 *Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua* $A(-1 ; 0)$ *và* $B(0 ; 2)$.

CHÚ Ý

Xét đường thẳng Δ có phương trình tổng quát $ax + by + c = 0$.
Nếu $b \neq 0$ thì phương trình trên đưa được về dạng

$$y = kx + m \qquad (3)$$

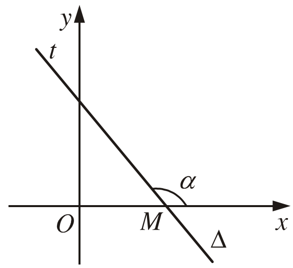
với $k = -\dfrac{a}{b}$, $m = -\dfrac{c}{b}\cdot$ Khi đó k là *hệ số góc* của đường thẳng Δ và (3) gọi là ***phương trình của Δ theo hệ số góc***.

Ý nghĩa hình học của hệ số góc (h. 69)

Xét đường thẳng $\Delta : y = kx + m$.

Với $k \neq 0$, gọi M là giao điểm của Δ với trục Ox và Mt là tia của Δ nằm phía trên Ox. Khi đó, nếu α là góc hợp bởi hai tia Mt và Mx thì hệ số góc của đường thẳng Δ bằng *tang* của góc α, tức là $k = \tan\alpha$.

Khi $k = 0$ thì Δ là đường thẳng song song hoặc trùng với trục Ox.



Hình 69

?5 *Mỗi đường thẳng sau đây có hệ số góc bằng bao nhiêu ? Hãy chỉ ra góc α tương ứng với hệ số góc đó.*

a) $\Delta_1 : 2x + 2y - 1 = 0$;

b) $\Delta_2 : \sqrt{3}x - y + 5 = 0$.

2. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Trong mặt phẳng toạ độ, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 có phương trình

$$\Delta_1 : \quad a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$

$$\Delta_2 : \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Vì số điểm chung của hai đường thẳng bằng số nghiệm của hệ gồm hai phương trình trên, nên từ kết quả của đại số ta có

a) Hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 cắt nhau khi và chỉ khi

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \;;$$

b) Hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 song song khi và chỉ khi

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{và} \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

hoặc

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{và} \quad \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} \neq 0 \;;$$

c) Hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 trùng nhau khi và chỉ khi

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Trong trường hợp a_2, b_2, c_2 đều khác 0, ta có

$$\Delta_1, \Delta_2 \text{ cắt nhau} \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}\ ;$$

$$\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}\ ;$$

$$\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

?6 *Từ tỉ lệ thức* $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$, *có thể nói gì về vị trí tương đối của* Δ_1 và Δ_2 ?

?7 *Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng* Δ_1, Δ_2 *trong mỗi trường hợp sau*

a) $\Delta_1 : \sqrt{2}x - 3y + 5 = 0$ *và* $\Delta_2 : x + 3y - \sqrt{3} = 0$;

b) $\Delta_1 : x - 3y + 2 = 0$ *và* $\Delta_2 : -2x + 6y + 3 = 0$;

c) $\Delta_1 : 0{,}7x + 12y - 5 = 0$ *và* $\Delta_2 : 1{,}4x + 24y - 10 = 0$.

Câu hỏi và bài tập

1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

a) Đường thẳng song song với trục Ox có phương trình $y = m$ $(m \neq 0)$;

b) Đường thẳng có phương trình $x = m^2 + 1$ song song với trục Oy ;

c) Phương trình $y = kx + b$ là phương trình của đường thẳng ;

d) Mọi đường thẳng đều có phương trình dạng $y = kx + b$;

e) Đường thẳng đi qua hai điểm $A(a\ ;\ 0)$ và $B(0\ ;\ b)$ có phương trình

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

2. Viết phương trình tổng quát của

a) Đường thẳng Ox ;

b) Đường thẳng Oy ;

c) Đường thẳng đi qua $M(x_0\ ;\ y_0)$ và song song với Ox ;

d) Đường thẳng đi qua $M(x_0\ ;\ y_0)$ và vuông góc với Ox ;

e) Đường thẳng OM, với $M(x_0\ ;\ y_0)$ khác điểm O.

3. Cho tam giác ABC có phương trình các đường thẳng AB, BC, CA là

$$AB : 2x - 3y - 1 = 0 ;$$

$$BC : x + 3y + 7 = 0 ;$$

$$CA : 5x - 2y + 1 = 0.$$

Viết phương trình tổng quát của đường cao kẻ từ đỉnh B.

4. Cho hai điểm $P(4 ; 0)$, $Q(0 ; -2)$.

a) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua điểm $A(3 ; 2)$ và song song với đường thẳng PQ ;

b) Viết phương trình tổng quát của đường trung trực của đoạn thẳng PQ.

5. Cho đường thẳng d có phương trình $x - y = 0$ và điểm $M(2 ; 1)$.

a) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đối xứng với đường thẳng d qua điểm M.

b) Tìm hình chiếu của điểm M trên đường thẳng d.

6. Xét vị trí tương đối của mỗi cặp đường thẳng sau và tìm giao điểm (nếu có) của chúng

a) $2x - 5y + 3 = 0$ và $5x + 2y - 3 = 0$;

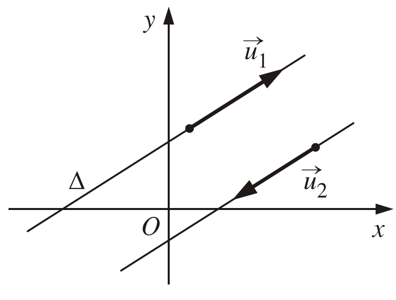
b) $x - 3y + 4 = 0$ và $0{,}5x - 1{,}5y + 4 = 0$;

c) $10x + 2y - 3 = 0$ và $5x + y - 1{,}5 = 0$.

§2 PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ĐƯỜNG THẲNG

1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng

Trên hình 70, vectơ $\vec{u}_1$ khác $\vec{0}$, có giá là đường thẳng Δ ; vectơ $\vec{u}_2$ khác $\vec{0}$, có giá song song với Δ. Khi đó ta gọi $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ là các vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ.



Hình 70

ĐỊNH NGHĨA

> *Vectơ $\vec{u}$ khác $\vec{0}$, có giá song song hoặc trùng với đường thẳng Δ được gọi là* ***vectơ chỉ phương*** *của Δ.*

?1 *Vectơ chỉ phương và vectơ pháp tuyến của một đường thẳng quan hệ với nhau như thế nào ?*

?2 *Vì sao vectơ $\vec{u} = (b\ ;\ -a)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng có phương trình $ax + by + c = 0$?*

2. Phương trình tham số của đường thẳng

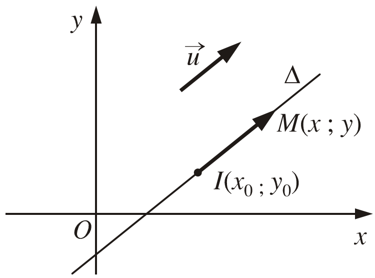
Bài toán. *Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $I(x_0\ ;\ y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a\ ;\ b)$. Hãy tìm điều kiện của x và y để điểm $M(x\ ;\ y)$ nằm trên Δ.*

1 *(Để giải bài toán)*

Điểm M nằm trên Δ khi và chỉ khi vectơ $\overrightarrow{IM}$ cùng phương với vectơ $\vec{u}$ (h. 71), tức là có số t sao cho

$$\overrightarrow{IM} = t\vec{u}.$$

Hãy viết toạ độ của $\overrightarrow{IM}$ và của $t\vec{u}$ rồi so sánh các toạ độ của hai vectơ này.



Hình 71

Từ hoạt động trên suy ra : Điều kiện cần và đủ để $M(x\ ;\ y)$ thuộc Δ là có số t sao cho

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad (a^2 + b^2 \neq 0). \qquad (1)$$

Hệ (1) được gọi là ***phương trình tham số*** của đường thẳng Δ, với tham số t.

CHÚ Ý

Với mỗi giá trị của tham số t, ta tính được x và y từ hệ (1), tức là có được điểm $M(x\ ;\ y)$ nằm trên Δ. Ngược lại, nếu điểm $M(x\ ;\ y)$ nằm trên Δ thì có một số t sao cho x, y thoả mãn hệ (1).

$\boxed{?3}$ *Cho đường thẳng* Δ *có phương trình tham số*

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t. \end{cases}$$

a) Hãy chỉ ra một vectơ chỉ phương của Δ.

b) Tìm các điểm của Δ *ứng với các giá trị* $t = 0, t = -4, t = \frac{1}{2}$.

c) Điểm nào trong các điểm sau thuộc Δ *?*

$$M(1\ ;\ 3),\ N(1\ ;\ -5),\ P(0\ ;\ 1),\ Q(0\ ;\ 5).$$

2

Cho đường thẳng d có phương trình tổng quát $2x - 3y - 6 = 0$.

a) Hãy tìm toạ độ của một điểm thuộc d và viết phương trình tham số của d.

b) Hệ $\begin{cases} x = 2 + 1{,}5t \\ y = -\dfrac{2}{3} + t \end{cases}$ có phải là phương trình tham số của d không ?

c) Tìm toạ độ của điểm M thuộc d sao cho $OM = 2$.

CHÚ Ý

Trong phương trình tham số $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ của đường thẳng, nếu $a \neq 0$, $b \neq 0$ thì bằng cách khử tham số t từ hai phương trình trên, ta đi đến

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \quad (a \neq 0,\ b \neq 0). \qquad (2)$$

Phương trình (2) được gọi là ***phương trình chính tắc*** của đường thẳng.

Trong trường hợp $a = 0$ hoặc $b = 0$ thì đường thẳng không có phương trình chính tắc.

Ví dụ. *Viết phương trình tham số, phương trình chính tắc (nếu có) và phương trình tổng quát của đường thẳng trong mỗi trường hợp sau*

a) Đi qua điểm $A(1\ ;\ 1)$ *và song song với trục hoành ;*

b) Đi qua điểm $B(2\ ;\ -1)$ *và song song với trục tung ;*

c) Đi qua điểm $C(2\ ;\ 1)$ *và vuông góc với đường thẳng* $d : 5x - 7y + 2 = 0$.

Giải

a) Đường thẳng cần tìm có vectơ chỉ phương $\vec{i} = (1\ ;\ 0)$ và đi qua A nên nó có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \end{cases}$ và phương trình tổng quát là $y - 1 = 0$. Đường thẳng đó không có phương trình chính tắc.

b) Đường thẳng cần tìm có vectơ chỉ phương $\vec{j} = (0\ ;\ 1)$ nên không có phương trình chính tắc. Do đường thẳng đó đi qua B nên nó có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + t \end{cases}$ và phương trình tổng quát là $x - 2 = 0$.

c) Vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (5\ ;\ -7)$ của d cũng là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ cần tìm (do $\Delta \perp d$). Do đó phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 1 - 7t \end{cases}$ và phương trình chính tắc của Δ là $\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y-1}{-7}$.

Từ phương trình chính tắc (hoặc tham số) của Δ, ta suy ra được phương trình tổng quát của Δ là $7x + 5y - 19 = 0$.

3

Viết phương trình tham số, phương trình chính tắc (nếu có) và phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua hai điểm $M(-4\ ;\ 3)$ và $N(1\ ;\ -2)$.

Câu hỏi và bài tập

7. Cho đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \end{cases}$. Hỏi trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?

a) Điểm $A(-1\ ;\ -4)$ thuộc Δ.

b) Điểm $B(8\ ;\ 14)$ không thuộc Δ, điểm $C(8\ ;\ -14)$ thuộc Δ.

c) Δ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1\ ;\ 2)$.

d) Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1\ ;\ -2)$.

e) Phương trình $\dfrac{x-8}{3} = \dfrac{y+14}{-6}$ là phương trình chính tắc của Δ.

f) Phương trình $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-2}$ là phương trình chính tắc của Δ.

8. Cho đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

a) Vectơ $\vec{n} = (a\ ;\ b)$ là vectơ pháp tuyến của Δ.

b) Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-b\ ;\ a)$.

c) Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (kb\ ;\ ka)$ với $k \neq 0$.

d) Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (5b\ ;\ -5a)$.

e) Đường thẳng vuông góc với Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a\ ;\ b)$.

9. Hãy viết phương trình tham số, phương trình chính tắc (nếu có) và phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua hai điểm A và B trong mỗi trường hợp sau

a) $A = (-3\ ;\ 0)$, $B = (0\ ;\ 5)$;

b) $A = (4\ ;\ 1)$, $B = (4\ ;\ 2)$;

c) $A = (-4\ ;\ 1)$, $B = (1\ ;\ 4)$.

10. Cho điểm $A(-5\ ;\ 2)$ và đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+3}{-2}$. Hãy viết phương trình đường thẳng

a) Đi qua A và song song với Δ ;

b) Đi qua A và vuông góc với Δ.

11. Xét vị trí tương đối của mỗi cặp đường thẳng sau đây và tìm toạ độ giao điểm (nếu có) của chúng

a) $\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 5 + t \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 8 + 6t' \\ y = 4 - 3t' \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$ và $\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y+7}{3}$;

c) $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -1 - t \end{cases}$ và $x + y - 4 = 0$.

12. Tìm hình chiếu vuông góc của điểm $P(3\ ;\ -2)$ trên đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau

a) $\Delta : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases}$;

b) $\Delta : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{-4}$;

c) $\Delta : 5x - 12y + 10 = 0$.

13. Trên đường thẳng $\Delta : x - y + 2 = 0$, tìm điểm M cách đều hai điểm $E(0 ; 4)$ và $F(4 ; -9)$.

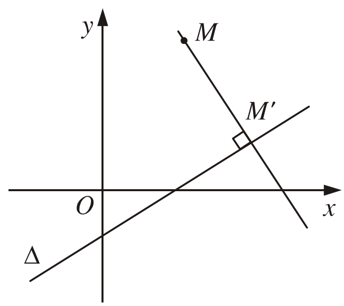
14. Cho hình bình hành có toạ độ một đỉnh là $(4 ; -1)$. Biết phương trình các đường thẳng chứa hai cạnh là $x - 3y = 0$ và $2x + 5y + 6 = 0$. Tìm toạ độ ba đỉnh còn lại của hình bình hành đó.

§3 KHOẢNG CÁCH VÀ GÓC

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Bài toán 1. *Trong mặt phẳng toạ độ, cho đường thẳng Δ có phương trình tổng quát $ax + by + c = 0$. Hãy tính khoảng cách $d(M ; \Delta)$ từ điểm $M(x_M ; y_M)$ đến Δ.*

Giải. (h. 72) Gọi M' là hình chiếu của M trên Δ thì độ dài đoạn $M'M$ chính là khoảng cách từ M đến Δ.



Hình 72

Hiển nhiên $\overrightarrow{M'M}$ cùng phương với vectơ pháp tuyến $\vec{n}(a ; b)$ của Δ, vậy có số k sao cho

$$\overrightarrow{M'M} = k\vec{n}. \qquad (1)$$

Từ đó suy ra

$$d(M ; \Delta) = M'M = |k|.|\vec{n}| = |k|.\sqrt{a^2 + b^2}. \qquad (2)$$

Mặt khác, nếu gọi $(x' ; y')$ là toạ độ của M' thì từ (1) ta có

$$\begin{cases} x_M - x' = ka \\ y_M - y' = kb \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x' = x_M - ka \\ y' = y_M - kb. \end{cases}$$

Vì M' nằm trên Δ nên $a(x_M - ka) + b(y_M - kb) + c = 0$. Từ đó suy ra $k = \dfrac{ax_M + by_M + c}{a^2 + b^2}$. Thay giá trị của k vào (2) ta được

$$\boxed{d(M\,;\,\Delta) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.}$$

1

Hãy tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau

a) $M(13\,;\,14)$ và $\Delta : 4x - 3y + 15 = 0$;

b) $M(5\,;\,-1)$ và $\Delta : \begin{cases} x = 7 - 2t \\ y = -4 + 3t. \end{cases}$

Vị trí của hai điểm đối với một đường thẳng

Cho đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$ và điểm $M(x_M\,;\,y_M)$. Nếu M' là hình chiếu (vuông góc) của M trên Δ thì theo lời giải của Bài toán 1, ta có

$$\overrightarrow{M'M} = k\vec{n}, \text{ trong đó } k = \frac{ax_M + by_M + c}{a^2 + b^2}.$$

Tương tự nếu có điểm $N(x_N\,;\,y_N)$ với N' là hình chiếu của N trên Δ thì ta cũng có

$$\overrightarrow{N'N} = k'\vec{n}, \text{ trong đó } k' = \frac{ax_N + by_N + c}{a^2 + b^2}.$$

?1 *Có nhận xét gì về vị trí của hai điểm M, N đối với Δ khi k và k' cùng dấu ? Khi k và k' khác dấu ?*

Ta có kết quả sau

Cho đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$ và hai điểm $M(x_M\,;\,y_M)$, $N(x_N\,;\,y_N)$ không nằm trên Δ. Khi đó

Hai điểm M, N nằm cùng phía đối với Δ khi và chỉ khi

$$(ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) > 0\ ;$$

Hai điểm M, N nằm khác phía đối với Δ khi và chỉ khi

$$(ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) < 0.$$

2

Cho tam giác ABC có các đỉnh là $A = (1\ ;\ 0)$, $B = (2\ ;\ -3)$, $C = (-2\ ;\ 4)$ và đường thẳng $\Delta : x - 2y + 1 = 0$. Xét xem Δ cắt cạnh nào của tam giác.

Ta có thể áp dụng công thức tính khoảng cách để viết phương trình các đường phân giác.

Bài toán 2. *Cho hai đường thẳng cắt nhau, có phương trình*

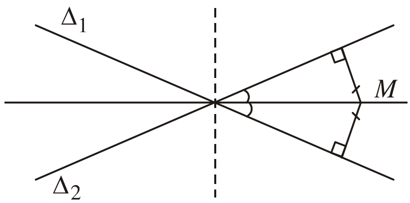
$$\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \textit{và} \quad \Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Chứng minh rằng phương trình hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng đó có dạng

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = 0.$$

3

Hãy giải Bài toán 2, với chú ý rằng điểm M thuộc một trong hai đường phân giác khi và chỉ khi nó cách đều hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 (h. 73).



Hình 73

Ví dụ. *Cho tam giác ABC với*

$$A = \left(\frac{7}{4}\ ;\ 3\right),\ B = (1\ ;\ 2),\ C = (-4\ ;\ 3).$$

Viết phương trình đường phân giác trong của góc A.

Giải. Dễ thấy các đường thẳng AB và AC có phương trình

$$AB:\ \ 4x - 3y + 2 = 0 \ \text{ và } \ AC:\ \ y - 3 = 0.$$

Các đường phân giác trong và phân giác ngoài của góc A có phương trình

$$\frac{4x - 3y + 2}{5} + \frac{y - 3}{1} = 0 \ \text{ hoặc } \ \frac{4x - 3y + 2}{5} - \frac{y - 3}{1} = 0\ ;$$

hay : $\quad 4x + 2y - 13 = 0$ (đường phân giác d_1)

$\quad 4x - 8y + 17 = 0$ (đường phân giác d_2).

Do hai điểm B, C nằm cùng phía đối với đường phân giác ngoài và nằm khác phía đối với đường phân giác trong của góc A nên ta chỉ cần xét vị trí của B, C đối với một trong hai đường, chẳng hạn d_2. Thay toạ độ của B, C lần lượt vào vế trái của d_2 ta được

$$4 - 16 + 17 = 5 > 0 \text{ và } -16 - 24 + 17 = -23 < 0,$$

tức là B, C nằm khác phía đối với d_2.

Vậy phương trình đường phân giác trong của góc A là

$$d_2: \quad 4x - 8y + 17 = 0.$$

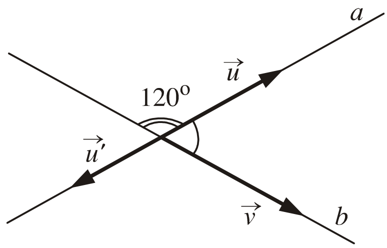
2. Góc giữa hai đường thẳng

ĐỊNH NGHĨA

Hai đường thẳng a và b cắt nhau tạo thành bốn góc. Số đo nhỏ nhất của các góc đó được gọi là số đo của góc giữa hai đường thẳng a và b, hay đơn giản là góc giữa a và b.

Khi a song song hoặc trùng với b, ta quy ước góc giữa chúng bằng 0^o.

?2 *Trên hình 74, góc giữa hai đường thẳng a và b bằng bao nhiêu ? Hãy so sánh góc đó với góc giữa hai vectơ* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *và góc giữa hai vectơ* $\vec{u}'$, $\vec{v}$.



Hình 74

CHÚ Ý

Góc giữa hai đường thẳng a và b được kí hiệu là $\widehat{(a, b)}$, hay đơn giản là (a, b). Góc này không vượt quá 90^o nên ta có

$$(a, b) = (\vec{u}, \vec{v}) \text{ nếu } (\vec{u}, \vec{v}) \le 90^o,$$

$$(a, b) = 180^o - (\vec{u}, \vec{v}) \text{ nếu } (\vec{u}, \vec{v}) > 90^o,$$

trong đó $\vec{u}$, $\vec{v}$ lần lượt là vectơ chỉ phương của a và b.

4

Cho biết phương trình của hai đường thẳng Δ và Δ' lần lượt là

$$\begin{cases} x = 7 - 2t \\ y = 5 - t \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 2 + 3t'. \end{cases}$$

Tìm toạ độ vectơ chỉ phương của hai đường thẳng và tìm góc hợp bởi hai đường thẳng đó.

Bài toán 3

a) Tìm côsin của góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 lần lượt cho bởi các phương trình

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{và} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

b) Tìm điều kiện để hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 vuông góc với nhau.

c) Tìm điều kiện để hai đường thẳng $y = kx + b$ và $y = k'x + b'$ vuông góc với nhau.

5 *(Để giải Bài toán 3)*

Viết toạ độ hai vectơ chỉ phương $\vec{u}_1$ của Δ_1 và $\vec{u}_2$ của Δ_2.

Hãy chứng tỏ rằng $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = |\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)|$. Từ đó đi đến các kết quả sau đây

a) $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \dfrac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)|$, trong đó $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của Δ_1, Δ_2.

b) $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$

c) Áp dụng câu b) hãy chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai đường thẳng $y = kx + b$ và $y = k'x + b'$ vuông góc là $kk' = -1$.

6

Tìm góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 trong mỗi trường hợp sau

a) $\Delta_1 : \begin{cases} x = 13 + t \\ y = -2 + 2t \end{cases}$ $\qquad \Delta_2 : \begin{cases} x = 5 - 2t' \\ y = 7 + t' \end{cases}$;

b) $\Delta_1 : x = 5$; $\qquad \Delta_2 : 2x + y - 14 = 0$;

c) $\Delta_1 : \begin{cases} x = 4 - t \\ y = -4 + 3t \end{cases}$ $\qquad \Delta_2 : 2x + 3y - 1 = 0.$

Câu hỏi và bài tập

15. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

a) Côsin của góc giữa hai đường thẳng a và b bằng côsin của góc giữa hai vectơ chỉ phương của chúng.

b) Nếu hai đường thẳng Δ và Δ' lần lượt có phương trình $px + y + m = 0$ và $x + py + n = 0$ thì

$$\cos(\Delta, \Delta') = \frac{2|p|}{p^2 + 1}.$$

c) Trong tam giác ABC ta có

$$\cos A = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}).$$

d) Nếu φ là góc giữa hai đường thẳng chứa hai cạnh AB, AC của tam giác ABC thì

$$\cos\varphi = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC}.$$

e) Hai điểm $(7 ; 6)$ và $(-1 ; 2)$ nằm về hai phía của đường thẳng $y = x$.

16. Cho ba điểm $A(4 ; -1)$, $B(-3 ; 2)$, $C(1 ; 6)$. Tính góc BAC và góc giữa hai đường thẳng AB, AC.

17. Viết phương trình đường thẳng song song và cách đường thẳng $ax + by + c = 0$ một khoảng bằng h cho trước.

18. Cho ba điểm $A(3 ; 0)$, $B(-5 ; 4)$ và $P(10 ; 2)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua P đồng thời cách đều A và B.

19. Cho điểm $M(2 ; 3)$. Viết phương trình đường thẳng cắt hai trục toạ độ ở A và B sao cho ABM là tam giác vuông cân tại đỉnh M.

20. Cho hai đường thẳng

$$\Delta_1 : x + 2y - 3 = 0,$$

$$\Delta_2 : 3x - y + 2 = 0.$$

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $P(3 ; 1)$ và cắt Δ_1, Δ_2 lần lượt ở A, B sao cho Δ tạo với Δ_1 và Δ_2 một tam giác cân có cạnh đáy là AB.

§4 ĐƯỜNG TRÒN

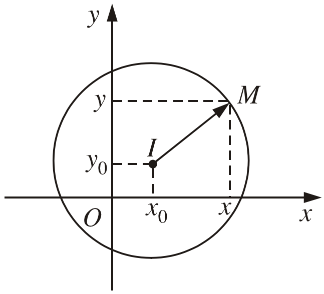
1. Phương trình đường tròn

Trên mặt phẳng toạ độ, cho đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm $I(x_0 ; y_0)$ và bán kính R (h. 75).

Điểm $M(x ; y)$ thuộc đường tròn $(\mathscr{C})$ khi và chỉ khi $IM = R$, hay là

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.} \qquad (1)$$

Ta gọi phương trình (1) là ***phương trình của đường tròn*** $(\mathscr{C})$.



Hình 75

1

Cho hai điểm $P(-2 ; 3)$ và $Q(2 ; -3)$.

a) Hãy viết phương trình đường tròn tâm P và đi qua Q.

b) Hãy viết phương trình đường tròn đường kính PQ.

2. Nhận dạng phương trình đường tròn

Biến đổi phương trình (1) về dạng

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0,$$

ta thấy mỗi đường tròn trong mặt phẳng toạ độ đều có phương trình dạng

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0. \qquad (2)$$

Ngược lại, phải chăng mỗi phương trình dạng (2) với a, b, c tuỳ ý, đều là phương trình của một đường tròn ?

Ta biến đổi phương trình (2) về dạng

$$(x + a)^2 + (y + b)^2 = a^2 + b^2 - c.$$

Nếu gọi I là điểm có toạ độ $(-a ; -b)$, còn $(x ; y)$ là toạ độ của điểm M thì vế trái của đẳng thức trên chính là IM^2. Bởi vậy ta đi đến kết luận

Phương trình $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$, với điều kiện $a^2 + b^2 > c$, là phương trình của đường tròn tâm $I(-a\ ;\ -b)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

2

Khi $a^2 + b^2 \leq c$, hãy tìm tập hợp các điểm M có toạ độ $(x\ ;\ y)$ thoả mãn phương trình (2).

? *Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình đường tròn ?*

a) $x^2 + y^2 - 0{,}14x + 5\sqrt{2}\,y - 7 = 0$;

b) $3x^2 + 3y^2 + 2003x - 17y = 0$;

c) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 103 = 0$;

d) $x^2 + 2y^2 - 2x + 5y + 2 = 0$;

e) $x^2 + y^2 - 2xy + 3x - 5y - 1 = 0$.

Ví dụ. *Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm $M(1\ ;\ 2)$, $N(5\ ;\ 2)$ và $P(1\ ;\ -3)$.*

Giải. Gọi $I(x\ ;\ y)$ và R là tâm và bán kính của đường tròn đi qua ba điểm M, N, P.

Từ điều kiện $IM = IN = IP$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-5)^2 + (y-2)^2 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-1)^2 + (y+3)^2. \end{cases}$$

Dễ dàng tìm được nghiệm của hệ là $x = 3$; $y = -0{,}5$. Vậy $I = (3\ ;\ -0{,}5)$.

Khi đó $R^2 = IM^2 = 10{,}25$. Phương trình đường tròn cần tìm là

$$(x-3)^2 + (y+0{,}5)^2 = 10{,}25.$$

Có thể giải bài toán bằng cách khác.

Giả sử phương trình đường tròn có dạng

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0.$$

Do M, N, P thuộc đường tròn nên ta có hệ phương trình với ba ẩn số *a, b, c*

$$\begin{cases} 5 + 2a + 4b + c = 0 & (1') \\ 29 + 10a + 4b + c = 0 & (2') \\ 10 + 2a - 6b + c = 0. & (3') \end{cases}$$

Từ (1') và (2') suy ra $24 + 8a = 0$, do đó $a = -3$. Từ (1') và (3') suy ra $-5 + 10b = 0$, do đó $b = 0{,}5$. Thay a và b vừa tìm được vào (1') ta có

$$c = -5 + 6 - 2 = -1.$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $x^2 + y^2 - 6x + y - 1 = 0$.

3. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

Bài toán 1. *Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn*

$$(\mathscr{C}): \quad (x+1)^2 + (y-2)^2 = 5,$$

biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm $M(\sqrt{5} - 1\,;\, 1)$.

Giải. Đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm $I(-1\,;\,2)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$.

Đường thẳng Δ đi qua M có phương trình

$$a(x - \sqrt{5} + 1) + b(y - 1) = 0 \ \text{(với } a^2 + b^2 \neq 0).$$

Khoảng cách từ $I(-1\,;\,2)$ tới đường thẳng Δ là

$$d(I\,;\,\Delta) = \frac{\left|a(-1 - \sqrt{5} + 1) + b(2 - 1)\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\left|-\sqrt{5}a + b\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Để Δ là tiếp tuyến của đường tròn, điều kiện cần và đủ là khoảng cách $d(I\,;\,\Delta)$ bằng bán kính của đường tròn, tức là

$$\frac{\left|-\sqrt{5}a + b\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{5}$$

hay

$$\left|-\sqrt{5}a + b\right| = \sqrt{5a^2 + 5b^2}.$$

Từ đó $b(2b + \sqrt{5}\,a) = 0$, suy ra $b = 0$ hoặc $2b + \sqrt{5}\,a = 0$.

Nếu $b = 0$, ta có thể chọn $a = 1$ và được tiếp tuyến

$$\Delta_1 : x - \sqrt{5} + 1 = 0.$$

Nếu $2b + \sqrt{5}\,a = 0$, ta có thể chọn $a = 2$, $b = -\sqrt{5}$ và được tiếp tuyến

$$\Delta_2 : 2x - \sqrt{5}\,y + 2 - \sqrt{5} = 0.$$

Để viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn, ta thường dùng điều kiện sau

Đường thẳng tiếp xúc với đường tròn khi và chỉ khi khoảng cách từ tâm đường tròn đến đường thẳng bằng bán kính của đường tròn.

Tuy nhiên, để viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn tại điểm M cho trước thuộc đường tròn, ta có cách giải đơn giản hơn.

Bài toán 2. *Cho đường tròn*

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$$

và điểm $M(4 ; 2)$.

a) *Chứng tỏ rằng điểm M nằm trên đường tròn đã cho.*

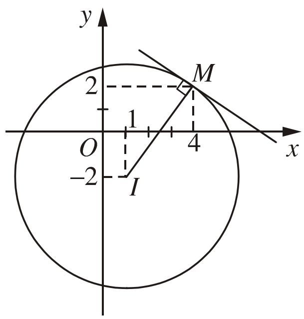
b) *Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn tại điểm M.*

Giải. (h. 76)

a) Thay toạ độ $(4 ; 2)$ của M vào vế trái của phương trình đường tròn, ta được

$$4^2 + 2^2 - 2.4 + 4.2 - 20 = 0.$$

Vậy M nằm trên đường tròn.



Hình 76

b) Đường tròn có tâm $I = (1 ; -2)$. Tiếp tuyến của đường tròn tại M là đường thẳng đi qua M và nhận $\overrightarrow{MI}$ làm vectơ pháp tuyến.

Vì $\overrightarrow{MI} = (-3 ; -4)$ nên phương trình của tiếp tuyến là

$$-3(x - 4) - 4(y - 2) = 0$$

hay

$$3x + 4y - 20 = 0.$$

3

Viết phương trình đường thẳng đi qua gốc toạ độ và tiếp xúc với đường tròn

$$(\mathscr{C}): x^2 + y^2 - 3x + y = 0.$$

4

Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 1$, biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $\Delta : 3x - y + 2 = 0$.

Câu hỏi và bài tập

21. Cho phương trình

$$x^2 + y^2 + px + (p-1)y = 0. \qquad (1)$$

Hỏi trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

a) (1) là phương trình của một đường tròn.

b) (1) là phương trình của một đường tròn đi qua gốc toạ độ.

c) (1) là phương trình của một đường tròn có tâm $J(p\ ;\ p-1)$.

d) (1) là phương trình của đường tròn có tâm $J\left(-\dfrac{p}{2}\ ;\ -\dfrac{p-1}{2}\right)$ và bán kính $R = \dfrac{1}{2}\sqrt{2p^2 - 2p + 1}$.

22. Viết phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$ trong mỗi trường hợp sau

a) $(\mathscr{C})$ có tâm $I(1\ ;\ 3)$ và đi qua điểm $A(3\ ;\ 1)$;

b) $(\mathscr{C})$ có tâm $I(-2\ ;\ 0)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta : 2x + y - 1 = 0$.

23. Tìm tâm và bán kính của đường tròn cho bởi mỗi phương trình sau

a) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$;

b) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 2 = 0$;

c) $2x^2 + 2y^2 - 5x - 4y + 1 + m^2 = 0$.

24. Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm $M(1\ ;\ -2)$, $N(1\ ;\ 2)$, $P(5\ ;\ 2)$.

25. a) Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với hai trục toạ độ và đi qua điểm $(2\ ;\ 1)$.

b) Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm $(1\ ;\ 1)$, $(1\ ;\ 4)$ và tiếp xúc với trục Ox.

26. Tìm toạ độ các giao điểm của đường thẳng

$$\Delta : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \end{cases}$$

và đường tròn $(\mathscr{C}) : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$.

27. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ trong mỗi trường hợp sau

a) Tiếp tuyến song song với đường thẳng $3x - y + 17 = 0$;

b) Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x + 2y - 5 = 0$;

c) Tiếp tuyến đi qua điểm $(2 ; -2)$.

28. Xét vị trí tương đối của đường thẳng Δ và đường tròn $(\mathscr{C})$ sau đây

$$\Delta : 3x + y + m = 0,$$
$$(\mathscr{C}) : x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0.$$

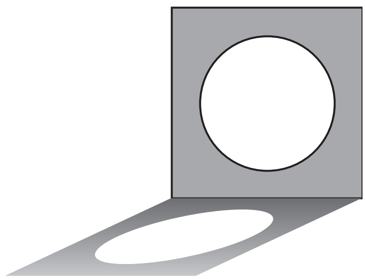
29. Tìm toạ độ các giao điểm của hai đường tròn sau đây

$$(\mathscr{C}) : x^2 + y^2 + 2x + 2y - 1 = 0,$$
$$(\mathscr{C}') : x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0.$$

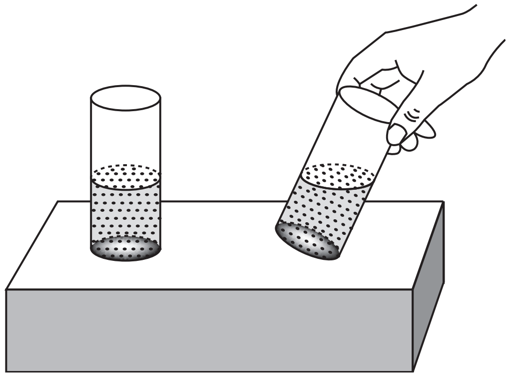
§5 ĐƯỜNG ELIP

Đường elip là một đường quen thuộc với chúng ta và thường gặp trong thực tế, chẳng hạn :

– Bóng của một đường tròn in trên mặt đất bằng phẳng dưới ánh sáng mặt trời thường là một đường elip (h. 77).

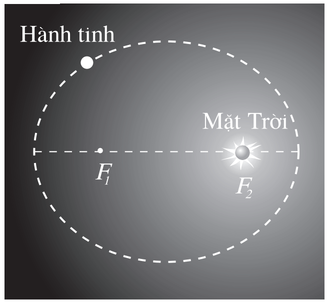


Hình 77



Hình 78

– Ta đổ một ít nước màu vào một cốc thuỷ tinh hình trụ. Nếu đặt đứng cốc nước trên mặt bàn nằm ngang thì mặt thoáng của nước trong cốc là một hình tròn, giới hạn bởi một đường tròn. Nếu ta nghiêng cốc nước đi thì mặt thoáng của nước được giới hạn bởi một đường elip (h. 78).



Hình 79

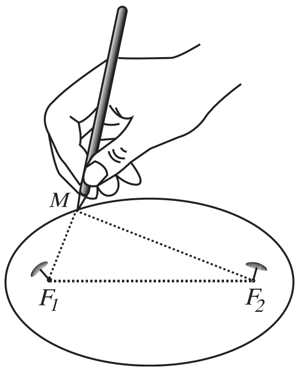
– Quỹ đạo của Trái Đất khi quay quanh Mặt Trời là một đường elip. Các nhà thiên văn học đã phát hiện ra rằng, trong hệ Mặt Trời, mỗi hành tinh đều chuyển động theo một quỹ đạo là đường elip (h. 79).

1. Định nghĩa đường elip

1 *(Vẽ đường elip)*

Em hãy đóng lên mặt một bảng gỗ hai chiếc đinh tại hai điểm F_1 và F_2 (h. 80).

Lấy một vòng dây kín không đàn hồi, có độ dài lớn hơn hai lần khoảng cách F_1F_2. Quàng sợi dây vào hai chiếc đinh, đặt đầu bút chì vào trong vòng dây rồi căng ra để vòng dây trở thành một tam giác. Hãy di chuyển đầu bút chì sao cho dây luôn luôn căng và áp sát mặt gỗ. Khi đó đầu bút chì sẽ vạch ra một đường mà ta gọi là đường elip.



Hình 80

?1 *Trong cách vẽ đường elip ở trên, gọi vị trí đầu bút chì là M. Khi M thay đổi, có nhận xét gì về chu vi tam giác MF_1F_2, và về tổng $MF_1 + MF_2$?*

ĐỊNH NGHĨA

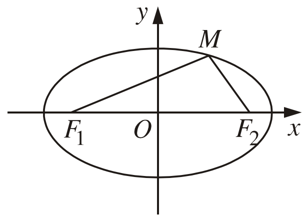
Cho hai điểm cố định F_1 và F_2, với $F_1F_2 = 2c$ $(c > 0)$.

***Đường elip** (còn gọi là **elip**) là tập hợp các điểm M sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$, trong đó a là số cho trước lớn hơn c.*

*Hai điểm F_1 và F_2 gọi là các **tiêu điểm** của elip. Khoảng cách $2c$ được gọi là **tiêu cự** của elip.*

2. Phương trình chính tắc của elip

Cho elip (E) như trong định nghĩa trên. Ta chọn hệ trục toạ độ Oxy có gốc là trung điểm của đoạn thẳng F_1F_2. Trục Oy là đường trung trực của F_1F_2 và F_2 nằm trên tia Ox (h. 81).



Hình 81

?2 *Với cách chọn hệ trục toạ độ như vậy, hãy cho biết toạ độ của hai tiêu điểm F_1 và F_2.*

2

Giả sử điểm $M(x\ ;\ y)$ nằm trên elip (E). Hãy tính $MF_1^2 - MF_2^2$ rồi sử dụng định nghĩa $MF_1 + MF_2 = 2a$ để tính $MF_1 - MF_2$. Từ đó suy ra

$$MF_1 = a + \frac{cx}{a} \text{ và } MF_2 = a - \frac{cx}{a}.$$

Các đoạn thẳng MF_1, MF_2 được gọi là ***bán kính qua tiêu*** của điểm M.

Bây giờ ta lập phương trình của elip (E) đối với hệ trục toạ độ đã chọn như trên.

Ta có

$$MF_1 = a + \frac{cx}{a} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \text{ hay } \left(a + \frac{cx}{a}\right)^2 = (x+c)^2 + y^2.$$

Rút gọn đẳng thức trên ta được $\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 = a^2 - c^2$, hay $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$. Vì $a^2 - c^2 > 0$ nên ta có thể đặt $a^2 - c^2 = b^2$ (với $b > 0$) và được

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0).} \qquad (1)$$

Ngược lại, có thể chứng minh được rằng : Nếu điểm M có toạ độ $(x\ ;\ y)$ thoả mãn (1) thì $MF_1 = a + \frac{cx}{a}$, $MF_2 = a - \frac{cx}{a}$, do đó $MF_1 + MF_2 = 2a$, tức là M thuộc elip (E).

Phương trình (1) gọi là ***phương trình chính tắc*** của elip đã cho.

Ví dụ 1. *Cho ba điểm* $F_1(-\sqrt{5}\ ; 0)$, $F_2(\sqrt{5}\ ; 0)$ *và* $I(0\ ; 3)$.

a) Hãy viết phương trình chính tắc của elip có tiêu điểm là F_1, F_2 *và đi qua I.*

b) Khi M chạy trên elip đó, khoảng cách MF_1 *có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu ?*

Giải

a) Elip có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Điểm $I(0\ ; 3)$ nằm trên elip đã cho nên $\frac{0}{a^2} + \frac{3^2}{b^2} = 1$, suy ra $b^2 = 9$. Theo giả thiết, tiêu cự của elip đó là $2c = F_1F_2 = 2\sqrt{5}$. Vậy $c = \sqrt{5}$. Do đó $a^2 = b^2 + c^2 = 9 + 5 = 14$.

Vậy elip cần tìm có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{14} + \frac{y^2}{9} = 1$.

b) Theo công thức về độ dài bán kính qua tiêu, ta có $MF_1 = a + \frac{cx}{a}$. Vì $-a \le x \le a$ nên $a - \frac{ca}{a} \le MF_1 \le a + \frac{ca}{a}$ hay $a - c \le MF_1 \le a + c$. Do đó MF_1 có giá trị nhỏ nhất là $a - c = \sqrt{14} - \sqrt{5}$ khi $x = -a$ và có giá trị lớn nhất là $a + c = \sqrt{14} + \sqrt{5}$ khi $x = a$.

Ví dụ 2. *Viết phương trình chính tắc của elip đi qua hai điểm* $M(0\ ; 1)$ *và* $N\left(1;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. *Xác định toạ độ các tiêu điểm của elip đó.*

Giải. Phương trình chính tắc của elip có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > b > 0$.

Elip đi qua $M(0\ ; 1)$ nên $\frac{1}{b^2} = 1$ hay $b^2 = 1$. Elip đó đi qua $N\left(1\ ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ nên $\frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1$, suy ra $a^2 = 4$. Vậy elip cần tìm có phương trình chính tắc là

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

Ta có $c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 1 = 3$. Vậy toạ độ các tiêu điểm của elip đó là

$$F_1 = (-\sqrt{3}\ ;\ 0) \text{ và } F_2 = (\sqrt{3}\ ;\ 0).$$

3. Hình dạng của elip

a) Tính đối xứng của elip

$\boxed{?3}$ *Cho elip có phương trình* (1) *và một điểm* $M(x_0\ ;\ y_0)$ *nằm trên elip. Hỏi các điểm sau đây có nằm trên elip không ?*

$$M_1(-x_0\ ;\ y_0), M_2(x_0\ ;\ -y_0), M_3(-x_0\ ;\ -y_0).$$

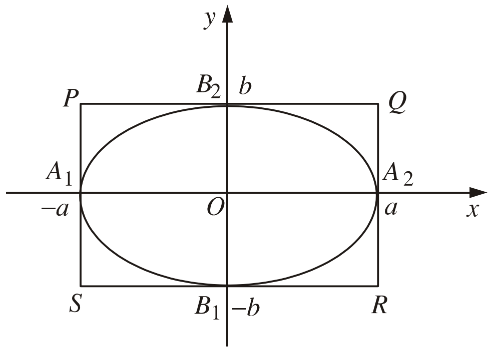
Từ đó suy ra

Elip có phương trình (1) nhận các trục toạ độ làm các trục đối xứng và gốc toạ độ làm tâm đối xứng.

b) Hình chữ nhật cơ sở

Elip với phương trình chính tắc (1), cắt trục Ox tại hai điểm A_1 và A_2, cắt trục Oy tại hai điểm B_1 và B_2. Bốn điểm đó gọi là các ***đỉnh*** của elip. Trục Ox được gọi là ***trục lớn***, trục Oy được gọi là ***trục bé*** (hay trục nhỏ). Người ta cũng gọi đoạn A_1A_2 là trục lớn, đoạn B_1B_2 là trục bé. Độ dài trục lớn là $2a$, độ dài trục bé là $2b$.

Vẽ qua A_1 và A_2 hai đường thẳng song song với trục tung, vẽ qua B_1 và B_2 hai đường thẳng song song với trục hoành. Bốn đường thẳng đó tạo thành hình chữ nhật $PQRS$. Ta gọi hình chữ nhật đó là ***hình chữ nhật cơ sở*** của elip (h. 82).



Hình 82

$\boxed{?4}$ *Nếu xét điểm* $M(x\ ;\ y)$ *nằm trên elip có phương trình chính tắc* (1) *thì giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của x là bao nhiêu ? Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của y là bao nhiêu ?*

Từ đó suy ra

Mọi điểm của elip nếu không phải là đỉnh đều nằm trong hình chữ nhật cơ sở của nó. Bốn đỉnh của elip là trung điểm các cạnh của hình chữ nhật cơ sở.

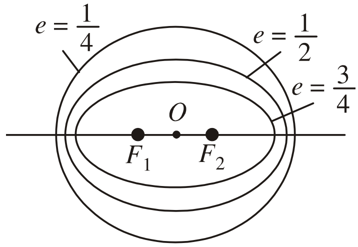
c) Tâm sai của elip

> *Tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn của elip gọi là* ***tâm sai*** *của elip và được kí hiệu là e, tức là* $e = \dfrac{c}{a}$.

Rõ ràng là $0 < e < 1$. Hơn nữa, do $\dfrac{b}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} = \sqrt{1 - e^2}$ nên

– Nếu tâm sai e càng bé (tức là càng gần 0) thì b càng gần a và hình chữ nhật cơ sở càng gần với hình vuông, do đó đường elip càng "béo" ;

– Nếu tâm sai e càng lớn (tức là càng gần 1) thì tỉ số $\dfrac{b}{a}$ càng gần tới 0 và hình chữ nhật cơ sở càng "dẹt", do đó đường elip càng "gầy" (h. 83).



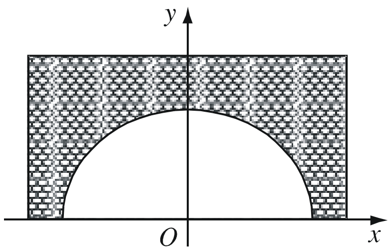
Hình 83

Ví dụ 3. *Một đường hầm xuyên qua núi có chiều rộng là* 20 m*, mặt cắt đứng của đường hầm có dạng nửa elip như hình 84. Biết rằng tâm sai của đường elip là* $e \approx 0{,}5$*. Hãy tìm chiều cao của đường hầm đó.*

Giải. Gọi chiều cao của đường hầm là b. Nửa trục lớn của elip là $a = 10$ m. Elip có nửa tiêu cự là $c = a.e \approx 5$ (m).

Chiều cao của hầm là

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \approx \sqrt{100 - 25} \approx 8{,}7 \text{ (m)}.$$



Hình 84

d) Elip và phép co đường tròn

Bài toán. *Trong mặt phẳng toạ độ, cho đường tròn* $(\mathscr{C})$ *có phương trình* $x^2 + y^2 = a^2$ *và một số* k $(0 < k < 1)$*. Với mỗi điểm* $M(x\,;\,y)$ *trên* $(\mathscr{C})$*, lấy điểm* $M'(x'\,;\,y')$ *sao cho* $x' = x$ *và* $y' = ky$*. Tìm tập hợp các điểm* M'*.*

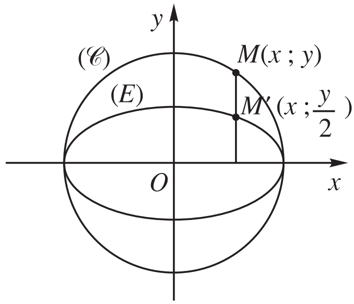
Giải. Từ $x' = x$, $y' = ky$ suy ra $x = x'$, $y = \dfrac{y'}{k}$. Điểm M thuộc đường tròn $(\mathscr{C})$ khi và chỉ khi $x^2 + y^2 = a^2$, tức là

$$x'^2 + \frac{y'^2}{k^2} = a^2 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{(ka)^2} = 1.$$

Đặt $b = ka$, ta được tập hợp các điểm M' là elip (E) có phương trình chính tắc

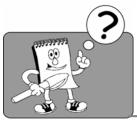
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Người ta nói : Phép co về trục hoành theo hệ số k biến đường tròn $(\mathscr{C})$ thành elip (E).



Hình 85. Phép co về trục hoành theo hệ số $k = \frac{1}{2}$ biến đường tròn $(\mathscr{C})$ thành elip (E).

Em có biết ?



Nhà thiên văn học người Đức Kê-ple (J. Kepler) đã chứng minh rằng : Mỗi hành tinh trong hệ Mặt Trời đều chuyển động theo quỹ đạo là một đường elip mà tâm Mặt Trời là một tiêu điểm.

Johannes Kepler
(1571 – 1630)

Tâm sai của các quỹ đạo của 8 hành tinh đã quen thuộc trong hệ Mặt Trời như sau :

Sao Kim :	$e \approx 0{,}0068$	Trái Đất :	$e \approx 0{,}0167$
Sao Mộc :	$e \approx 0{,}0484$	Sao Hải Vương :	$e \approx 0{,}0082$
Sao Thuỷ :	$e \approx 0{,}2056$	Sao Thiên Vương :	$e \approx 0{,}0460$
Sao Thổ :	$e \approx 0{,}0543$		
Sao Hoả :	$e \approx 0{,}0934$.		

Trong các hành tinh trên thì Sao Kim, Trái Đất và Sao Hải Vương có quỹ đạo gần giống đường tròn hơn.

Ngoài ra, chúng ta cũng biết rằng Mặt Trăng quay quanh Trái Đất theo quỹ đạo là một đường elip mà tâm Trái Đất là một tiêu điểm. Tâm sai của quỹ đạo này là $e \approx 0{,}0549$.

Câu hỏi và bài tập

30. Cho elip (E) có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Hỏi trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

a) Tiêu cự của (E) là $2c$, trong đó $c^2 = a^2 - b^2$.

b) (E) có độ dài trục lớn bằng $2a$, độ dài trục bé bằng $2b$.

c) (E) có tâm sai $e = -\dfrac{c}{a}$.

d) Toạ độ các tiêu điểm của (E) là $F_1 = (-c\ ;\ 0)$, $F_2 = (c\ ;\ 0)$.

e) Điểm $(b\ ;\ 0)$ là một đỉnh của (E).

31. Tìm toạ độ các tiêu điểm, các đỉnh, độ dài trục lớn, độ dài trục bé của mỗi elip có phương trình sau

a) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} = 1$; b) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$; c) $x^2 + 4y^2 = 4$.

32. Viết phương trình chính tắc của đường elip (E) trong mỗi trường hợp sau

a) (E) có độ dài trục lớn bằng 8 và tâm sai $e = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

b) (E) có độ dài trục bé bằng 8 và tiêu cự bằng 4 ;

c) (E) có một tiêu điểm là $F(\sqrt{3}\ ;\ 0)$ và đi qua điểm $M\left(1\ ;\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

33. Cho elip $(E) : \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{1} = 1$.

a) Tính độ dài dây cung của (E) đi qua một tiêu điểm và vuông góc với trục tiêu (đoạn thẳng nối hai điểm của elip gọi là *dây cung* của elip, trục chứa các tiêu điểm gọi là *trục tiêu* của elip).

b) Tìm trên (E) điểm M sao cho $MF_1 = 2MF_2$, trong đó F_1, F_2 lần lượt là các tiêu điểm của (E) nằm bên trái và bên phải trục tung.

34. Vệ tinh nhân tạo đầu tiên được Liên Xô (cũ) phóng từ Trái Đất năm 1957. Quỹ đạo của vệ tinh đó là một đường elip nhận tâm của Trái Đất là một tiêu điểm. Người ta đo được vệ tinh cách bề mặt Trái Đất gần nhất là 583 dặm và xa nhất là 1342 dặm (1 dặm $\approx$ 1,609 km). Tìm tâm sai của quỹ đạo đó biết bán kính của Trái Đất xấp xỉ 4000 dặm.

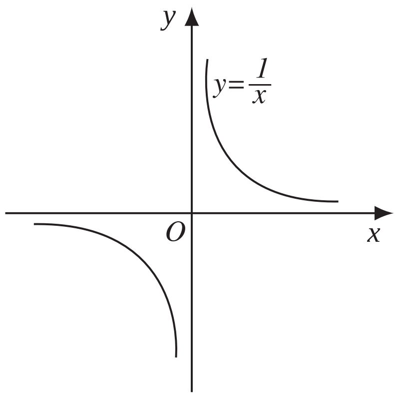
35. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm A chạy trên trục Ox, điểm B chạy trên trục Oy nhưng độ dài đoạn AB bằng a không đổi. Tìm tập hợp các điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MB = 2MA$.

§6 ĐƯỜNG HYPEBOL

Đường hypebol cũng là một đường quen thuộc đối với chúng ta, chẳng hạn

– Đồ thị của hàm số $y = \dfrac{1}{x}$ là một đường hypebol (h. 86a) ;

– Quan sát vùng sáng hắt lên bức tường từ một đèn bàn ; vùng sáng này có hai mảng, mỗi mảng được giới hạn bởi một phần của một đường hypepol (h. 86b).



a)

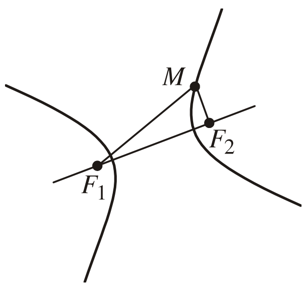
b)

Hình 86

1. Định nghĩa đường hypepol

ĐỊNH NGHĨA

*Cho hai điểm cố định F_1, F_2 có khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ ($c > 0$). **Đường hypebol** (còn gọi là **hypebol**) là tập hợp các điểm M sao cho $|MF_1 - MF_2| = 2a$, trong đó a là số dương cho trước nhỏ hơn c* (h. 87).

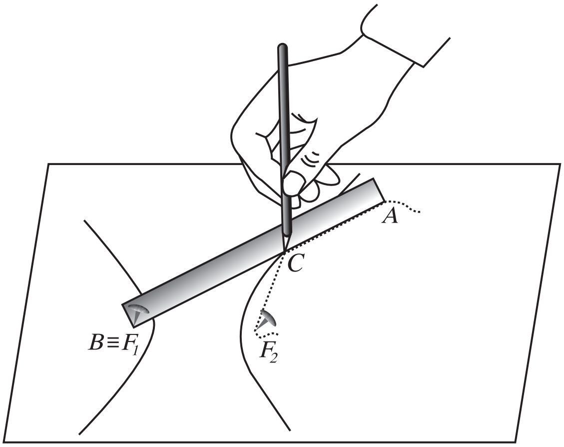


Hình 87

*Hai điểm F_1, F_2 gọi là các **tiêu điểm** của hypebol. Khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ gọi là **tiêu cự** của hypebol.*

Có thể vẽ hypebol như sau (h. 88) : Lấy một thước thẳng có mép AB và một sợi dây không đàn hồi có chiều dài l nhỏ hơn chiều dài AB của thước và $l > AB - F_1F_2$. Đóng hai chiếc đinh lên mặt một bảng gỗ tại F_1, F_2. Đính một đầu dây vào điểm A và đầu dây kia vào F_2. Đặt thước sao cho điểm B trùng với F_1 và lấy đầu bút chì tì sát sợi dây vào thước thẳng sao cho sợi dây luôn bị căng rồi cho thước quay quanh F_1, mép thước luôn áp sát mặt gỗ. Khi đó, đầu bút chì C sẽ vạch nên một đường cong. Ta sẽ chứng tỏ đường cong đó là một phần của đường hypebol. Thật vậy, ta có

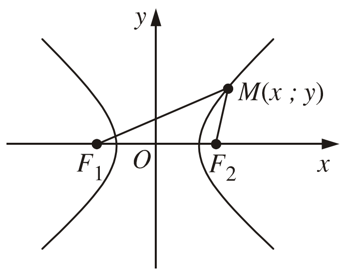
$$CF_1 - CF_2 = (CF_1 + CA) - (CF_2 + CA) = AB - l \text{ không đổi.}$$



Hình 88

2. Phương trình chính tắc của hypebol

Cho hypebol (H) như trong định nghĩa trên. Ta chọn hệ trục toạ độ Oxy có gốc là trung điểm của đoạn thẳng F_1F_2, trục Oy là đường trung trực của F_1F_2 và F_2 nằm trên tia Ox. Khi đó $F_1 = (-c\ ;\ 0)$, $F_2 = (c\ ;\ 0)$ (h. 89).



Hình 89

1

Giả sử điểm $M(x\ ;\ y)$ nằm trên hypebol (H). Hãy tính biểu thức $MF_1^2 - MF_2^2$ và sử dụng giả thiết $|MF_1 - MF_2| = 2a$ để suy ra

$$MF_1 = \left|a + \frac{cx}{a}\right| \text{ và } MF_2 = \left|a - \frac{cx}{a}\right|.$$

Các đoạn thẳng MF_1, MF_2 được gọi là ***bán kính qua tiêu*** của điểm M.

Bây giờ ta sẽ lập phương trình của hypebol (H) đối với hệ toạ độ đã chọn.

Ta có

$$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \left|a + \frac{cx}{a}\right| \text{ hay } (x+c)^2 + y^2 = \left(a + \frac{cx}{a}\right)^2.$$

Rút gọn đẳng thức trên ta được $\left(1 - \dfrac{c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 = a^2 - c^2$ hay $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$. Chú ý rằng $a^2 - c^2 < 0$ nên ta có thể đặt $a^2 - c^2 = -b^2$ hay $b^2 = c^2 - a^2$ (với $b > 0$), và ta được

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > 0, b > 0).} \qquad (1)$$

Ngược lại, có thể chứng minh được rằng : Nếu điểm M có toạ độ $(x ; y)$ thoả mãn (1) thì $MF_1 = \left|a + \dfrac{cx}{a}\right|$, $MF_2 = \left|a - \dfrac{cx}{a}\right|$ và do đó $\left|MF_1 - MF_2\right| = 2a$, tức là M thuộc hypebol (H).

Phương trình (1) được gọi là ***phương trình chính tắc*** của hypebol.

3. Hình dạng của hypebol

2

Từ phương trình chính tắc (1) của hypebol, hãy giải thích vì sao nó có các tính chất sau

a) Gốc toạ độ O là tâm đối xứng của hypebol. Ox, Oy là hai trục đối xứng của hypebol.

b) Hypebol cắt trục Ox tại hai điểm và không cắt trục Oy.

Ngoài ra, đối với hypebol có phương trình chính tắc (1), ta còn có các khái niệm sau đây

• Trục Ox (chứa hai tiêu điểm) gọi là ***trục thực***, trục Oy gọi là ***trục ảo*** của hypebol. Hai giao điểm của hypebol với trục Ox gọi là ***hai đỉnh*** của hypebol. Người ta cũng gọi đoạn thẳng nối hai đỉnh của hypebol là trục thực. Khoảng cách $2a$ giữa hai đỉnh gọi là ***độ dài trục thực***, $2b$ gọi là ***độ dài trục ảo***.

• Hypebol gồm hai phần nằm hai bên trục ảo, mỗi phần gọi là một ***nhánh*** của hypebol.

• Ta cũng gọi, giống như với elip, tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục thực là ***tâm sai*** của hypebol, kí hiệu là e, tức là $\frac{c}{a} = e$. Chú ý rằng ta luôn có $e > 1$.

Ví dụ. *Cho hypebol* (H) :

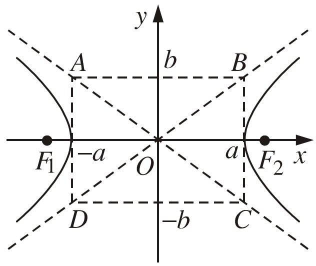
$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Xác định toạ độ các đỉnh, các tiêu điểm và tính tâm sai, độ dài trục thực, độ dài trục ảo của (H).

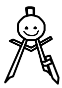
Giải. Hypebol (H) có $a^2 = 9$, $b^2 = 4$ nên $a = 3$, $b = 2$, $c^2 = a^2 + b^2 = 13$, $c = \sqrt{13}$. Vậy hypebol (H) có các tiêu điểm $F_1 = (-\sqrt{13}\ ;\ 0)$, $F_2 = (\sqrt{13}\ ;\ 0)$; các đỉnh $A_1 = (-3\ ;\ 0)$, $A_2 = (3\ ;\ 0)$; tâm sai $e = \frac{\sqrt{13}}{3}$; độ dài trục thực $2a = 6$; độ dài trục ảo $2b = 4$.

• Hình chữ nhật tạo bởi các đường thẳng $x = \pm a$, $y = \pm b$ gọi là ***hình chữ nhật cơ sở*** của hypebol có phương trình (1) (h. 90). Hai đường thẳng chứa hai đường chéo của hình chữ nhật cơ sở gọi là hai ***đường tiệm cận*** của hypebol. Phương trình hai đường tiệm cận đó là

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$



Hình 90



3

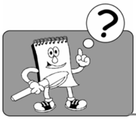
Cho hypebol (H) : $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$. Lấy điểm $M(x_0\ ;\ y_0)$ trên (H) với $x_0 > 0$, $y_0 > 0$.

Chứng tỏ rằng khoảng cách từ M đến đường tiệm cận $y = \frac{x}{2}$ bằng $\frac{4}{\sqrt{5}(x_0 + 2y_0)}$.

Nhận xét gì về khoảng cách đó khi x_0 tăng dần ?

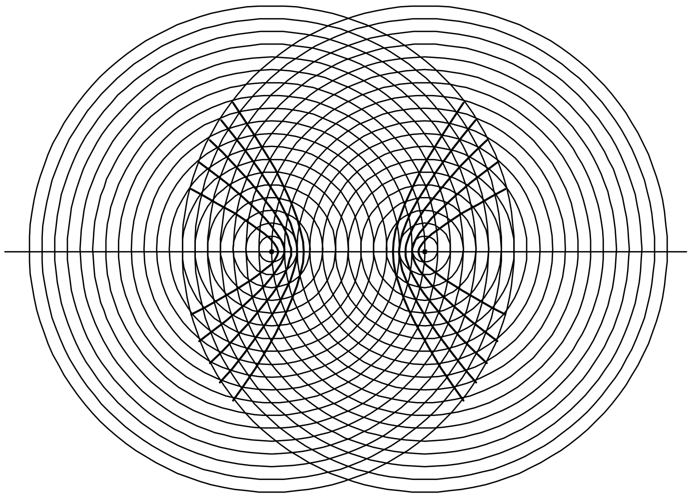
Như vậy, khi điểm M trên hypebol càng xa gốc toạ độ thì khoảng cách từ điểm đó đến một trong hai đường tiệm cận càng nhỏ đi, điều đó cũng có nghĩa là điểm M ngày càng gần sát đường tiệm cận đó (điều này giải thích ý nghĩa của từ "tiệm cận").

Em có biết ?



Hai đường tròn không đồng tâm $(O\ ;R)$ và $(O'\ ; R')$ có điểm chung M thì hiển nhiên $|MO - MO'| = |R - R'|$, nên khi giữ O, O' cố định và cho R, R' thay đổi sao cho $|R - R'| = 2a$ không đổi $(a > 0)$ thì các giao điểm M cùng nằm trên một hypebol với tiêu điểm là O và O'.

Hình 91 minh hoạ những hypebol như thế với các giá trị khác nhau của a.



Hình 91

Câu hỏi và bài tập

36. Cho hypebol (H) có phương trình chính tắc $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Hỏi trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

a) Tiêu cự của (H) là $2c$, trong đó $c^2 = a^2 + b^2$.

b) (H) có độ dài trục thực bằng $2a$, độ dài trục ảo bằng $2b$.

c) Phương trình hai đường tiệm cận của (H) là $y = \pm\dfrac{a}{b}x$.

d) Tâm sai của (H) là $e = \dfrac{c}{a} > 1$.

37. Tìm toạ độ các tiêu điểm, các đỉnh ; độ dài trục thực, trục ảo và phương trình các đường tiệm cận của mỗi hypebol có phương trình sau

a) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$; b) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$; c) $x^2 - 9y^2 = 9$.

38. Cho đường tròn $(\mathscr{C})$ tâm F_1, bán kính R và một điểm F_2 ở ngoài $(\mathscr{C})$. Chứng minh rằng tập hợp tâm các đường tròn đi qua F_2, tiếp xúc với $(\mathscr{C})$ là một đường hypebol. Viết phương trình chính tắc của hypebol đó.

39. Viết phương trình chính tắc của hypebol (H) trong mỗi trường hợp sau

a) (H) có một tiêu điểm là $(5 ; 0)$ và độ dài trục thực bằng 8 ;

b) (H) có tiêu cự bằng $2\sqrt{3}$, một đường tiệm cận là $y = \dfrac{2}{3}x$;

c) (H) có tâm sai $e = \sqrt{5}$ và đi qua điểm $\left(\sqrt{10} ; 6\right)$.

40. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc hypebol đến hai đường tiệm cận của nó là một số không đổi.

41. Trong mặt phẳng toạ độ cho hai điểm $F_1(-\sqrt{2} ; -\sqrt{2})$ và $F_2(\sqrt{2} ; \sqrt{2})$. Chứng minh rằng với mỗi điểm $M(x ; y)$ nằm trên đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{x}$, ta đều có

$$MF_1^2 = \left(x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)^2 \ ; \quad MF_2^2 = \left(x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}\right)^2 .$$

Từ đó suy ra $\left|MF_1 - MF_2\right| = 2\sqrt{2}$.

§7 ĐƯỜNG PARABOL

Trong thực tế ta cũng thường gặp đường parabol, chẳng hạn :

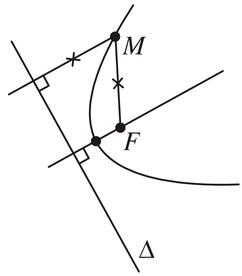
– Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ (với $a \neq 0$) là một đường parabol ;

– Các tia nước phun ra từ vòi phun nước (thường gặp ở các vườn hoa hay khi tưới cây) là những đường parabol ;

– Đường đi của viên đạn đại bác là một đường parabol.

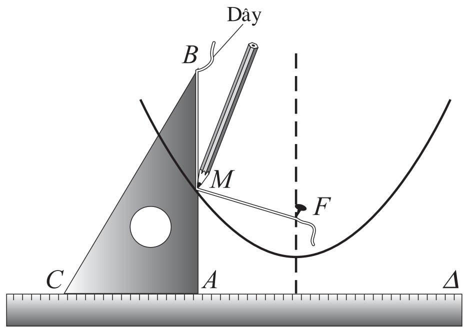
1. Định nghĩa đường parabol

> *Cho một điểm F cố định và một đường thẳng Δ cố định không đi qua F. Tập hợp các điểm M cách đều F và Δ được gọi là* ***đường parabol*** *(hay* ***parabol****)* (h. 92).
>
> *Điểm F được gọi là* ***tiêu điểm*** *của parabol.*
>
> *Đường thẳng Δ được gọi là* ***đường chuẩn*** *của parabol.*
>
> *Khoảng cách từ F đến Δ được gọi là* ***tham số tiêu*** *của parabol.*



Hình 92

Ta có thể vẽ parabol với tiêu điểm F và đường chuẩn Δ như sau (h. 93) : Lấy một êke ABC (vuông ở A) và một đoạn dây không đàn hồi, có độ dài bằng AB. Đính một đầu dây vào điểm F, đầu kia vào đỉnh B của êke. Đặt êke sao cho cạnh AC nằm trên Δ, lấy đầu bút chì ép sát sợi dây vào cạnh AB và giữ căng sợi dây rồi cho cạnh AC của êke trượt trên Δ. Khi đó đầu M của bút chì sẽ vạch nên một phần của parabol (vì ta luôn có $MF = MA$).

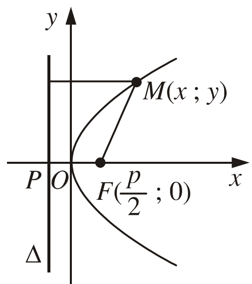


Hình 93

2. Phương trình chính tắc của parabol

Cho parabol với tiêu điểm F và đường chuẩn Δ.

Kẻ FP vuông góc với Δ $(P \in \Delta)$. Đặt $FP = p$ (tham số tiêu). Ta chọn hệ trục toạ độ Oxy sao cho O là trung điểm của FP và điểm F nằm trên tia Ox (h. 94).



Hình 94

Như vậy ta có $F = \left(\dfrac{p}{2}; 0\right)$, $P = \left(-\dfrac{p}{2}; 0\right)$ và phương trình của đường thẳng Δ là $x + \dfrac{p}{2} = 0$. Điểm $M(x\,;\,y)$ nằm trên parabol đã cho khi và chỉ khi khoảng cách MF bằng khoảng cách từ M tới Δ, tức là

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Bình phương hai vế của đẳng thức đó rồi rút gọn , ta được

$$\boxed{y^2 = 2px \ (p > 0).} \qquad (1)$$

Phương trình (1) gọi là ***phương trình chính tắc*** của parabol.

Từ phương trình chính tắc của parabol, hãy chứng tỏ những tính chất sau đây của parabol

a) Parabol nằm về bên phải của trục tung.

b) Ox là ***trục đối xứng*** của parabol.

c) Parabol cắt trục Ox tại điểm O và đó cũng là điểm duy nhất của Oy thuộc parabol. Gốc toạ độ O được gọi là ***đỉnh*** của parabol.

Ví dụ. *Viết phương trình chính tắc của parabol đi qua điểm* $M(2\ ;\ 5)$.

Giải. Phương trình chính tắc của parabol có dạng $y^2 = 2px$. Thay toạ độ của M vào phương trình ta được $25 = 2.p.2$, suy ra $p = \frac{25}{4}$. Từ đó ta được phương trình chính tắc của parabol đã cho là $y^2 = \frac{25}{2}x$.

CHÚ Ý

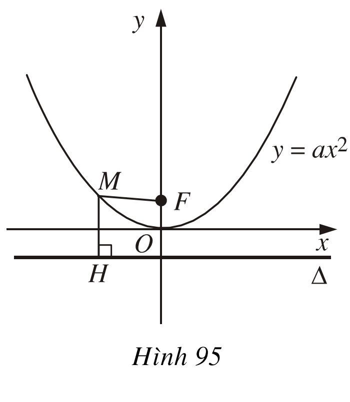
Ở môn Đại số, chúng ta đã gọi đồ thị của hàm số bậc hai

$$y = ax^2 + bx + c$$

là một *đường parabol*.

Sở dĩ ta gọi như thế vì đồ thị đó cũng thoả mãn định nghĩa của đường parabol mà ta vừa trình bày ở trên.

Chẳng hạn, đồ thị hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ là parabol có tiêu điểm $F\left(0\ ;\ \frac{1}{4a}\right)$ và đường chuẩn Δ có phương trình $y + \frac{1}{4a} = 0$ (h. 95).



Hình 95

Câu hỏi và bài tập

42. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

a) $y^2 = -2x$ là phương trình chính tắc của parabol.

b) $y = x^2$ là phương trình chính tắc của parabol.

c) Parabol (P) : $y^2 = 2x$ có tiêu điểm $F(0,5\ ;\ 0)$ và có đường chuẩn $\Delta : x + 0,5 = 0$.

d) Parabol $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ có tiêu điểm $F(p\ ;\ 0)$ và có đường chuẩn $\Delta : x + p = 0$.

43. Viết phương trình chính tắc của parabol (P) trong mỗi trường hợp sau

a) (P) có tiêu điểm $F(3\ ;\ 0)$;

b) (P) đi qua điểm $M(1\ ;\ -1)$;

c) (P) có tham số tiêu là $p = \dfrac{1}{3}$.

44. Cho parabol $y^2 = 2px$. Tìm độ dài dây cung của parabol vuông góc với trục đối xứng tại tiêu điểm của parabol (dây cung của parabol là đoạn thẳng nối hai điểm của parabol).

45. Cho dây cung AB đi qua tiêu điểm của parabol (P). Chứng minh rằng khoảng cách từ trung điểm I của dây AB đến đường chuẩn của (P) bằng $\dfrac{1}{2}AB$. Từ đó có nhận xét gì về đường tròn đường kính AB ?

46. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm $F(1\ ;\ -2)$. Tìm hệ thức giữa x, y để điểm $M(x\ ;\ y)$ cách đều điểm F và trục hoành.

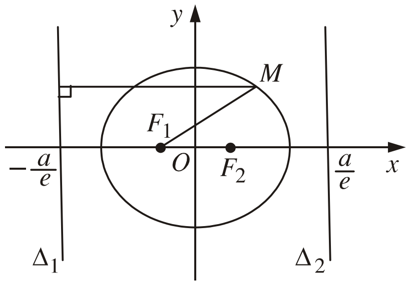
§8 BA ĐƯỜNG CÔNIC

Không phải chỉ parabol mới có đường chuẩn, dưới đây chúng ta sẽ thấy rằng elip và hypebol cũng có đường chuẩn. Tương tự định nghĩa của parabol, ta cũng có thể định nghĩa elip và hypebol dựa vào đường chuẩn và tiêu điểm của chúng.

1. Đường chuẩn của elip

Cho elip có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$. Khi đó đường thẳng $\Delta_1 : x + \frac{a}{e} = 0$ gọi là ***đường chuẩn*** của elip, ứng với tiêu điểm $F_1(-c\ ;\ 0)$;

Đường thẳng $\Delta_2 : x - \frac{a}{e} = 0$ gọi là ***đường chuẩn*** của elip, ứng với tiêu điểm $F_2(c\ ;\ 0)$ (h. 96).



Hình 96

Tính chất

> *Với mọi điểm M của elip, ta luôn có*
> $$\frac{MF_1}{d(M;\Delta_1)} = \frac{MF_2}{d(M;\Delta_2)} = e \qquad (e < 1).$$

Chứng minh

Với $M(x\ ;\ y)$ thuộc elip, ta có

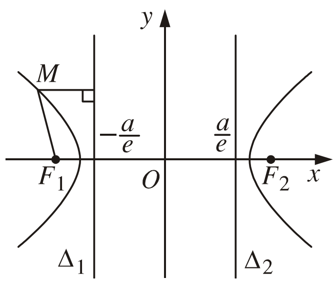
$$MF_1 = a + \frac{c}{a}x = a + ex \text{ và } d(M;\Delta_1) = \left|x + \frac{a}{e}\right| = \frac{|a+ex|}{e} = \frac{a+ex}{e}.$$

Suy ra $\frac{MF_1}{d(M;\Delta_1)} = e$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $\frac{MF_2}{d(M;\Delta_2)} = e$.

2. Đường chuẩn của hypebol

Ta cũng định nghĩa *đường chuẩn của hypebol* tương tự như đối với elip (h. 97). Cho hypebol (H) có phương trình $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Các đường thẳng $\Delta_1 : x + \frac{a}{e} = 0$ và $\Delta_2 : x - \frac{a}{e} = 0$ gọi là



Hình 97

các ***đường chuẩn*** của (H) lần lượt ứng với các tiêu điểm $F_1(-c\ ;\ 0)$ và $F_2(c\ ;\ 0)$.

Ta cũng dễ dàng chứng minh được tính chất sau

> *Với mọi điểm M nằm trên (H), ta luôn có*
> $$\frac{MF_1}{d(M\,;\,\Delta_1)} = \frac{MF_2}{d(M\,;\,\Delta_2)} = e \quad (e > 1).$$

Từ những kết quả trên, ta nhận thấy rằng ba đường elip, hypebol, parabol đều có thể được định nghĩa dựa trên tiêu điểm và đường chuẩn. Ba đường đó có tên chung là đường cônic.

3. Định nghĩa đường cônic

> *Cho điểm F cố định và đường thẳng Δ cố định không đi qua F.*
>
> *Tập hợp các điểm M sao cho tỉ số $\dfrac{MF}{d(M\,;\,\Delta)}$ bằng một số dương e cho trước được gọi là **đường cônic**.*
>
> *Điểm F gọi là tiêu điểm, Δ gọi là đường chuẩn và e gọi là tâm sai của đường cônic.*

Từ định nghĩa trên, kết hợp với tính chất của elip, parabol, hypebol, ta có

> *Elip là đường cônic có tâm sai $e < 1$;*
>
> *Parabol là đường cônic có tâm sai $e = 1$;*
>
> *Hypebol là đường cônic có tâm sai $e > 1$.*

Câu hỏi và bài tập

47. Xác định tiêu điểm và đường chuẩn của các đường cônic sau

a) $y^2 = 14x$; b) $\dfrac{x^2}{10} + \dfrac{y^2}{7} = 1$; c) $\dfrac{x^2}{14} - \dfrac{y^2}{1} = 1$.

48. Cho đường thẳng $\Delta : x + y - 1 = 0$ và điểm $F(1\ ;\ 1)$. Viết phương trình của đường cônic nhận F là tiêu điểm và Δ là đường chuẩn trong mỗi trường hợp sau đây

a) Tâm sai $e = 1$; b) Tâm sai $e = \sqrt{2}$; c) Tâm sai $e = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

ÔN TẬP CHƯƠNG III

I - Tóm tắt những kiến thức cần nhớ

1. Các định nghĩa

a) $\vec{n}$ là một *vectơ pháp tuyến* của đường thẳng Δ nếu $\vec{n} \neq \vec{0}$ và giá của $\vec{n}$ vuông góc với Δ.

$\vec{u}$ là *vectơ chỉ phương* của đường thẳng Δ nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ.

b) *Elip* : Tập các điểm M thoả mãn $MF_1 + MF_2 = 2a$ ($F_1F_2 = 2c$, $0 < c < a$).

Hypebol : Tập các điểm M thoả mãn $|MF_1 - MF_2| = 2a$ ($F_1F_2 = 2c$, $c > a > 0$).

Parabol : Tập các điểm M thoả mãn $MF = d(M\,;\Delta)$ ($d(F\,;\Delta) = p > 0$).

Đường cônic : Tập các điểm M thoả mãn $\dfrac{MF}{d(M\,;\Delta)} = e > 0$.

Nếu $e < 1$ thì đường cônic là elip.

Nếu $e = 1$ thì đường cônic là parabol.

Nếu $e > 1$ thì đường cônic là hypebol.

2. Phương trình các đường

a) Phương trình đường thẳng

– Dạng tổng quát

$ax + by + c = 0$ ($a^2 + b^2 \neq 0$), $\vec{n}(a\,;b)$ là một vectơ pháp tuyến.

– Dạng tham số

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad (a^2 + b^2 \neq 0),$$

– Dạng chính tắc

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \quad (a \neq 0, b \neq 0)$$

Ở dạng tham số và dạng chính tắc, đường thẳng đi qua điểm $(x_0\,;y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a\,;b)$.

b) Phương trình đường tròn

– Đường tròn tâm $I(x_0 ; y_0)$, bán kính R có phương trình

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

– Phương trình $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$, với $a^2 + b^2 - c > 0$, là phương trình đường tròn có tâm $I(-a ; -b)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

c) Phương trình chính tắc của ba đường cônic và các yếu tố liên quan

– Elip : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$, $c^2 = a^2 - b^2$. Các tiêu điểm $F_1(-c ; 0)$, $F_2(c ; 0)$; trục lớn $2a$, trục bé $2b$; tâm sai $e = \dfrac{c}{a} < 1$, đường chuẩn $x = \pm\dfrac{a}{e}\cdot$

– Hypebol : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0,\ b > 0)$, $c^2 = a^2 + b^2$. Các tiêu điểm $F_1(-c ; 0)$, $F_2(c ; 0)$; trục thực $2a$, trục ảo $2b$; tâm sai $e = \dfrac{c}{a} > 1$, đường chuẩn $x = \pm\dfrac{a}{e}$, tiệm cận $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.

– Parabol : $y^2 = 2px$ $(p > 0)$. Tiêu điểm $F\left(\dfrac{p}{2} ; 0\right)$, tâm sai $e = 1$, đường chuẩn $x = -\dfrac{p}{2}\cdot$

3. Khoảng cách và góc

a) Khoảng cách từ điểm $M(x_0 ; y_0)$ đến đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$ là

$$d(M ; \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

b) Đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$ tiếp xúc với đường tròn $(I ; R)$ khi và chỉ khi

$$d(I ; \Delta) = R.$$

c) Góc giữa hai đường thẳng

$$\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$

$$\Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

được xác định bởi

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

II - Câu hỏi tự kiểm tra

1. Cho biết toạ độ của hai điểm A và B. Làm thế nào để

a) Viết phương trình đường thẳng đi qua A, B ?

b) Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $C(x_0 ; y_0)$ và vuông góc với AB ?

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, biết tiếp tuyến đó song song với AB ?

2. Cho biết toạ độ ba đỉnh của một tam giác. Làm thế nào để

a) Tìm toạ độ tâm và tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ?

b) Tìm toạ độ trực tâm tam giác ?

c) Tìm toạ độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ?

3. Hãy chỉ ra một vectơ pháp tuyến và một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu Δ có phương trình như sau

a) $ax + by + c = 0 \qquad (a^2 + b^2 \neq 0)$;

b) $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \qquad (a^2 + b^2 \neq 0)$;

c) $\dfrac{x - a}{m} = \dfrac{y - b}{n} \qquad (m \neq 0, n \neq 0)$.

4. Làm thế nào để chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau hoặc song song với nhau, nếu biết phương trình của chúng ?

5. Có thể viết phương trình của một đường tròn khi biết những điều kiện nào (nêu một số trường hợp thường gặp) ?

6. Có thể viết phương trình chính tắc của elip, hypebol, parabol khi biết những điều kiện nào (nêu một số trường hợp thường gặp) ?

7. Cho phương trình

$$ax^2 + by^2 = 1. \qquad (1)$$

a) Với điều kiện nào của a và b thì (1) là phương trình của một đường tròn ?

b) Với điều kiện nào của a và b thì (1) là phương trình chính tắc của elip ? Của hypebol ?

III - Bài tập

1. Xét vị trí tương đối của các đường thẳng Δ_1 và Δ_2 trong mỗi trường hợp sau

a) $\Delta_1 : 3x - 2y + 1 = 0$ và $\Delta_2 : 2x + 3y - 5 = 0$;

b) $\Delta_1 : \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -1 + t \end{cases}$ và $\Delta_2 : \begin{cases} x = 7 - 4t' \\ y = 5 - 2t' \end{cases}$;

c) $\Delta_1 : \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -2 - 5t \end{cases}$ và $\Delta_2 : 5x + 4y - 7 = 0.$

2. Cho đường thẳng $\Delta : 3x - 4y + 2 = 0$.

a) Viết phương trình của Δ dưới dạng tham số.

b) Viết phương trình của Δ dưới dạng phương trình theo đoạn chắn.

c) Tính khoảng cách từ mỗi điểm $M(3 ; 5)$, $N(-4 ; 0)$, $P(2 ; 1)$ tới Δ và xét xem đường thẳng Δ cắt cạnh nào của tam giác MNP.

d) Tính các góc hợp bởi Δ và mỗi trục toạ độ.

3. Cho đường thẳng $d : x - y + 2 = 0$ và điểm $A(2 ; 0)$.

a) Với điều kiện nào của x và y thì điểm $M(x ; y)$ thuộc nửa mặt phẳng có bờ là d và chứa gốc toạ độ O ? Chứng minh điểm A nằm trong nửa mặt phẳng đó.

b) Tìm điểm đối xứng với điểm O qua đường thẳng d.

c) Tìm điểm M trên d sao cho chu vi tam giác OMA nhỏ nhất.

4. Cho đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$ và điểm $I(x_0 ; y_0)$. Viết phương trình đường thẳng Δ' đối xứng với đường thẳng Δ qua I.

5. Một hình bình hành có hai cạnh nằm trên hai đường thẳng $x + 3y - 6 = 0$ và $2x - 5y - 1 = 0$. Biết hình bình hành đó có tâm đối xứng là $I(3 ; 5)$. Hãy viết phương trình hai cạnh còn lại của hình bình hành đó.

6. Cho phương trình

$$x^2 + y^2 + mx - 2(m+1)\,y + 1 = 0. \qquad (1)$$

a) Với giá trị nào của m thì (1) là phương trình đường tròn ?

b) Tìm tập hợp tâm của các đường tròn nói ở câu a).

7. a) Biết đường tròn $(\mathscr{C})$ có phương trình $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$. Chứng minh rằng phương tích của điểm $M(x_0\,;\,y_0)$ đối với đường tròn $(\mathscr{C})$ bằng $x_0^2 + y_0^2 + 2ax_0 + 2by_0 + c$.

b) Chứng minh rằng nếu hai đường tròn không đồng tâm thì tập hợp các điểm có cùng phương tích đối với hai đường tròn là một đường thẳng (gọi là *trục đẳng phương* của hai đường tròn).

8. Cho hai đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0$ và $x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2 = 0$. Giả sử chúng cắt nhau ở hai điểm M, N. Viết phương trình đường thẳng MN.

9. Cho đường tròn $(\mathscr{C}) : x^2 + y^2 = 4$ và điểm $A(-2\,;\,3)$.

a) Viết phương trình các tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ kẻ từ A.

b) Tính các khoảng cách từ A đến hai tiếp điểm của hai tiếp tuyến nói ở câu a) và khoảng cách giữa hai tiếp điểm đó.

10. Cho elip $(E) : \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ và hypebol $(H) : \dfrac{x^2}{5} - \dfrac{y^2}{4} = 1$.

a) Tìm toạ độ các tiêu điểm của (E) và (H).

b) Vẽ phác elip (E) và hypebol (H) trong cùng một hệ trục toạ độ.

c) Tìm toạ độ các giao điểm của (E) và (H).

11. Cho đường thẳng $\Delta : 2x - y - m = 0$ và elip $(E) : \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

a) Với giá trị nào của m thì Δ cắt (E) tại hai điểm phân biệt ?

b) Với giá trị nào của m thì Δ cắt (E) tại một điểm duy nhất ?

12. Cho elip $(E) : \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

a) Xác định toạ độ hai tiêu điểm và các đỉnh của (E).

b) Viết phương trình chính tắc của hypebol (H) nhận các tiêu điểm của (E) làm đỉnh và có hai tiêu điểm là hai đỉnh của elip (E).

c) Vẽ phác elip (E) và hypebol (H) nói ở câu b) trong cùng một hệ trục toạ độ.

d) Viết phương trình của đường tròn đi qua các giao điểm của hai đường cônic nói trên.

13. Cho parabol (P) : $y^2 = 2px$. Với mỗi điểm M trên (P) (M khác O), gọi M' là hình chiếu của M trên Oy và I là trung điểm của đoạn OM'. Chứng minh rằng đường thẳng IM cắt parabol đã cho tại một điểm duy nhất.

14. Cho parabol (P) : $y^2 = \frac{1}{2}x$. Gọi M, N là hai điểm di động trên (P) sao cho $OM \perp ON$ (M, N không trùng với O). Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

IV - Bài tập trắc nghiệm

1. Đường thẳng $2x + y - 1 = 0$ có vectơ pháp tuyến là vectơ nào ?

(A) $\vec{n} = (2\ ;\ -1)$; (B) $\vec{n} = (1\ ;\ -1)$;

(C) $\vec{n} = (2\ ;\ 1)$; (D) $\vec{n} = (-1\ ;\ 2)$.

2. Đường trung trực của đoạn thẳng AB với $A = (-3\ ;\ 2)$, B = $(-3;\ 3)$ có vectơ pháp tuyến là vectơ nào ?

(A) $\vec{n} = (6\ ;\ 5)$; (B) $\vec{n} = (0\ ;\ 1)$;

(C) $\vec{n} = (-3\ ;\ 5)$; (D) $\vec{n} = (-1\ ;\ 0)$.

3. Phương trình nào là phương trình tham số của đường thẳng $x - y + 3 = 0$?

(A) $\begin{cases} x = t \\ y = 3 + t\ ; \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x = 3 \\ y = t\ ; \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t\ ; \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x = t \\ y = 3 - t. \end{cases}$

4. Vectơ nào là vectơ pháp tuyến của đường thẳng có phương trình $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - t \end{cases}$?

(A) $\vec{n} = (2\ ;\ -1)$; (B) $\vec{n} = (-1\ ;\ 2)$;

(C) $\vec{n} = (1\ ;\ -2)$; (D) $\vec{n} = (1\ ;\ 2)$.

5. Đường thẳng nào không cắt đường thẳng $2x + 3y - 1 = 0$?

(A) $2x + 3y + 1 = 0$; (B) $x - 2y + 5 = 0$;

(C) $2x - 3y + 3 = 0$; (D) $4x - 6y - 2 = 0$.

6. Đường thẳng nào song song với đường thẳng $x - 3y + 4 = 0$?

(A) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$; (B) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$;

(C) $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 + t \end{cases}$; (D) $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 - t. \end{cases}$

7. Đường thẳng nào song song với đường thẳng $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$?

(A) $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2t \end{cases}$; (B) $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -2t \end{cases}$;

(C) $\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = t \end{cases}$; (D) $\begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = 2t. \end{cases}$

8. Đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng $4x - 3y + 1 = 0$?

(A) $\begin{cases} x = 4t \\ y = -3 - 3t \end{cases}$; (B) $\begin{cases} x = 4t \\ y = -3 + 3t \end{cases}$;

(C) $\begin{cases} x = -4t \\ y = -3 - 3t \end{cases}$; (D) $\begin{cases} x = 8t \\ y = -3 + t. \end{cases}$

9. Đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$?

(A) $2x + y + 1 = 0$; (B) $x + 2y + 1 = 0$;

(C) $4x - 2y + 1 = 0$; (D) $\dfrac{x + 1}{1} = \dfrac{y + 1}{2}$.

10. Khoảng cách từ điểm $O(0 ; 0)$ đến đường thẳng $4x - 3y - 5 = 0$ bằng bao nhiêu ?

(A) 0 ; (B) 1 ;

(C) -5 ; (D) $\dfrac{1}{5}$.

11. Phương trình nào là phương trình của đường tròn có tâm $I(-3 ; 4)$ và bán kính $R = 2$?

(A) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 - 4 = 0$; (B) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$;

(C) $(x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 4$; (D) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 2$.

12. Phương trình $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ là phương trình của đường tròn nào ?

(A) Đường tròn có tâm $(-1 ; 2)$, bán kính $R = 1$;

(B) Đường tròn có tâm $(1 ; -2)$, bán kính $R = 2$;

(C) Đường tròn có tâm (2 ; –4), bán kính $R = 2$;

(D) Đường tròn có tâm (1 ; –2), bán kính $R = 1$.

13. Cặp điểm nào là các tiêu điểm của elip (E) : $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{4} = 1$?

(A) $F_{1,2} = (\pm 1 ; 0)$; (B) $F_{1,2} = (\pm 3 ; 0)$;

(C) $F_{1,2} = (0 ; \pm 1)$; (D) $F_{1,2} = (1 ; \pm 2)$.

14. Elip (E) : $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ có tâm sai bằng bao nhiêu ?

(A) $e = \dfrac{3}{2}$; (B) $e = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$;

(C) $e = \dfrac{2}{3}$; (D) $e = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

15. Cho elip có các tiêu điểm $F_1(-3 ; 0)$, $F_2(3 ; 0)$ và đi qua $A(-5 ; 0)$. Điểm $M(x ; y)$ thuộc elip đã cho có các bán kính qua tiêu là bao nhiêu ?

(A) $MF_1 = 5 + \dfrac{3}{5}x$, $MF_2 = 5 - \dfrac{3}{5}x$;

(B) $MF_1 = 5 + \dfrac{4}{5}x$, $MF_2 = 5 - \dfrac{4}{5}x$;

(C) $MF_1 = 3 + 5x$, $MF_2 = -3 - 5x$;

(D) $MF_1 = 5 + 4x$, $MF_2 = 5 - 4x$.

16. Elip (E) : $\dfrac{x^2}{p^2} + \dfrac{y^2}{q^2} = 1$, với $p > q > 0$, có tiêu cự là bao nhiêu ?

(A) $p + q$; (B) $p^2 - q^2$;

(C) $p - q$; (D) $2\sqrt{p^2 - q^2}$.

17. Phương trình $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ là phương trình chính tắc của đường nào ?

(A) Elip với trục lớn bằng $2a$, trục bé bằng $2b$;

(B) Hypebol với trục lớn bằng $2a$, trục bé bằng $2b$;

(C) Hypebol với trục hoành bằng $2a$, trục tung bằng $2b$;

(D) Hypebol với trục thực bằng $2a$, trục ảo bằng $2b$.

18. Cặp điểm nào là các tiêu điểm của hypebol $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{5} = 1$?

(A) $(\pm 4 ; 0)$;	(B) $(\pm \sqrt{14} ; 0)$;

(C) $(\pm 2 ; 0)$;	(D) $(0 ; \pm \sqrt{14})$.

19. Cặp đường thẳng nào là các đường tiệm cận của hypebol $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$?

(A) $y = \pm \frac{5}{4}x$;	(B) $y = \pm \frac{4}{5}x$;

(C) $y = \pm \frac{25}{16}x$;	(D) $y = \pm \frac{16}{25}x$.

20. Cặp đường thẳng nào là các đường chuẩn của hypebol $\frac{x^2}{q^2} - \frac{y^2}{p^2} = 1$?

(A) $x = \pm \frac{p}{q}$;	(B) $x = \pm \frac{q}{p}$;

(C) $x = \pm \frac{q^2}{\sqrt{q^2 + p^2}}$;	(D) $x = \pm \frac{p^2}{\sqrt{q^2 + p^2}}$.

21. Đường tròn nào ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở của hypebol $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$?

(A) $x^2 + y^2 = 25$;	(B) $x^2 + y^2 = 7$;

(C) $x^2 + y^2 = 16$;	(D) $x^2 + y^2 = 9$.

22. Điểm nào là tiêu điểm của parabol $y^2 = 5x$?

(A) $F(5 ; 0)$;	(B) $F\left(\frac{5}{2} ; 0\right)$;

(C) $F\left(\pm\frac{5}{4} ; 0\right)$;	(D) $F\left(\frac{5}{4} ; 0\right)$.

23. Đường thẳng nào là đường chuẩn của parabol $y^2 = 4x$?

(A) $x = 4$;	(B) $x = -2$;

(C) $x = \pm 1$;	(D) $x = -1$.

24. Cônic có tâm sai $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$ là đường nào ?

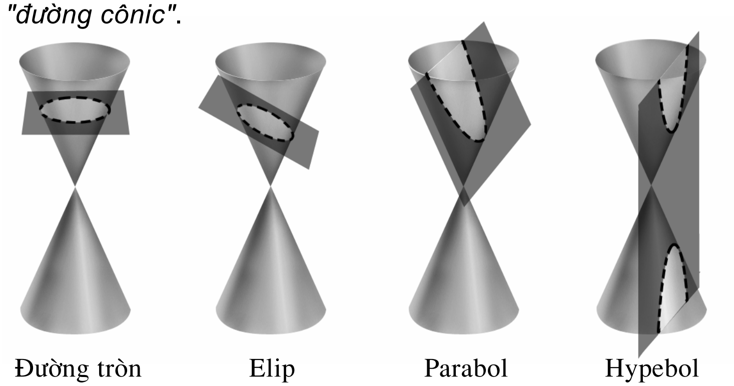
(A) Hypebol;	(B) Parabol ;

(C) Elip ;	(D) Đường tròn.

Bài đọc thêm

VỀ BA ĐƯỜNG CÔNIC

1. Từ xa xưa, người Hi Lạp chứng minh được rằng giao tuyến của mặt nón tròn xoay và một mặt phẳng không đi qua đỉnh của mặt nón là đường tròn hoặc đường cônic (elip, hypebol, parabol) (h. 98). Tiếng Anh, từ *cone* có nghĩa là mặt nón, do đó có từ *"đường cônic"*.

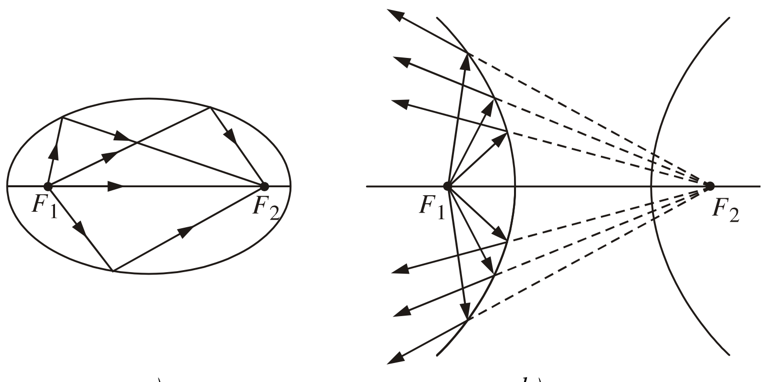


Hình 98

Ngay từ đầu thời kì A-lếch-xăng-đờ-ri (thời cổ Hi Lạp), người ta đã biết khá đầy đủ về các đường cônic qua bộ sách gồm 8 quyển của A-pô-lô-ni-ut (262 - 190 trước Công nguyên). Cuối thời kì đó, nhà toán học Hi-pa-chi-a (370 - 415 sau Công nguyên) đã công bố tác phẩm "Về các đường cônic của A-pô-lô-ni-ut".

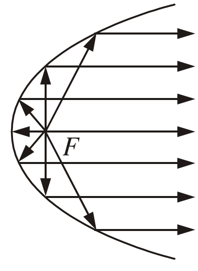
Phải rất lâu sau đó, đến thế kỉ XVII, người ta mới tìm thấy những ứng dụng quan trọng của các đường đó trong sự phát triển của khoa học và kĩ thuật.

2. Ba đường cônic còn có nhiều tính chất chung. Tính chất quang học là một ví dụ : Một tia sáng phát ra từ một tiêu điểm của elip (hay hypebol) sau khi đập vào elip (hay hypebol) sẽ bị hắt lại theo một tia (tia phản xạ) nằm trên đường thẳng đi qua tiêu điểm thứ hai của elip (hay hypebol) (h. 99).



a) *b)*

Hình 99

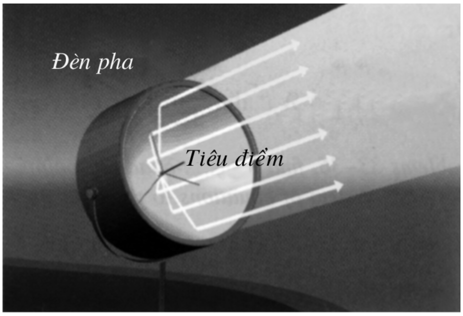


Hình 100

Với parabol, tia sáng phát ra từ tiêu điểm (tia tới) chiếu đến một điểm của parabol sẽ bị hắt lại (tia phản xạ) theo một tia song song (hoặc trùng) với trục của parabol (h. 100).

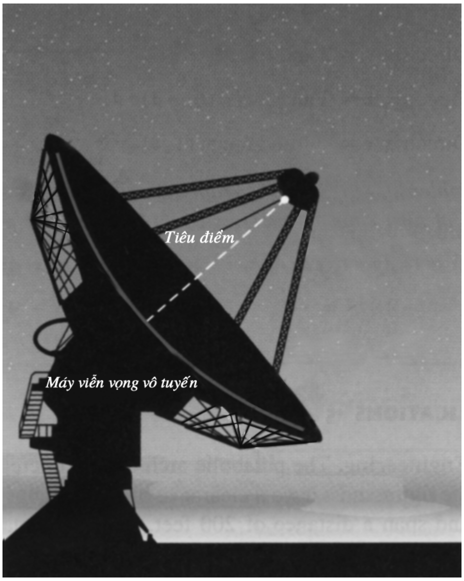
Tính chất này có nhiều ứng dụng, chẳng hạn :

• *Đèn pha :* Bề mặt của đèn pha là một mặt tròn xoay sinh bởi một cung parabol quay quanh trục của nó, bóng đèn được đặt ở vị trí tiêu điểm của parabol đó (h. 101).

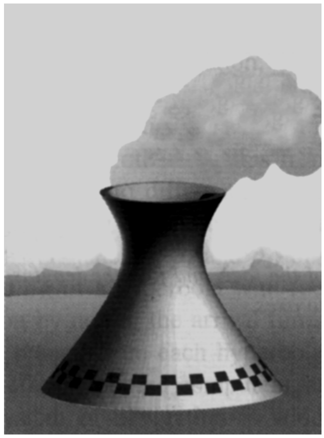


Hình 101

• *Máy viễn vọng vô tuyến* cũng có dạng như đèn pha (h. 102). Điểm thu và phát tín hiệu của máy được đặt ở vị trí tiêu điểm của parabol.



Hình 102

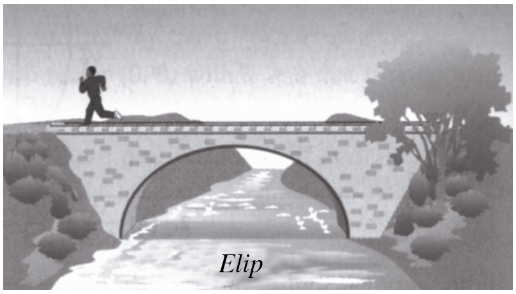


Hình 103

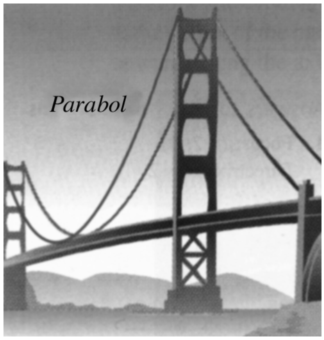
• Hình 103 là mô hình một lò phản ứng hạt nhân được xây dựng ở Mĩ. Mặt ngoài của lò là mặt tròn xoay tạo bởi một cung của hypebol quay quanh trục ảo của nó.

3. Chúng ta đã biết quỹ đạo của các hành tinh trong hệ Mặt Trời là đường elip. Đối với các vệ tinh nhân tạo và các con tàu vũ trụ, khi phóng lên, người ta phải tạo cho chúng có vận tốc thích hợp để được quỹ đạo là elip, hypebol hoặc parabol.

Ngoài ra, người ta còn ứng dụng các tính chất của ba đường cônic trong các ngành xây dựng, hàng không, hàng hải,... (h. 104).



a)



b)

Hình 104

BÀI TẬP ÔN CUỐI NĂM

1. Trên hình 105, ta có tam giác ABC và các hình vuông $AA'B_1B$, $BB'C_1C$, $CC'A_1A$.

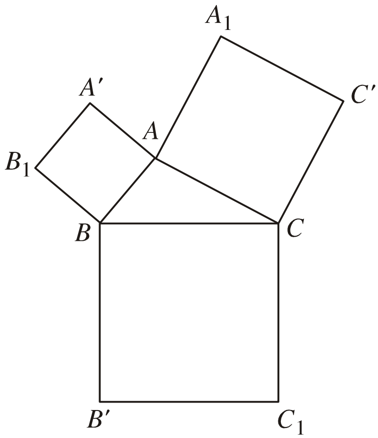
Chứng minh các đẳng thức sau

a) $(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'}).\overrightarrow{AC} = 0$;

b) $(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}).\overrightarrow{AC} = 0$;

c) $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$;

d) $\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{CA_1} = \vec{0}$.



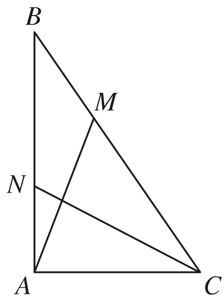
Hình 105

2. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = c$, $AC = b$.

Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $CM = 2BM$, N là điểm trên cạnh AB sao cho $BN = 2AN$ (h. 106).

a) Biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CN}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa b và c sao cho $AM \perp CN$.



Hình 106

3. Cho tam giác ABC với $AB = 4$, $AC = 5$, $BC = 6$.

a) Tính các góc A, B, C.

b) Tính độ dài các đường trung tuyến và diện tích tam giác.

c) Tính các bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác ABC.

4. Cho tam giác ABC.

a) Tam giác ABC có tính chất gì nếu $a^2 = \dfrac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a}$?

b) Biết $\dfrac{2}{h_a} = \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$, chứng minh rằng $2\sin A = \sin B + \sin C$.

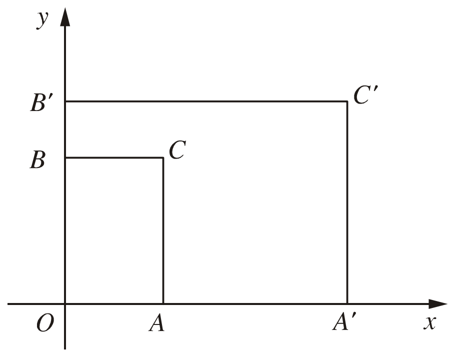
5. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai hình chữ nhật $OACB$ và $OA'C'B'$ như hình 107. Biết $A(a ; 0)$, $A'(a' ; 0)$, $B(0 ; b)$, $B'(0 ; b')$ (a, a', b, b' là những số dương, $a \neq a'$, $b \neq b'$).

a) Viết phương trình các đường thẳng AB' và $A'B$.

b) Tìm liên hệ giữa a, b, a', b' để hai đường thẳng AB' và $A'B$ cắt nhau. Khi đó hãy tìm toạ độ giao điểm I của hai đường thẳng đó.

c) Chứng minh rằng ba điểm I, C, C' thẳng hàng.

d) Với điều kiện nào của a, b, a', b' thì C là trung điểm của IC' ?



Hình 107

6. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai điểm $A(3 ; 4)$ và $B(6 ; 0)$.

a) Nhận xét gì về tam giác OAB ? Tính diện tích của tam giác đó.

b) Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB.

c) Viết phương trình đường phân giác trong tại đỉnh O của tam giác OAB.

d) Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB.

7. Trong mặt phẳng toạ độ, với mỗi số $m \neq 0$, xét hai điểm $M_1(-4 ; m)$ và $M_2\left(4 ; \dfrac{16}{m}\right)$.

a) Viết phương trình đường thẳng M_1M_2.

b) Tính khoảng cách từ gốc toạ độ O tới đường thẳng M_1M_2.

c) Chứng tỏ rằng đường thẳng M_1M_2 luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

d) Lấy các điểm $A_1(-4\ ;\ 0)$, $A_2(4\ ;\ 0)$. Tìm toạ độ giao điểm I của hai đường thẳng A_1M_2 và A_2M_1.

e) Chứng minh rằng khi m thay đổi, I luôn luôn nằm trên một elip (E) cố định. Xác định toạ độ tiêu điểm của elip đó.

8. Cho hypebol (H) có phương trình $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$.

a) Viết phương trình các đường tiệm cận của hypebol (H).

b) Tính diện tích hình chữ nhật cơ sở của hypebol (H).

c) Chứng minh rằng các điểm $M\left(5\ ;\ \dfrac{3}{2}\right)$ và $N(8\ ;\ 2\sqrt{3})$ đều thuộc (H).

d) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M, N và tìm các giao điểm P, Q của Δ với hai đường tiệm cận của hypebol (H).

e) Chứng minh rằng các trung điểm của hai đoạn thẳng PQ và MN trùng nhau.

9. Cho parabol (P) có phương trình $y^2 = 4x$.

a) Xác định toạ độ tiêu điểm F và phương trình đường chuẩn d của (P).

b) Đường thẳng Δ có phương trình $y = m$ $(m \neq 0)$ lần lượt cắt d, Oy và (P) tại các điểm K, H, M. Tìm toạ độ của các điểm đó.

c) Gọi I là trung điểm của OH. Viết phương trình đường thẳng IM và chứng tỏ rằng đường thẳng IM cắt (P) tại một điểm duy nhất.

d) Chứng minh rằng $MI \perp KF$. Từ đó suy ra MI là phân giác của góc KMF.

HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Chương I

2. a) Sai ; b) Đúng ; c) Sai ; d) Đúng ; e) Đúng ; f) Sai. **3.** Các vectơ $\vec{a}$, $\vec{d}$, $\vec{v}$, $\vec{y}$ cùng phương, các vectơ $\vec{b}$, $\vec{u}$ cùng phương. Các cặp vectơ cùng hướng : $\vec{a}$ và $\vec{v}$; $\vec{d}$ và $\vec{y}$; $\vec{b}$ và $\vec{u}$. Các cặp vec tơ bằng nhau : $\vec{a}$ và $\vec{v}$; $\vec{b}$ và $\vec{u}$. **4.** a) Sai ; b) Đúng ; c) Đúng ; d) Sai ; e) Đúng ; f) Đúng. **7.** Hình thoi. **9.** a) Sai ; b) Đúng. **11.** a) Sai ; b) Đúng ; c) Sai ; d) Đúng. **12.** M, N, P nằm trên đường tròn (O) sao cho CM, AN, BP là các đường kính của (O). **13.** a) 100N ; b) 50N. **16.** a) Sai ; b) Đúng ; c) Sai ; d) Sai ; e) Đúng. **17.** a) Tập rỗng ; b) Tập gồm chỉ một trung điểm O của AB. **21.** $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}| = a\sqrt{2}$; $|3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}| = 5a$; $\left|\frac{21}{4}\overrightarrow{OA}+2,5\overrightarrow{OB}\right| = \frac{\sqrt{541}}{4}a$; $\left|\frac{11}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{3}{7}\overrightarrow{OB}\right| = \frac{\sqrt{6073}}{28}a$.

22. $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+0\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{AN}=-\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{MB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

25. $\overrightarrow{AB}=-\vec{a}+\vec{b}$; $\overrightarrow{GC}=-\vec{a}-\vec{b}$; $\overrightarrow{BC}=-\vec{a}-2\vec{b}$; $\overrightarrow{CA}=2\vec{a}+\vec{b}$.

26. $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$. **27.** Chứng minh $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{TU}=\vec{0}$. **29.** b), c), e) Đúng ; a), d) Sai. **30.** $\vec{a}=(-1\ ;\ 0)$, $\vec{b}=(\ 0\ ;\ 5)$, $\vec{c}=(3\ ;-4)$, $\vec{d}=\left(-\frac{1}{2}\ ;\frac{1}{2}\right)$, $\vec{e}=(0,15\ ;\ 1,3)$, $\vec{f}=(\pi\ ;\ -\cos 24^o)$. **31.** a) $\vec{u}=(2\ ;-8)$; b) $\vec{x}=(-6\ ;\ 1)$; c) $k=4,4$; $l=-0,6$. **32.** $k=\frac{2}{5}$.

33. Các mệnh đề đúng là a), c), e) ; Các mệnh đề sai là b), d). **34.** b) $D=(-7\ ;\ 7)$; c) $E=\left(\frac{7}{3}\ ;\ 0\right)$. **35.** $M_1(x, -y)$, $M_2(-x\ ;\ y)$, $M_3(-x\ ;\ -y)$. **36.** a)Trọng tâm của tam giác là $G(0\ ;\ 1)$; b) $D=(8\ ;\ -11)$; c) $E=(\ -4\ ;\ -5)$.

Ôn tập chương I

1. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BD}$ (D là điểm đối xứng của C qua điểm A) ; $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BE}$ (E là điểm sao cho $ABCE$ là hình bình hành). **2.** $OA = OB$. **3.** Sử dụng đẳng thức $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$. **4.** a) M là đỉnh của hình bình hành $ABCM$; N là trung điểm của AD. b) $p=\frac{5}{4}$; $q=-\frac{3}{4}$. **5.** a) $k=\frac{3}{5}$.

6. a) Chứng minh $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ không cùng phương ; b) $D=(2\ ;-6)$; c) $E=(-3\ ;-5)$.

Bài tập trắc nghiệm chương I

1. (C) ; **2.** (B) ; **3.** (D) ; **4.** (C) ; **5.** (A) ; **6.** (C); **7.** (A); **8.** (B) ; **9.** (B) ; **10.** (A) ; **11.** (C) ; **12.** (D); **13.** (D); **14.** (A) ; **15.** (D) ; **16.** (B) ; **17.** (D); **18.** (B); **19.** (D); **20.** (A); **21.** (B); **22.** (B); **23.** (B).

Chương II

1. a) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{3}-1\right)\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; b) $\frac{1}{4}$.

2. a) $2\sin 80^o$; b) $\cos\alpha$. **4.** $\vec{a}.\vec{b}$ dương khi hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ và góc ($\vec{a}$, $\vec{b}$) bé hơn 90^o ; âm khi hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ và góc ($\vec{a}$, $\vec{b}$) lớn hơn 90^o ; bằng 0 khi hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc. **5.** 360^o. **6.** a) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$; b) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$.

10. a) Chú ý rằng hình chiếu của vectơ $\overrightarrow{AB}$ trên đường thẳng AI là vectơ $\overrightarrow{AM}$; b) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI}=4R^2$. **12.** Tập hợp các điểm M là đường thẳng vuông góc với OB tại H,

O là trung điểm của AB, H nằm trên tia OB sao cho $OH = \frac{k^2}{4a}$. **13.** a) $k = -40$; b) $k = \pm\frac{\sqrt{37}}{2}$. **14.** a) Chu vi tam giác là $6 + 6\sqrt{5}$, diện tích là 18 ; b) $G = (0 ; 1)$, $H = \left(\frac{1}{2} ; 1\right)$, $I = \left(-\frac{1}{4} ; 1\right)$. **15.** $\cos A = \frac{25}{39}$, $\widehat{A} \approx 50^o$. **16.** $BC = 7$. **17.** Bạn Cường ($BC = \sqrt{37} \approx 6,1$ km). **19.** $a \approx 4,9$; $c \approx 5,5$. **20.** $R \approx 3,5$. **22.** $AC \approx 857$ m, $BC \approx 969$ m. **24.** $m_a \approx 6,1$. **25.** $AD \approx 8,5$. **26.** $AC \approx 5,8$. **29.** $S \approx 16,3$. **33.** a) $\widehat{C} = 80^o$, $b \approx 9,1$, $a \approx 12,3$; b) $\widehat{B} = 75^o$, $a \approx 2,3$, $c = b = 4,5$; c) $\widehat{B} = 20^o$, $a \approx 26,0$, $b \approx 13,8$; d) $\widehat{A} = 40^o$, $b \approx 212,3$, $c \approx 179,4$. **34.** a) $\widehat{A} = \widehat{B} = 63^o$, $c \approx 5,7$; b) a $\approx 53,8$, $\widehat{B} \approx 36^o$, $\widehat{C} \approx 57^o$; c) $c \approx 28,0$, $\widehat{A} \approx 11^o$, $\widehat{B} \approx 39^o$. **35.** a) $\widehat{A} \approx 43^o$, $\widehat{B} \approx 61^o$, $\widehat{C} \approx 76^o$; b) $\widehat{A} \approx 55^o$, $\widehat{B} \approx 85^o$, $\widehat{C} \approx 40^o$; c) $\widehat{A} \approx 34^o$; $\widehat{B} \approx 44^o$; $\widehat{C} \approx 102^o$. **36.** 6,6 N. **37.** 17,4 m. **38.** 18,9 m.

Ôn tập chương II

2. Tập hợp các điểm M có thể là đường tròn, điểm G hoặc tập rỗng tuỳ theo các giá trị của k. **4.** Biểu thị các vectơ qua $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB'}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC'}$. **5.** a) $BM = \frac{a\sqrt{10}}{4}$, $BN = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, $MN = \frac{a\sqrt{10}}{4}$; b) ΔBMN vuông cân tại M, $S = \frac{5a^2}{16}$; c) $IC = \frac{a\sqrt{2}}{3}$; d) $R = \frac{a\sqrt{10}}{4}$. **6.** a) $(\vec{e}, \vec{f}) \approx 61^o56'$; b) $m = -4$; c) $n = -\frac{1}{4}$. **8.** S lớn nhất khi và chỉ khi $\widehat{C} = 90^o$. **9.** $S = 96$; $h_a = 16$; $R = 10$; $r = 4$. **12.** a) $AB^2 + CD^2 = 8R^2 - 4OP^2$; b) $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 4R^2$.

Bài tập trắc nghiệm chương II

1. (B) ; **2.** (C) ; **3.** **(A)** ; **4.** (D) ; **5.** (A) ; **6.** (B) ; **7.** (B); **8.** (D) ; **9.** (C) ; **10.** (B); **11.** (A) ; **12.** (C); **13.** (B) ; **14.** (A); **15.** (C); **16.** (C).

Chương III

1. Các mệnh đề đúng là a), b), c) ; Các mệnh đề sai là d), e). **2.** a) $y = 0$; b) $x = 0$; c) $y - y_0 = 0$ $(y_0 \neq 0)$; d) $x - x_0 = 0$; e) $y_0x - x_0y = 0$. **3.** $2x + 5y + \frac{37}{3} = 0$. **4.** a) $x - 2y + 1 = 0$; b) $2x + y - 3 = 0$. **5.** a) $x - y - 2 = 0$; b) $M'\left(\frac{3}{2} ; \frac{3}{2}\right)$. **6.** a) Hai đường thẳng cắt nhau ở điểm $\left(\frac{9}{29} ; \frac{21}{29}\right)$; b) Hai đường thẳng song song ; c) Hai đường thẳng trùng nhau. **7.** Các mệnh đề đúng là b), d), e), f) ; Các mệnh đề sai là a), c). **8.** Các mệnh đề đúng là a), b), d), e). Mệnh đề sai là c). **9.** a) $\begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = 5t \end{cases}$; $\frac{x+3}{3} = \frac{y}{5}$; $5x - 3y + 15 = 0$; b) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 + t \end{cases}$; Không có phương trình chính tắc ; $x - 4 = 0$; c) $\begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$; $\frac{x+4}{5} = \frac{y-1}{3}$; $3x - 5y + 17 = 0$. **10.** a) $\frac{x+5}{1} = \frac{y-2}{-2}$. b) $x - 2y + 9 = 0$. **11.** a) Hai đường thẳng song song ; b) Hai đường thẳng cắt nhau tại $(0 ; -13)$; c) Hai đường thẳng trùng nhau. **12.** a) $(3 ; 1)$; b) $\left(\frac{67}{25} ; -\frac{56}{25}\right)$; c) $\left(\frac{262}{169} ; \frac{250}{169}\right)$. **13.** $M = \left(-\frac{133}{18} ; -\frac{97}{18}\right)$. **14.** $B = \left(\frac{9}{11} ; \frac{3}{11}\right)$; $D = \left(\frac{17}{11} ; -\frac{20}{11}\right)$; $C = \left(-\frac{18}{11} ; -\frac{6}{11}\right)$. **15.** Các mệnh đề b), c), e) đúng. Hai mệnh đề a) và d) sai. **16.** $43^o36'$. **17.** $ax + by + c + h\sqrt{a^2 + b^2} = 0$, $ax + by + c - h\sqrt{a^2 + b^2} = 0$. **18.** $x + 2y - 14 = 0$; $y - 2 = 0$. **19.** Không tồn tại. **20.** $(1 + \sqrt{2})(x - 3) + (y - 1) = 0$; $(1 - \sqrt{2})(x - 3) + (y - 1) = 0$. **21.** a) b) và

d) Đúng ; c) Sai. **22.** a) $(x-1)^2+(y-3)^2=8$; b) $(x+2)^2+y^2=5$. **23.** a) $I(1\ ;\ 1)$, $R=2$; b) $I(2\ ;\ 3)$, $R=\sqrt{11}$. c) $I\left(\frac{5}{4};1\right)$, $R=\frac{1}{4}\sqrt{33-8m^2}$ với điều kiện $|m|<\sqrt{\frac{33}{8}}$. **24.** $(x-3)^2+y^2=8$. **25.** a) $(x-1)^2+(y-1)^2=1$; $(x-5)^2+(y-5)^2=25$. b) $(x-3)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$ và $(x+1)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$. **26.** $(1\ ;\ -2)$ và $\left(\frac{21}{5};-\frac{2}{5}\right)$. **27.** a) $3x-y+2\sqrt{10}=0$ và $3x-y-2\sqrt{10}=0$; b) $2x-y+2\sqrt{5}=0$ và $2x-y-2\sqrt{5}=0$; c) $y+2=0$ và $x-2=0$. **28.** $|m+5|>2\sqrt{10}$: Δ và $(\mathscr{C})$ không cắt nhau ; $|m+5|=2\sqrt{10}$: tiếp xúc ; $|m+5|<2\sqrt{10}$: cắt nhau. **29.** $\left(-\frac{3}{2};\frac{-2+\sqrt{11}}{2}\right)$; $\left(-\frac{3}{2};-\frac{2+\sqrt{11}}{2}\right)$. **30.** a), b) và d) đúng ; c) và e) sai. **31.** a) Toạ độ các tiêu điểm là $(\pm\sqrt{21}\ ;\ 0)$; Toạ độ các đỉnh là $(\pm5\ ;\ 0)$ và $(0\ ;\ \pm2)$. Độ dài trục lớn $2a=10$, độ dài trục bé là $2b=4$; b) $(\pm\sqrt{5}\ ;\ 0)$, $(\pm3\ ;\ 0)$ và $(0\ ;\ \pm2)$; $2a=6$, $2b=4$; c) $(\pm\sqrt{3}\ ;\ 0)$, $(\pm2\ ;\ 0)$ và $(0\ ;\ \pm1)$, $2a=4$, $2b=2$. **32.** a) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$; b) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{16}=1$; c) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$. **33.** a) $MN=|y_M-y_N|=\frac{2}{3}$; b) $M_1\left(\frac{3\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{14}}{4}\right)$ và $M_2\left(\frac{3\sqrt{2}}{4};-\frac{\sqrt{14}}{4}\right)$. **34.** $e\approx0{,}07647$. **35.** Tập hợp điểm M là elip có phương trình $\frac{x^2}{\left(\frac{2a}{3}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{a}{3}\right)^2}=1$. **36.** Các mệnh đề a), b), d) đúng ; c) sai. **37.** a) Tiêu điểm $F_1(-\sqrt{13}\ ;\ 0)$, $F_2(\sqrt{13}\ ;\ 0)$. Độ dài trục thực $2a=6$. Độ dài trục ảo $2b=4$. Phương trình các đường tiệm cận $y=\pm\frac{2}{3}x$; b) Tiêu điểm $F_1(-5\ ;\ 0)$, $F_2(5\ ;\ 0)$. Độ dài trục thực $2a=6$. Độ dài trục ảo $2b=8$. Phương trình các đường tiệm cận y $=\pm\frac{4}{3}x$; c) Hai tiêu điểm là $(-\sqrt{10}\ ;\ 0)$ và $(\sqrt{10}\ ;\ 0)$. Độ dài trục thực bằng 6, độ dài trục ảo bằng 2. Phương trình các đường tiệm cận $y=\pm\frac{1}{3}x$. **38.** $\frac{x^2}{\left(\frac{R}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{F_1F_2^2-R^2}}{2}\right)^2}=1$.

39. a) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; b) $\frac{x^2}{\frac{27}{13}}-\frac{y^2}{\frac{12}{13}}=1$; c) $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{4}=1$. **42.** a), b) và d) sai ; c) đúng. **43.** a) $y^2=12x$; b) $y^2=x$; c) $y^2=\frac{2}{3}x$. **44.** $2p$. **45.** $d(I\ ;\ \Delta)=\frac{1}{2}AB$. Đường tròn đường kính AB tiếp xúc với đường chuẩn Δ. **46.** $y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}$. **47.** a) Tiêu điểm $F(3{,}5\ ;\ 0)$, đường chuẩn $x+3{,}5=0$; b) Tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3}\ ;\ 0)$, đường chuẩn Δ_1 : $x+\frac{10}{\sqrt{3}}=0$. Tiêu điểm $F_2(\sqrt{3}\ ;\ 0)$, đường chuẩn Δ_2 : $x-\frac{10}{\sqrt{3}}=0$; c) Tiêu điểm $F_1(-\sqrt{15}\ ;\ 0)$, đường chuẩn Δ_1 : $x+\frac{14}{\sqrt{15}}=0$. Tiêu điểm $F_2(\sqrt{15}\ ;\ 0)$, đường chuẩn Δ_2 : $x-\frac{14}{\sqrt{15}}=0$.

Ôn tập chương III

1. a) Δ_1, Δ_2 cắt nhau ; b) $\Delta_1 // \Delta_2$; c) $\Delta_1\equiv\Delta_2$. **2.** a) $\begin{cases}x=-2+4t\\y=-1+3t\end{cases}$; b) $\frac{x}{-\frac{2}{3}}+\frac{y}{\frac{1}{2}}=1$; c) $d(M\ ;\ \Delta)=1{,}8$; $d(N\ ;\ \Delta)=2$; $d(P\ ;\ \Delta)=0{,}8$; Δ cắt hai cạnh MP và NP, không cắt cạnh MN. d) Gọi α và β lần lượt là góc giữa Δ với Ox và Oy, $\alpha \approx 36^o52'$; $\beta \approx 53^o8'$. **3.** a) $x - y + 2 > 0$. b) $O' = (-2 ; 2)$; c) $M = \left(-\frac{2}{3} ; \frac{4}{3}\right)$. **4.** $ax + by + c - 2(ax_0 + by_0 + c) = 0$. **5.** $x + 3y - 30 = 0$ và $2x - 5y + 39 = 0$. **6.** a) $m < -\frac{8}{5}$ hoặc $m > 0$; b) Tập hợp tâm của các đường tròn là hai phần của đường thẳng có phương trình $2x + y - 1 = 0$, ứng với $x < 0$ hoặc $x > \frac{4}{5}$. **8.** $2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y + c_1 - c_2 = 0$. **9.** a) $x + 2 = 0$, $5x + 12y - 26 = 0$; b) $AT = AT' = 3$, $TT' = \frac{12}{\sqrt{13}}$. **10.** a) (E) có hai tiêu điểm $(-1 ; 0)$ và $(1 ; 0)$; b) (H) có hai tiêu điểm $(-3 ; 0)$ và $(3 ; 0)$; c) $\left(-\sqrt{5} ; 0\right)$ và $\left(\sqrt{5} ; 0\right)$. **11.** a) $-2\sqrt{6} < m < 2\sqrt{6}$; b) $m = \pm 2\sqrt{6}$. **12.** a) Elip có các tiêu điểm $(-4 ; 0)$, $(4 ; 0)$, các đỉnh $(-5 ; 0)$, $(5 ; 0)$ và $(0 ; -3)$, $(0 ; 3)$; b) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; d) $x^2 + y^2 = \frac{881}{41}$.

Bài tập trắc nghiệm chương III

1. (C); **2.** (B); **3.** (A); **4.** (D); **5.** (A); **6.** (D); **7.** (B); **8.** (A); **9.** (B); **10.** (B) ; **11.** (A); **12.** (B); **13.** (A); **14.** (D); **15.** (A); **16.** (D); **17.** (D); **18.** (B); **19.** (A); **20.** (C); **21.** (A); **22.** (D); **23.** (D); **24.** (C).

Ôn tập cuối năm

1. c) Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$ ta có $\vec{u}.\overrightarrow{AC} = 0$, $\vec{u}.\overrightarrow{AB} = 0$, suy ra $\vec{u} = \vec{0}$; d) Phân tích mỗi vectơ $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{CA_1}$ thành tổng hai vectơ theo quy tắc hình bình hành. **2.** a) $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$; b) $3b^2 = 2c^2$. **3.** a) $\widehat{A} \approx 83^o$, $\widehat{B} \approx 56^o$, $\widehat{C} \approx 41^o$. b) $m_a = \frac{\sqrt{46}}{2}$, $m_b = \frac{\sqrt{79}}{2}$, $m_c = \frac{\sqrt{106}}{2}$, $S = \frac{15}{4}\sqrt{7}$; c) $r = \frac{\sqrt{7}}{2}$, $R = \frac{8\sqrt{7}}{7}$. **4.** a) Tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^o$; b) Sử dụng $S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c$. **5.** a) $AB' : b'x + ay - ab' = 0$, $A'B : bx + a'y - a'b = 0$; b) AB' và $A'B$ cắt nhau khi $\frac{b'}{b} \neq \frac{a}{a'}$ hay $a'b' - ab \neq 0$, giao điểm $I\left(\frac{aa'(b'-b)}{a'b'-ab} ; \frac{bb'(a'-a)}{a'b'-ab}\right)$; c) $\overrightarrow{CI} = -\frac{ab}{a'b'-ab}\overrightarrow{CC'}$ suy ra $\overrightarrow{CI}$ và $\overrightarrow{CC'}$ cùng phương, hay ba điểm C, I, C' thẳng hàng ; d) $a'b' = 2ab$. **6.** a) OAB là tam giác cân tại A, $S_{OAB} = 12$; b) $(x-3)^2 + \left(y - \frac{7}{8}\right)^2 = \frac{625}{64}$; c) $x - 2y = 0$; d) $(x-3)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$. **7.** a) $\left(\frac{16}{m} - m\right)(x + 4) - 8(y - m) = 0$; b) $d(O ; M_1M_2) = 4$; c) Đường thẳng M_1M_2 luôn tiếp xúc với đường tròn tâm O, bán kính $R = 4$; d) $x_I = \frac{4(m^2 - 16)}{m^2 + 16}$; $y_I = \frac{16m}{m^2 + 16}$; e) I nằm trên elip $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. Hai tiêu điểm $F_1(-2\sqrt{3} ; 0)$ và $F_2(2\sqrt{3} ; 0)$. **8.** a) $y = \frac{x}{2}$ và $y = -\frac{x}{2}$; b) 32 ; d) $(4\sqrt{3} - 3)x - 6y - 20\sqrt{3} + 24 = 0$, $x_P = 8 + 2\sqrt{3}$, $y_P = 4 + \sqrt{3}$, $x_Q = 5 - 2\sqrt{3}$, $y_Q = \frac{-5}{2} + \sqrt{3}$; e) Gọi I và J lần lượt là trung điểm MN, PQ thì $x_I = x_J$. Do I, J cùng thuộc đường thẳng MN nên $I \equiv J$. **9.** a) $F(1 ; 0)$, $d : x + 1 = 0$; b) $K = (-1 ; m)$, $H = (0 ; m)$, $M = \left(\frac{m^2}{4} ; m\right)$; c) $4x - 2my + m^2 = 0$; d) Đường thẳng IM có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (4; -2m)$, $\overrightarrow{KF}$ cùng phương với $\vec{n}$. Vậy $KF \perp IM$.

BẢNG THUẬT NGỮ

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch Hội đồng Thành viên NGUYỄN ĐỨC THÁI
Tổng Giám đốc HOÀNG LÊ BÁCH
Chịu trách nhiệm nội dung :
Tổng biên tập PHAN XUÂN THÀNH

Biên tập lần đầu : NGUYỄN XUÂN BÌNH - NGUYỄN TRỌNG THIỆP
Biên tập tái bản : ĐẶNG THỊ MINH THU
Biên tập mĩ thuật, kĩ thuật : NGUYỄN PHƯƠNG YÊN - TRẦN THANH HẰNG
Trình bày bìa và vẽ hình : BÙI QUANG TUẤN
Sửa bản in : NGUYỄN NGỌC TÚ
Chế bản : CÔNG TY CP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI

HÌNH HỌC 10 NÂNG CAO

Mã số : NH002T0

In .... cuốn (QĐ in số : ....), khổ 17 × 24 cm.
Đơn vị in : .... địa chỉ ....
Cơ sở in : .... địa chỉ ....
Số ĐKXB : 01 - 2020/CXBIPH/735 - 869/GD
Số QĐXB : ... / QĐ-GD ngày ... tháng ... năm ...
In xong và nộp lưu chiểu tháng ... năm ...
Mã số ISBN : 978-604-0-19014-7