

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC DÂN LẬP HẢI PHÒNG**
.....

VŨ ĐÌNH SƠN

**PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN
TÍNH TOÁN ỔN ĐỊNH UỐN DỌC CỦA THANH CỐ XÉT
ĐẾN BIẾN DẠNG TRƯỢT NGANG**

LUẬN VĂN THẠC SĨ KỸ THUẬT

**CHUYÊN NGÀNH: KỸ THUẬT XÂY DỰNG CÔNG TRÌNH DÂN DỤNG
VÀ CÔNG NGHIỆP; MÃ SỐ: 60.58.02.08**

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

PGS. TS. ĐOÀN VĂN DUẤN

HẢI PHÒNG, 11 NĂM 2018

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đề tài “**Phương pháp phần tử hữu hạn tính toán ổn định uốn dọc của thanh có xét đến biến dạng trượt ngang**” là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các số liệu, kết quả trong luận văn là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Tác giả luận văn

Vũ Đình Sơn

LỜI CẢM ƠN

Qua quá trình học tập và nghiên cứu, được sự giúp đỡ, của các cán bộ, giáo viên của Khoa xây dựng, Phòng đào tạo Đại học và Sau đại học - trường Đại học Dân lập Hải Phòng, tôi đã hoàn thành chương trình học tập và nghiên cứu luận văn.

Tôi xin trân trọng cảm ơn PGS.TS. Đoàn Văn Duẩn đã tận tình giúp đỡ và cho nhiều chỉ dẫn khoa học có giá trị cũng như thường xuyên động viên, tạo mọi điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu hoàn thành luận văn.

Cuối cùng, tôi xin cảm ơn những người thân, bạn bè đã luôn bên tôi, động viên tôi hoàn thành khóa học và bài luận văn này.

Xin trân trọng cảm ơn!

Hải Phòng, ngày tháng năm 2018

Tác giả

Vũ Đình Sơn

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU.....	6
CHƯƠNG 1: TỔNG QUAN VỀ LÝ THUYẾT ỔN ĐỊNH CÔNG TRÌNH...	8
1.1. Khái niệm về ổn định và ổn định công trình.....	8
1.2. Lịch sử phát triển của lý thuyết ổn định công trình	10
1.3. Các phương pháp xây dựng bài toán ổn định công trình	11
1.5. Nhận xét chương 1:	16
CHƯƠNG 2: PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN	17
2.1. Phương pháp phần tử hữu hạn	17
2.1.1. Rời rạc hoá sơ đồ tính.....	17
2.1.2. Ma trận độ cứng của một phần tử	19
2.1.3. Phương trình cơ bản của phương pháp phần tử hữu hạn	20
2.2. Các quan hệ cơ bản trong một phần tử hữu hạn.....	21
2.2.1. Nguyên lý công khả dĩ của Lagrange áp dụng cho hệ đàn hồi.....	22
2.2.2. Hàm chuyển vị và hàm dạng	23
2.2.3. Biến dạng và ứng suất tại một điểm trong phần tử	24
2.2.4. Thế năng toàn phần Φ_e của một phần tử. Ma trận cứng phần tử $[k]_e$...	25
2.3. Ma trận độ cứng và véc tơ lực nút của phần tử dầm chịu uốn phẳng.....	29
2.3.1. Biểu thức thế năng toàn phần Φ_e và các ma trận $[c]$, $[D]$	29
2.3.2. Giả thiết hàm chuyển vị $\{u\}$, $[M]$; lập các ma trận $[A],[N],[B]$	30
2.3.3. Lập ma trận độ cứng phần tử $[k]_e$	31
2.3.4. Xác định véc tơ lực nút $\{\bar{P}_q\}_e$ do tải trọng tác dụng trong dầm gây nên	32
2.4. Lập ma trận độ cứng và véc tơ lực nút của phần tử trong hệ tọa độ chung của kết cấu, ma trận biến đổi tọa độ	33
2.5. Phương pháp số mã lập ma trận độ cứng $[K]$ và véc tơ lực nút $\{F\}$ của toàn kết cấu	37
2.6. Cách xử lý điều kiện biên	40

CHƯƠNG 3: ỔN ĐỊNH UỐN DỌC CỦA DÀM CÓ XÉT ĐẾN BIẾN DẠNG TRƯỢT NGANG.....	45
3.1. Lý thuyết dầm có xét biến dạng trượt ngang	45
3.2. Bài toán ổn định của dầm chịu nén có xét biến dạng trượt[15, 18].....	50
3.3. Phương pháp chuyển vị cưỡng bức [18].....	52
3.4. Xác định lực tới hạn của dầm chịu nén có xét đến biến dạng trượt ngang bằng phương pháp phần tử hữu hạn	53
3.4.1. Ma trận độ cứng phần tử.....	54
3.4.2. Bài toán ổn định tĩnh	57
Ví dụ 1. Dầm đầu ngàm - đầu tự do	57
KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ.....	66
Danh mục tài liệu tham khảo.....	67

MỞ ĐẦU

1. Sự cần thiết của vấn đề nghiên cứu

Khi thiết kế công trình, nếu chỉ kiểm tra điều kiện bền và điều kiện cứng không thôi thì chưa đủ để phán đoán khả năng làm việc của công trình. Trong nhiều trường hợp, đặc biệt là các kết cấu chịu nén hoặc nén cùng với uốn, tuy tải trọng chưa đạt đến giá trị phá hoại và có khi còn nhỏ hơn giá trị cho phép về điều kiện bền và điều kiện cứng nhưng kết cấu vẫn có thể mất khả năng bảo toàn dạng cân bằng ban đầu. Do đó, việc nghiên cứu ổn định công trình là cần thiết và có ý nghĩa thực tiễn.

Bài toán ổn định của kết cấu đã được giải quyết theo nhiều hướng khác nhau, phần lớn xuất phát từ nguyên lý năng lượng mà theo đó kết quả phụ thuộc rất nhiều vào cách chọn dạng của hệ ở trạng thái lệch khỏi dạng cân bằng ban đầu. Cho đến nay, các đường lối xây dựng bài toán ổn định của kết cấu chịu uốn thường không kể đến ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang hoặc có kể đến nhưng do cách đặt vấn đề và cách chọn ẩn chưa thật chính xác nên đã gặp rất nhiều khó khăn mà không tìm được kết quả của bài toán một cách chính xác và đầy đủ.

Phương pháp phần tử hữu hạn là một phương pháp tính đang được áp dụng hết sức rộng rãi hiện nay trên thế giới, vì phương pháp này rất thuận tiện cho việc áp dụng máy tính điện tử, cho phép tính kết cấu với những sơ đồ tính toán khá phức tạp, phản ánh tương đối đầy đủ tình hình làm việc của kết cấu thực; cho phép tự động hoá tính toán kết cấu, tiết kiệm được nhiều lao động và thời gian. Phương pháp này không chỉ được áp dụng trong lĩnh vực cơ học vật rắn biến dạng, mà còn trong nhiều lĩnh vực khác.

2. Đối tượng, phương pháp và phạm vi nghiên cứu

Trong đề tài này, tác giả áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn để nghiên cứu ổn định đàn hồi của dầm có xét đến biến dạng trượt ngang, chịu tác dụng của tải trọng tĩnh.

3. Mục đích nghiên cứu

Nghiên cứu ổn định đàn hồi của dầm có xét đến biến dạng trượt ngang

4. Nội dung nghiên cứu

– Trình bày tổng quan về lý thuyết ổn định và ổn định công trình

– Trình bày phương pháp phân tử hữu hạn để nghiên cứu bài toán ổn định của dầm thẳng chịu uốn dọc có xét đến biến dạng trượt ngang.

– Trình bày lý thuyết xét biến dạng trượt đối với bài toán ổn định đàn hồi của dầm với việc dùng hai hàm chưa biết là hàm độ võng y và hàm lực cắt Q .

– Sử dụng phương pháp pháp phân tử hữu hạn để xây dựng và giải bài toán ổn định đàn hồi của dầm chịu uốn dọc có xét đến biến dạng trượt ngang, chịu tác dụng của tải trọng tĩnh.

CHƯƠNG 1

TỔNG QUAN VỀ LÝ THUYẾT ỔN ĐỊNH CÔNG TRÌNH

1.1. Khái niệm về ổn định và ổn định công trình

1.1.1. Khái niệm về ổn định và mất ổn định

1.1.1.1. Định nghĩa về ổn định

- Theo Euler - Lagrange:

Ổn định là khả năng của công trình bảo toàn được vị trí ban đầu của nó cũng như dạng cân bằng ban đầu tương ứng với tải trọng trong trạng thái biến dạng, luôn luôn giữ, khi có các nhiễu loạn tùy ý từ bên ngoài gắn với trạng thái không biến dạng ban đầu và hoàn toàn trở về trạng thái đó trong giai đoạn đàn hồi, còn trong giai đoạn đàn dẻo thì theo thường lệ, sẽ trở về trạng thái đó một cách từng phần, nếu như các nguyên nhân ngẫu nhiên gây ra nhiễu loạn công trình bị triệt tiêu [10].

Nói cách khác, ổn định là tính chất của công trình chống lại các tác nhân ngẫu nhiên từ bên ngoài và tự nó khôi phục hoàn toàn hoặc một phần vị trí ban đầu và dạng cân bằng của nó trong trạng thái biến dạng, khi các tác nhân ngẫu nhiên bị mất đi[10].

- Theo Liapunov [54]

“Trạng thái cân bằng của một hệ là ổn định nếu khi và chỉ khi hệ trở lại hình dạng này sau một nhiễu loạn nhỏ tạm thời nào đó. Nhiễu loạn như thế có thể sinh ra bởi một lực nhỏ tác động lên hệ trong một thời gian rất ngắn và bỏ ra sau đó”.

Định nghĩa này được hiểu trong ý nghĩa động lực : Điều này ám chỉ là dao động của hệ tắt dần do động năng đưa vào nhờ nhiễu loạn tiêu tán nhanh. Bởi vậy sau một thời gian ngắn chuyển động dừng lại và sự cân bằng tĩnh ban đầu được phục hồi.

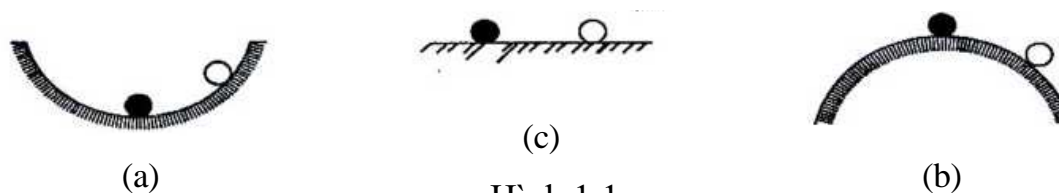
Như vậy theo hai định nghĩa trên ta đi đến kết luận: Vị trí của công

trình hay dạng cân bằng ban đầu trong trạng thái biến dạng của công trình được gọi là ổn định hay không ổn định dưới tác dụng của tải trọng nếu như sau khi gây cho công trình một độ lệch rất nhỏ khỏi vị trí ban đầu hoặc dạng cân bằng ban đầu bằng một nguyên nhân bất kỳ nào đó ngoài tải trọng đã có (còn gọi là nhiễu) rồi bỏ nguyên-nhân đó đi thì công trình sẽ có hay không có khuynh hướng quay trở về trạng thái ban đầu.

Bước quá độ của công trình từ trạng thái ổn định sang trạng thái không ổn định gọi là mất ổn định. Giới hạn đầu của bước quá độ đó gọi là trạng thái tới hạn của công trình. Tải trọng tương ứng với trạng thái tới hạn gọi là tải trọng tới hạn.

1.1.1.2. Các trường hợp mất ổn định

- Trường hợp 1: Mất ổn định về vị trí [31]
- Hiện tượng mất ổn định về vị trí xảy ra khi toàn bộ công trình được xem là tuyệt đối cứng, không giữ nguyên được vị trí ban đầu mà buộc phải chuyển sang vị trí cân bằng mới khác vị trí ban đầu.



Hình 1.1.

Xét một viên bi cứng trên một bề mặt cứng, Hình 1.1.

Rõ ràng là trong trường hợp (a) sự cân bằng của viên bi là ổn định. Sau một nhiễu loạn nhỏ cuối cùng nó sẽ trở về đáy cốc, tuy vậy sự suy giảm nhỏ có thể xảy ra.

Trong trường hợp (b) sự cân bằng là không ổn định, bởi vì sau một nhiễu loạn nhỏ viên bi sẽ không bao giờ có thể phục hồi vị trí ban đầu của nó.

Trong trường hợp (c), kích viên bi ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu thì nó lăn trên mặt phẳng ngang đến khi ngừng chuyển động, nó có vị trí cân bằng mới khác với trạng thái cân bằng ban đầu. Trong trường hợp này ta nói rằng trạng thái cân bằng ban đầu là phiếm định (không phân biệt).

- Trường hợp 2: Mất ổn định về dạng cân bằng [1 1]

Hiện tượng mất ổn định về dạng cân bằng ở trạng thái biến dạng xảy ra khi dạng biến dạng ban đầu của vật thể biến dạng tương ứng với tải trọng còn nhỏ, buộc phải chuyển sang dạng biến dạng mới khác trước về tính chất nếu tải trọng đạt đến một giá trị nào đó hoặc xảy ra khi biến dạng của vật thể phát triển nhanh mà không xuất hiện dạng biến dạng mới khác trước về tính chất nếu tải trọng đạt đến một giá trị nào đó. Trong những trường hợp này, sự cân bằng giữa các ngoại lực và nội lực không thể thực hiện được tương ứng với dạng biến dạng ban đầu mà chỉ có thể thực hiện được tương ứng với dạng biến dạng mới khác dạng ban đầu về tính chất hoặc chỉ có thể thực hiện được khi giảm tải trọng. Hiện tượng này khác với hiện tượng mất ổn định về vị trí ở các điểm sau: Đối tượng nghiên cứu là vật thể biến dạng chứ không phải tuyệt đối cứng, sự cân bằng cần được xét với cả ngoại lực và nội lực.

Mất ổn định về dạng cân bằng gồm hai loại:

Mất ổn định loại một (mất ổn định Euler), có các đặc trưng sau:

Dạng cân bằng có khả năng phân nhánh, phát sinh dạng cân bằng mới khác dạng cân bằng ban đầu về tính chất Trước trạng thái tới hạn dạng cân bằng ban đầu là duy nhất và ổn định; sau trạng thái tới hạn dạng cân bằng là không ổn định.

Như hình 1.1, để biết được trạng thái cân bằng của cơ hệ có ổn định hay không thì ta phải kích nó ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu. Phương pháp chung để đánh giá sự mất ổn định của cơ hệ là: Đưa hệ ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu của nó và kiểm tra xem nó có tồn tại trạng thái cân bằng mới không. Nếu như tìm được trạng thái cân bằng mới khác với trạng thái cân bằng ban đầu thì hệ là mất ổn định và lực giữ cho hệ ở trạng thái cân bằng mới này gọi là lực tới hạn, trường hợp ngược lại hệ là ổn định.

1.2. Lịch sử phát triển của lý thuyết ổn định công trình

Thực tế cho thấy nhiều công trình bị sập đổ do mất ổn định, chiếc cầu đường sắt đầu tiên ở Kevđa – Nga là cầu dàn hỏ đã bị phá hủy năm 1875 do hệ dầm biên trên bị mất ổn định, cầu Menkhenstein ở Thụy sĩ bị phá hủy

năm 1891 do mất ổn định, Cầu dầm Québec qua sông St. Laurent ở Canada, bị phá hủy vì mất ổn định của dầm chịu nén trong khi xây dựng vào năm 1907[10, trg 5], bể chứa khí ở Hamburg bị phá hủy năm 1907 do dầm ghép chịu nén bị mất ổn định, cầu dầm Mojur ở Nga bị phá hủy năm 1925 do dầm ghép chịu nén bị mất ổn định, riêng ở Pháp theo số liệu của kỹ sư Girard trong khoảng thời gian từ 1955-1965 đã có 24 cầu bị phá hủy, phần lớn là do nguyên nhân mất ổn định, Cầu Tacoma ở Mỹ xây dựng hoàn thành ngày 1/7/1940 và bị phá hủy 7/11/1940 do bị mất ổn định vì tác dụng của gió [32, trg 277] v.v...

Vấn đề ổn định kết cấu được bắt đầu từ công trình nghiên cứu bằng thực nghiệm do Piter Musschenbroek công bố năm 1729, đã đi đến kết luận rằng lực tới hạn tỷ lệ nghịch với bình phương chiều dài dầm. Ba mươi năm sau bằng phân tích toán học Leonhard Euler cũng nhận được kết quả như vậy. Đầu tiên các kỹ sư không chấp nhận kết quả thí nghiệm của Piter Musschenbroek và kết quả của lý thuyết Euler ngay cả Culông [31, trg 185] cũng tiếp tục cho rằng độ cứng của cột tỷ lệ thuận với diện tích mặt cắt ngang và không phụ thuộc vào chiều dài dầm. Những quan điểm đó dựa trên các kết quả thí nghiệm của cột gỗ và cột sắt lắp ghép có chiều dài tương đối ngắn, những dầm loại này thường bị phá hoại với tải trọng nhỏ thua tải trọng Euler do vật liệu bị phá hoại mà không phải do mất ổn định ngang gây ra. E.Lamac là người đầu tiên giải thích một cách thỏa đáng sự không phù hợp giữa kết quả lý thuyết và kết quả thực nghiệm, ông ấy chỉ ra rằng lý thuyết Euler là hoàn toàn phù hợp với thực nghiệm khi bảo đảm rằng những giả thiết cơ bản của Euler về xem vật liệu là đàn hồi và điều kiện lý tưởng của các đầu cuối cần phải được bảo đảm. Những thí nghiệm sau này khi người ta rất chú ý bảo đảm của đầu cuối của dầm và bảo đảm cho lực đặt đúng tâm của dầm đã khẳng định tính đúng đắn của công thức Euler.

1.3. Các phương pháp xây dựng bài toán ổn định công trình

1.3.1. Phương pháp tĩnh

Theo phương pháp này tải trọng tới hạn sẽ là tải trọng nhỏ nhất để xảy ra phân nhánh dạng cân bằng, tức là bên cạnh dạng cân bằng ban đầu tồn tại dạng cân bằng lân cận. Để xác định tải trọng này chỉ cần nghiên cứu sự cân bằng của hệ ở trạng thái lân cận khi cho hệ chuyển vị bé và đi tìm tải trọng bé nhất tương ứng với dạng cân bằng lân cận đó.

Khảo sát cân bằng của một hệ ở trạng thái lệch khỏi dạng cân bằng ban đầu. Tính giá trị của lực ở trạng thái lệch để đối chiếu với giá trị của lực đã cho ở trạng thái cân bằng ban đầu.

Giả sử: P là lực đã cho ở trạng thái cân bằng ban đầu

P^* là lực ứng với trạng thái lệch khỏi dạng cân bằng ban đầu (lực cần có để giữ hệ ở trạng thái lệch).

- Nếu $P < P^*$ thì hệ cân bằng ổn định
- Nếu $P = P^*$ thì hệ cân bằng phiếm định
- Nếu $P > P^*$ thì hệ cân bằng không ổn định

Xét hệ một bậc tự do, một đầu ngàm đàn hồi, một đầu tự do

Sau khi khảo sát cân bằng của hệ ở trạng thái cân lệch ta có:

$$P = \frac{k}{l} \text{ do đó:}$$

- Với $P < \frac{k}{l}$ thì hệ cân bằng ổn định
- Với $P = \frac{k}{l}$ thì hệ cân bằng phiếm định
- Với $P > \frac{k}{l}$ hệ cân bằng không ổn định

1.3.2. Phương pháp năng lượng

Phương pháp này dựa trên việc nghiên cứu năng lượng toàn phần của hệ. Khi nó đạt cực tiểu thì hệ ở trạng thái cân bằng ổn định. Sự lệch khỏi trạng thái cân bằng ổn định sẽ làm tăng năng lượng. Tải trọng tới hạn ứng với năng lượng cực tiểu.

Nguyên lý Lagrange - Dirichlet:

“ Nếu hệ ở trạng thái cân bằng ổn định thì thế năng toàn phần đạt cực tiểu so với tất cả các vị trí lân cận vô cùng bé kể từ trạng thái cân bằng đó.

Nếu hệ ở trạng thái cân bằng không ổn định thì thế năng toàn phần đạt cực đại so với tất cả các vị trí lân cận vô cùng bé kể từ trạng thái cân bằng đó.

Nếu hệ ở trạng thái cân bằng phiếm định thì thế năng toàn phần không đổi”.

Thế năng toàn phần U^* của hệ ở trạng thái biến dạng gồm:

- Thế năng biến dạng của nội lực U
- Thế năng của ngoại lực $U_P = -T$ (trái dấu với công của ngoại lực T)

$$U^* = U + U_P = U - T$$

Độ biến thiên δU^* của thế năng toàn phần của hệ khi chuyển từ trạng thái đang xét sang trạng thái lân cận sẽ là

$$\delta U^* = \delta U - \delta T$$

Trong đó: δU - biến thiên của thế năng biến dạng

δT - độ biến thiên của công các ngoại lực Như vậy, theo nguyên lý Lagrange - Dirichlet:

Nếu $\delta U > \delta T$ thì hệ ở trạng thái cân bằng ổn định Nếu $\delta U < \delta T$ thì hệ ở trạng thái cân bằng không ổn định Nếu $\delta U = \delta T$ thì hệ ở trạng thái cân bằng phiếm định

1.3.3. Phương pháp động lực học

Đây là phương pháp chung nhất, dựa trên việc nghiên cứu chuyển động của hệ sau khi có kích động ban đầu. Nếu chuyển động là dao động có biên độ tăng không ngừng theo thời gian thì dạng cân bằng ban đầu là không ổn định. Ngược lại, nếu hệ luôn dao động bé quanh trạng thái cân bằng ban đầu hoặc tắt dần thì đó là dạng cân bằng ổn định.

1.4. Bài toán ổn định uốn dọc của dầm và phương pháp giải

Phương trình cân bằng của dầm thẳng có tiết diện không đổi chịu tác dụng của lực P đặt ở đầu dầm có thể được viết như sau:

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} + P \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (1.1)$$

Phương trình trên là phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất (không có vế phải). Phương trình dao động tự do của dầm được trình bày ở chương 3 cũng thuộc loại phương trình này. Vì vậy, để tổng quát ở đây trình bày phương pháp chung tìm

ng nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính bậc n thuần nhất có các hệ số là hằng số [29]:

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n y = 0 \quad (a_0 \neq 0) \quad (1.2)$$

Để giải phương trình vi phân trên thì giải phương trình đặc tính của nó là:

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (1.3)$$

a) Trường hợp phương trình đặc tính có n nghiệm phân biệt thì nghiệm của phương trình vi phân (a) viết dưới dạng sau:

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x} \quad (1.4)$$

Các hệ số c_i được xác định từ điều kiện biên của bài toán

b) Nếu như một nghiệm r_k nào đó có nghiệm lặp lại m_k lần thì thành phần tương ứng trong nghiệm trên được thay bằng

$$(c_k + c_{k1} x + c_{k2} x^2 + \dots + c_{k(m_k-1)} x^{m_k-1}) e^{r_k x} \quad (1.5)$$

Trong trường hợp có hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\varphi_{j1} \left(\frac{d}{dx} \right) y_1 + \varphi_{j2} \left(\frac{d}{dx} \right) y_2 + \dots + \varphi_{jn} \left(\frac{d}{dx} \right) y_n = 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (1.6)$$

Ở đây $\varphi_{jk} \left(\frac{d}{dx} \right)$ là đa thức của $\left(\frac{d}{dx} \right)$. Mỗi hàm $y_k = y_k(x)$ ($k=1 \dots n$) đều có dạng (1.46) và (1.47), còn các số mũ r_1 sẽ là nghiệm của hệ các phương trình đặc tính

$$D(r) \equiv \det[\varphi_{jk}(r)] = 0 \quad (1.7)$$

Đây là hệ phương trình đặc trưng của hệ phương trình vi phân. Từ phương trình (1.7) tìm được r_{jk} , đưa các nghiệm y dạng (1.4) và (1.5) vào hệ phương trình (1.6) sẽ xác định được các tương quan của các hệ số, các hệ số

tự do được xác định từ các điều kiện biên. Đó là phương pháp chung để giải phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất có hệ số là hằng số.

Trở lại phương trình uốn dọc của dầm. Phương trình (1.1) hoàn toàn giải được bằng cách giải phương trình đặc tính (1.3), tìm nghiệm theo (1.4) và (1.5), các hệ số của (1.4) và (1.5) xác định từ các điều kiện biên của dầm. Tuy nhiên, một cách giải ngắn gọn hơn khi viết hàm độ võng y của dầm dưới dạng sau

$$y = a \sin(kx) + b \cos(kx) + cx + d \quad (1.8)$$

$$k = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$$

Thật vậy, đưa hàm (1.8) vào phương trình (1.1) ta thấy phương trình (1.1) được thỏa mãn. Vấn đề còn lại là xác định các hệ số a, b, c, d . Bốn hệ số a, b, c, d của hàm y được xác định tùy theo 4 điều kiện biên y, y', y'', y''' tại hai đầu cuối dầm. Dưới đây trình bày các lời giải dầm có các điều kiện biên khác nhau.

Ví dụ: Xác định lực tới hạn của dầm hai đầu khớp

Các điều kiện biên tại liên kết khớp là chuyển vị và momen uốn bằng không. Ta có :

$$y(x=0) = 0; \frac{d^2 y}{dx^2}(x=0) = 0; y(x=l) = 0; \frac{d^2 y}{dx^2}(x=l) = 0$$

Đưa 4 điều kiện trên vào (1.8), nhận được 4 phương trình sau

$$b + d = 0; b = 0; a \sin(kl) + cl = 0; ak^2 \sin(kl) = 0$$

Ta có $b = c = d = 0, a \sin(kl) = 0$

Nếu $a = 0$ thì $y = 0$, đó là nghiệm tầm thường của (1.1). Để có được nghiệm không tầm thường ($y \neq 0$), ta cho

$$\sin(kl) = 0 \text{ hay } kl = n\pi, \dots (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Thay k vào phương trình (1.8) ta có

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{l^2} \quad (1.9)$$

Với các giá trị P xác định trên, dầm có trạng thái cân bằng mới, trạng thái

uốn dọc với
$$y = a \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \quad (1.10)$$

khác với trạng thái ban đầu là trạng thái nén, dầm thẳng. Ta nói dầm mất ổn định và lực P là lực tới hạn Euler. Chú ý rằng với P tới hạn xác định theo (1.9), độ võng (1.10) của dầm vẫn hữu hạn. Tuy nhiên, theo lý thuyết dầm-cột trình bày ở trên, độ võng của dầm với lực P xác định theo (1.9) sẽ tăng lên vô cùng, nên (1.10) là biểu thức xác định lực tới hạn của dầm. Kixelov cho rằng lực P tới hạn (1.10) vẫn nằm trong miền ổn định.

Để thỏa mãn 4 điều kiện biên y, y', y'', y''' của phương trình (1.1) ta có thể dùng 4 thông số chuyển vị, góc xoay, momen uốn và lực cắt chưa biết tại hai đầu dầm làm ẩn thay cho các hệ số a, b, c, d của phương trình (1.8). Ta có phương pháp thông số ban đầu được giáo sư Kixelov sử dụng trong giáo trình động lực học và ổn định công trình của mình.

1.5. Nhận xét chương 1:

Ở trên đã trình bày các phương pháp chung để xây dựng bài toán ổn định công trình. Các phương pháp đó là: Phương tĩnh, phương pháp năng lượng và phương động lực học. Các phương pháp nói trên hoàn toàn tương đương nhau. Đã giới thiệu các định nghĩa, các khái niệm và các định lý về ổn định nhằm mục đích hiểu rõ bản chất của bài toán ổn định công trình. Đã trình bày phương pháp chung để giải các phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất và áp dụng để nghiên cứu ổn định của dầm thẳng chịu lực nén P tác dụng ở đầu dầm. Có thể nói đây là phương pháp toán duy nhất và do đó phổ biến nhất trong nghiên cứu ổn định công trình hiện nay.

CHƯƠNG 2

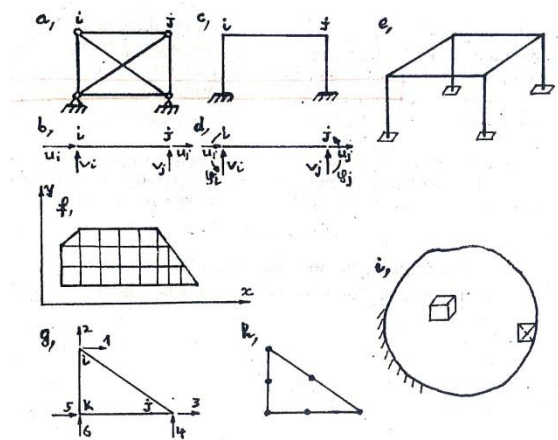
PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

2.1. Phương pháp phần tử hữu hạn

Trong chương này, sẽ chỉ đề cập tới nội dung cơ bản nhất của phương pháp, và chủ yếu xét tới ứng dụng vào tính toán hệ dầm với vật liệu còn làm việc trong giai đoạn đàn hồi. Tuy nhiên, trong phân lý thuyết cơ bản, vẫn lấy ví dụ minh hoạ với bài toán phẳng để thấy rõ hơn bản chất của phương pháp.

2.1.1. Rời rạc hoá sơ đồ tính

Trong phương pháp phần tử hữu hạn, áp dụng biện pháp rời rạc hoá, một kết cấu liên tục được coi là một tập hợp các phần tử nối với nhau tại các điểm nút. Trên hình 2.1 cho thấy hệ dầm gồm các phần tử là các dầm thẳng được nối với nhau bởi các nút khớp hoặc nút cứng tại đầu dầm (hình 2.1a, c, e); hình 2.1f, i cho hình ảnh các phần tử của bản phẳng, của vật thể khối.



Hình 2.1

Nút phần tử được đặc trưng bởi số bậc tự do của nó. Đó là các chuyển vị thẳng của nút (u_i, v_i) hay đạo hàm của nó (góc xoay φ_i), chúng được gọi là thông số chuyển vị nút. Toàn bộ m chuyển vị nút của một phần tử được đánh số và sắp xếp theo thứ tự thành vector chuyển vị nút của một phần tử:

$$\{\delta\}_e = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_m \end{Bmatrix} \quad (a)$$

Vector chuyển vị nút của phần tử dầm i-j hai đầu nút khớp và hai đầu nút cứng trên hình 2.1b, d lần lượt có cấp (4x1) và (6x1)

$$\{\delta\}_e = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}; \{\delta\}_e = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_2 \\ \varphi_i \\ u_j \\ v_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix}$$

Hình 2.1g cho thấy một phần tử tam giác của bản phẳng và các chuyển vị nút của nó.

Toàn bộ n chuyển vị nút có một hệ được đánh số và sắp xếp theo thứ tự thành một vector chuyển vị nút của toàn kết cấu:

$$\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{Bmatrix} \quad (b)$$

Nút của một phần tử không nhất thiết phải ở tại các đỉnh của phần tử, mà còn có thể nằm trên các biên của phần tử; hình 2.1h cho thấy một phần tử tam giác của bản phẳng gồm 6 nút và vector chuyển vị nút có cấp (12 x 1)

Khi tính toán, tải trọng tác dụng trên hệ được thay thế bằng một hệ lực tập trung (P, M) đặt tại các điểm nút có các thành phần tương ứng với chuyển vị nút. Với một phần tử, vector tải trọng nút $\{f\}_e$ (lực nút do tải trọng) tương ứng với vector chuyển vị nút $\{\delta\}_e$ của phần tử; còn với toàn kết cấu, tương ứng với vector chuyển vị nút $\{\Delta\}$ có vector tải trọng nút $\{F\}$.

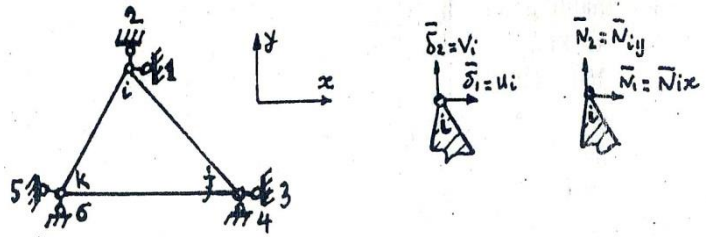
Khi rời rạc hoá kết cấu, số lượng phần tử được phân chia càng lớn, kích thước phần tử càng nhỏ thì mức độ chính xác càng cao, song số lượng phần tử của một hệ cũng như kích thước của phần tử nhất thiết phải là hữu hạn.

Tại mỗi nút, tất cả các phần tử nối vào nó đều cùng chung một chuyển vị nên điều kiện liên tục đã được đảm bảo tại các nút. Các điều kiện biên cũng được đảm bảo tại các nút.

Khi tách xét riêng một phần tử, có thể xem sự liên kết giữa phần tử đang xét với các phần tử lân cận bằng các dầm liên kết tại các điểm nút. Nội lực trong liên kết nút (lực nút) và chuyển vị nút δ là tương ứng với nhau (hình 2.2) và lập thành véc tơ lực nút $\{N\}$

2.1.2. Ma trận độ cứng của một phần tử

Trong giai đoạn vật liệu biến dạng đàn hồi, giữa lực nút N và chuyển vị nút δ của một phần tử có quan hệ phụ thuộc tuyến tính.



Hình 2.2

Chẳng hạn với phần tử tam giác của bài toán phẳng (hình 9-2) lực nút thứ nhất $\bar{N}_1 = \bar{N}_{ix}$ (lực tại liên kết ngang của nút i và theo hướng của $\bar{\delta}_1 = u_i$) được tính bằng tổng các lực nút do chuyển vị các nút của phần tử gây nên:

$$\bar{N}_1 = \bar{N}_{ix} = \bar{k}_{11}\bar{u}_i + \bar{k}_{12}\bar{v}_i + \bar{k}_{13}\bar{u}_j + \bar{k}_{14}\bar{v}_j + \bar{k}_{15}\bar{u}_k + \bar{k}_{16}\bar{v}_k \quad (c)$$

trong đó \bar{k}_{ij} - phản lực đơn vị tại liên kết thứ i (lực nút thứ i) do chỉ riêng chuyển vị nút thứ j bằng 1 tại đơn vị $\delta_j = 1$ gây nên, và được gọi là hệ số độ cứng.

Các gạch ngang trên các ký hiệu chỉ rõ các đại lượng đó được xét trong hệ toạ độ riêng của phần tử e.

Nếu viết phương trình dạng (b) cho lần lượt theo thứ tự đủ cả 6 lực nút của phần tử tam giác trên hình 2.2, ta được hệ 6 phương trình đại số tuyến tính, viết dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{Bmatrix} \bar{N}_1 \\ \bar{N}_2 \\ \vdots \\ \bar{N}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{11} & \bar{k}_{12} & \dots & \bar{k}_{16} \\ \bar{k}_{21} & \bar{k}_{22} & \dots & \bar{k}_{26} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{k}_{61} & \bar{k}_{62} & \dots & \bar{k}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_1 \\ \bar{\delta}_2 \\ \vdots \\ \bar{\delta}_6 \end{Bmatrix} \quad (d)$$

hay

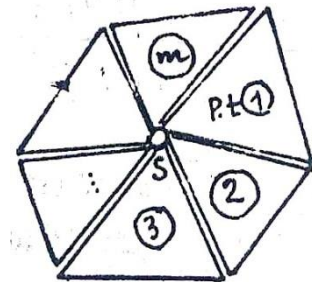
$$\{\bar{N}\}_e = [\bar{k}]_e \cdot \{\bar{\delta}\}_e \quad (9-1)$$

Trong đó $\{\bar{N}\}_e$, $\{\bar{\delta}\}_e$, $[\bar{k}]_e$ lần lượt là các vector lực nút phần tử, vector chuyển vị nút phần tử và ma trận độ cứng của phần tử e đang xét trong hệ tọa độ riêng của phần tử đó.

Khi tính toán kết cấu, cần phải lập ma trận độ cứng phần tử $[\bar{k}]_e$ cho tất cả các phần tử của hệ.

2.1.3. Phương trình cơ bản của phương pháp phần tử hữu hạn

Khi phân chia kết cấu thành các phần tử nối với nhau tại các điểm nút, tại mỗi nút có thể có nhiều phần tử được nối vào. Giả sử tại nút s trong bài toán phẳng có m phần tử được nối như trên hình 2.3.



Hình 2.3

Tại đó, m phần tử có chung một chuyển vị, nên điều kiện liên tục cũng như điều kiện cân bằng tại nút s đều được thỏa mãn.

Theo phương trình (c) chuyển vị của tất cả các nút của m phần tử được nối tại nút tại nút s, đều gây nên lực nút tại nút s, do đó vector lực tại nút s là

$\begin{Bmatrix} N_{sx} \\ N_{sy} \end{Bmatrix}$ bằng tổng các lực nút do chuyển vị nút của m phần tử xung quanh gây

ên (tính theo (c)). Nếu hệ ở trạng thái cân bằng, thì vector lực nút tính trên phải cân bằng với vector ngoại lực tại nút s, và viết được phương trình biểu diễn điều kiện cân bằng của nút s như sau:

$$\sum_{r=1}^m \{N_s\}_r = \{F_s\} \quad (e)$$

Trong đó:

$\{N_s\}_r$ - vector lực nút tại nút s, do các chuyển vị nút của phần tử r nối tại nút s gây nên, và lập ở hệ tọa chung của kết cấu (không có gạch ngang khác với $\{\bar{N}\}$ đã lập trong hệ tọa độ riêng của phần tử). $\{N_s\}$ ở đây được lập nên

bằng cách tập hợp các vector $\{\bar{N}\}_e = [\bar{k}]_e \{\bar{\delta}\}_e$ theo (2.1) sau khi đã chuyển về hệ toạ độ chung nhờ phép biến đổi toạ độ (sẽ được trình bày trong 2.7).

$\{F_s\}$ - vector ngoại lực nút s, bằng các thành phần ngoại lực đặt chính tại nút s cộng với các thành phần do các ngoại lực đặt trong các phần tử quanh nút s tính quy về tại nút đó.

Nếu viết phương trình dạng (e) cho lần lượt theo thứ tự toàn bộ các nút của kết cấu, ta được hệ phương trình đại số có dạng:

$$[K]\{\Delta\} = \{F\} \quad (2.2)$$

Trong đó: $[K]$ - ma trận độ cứng của toàn kết cấu thành lập từ các ma trận độ cứng của từng phần tử $[\bar{k}]_e$ trong (2.1)

$\{\Delta\}$ - vector chuyển vị nút của toàn kết cấu.

$\{F\}$ - vector ngoại lực nút.

Hệ phương trình (2.2) thực chất là hệ phương trình cân bằng lực tại toàn bộ các nút của hệ. Sau khi xét điều kiện biên (nút không có chuyển vị hoặc có chuyển vị đã biết trước) thì hệ này hoàn toàn có thể giải được. Bản chất của nó giống hệ phương trình chính tắc trong phương pháp chuyển vị và là phương trình cơ bản của phương pháp phần tử hữu hạn.

Giải hệ phương trình (2.2), tìm được các vector chuyển vị nút của toàn kết cấu $\{\Delta\}$ ở hệ toạ độ chung, từ đó sẽ tìm được chuyển vị nút $\{\bar{\delta}\}_e$ của mỗi phần tử trong hệ toạ độ riêng của phần tử, sau đó xác định được nội lực, ứng suất, biến dạng của điểm bất kỳ trong phần tử (cũng như của kết cấu) nhờ các quan hệ đã có trong Cơ kết cấu và Lý thuyết đàn hồi.

Như vậy, vấn đề cơ bản của phương pháp phần tử hữu hạn là phải thiết lập được hệ phương trình (2.2) tức xác định được $[K]$ và $\{F\}$, mà trước hết là xác định được ma trận cứng phần tử $[\bar{k}]_e$ trong (2.1).

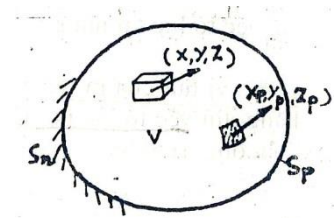
2.2. Các quan hệ cơ bản trong một phần tử hữu hạn

Ma trận độ cứng phần tử $[\bar{k}]_e$

Để lập ma trận cứng phần tử $[k]$ có thể xuất phát từ nhiều cách khác nhau; dưới đây ta chỉ xét một trong các cách đó - cách áp dụng nguyên lý công khả dĩ của Lagrange đã được đề cập tới trong Cơ học lý thuyết và Lý thuyết đàn hồi.

2.2.1. Nguyên lý công khả dĩ của Lagrange áp dụng cho hệ đàn hồi

Giả sử có một vật thể đàn hồi có thể tích V , diện tích bề mặt chịu tải là S_p , diện tích bề mặt có điều kiện biên chuyển vị là S_n (hình 2.4).



Hình 2.4

Ngoại lực tác dụng vào vật gồm:

- Lực thể tích trong một đơn vị thể tích: X, Y, Z
- Lực bề mặt trên một đơn vị diện tích: X_p, Y_p, Z_p

Gọi chuyển vị khả dĩ của phân tử ứng với ngoại lực trên là u, v, w ta được công khả dĩ của các ngoại lực:

$$W = \iiint_V (Xu + Yv + Zw)dv + \iint_{S_p} (X_p u + Y_p v + Z_p w)ds \quad (a)$$

và thế năng ngoại lực

$$A = -W \quad (b)$$

Mặt khác, trong vật thể đàn hồi xuất hiện nội lực và biến dạng, tạo nên thế năng biến dạng của vật thể:

$$U = \iiint_V \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV \quad (c)$$

Khi đó thế năng toàn phần của vật thể là:

$$\Phi = U + A = U - W \quad (d)$$

Theo nguyên lý Lagrange khi có chuyển vị khả dĩ cho phép, nếu vật thể ở trạng thái cân bằng và thoả mãn điều kiện biên, thì thế năng toàn phần của hệ đạt giá trị cực tiểu:

$$\delta\Phi = \delta(U - W) = 0 \quad (2.3)$$

Phương trình này là cơ sở để rút ra các phương trình cân bằng và các điều kiện biên, do đó là cơ sở của phương pháp chuyển vị trước đây, cũng như phương pháp phần tử hữu hạn sau này.

2.2.2. Hàm chuyển vị và hàm dạng

Muốn áp dụng nguyên lý Lagrange theo công thức (2.3) để lập ma trận độ cứng phần tử $[k]_e$, phải có được các biểu thức công khả dĩ ngoại lực W_e , thế năng biến dạng U_e , thế năng toàn phần Φ , trong đó các đại lượng chuyển vị $\{u\}$, biến dạng $\{\varepsilon\}$, ứng suất $\{\sigma\}$ đều chưa biết. Ở đây ta chọn chuyển vị nút của phần tử $\{\bar{\delta}\}_e$ làm ẩn, và biểu diễn các đại lượng trên qua $\{\bar{\delta}\}_e$. Cần lưu ý các ký hiệu trên đều có ý nghĩa tổng quát, và các vectơ có các phần tử sắp xếp theo thứ tự tương ứng như sau:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}; \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}; \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix} \quad (e)$$

Để chọn chuyển vị nút phần tử $\{\bar{\delta}\}_e$ làm ẩn cơ bản, trước hết cần xây dựng biểu thức tính chuyển vị. Với vật liệu làm việc trong giai đoạn đàn hồi, có thể giả thiết chuyển vị tại một điểm bất kỳ M trong phần tử dưới dạng một đa thức, chẳng hạn với bài toán phẳng (hình 2.5).

$$u(x, y) = \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \dots + \alpha_m \varphi_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_i \quad (2.4)$$

Trong đó: φ_i - hàm chứa tọa độ x, y của điểm bất kỳ M đang xét

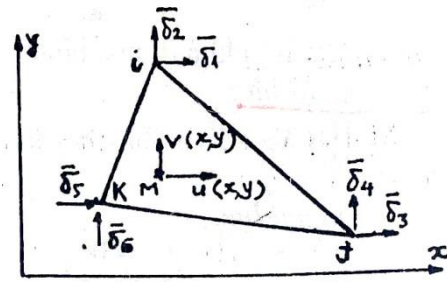
α_i - hệ số của đa thức.

$u(x, y)$ gọi là hàm chuyển vị, đóng vai trò hết sức quan trọng trong việc đồng thời đảm bảo mức độ chính xác của lời giải bài toán cũng như vừa đủ đơn giản trong thuật toán giải.

Chuẩn vị tại một điểm gồm nhiều thành phần (chẳng hạn, với bài toán phẳng là hai), do đó (2.4) viết dưới dạng ma trận, được:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = [M] \{\alpha\} \quad (f)$$

Trong đó $[M]$ là ma trận chứa các tọa độ x, y của điểm bất kỳ đang xét.



Hình 2.5

Áp dụng (f) cho các điểm nút i, j, k (ở hệ tọa độ phần tử), ta được về trái là vectơ chuyển vị nút phần tử $\{\bar{\delta}\}_e$:

$$\{\bar{\delta}\}_e = [A] \{\alpha\} \quad (g)$$

trong đó $[A]$ là ma trận chứa các ma trận $[M]$ đã thay x, y lần lượt bằng tọa độ cụ thể của các điểm nút i, j, k

Với phần tử tam giác, $\{\bar{\delta}\}_e$ có cấp (6×1) , do đó $[A]$ có cấp (6×6) và $\{\alpha\}$ phải có cấp (6×1) như vậy ta thấy được khi giả thiết hàm chuyển vị (2.4) phải có số hệ số hằng α phải bằng số chuyển vị nút của phần tử.

$$\text{Từ (g) rút ra } \{\bar{\delta}\} = [A]^{-1} \cdot \{\bar{\delta}\}_e \quad (h)$$

Thay (h) và (f) được chuyển vị $\{u\}$ tại một điểm bất kỳ M trong phần biểu diễn qua chuyển vị nút $\{\bar{\delta}\}_e$ của phần tử đang xét:

$$\{u\} = [M] [A]^{-1} \cdot \{\bar{\delta}\}_e = [N] \{\bar{\delta}\}_e \quad (2.5)$$

Trong đó $[N] = [M] [A]^{-1}$ gọi là hàm dạng, chứa các tọa độ $x_i, y_i \dots$ của các điểm nút của phần tử và các biến x, y là tọa độ của điểm bất kỳ M đang xét.

2.2.3. Biến dạng và ứng suất tại một điểm trong phần tử

Cần thiết lập biểu thức tính biến dạng và ứng suất tại điểm M bất kỳ trong phần tử thông qua ẩn cơ bản là chuyển vị nút phần tử $\{\bar{\delta}\}_e$. Sử dụng các công thức trong Lý thuyết đàn hồi, chẳng hạn với bài toán phẳng, có:

Biến dạng:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} + & \frac{\partial}{\partial x} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [\partial]\{u\} \quad (i)$$

Trong đó $\{\partial\}$ là ma trận chứa các toán tử đạo hàm.

Thay thế $\{u\}$ tính theo (2.5) vào (i), được cách biểu diễn $\{\varepsilon\}$ qua chuyển vị nút $\{\bar{\delta}\}_e$:

$$\{\varepsilon\} = [\partial][N]\{\bar{\delta}\}_e = [B]\{\bar{\delta}\}_e \quad (2.6)$$

Trong đó ma trận $[B] = [\partial][N]$ chứa các đạo hàm của hàm dạng.

Ứng suất:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) \\ \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) \\ \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (k)$$

Trong đó $[D]$ - ma trận chứa các hằng số đàn hồi của vật liệu.

Thay thế $\{\varepsilon\}$ tính theo (2.6) vào (k) được cách biểu diễn $\{\sigma\}$ thông qua chuyển vị nút $\{\bar{\delta}\}_e$:

$$\{\sigma\} = [D][B]\{\bar{\delta}\}_e \quad (2.7)$$

2.2.4. Thế năng toàn phần Φ_e của một phần tử. Ma trận cứng phần tử $[k]_e$

Để thiết lập biểu thức tính Φ_e của một phần tử. Ta lập các biểu thức tính công khả dĩ ngoại lực W_e và thế năng biến dạng U_e của phần tử đó.

Xét trường hợp phần tử vừa chịu tải trọng tập trung đặt tại nút là $\{\bar{P}\}_e$ (tương ứng với chuyển vị nút $\{\bar{\delta}\}_e$, vừa chịu tải trọng phân bố trên bề mặt phần tử có cường độ tại điểm M bất kỳ là $\{q\} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix}$ (với bài toán phẳng)

Công khả dĩ ngoại lực W_e (không xét lực thể tích) tính được:

$$W_e = \{\bar{\delta}\}_e^T \cdot \{\bar{P}\}_e + \int_{\Omega_e} \{u\}^T \cdot \{q\} d\Omega \quad (l)$$

Thay thế $\{u\}$ tính theo (2.5) vào (1), được:

$$W_e = \{\bar{\delta}\}_e^T \cdot \{\bar{P}\}_e + \{\bar{\delta}\}_e^T \int_{\Omega_e} [N]^T \cdot \{q\} d\Omega \quad (m)$$

Thế năng biến dạng U_e của phần tử tính theo (d) được:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dv$$

Thay thế $\{\varepsilon\}$ theo (9-6) và $\{\sigma\}$ theo (2.7) được:

$$U_e = \frac{1}{2} \{\bar{\delta}\}_e^T \left(\int_{V_e} [B]^T \cdot [D] \cdot [B] dv \right) \cdot \{\bar{\delta}\}_e \quad (n)$$

Thế năng toàn phần của phần tử Φ_e tính được:

$$\Phi_e = U_e - W_e = \frac{1}{2} \{\bar{\delta}\}_e^T \left(\int_{V_e} [B]^T \cdot [D] \cdot [B] dv \right) \cdot \{\bar{\delta}\}_e - \{\bar{\delta}\}_e^T \cdot \{\bar{P}\}_e - \{\bar{\delta}\}_e^T \int_{\Omega_e} [N]^T \cdot \{q\} d\Omega \quad (o)$$

Theo nguyên lý cực tiểu của thế năng toàn phần ($\delta\Phi = 0$) tiến hành lấy đạo hàm riêng lần lượt với từng chuyển vị nút và cho bằng không, ta được hệ m phương trình (cho phần tử m có chuyển vị nút):

$$\frac{\partial \Phi_e}{\partial \{\bar{\delta}\}_e} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \bar{\delta}_1} \\ \frac{\partial \Phi_e}{\partial \bar{\delta}_e} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Phi_e}{\partial \bar{\delta}_m} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (p)$$

Thay thế biểu thức Φ_e theo (o) vào (p) và áp dụng phép đạo hàm riêng đối với ma trận $\left(\frac{\partial X^T A X}{\partial X} = 2AX; \frac{\partial X^T B}{\partial X} = B \right)$, được:

$$\left(\int_{V_e} [B]^T [D][B] dv \right) \{\bar{\delta}\}_e = \{P\}_e + \int_{\Omega_e} [N]^T \{q\} d\Omega \quad (q)$$

là một hệ phương trình đại số tuyến tính, dạng:

$$[\bar{k}]_e \{\bar{\delta}\}_e = \{\bar{f}\}_e \quad (2.8)$$

Trong đó: $[\bar{k}]_e$ là ma trận độ cứng của phần tử e

$$[\bar{k}]_e = \int_{V_e} [B]^T [D][B] dv \quad (2.9)$$

$$\{\bar{f}\}_e = \{\bar{P}\}_e + \int_{\Omega_e} [N]^T \{q\} d\Omega \quad (2.10)$$

là vector lực nút phần tử do ngoại lực tác dụng lên phần tử (gồm ngoại lực đặt đúng nút $\{\bar{P}\}_e$ và ngoại lực đặt trong phần tử quy về nút $\{\bar{P}_q\}_e$)

$$\{\bar{P}_q\}_e = \int_{\Omega_e} [N]^T \{q\} d\Omega \quad (2.11)$$

So sánh hệ phương trình (2.8) vừa lập với hệ phương trình (2.1) trước đây, chốt hấy (2.8) chính là phương trình cân bằng giữa nội lực và ngoại lực tại các nút của một phần tử.

Tất cả các biểu thức, phương trình đã rút ra ở trên, là một phần tử hữu hạn e trong hệ tọa độ riêng của nó. Tương tự, lập cho toàn bộ các phần tử và chuyển đổi về hệ tọa độ chung rồi gộp lại cho toàn hệ, ta được hệ phương trình cơ bản dạng (2.2) trước đây.

$$[K]\{\Delta\} = \{F\}$$

Muốn có ma trận cứng toàn hệ $[K]$ trước hết phải xác định được ma trận cứng $[\bar{k}]_e$ của từng phần tử, muốn có vector lực nút toàn hệ do ngoại lực $\{F\}$ trước hết phải xác định được các lực nút từng phần tử $\{\bar{P}\}_e$ và $\{\bar{P}_q\}_e$.

Như vậy, trong 2.2 này đã cho ta các công thức cơ bản để tính:

- ma trận độ cứng phần tử $[\bar{k}]_e = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV$ theo (2.9)

- vectơ lực nút phần tử do ngoại lực đặt trong phần tử gây nên $\{P_q\}_e = \int_{\Omega_e} [N]^T \{q\} d\Omega$ theo (2.11)

Trong đó $[B] = [\partial][N]$ theo (2.6) và hàm dạng $[N] = [M][A]^{-1}$ theo (2.5)

Tùy theo loại bài toán cụ thể (hệ dầm, tấm, bản, hệ khối) mà xác định được:

- ma trận các toán tử đạo hàm $[\partial]$ trong (i) ($\{\varepsilon\} = [D]\{u\}$)

- ma trận các hằng đàn hồi $[D]$ trong (k) ($\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$)

Cuối cùng, còn lại các ma trận $[M]$, $[A]$ đều phải xuất phát từ hàm chuyển vị đã giả thiết:

$\{u\} = [M]\{\alpha\}$ theo (f) và $\{\bar{\delta}\}_e = [A]\{\alpha\}$ theo (g)

Hàm chuyển vị $\{u\}$ được giả thiết dựa trên hai cơ sở:

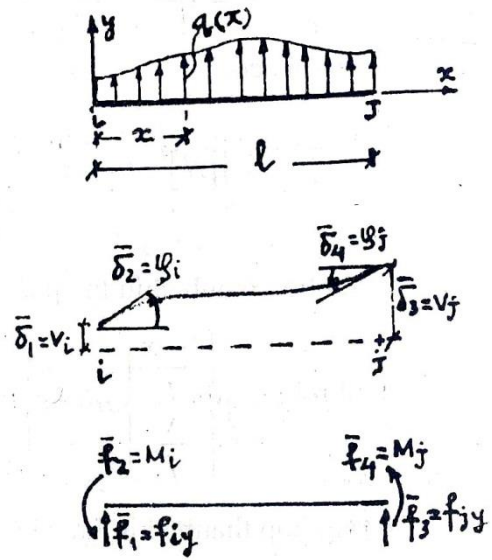
- dựa vào biểu thức thế năng toàn phần Φ đã lập được đối với mỗi loại bài toán, sao cho hàm chuyển vị $\{u\}$ được giả thiết có bậc thấp nhất đủ để tiến hành lấy được đạo hàm các biểu thức trong Φ .

- dựa vào số chuyển vị nút của loại phần tử để giả thiết sao cho số hạng của hàm chuyển vị (tức số phần tử trong $\{\alpha\}$) bằng số chuyển vị nút của phần tử

Như vậy, khi nghiên cứu bài toán cụ thể, trước hết phải thiết lập được biểu thức thế năng toàn phần Φ , để có căn cứ giả thiết $\{u\}$, xác định $[\partial]$ và $[D]$. Sau đây ta sẽ xét cách áp dụng các công thức trên để lập ma trận độ cứng phần tử $[\bar{k}]_e$ và vectơ lực nút phần tử $\{P_q\}_e$ cho một số loại bài toán.

2.3. Ma trận độ cứng và véc tơ lực nút của phần tử dầm chịu uốn phẳng

Xét phần tử là một dầm thẳng $i-j$ chịu tải trọng phân bố dọc theo trục dầm và có hướng vuông góc với trục dầm (hình 2.8). Chọn trục x trùng với trục dầm, gốc tại i . Chuyển vị tại một tiết diện mặt cắt bất kỳ trong dầm bao gồm chuyển vị thẳng y vuông góc với trục dầm và có góc xoay của tiết diện φ đều là hàm của một biến x .



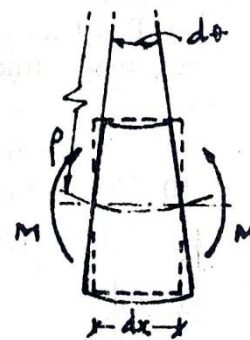
Hình 2.8

Vì góc xoay φ của tiết diện có thể tính được từ chuyển vị thẳng y , $\left(\varphi = \frac{dy}{dx}\right)$ nên y được nhận làm thông số chuyển vị cơ bản. Véc tơ chuyển vị nút $\{\bar{\delta}\}_e$ và lực nút tương ứng $\{\bar{f}\}_e$ của phần tử là:

$$\{\bar{\delta}\}_e = \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_1 \\ \bar{\delta}_2 \\ \bar{\delta}_3 \\ \bar{\delta}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_i \\ \varphi_i \\ v_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix}; \quad \{\bar{f}\}_e = \begin{Bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \\ \bar{f}_3 \\ \bar{f}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{iy} \\ M_i \\ P_{jy} \\ M_j \end{Bmatrix} \quad (a)$$

2.3.1. Biểu thức thế năng toàn phần Φ_e và các ma trận $[\partial]$, $[D]$

Trên cơ sở giả thiết tiết diện phẳng đã sử dụng trong sức bền vật liệu, với việc nhận chuyển vị y theo phương vuông góc với trục dầm là chuyển vị cơ bản, thì đặc trưng cho ứng suất σ là mô men uốn tại các mặt của phần tử dx :



Hình 2.9

$\sigma \rightarrow M = -EJ \frac{d^2 y}{dx^2}$ và đặc trưng cho biến dạng ε là góc xoay $d\theta$ giữa

hai mặt của phân tử đó (hình 9-9)

$$\varepsilon \rightarrow d\theta = \frac{dx}{\rho} = \frac{Mdx}{EJ} = -\frac{d^2 y}{dx^2} dx$$

Như vậy, thế năng biến dạng:

$$U_e = \int_v \frac{1}{2} \sigma \varepsilon dv = \int_0^l \frac{1}{2} \left(-EJ \frac{d^2 y}{dx^2} \right) \left(-\frac{d^2 y}{dx^2} \right) dx$$

Mặt khác, công ngoại lực: $W = \int_0^l q(x)y(x)dx$ và biểu thức thế năng toàn

phần Φ_e có được:

$$\Phi_e = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \cdot \frac{d^2 y(x)}{dx^2} dx - \int_0^l q(x)y(x)dx \quad (b)$$

Từ đó, các ma trận $[\partial] = -\frac{d^2}{dx^2}$; $[D] = EJ$

2.3.2. Giả thiết hàm chuyển vị $\{u\}$, $[M]$; lập các ma trận $[A]$, $[N]$, $[B]$

Do trong biểu thức thế năng toàn phần Φ_e , chứa đạo hàm bậc 2 của $y(x)$ và phần tử dầm i - j có 4 chuyển vị nút, nên ta phải giả thiết $u(x)$ là đa thức bậc 3 với 4 số hạng như sau (trong trường hợp này là $y(x)$):

$$y(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = [M] \{\alpha\} \quad (c)$$

Nếu chọn $y(x)$ là đa thức bậc 2 thì chỉ được 3 số hạng, chưa bằng số chuyển vị nút của phần tử

Thay tọa độ của các điểm nút i, j vào (c) được:

$$\{\delta\}_e = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_i = (y)_{x=0} \\ \varphi_i = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} \\ v_j = (y)_{x=1} \\ \varphi_j = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^3 \end{bmatrix} x \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = [A]\{\alpha\} \quad (d)$$

Xác định ma trận hàm dạng theo (9-5):

$$[N] = [M][A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l^2} & -\frac{2}{l} & \frac{3}{l^2} & -\frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} & -\frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\frac{1}{l^3}(2x^3 - 3lx^2 + l^3) \frac{1}{l^2}(x^3 - 2lx^2 + l^2x) \frac{1}{l^3}(3lx^2 - 2x^3) \frac{1}{l^2}(x^3 - lx^2) \right] \quad (e)$$

Theo (2.6) xác định được ma trận $[B]$:

$$[B] = [\partial][N] = -\frac{d^2}{dx^2} \begin{Bmatrix} \frac{1}{l^3}(2x^3 - 3lx^2 + l^3) \\ \frac{1}{l^2}(x^3 - 2lx^2 + l^2x) \\ \frac{1}{l^3}(3lx^2 - 2x^3) \\ \frac{1}{l^2}(x^3 - lx^2) \end{Bmatrix}$$

$$= \left[\left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} \right) \left(\frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2} \right) \left(-\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3} \right) \left(\frac{2}{l} - \frac{6x}{l^2} \right) \right] \quad (f)$$

2.3.3. Lập ma trận độ cứng phần tử $[\bar{k}]_e$

Theo (2.9) tính $[\bar{k}]_e = \int_0^1 [B]^T [D][B] dx$ với $[B]$ theo (f) và $[D] = FJ$

$$[\bar{k}]_e = \int_0^l FJ \begin{bmatrix} \frac{36}{l^4} - \frac{144x}{l^5} + \frac{144x^2}{l^6} & & & & & & \\ \frac{24}{l^3} - \frac{84x}{l^4} + \frac{72x^2}{l^5} & \frac{16}{l^2} - \frac{48x}{l^3} + \frac{36x^2}{l^4} & (dx) & & & & \\ -\frac{36}{l^4} + \frac{144x}{l^5} - \frac{144x^2}{l^6} & -\frac{24}{l^3} + \frac{84x}{l^4} - \frac{72x^2}{l^5} & \frac{36}{l^4} - \frac{144x}{l^5} + \frac{144x^2}{l^6} & & & & \\ \frac{12}{l^3} - \frac{60x}{l^4} + \frac{72x^2}{l^5} & \frac{8}{l^2} - \frac{36x}{l^3} + \frac{72x^2}{l^4} & -\frac{12}{l^3} + \frac{60x}{l^4} - \frac{72x^2}{l^5} & \frac{4}{l^2} - \frac{24x}{l^3} + \frac{36x^2}{l^4} & & & \end{bmatrix}$$

Với EJ không đổi, có:

$$[\bar{k}]_e = EJ \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & & & & & \\ \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & (dx) & & & \\ -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & & & \\ \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & & \end{bmatrix}$$

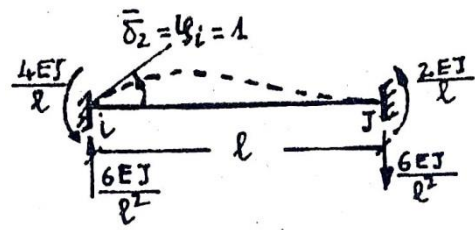
2.3.4. Xác định véc tơ lực nút $\{\bar{P}_q\}_e$ do tải trọng tác dụng trong dầm gây nên

Áp dụng công thức (2.11), ví dụ với $q(x) = q = \text{const}$:

$$\{\bar{P}_q\}_e = \int_0^l [N]^T = \int_0^l \begin{bmatrix} \frac{1}{l^3}(2x^3 - 3lx^2 + l^3) \\ \frac{1}{l^2}(x^3 - 2lx^2 + l^2x) \\ \frac{1}{l^3}(3lx^2 - 2x^3) \\ \frac{1}{l^2}(x^3 - lx^2) \end{bmatrix} q dx = \begin{bmatrix} \frac{ql}{2} \\ \frac{ql^2}{12} \\ \frac{ql}{2} \\ -\frac{ql^2}{12} \end{bmatrix} \quad (h)$$

Với ý nghĩa \bar{k}_{ij} theo công thức (2.1) trước đây, là phản lực tại liên kết thứ i (lực nút thứ i) do chỉ riêng chuyển vị l liên kết nút thứ j bằng 1 đơn vị gây nên; trong trường hợp dầm thẳng có tiết diện không đổi, các đại lượng δ , u , ε , σ đều là hàm của x, nên hàm chuyển vị $u(x)$ đã giả thiết ở trên là chính xác, và phần tử \bar{k}_{ij} có thể dễ dàng tính theo lý thuyết Cơ học kết cấu.

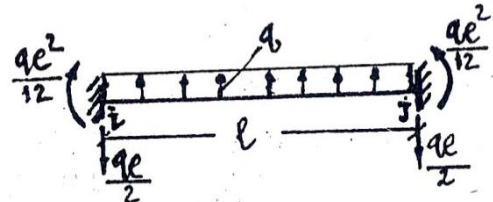
Chẳng hạn, các phần tử trên cột thứ hai của ma trận cứng phần tử $[\bar{k}]$ đã lập trong công thức (2.3) chính là các phản lực liên kết nút đầu dầm do chuyển vị đơn vị của liên kết nút thứ hai gây nên (hình 2.10)



Hình 2.10

$$\bar{k}_{12} = Y_i = \frac{6EJ}{l^2}, \quad \bar{k}_{22} = M_i = \frac{4EJ}{l}$$

$$\bar{k}_{32} = Y_j = -\frac{6EJ}{l^2}, \quad \bar{k}_{42} = M_j = \frac{2EJ}{l}$$



Hình 2.11

Tương tự, vector lực nút $\{\bar{P}_q\}_e$ do tải trọng đặt trong phần tử gây nên, thay cho cách tính theo công thức (h) có thể tính bằng phản lực liên kết nút đầu dầm với dấu ngược lại. Ví dụ với $q = \text{const}$ (hình 2.11)

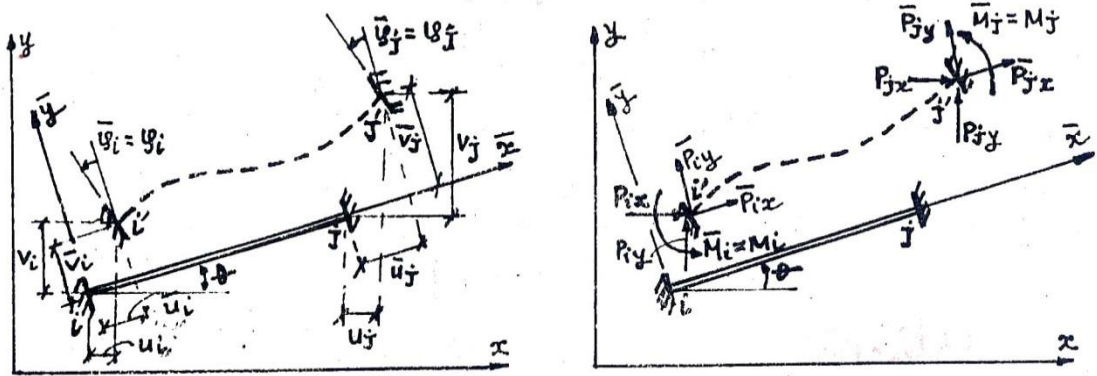
$$\{\bar{P}_q\}_e = \begin{Bmatrix} P_{iy} \\ M_i \\ P_{jy} \\ M_j \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} -\frac{ql}{2} \\ \frac{ql^2}{12} \\ -\frac{ql}{2} \\ +\frac{ql^2}{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{ql}{2} \\ \frac{ql^2}{12} \\ \frac{ql}{2} \\ -\frac{ql^2}{12} \end{Bmatrix}$$

2.4. Lập ma trận độ cứng và véc tơ lực nút của phần tử trong hệ tọa độ chung của kết cấu, ma trận biến đổi tọa độ

Trong các mục trước ta đã lập được các ma trận độ cứng phần tử $[\bar{k}]_e$ và vector lực nút phần tử $\{\bar{P}_q\}_e$ hay $\{\bar{f}\}_e$ là đối với hệ trục tọa độ riêng của từng phần tử. Tuy nhiên, trong phương trình cơ bản của phương pháp phần tử hữu hạn $[K]\{\Delta\} = \{F\}$, các ma trận độ cứng $[K]$, vector chuyển vị nút $\{\Delta\}$, vector lực nút $\{F\}$ của toàn hệ, được xác định từ các phần tử tập hợp nên, lại

phải xét trong một hệ tọa độ chung cho toàn kết cấu. Vì vậy cần thiết phải chuyển đổi các ma trận $\{\bar{P}_q\}_e$, $\{\bar{f}\}_e$ đã lập ở hệ tọa độ riêng của từng phần tử sang $[k]_e$, $\{f\}_e$ ở hệ tọa độ chung của toàn kết cấu.

Xét phần tử dầm i-j hai đầu liên kết ngàm bị biến dạng và dời tới vị trí i'-j' (hình 2.12). Hệ trục tọa độ riêng của phần tử là \bar{x}, \bar{y} trong đó \bar{x} trùng trục dầm, gốc tại i. Hệ trục tọa độ chung của kết cấu là x, y có phương lập với hệ trục riêng của phần tử một góc θ . Góc θ là dương khi trục chung xoay tới trục riêng cùng tên theo chiều ngược kim đồng hồ. Lúc này các vectơ chuyển vị nút tương ứng trong hai hệ trục tọa độ là:



Hình 2.12

$$\{\bar{\delta}\}_e = \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_1 \\ \bar{\delta}_2 \\ \bar{\delta}_3 \\ \bar{\delta}_4 \\ \bar{\delta}_5 \\ \bar{\delta}_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\varphi}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\varphi}_j \end{Bmatrix}, \quad \{\bar{f}\}_e = \begin{Bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \\ \bar{f}_3 \\ \bar{f}_4 \\ \bar{f}_5 \\ \bar{f}_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_{ix} \\ \bar{P}_{iy} \\ \bar{M}_i \\ \bar{P}_{jx} \\ \bar{P}_{jy} \\ \bar{M}_j \end{Bmatrix},$$

$$\{\delta\}_e = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_i \\ u_j \\ v_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix}; \quad \{f\}_e = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \\ M_i \\ P_{jx} \\ P_{jy} \\ M_j \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

Xét quan hệ chuyển vị nút tại nút i (liên kết ngàm) giữa hệ tọa độ chung của kết cấu với hệ tọa độ riêng của từng phần tử (hình 2.13).

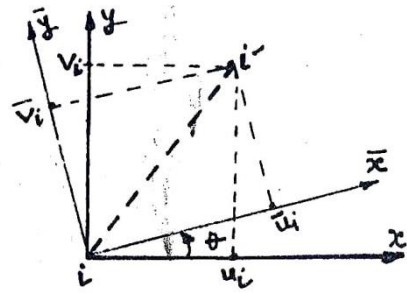
$$\bar{u}_i = u_i \cos \theta + v_i \sin \theta$$

$$\bar{v}_i = -u_i \sin \theta + v_i \cos \theta \quad (b)$$

$$\bar{\varphi}_i = \varphi_i$$

Viết dưới dạng ma trận, được:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\varphi}_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_i \end{Bmatrix} \quad (c)$$



Hình 2.13

$$\text{hay } \{\bar{\delta}_i\}_e = [\lambda_i]_e \cdot \{\delta_i\}_e \quad (d)$$

trong đó $[\lambda_i]_e$ - ma trận biến đổi vector chuyển vị tại nút i (liên kết ngàm) từ hệ tọa độ chung về hệ tọa độ riêng của phần tử e :

$$[\lambda_i]_e = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (e)$$

$$\text{Tương tự với nút đầu } j, \text{ có } \{\bar{\delta}_j\}_e = [\lambda_j]_e \cdot \{\delta_j\}_e$$

Với cả phần tử dầm i - j , được phép biến đổi vector chuyển vị nút phần tử từ hệ tọa độ chung $\{\delta\}_e$ về hệ tọa độ riêng $\{\bar{\delta}\}_e$ là:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\delta}_i \\ \bar{\delta}_j \end{Bmatrix}_e = \begin{bmatrix} [\lambda_i] & 0 \\ 0 & [\lambda_j] \end{bmatrix}_e \cdot \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix}_e \text{ hay } \{\bar{\delta}\}_e = [L]_e \cdot \{\delta\}_e \quad (2.12)$$

trong đó $[L]_e$ - ma trận biến đổi vector chuyển vị nút của phần tử e khi xoay trục, còn gọi là ma trận biến đổi tọa độ.

$$[L]_e = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & & & \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & & & [0] \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ & [0] & & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Tương tự, đối với vector lực nút của phần tử, có

$$\{\bar{f}\}_e = [L]_e \cdot \{f\}_e$$

Do $[\lambda]$ và $[L]_e$ là các ma trận biến đổi của phép biến đổi trực giao, có tính chất:

$$[\lambda]^{-1} = [\lambda]^T; [L]_e^{-1} = [L]_e^T$$

nên theo (2.12) có thể tìm được chuyển vị nút phần tử ở hệ tọa độ chung $\{\delta\}_e$ từ chuyển vị nút phần tử ở hệ tọa độ riêng $\{\bar{\delta}\}_e$ như sau:

$$\{\delta\}_e = [L]_e^T \cdot \{\bar{\delta}\}_e \quad (2.14)$$

Tương tự, với lực nút phần tử:

$$\{f\}_e = [L]_e^T \cdot \{\bar{f}\}_e \quad (2.15)$$

Thay thế các biểu thức $\{\bar{\delta}\}_e$, theo (2.12) và $\{\bar{f}\}_e$ theo (f) vào hệ phương trình cân bằng tại các nút của phần tử đã lập theo (2.8) trước đây:

$$[k]_e \cdot \{\bar{\delta}\}_e = \{\bar{f}\}_e$$

được $[\bar{k}]_e \cdot [L]_e \cdot \{\delta\}_e = [L]_e \cdot \{f\}_e$

hay $([L]_e^T \cdot [\bar{k}]_e \cdot [L]_e) \{\delta\}_e = \{f\}_e$

đã có dạng hệ phương trình (2.8) ở trên song $\{\delta\}_e$ và $\{f\}_e$ thuộc hệ tọa độ chung của kết cấu:

$$[k]_e \cdot \{\delta\}_e = \{f\}_e \quad (g)$$

với $[k]_e$ - ma trận độ cứng của phần tử e ở hệ tọa độ chung của kết cấu, được xác định từ ma trận độ cứng phần tử đã lập trong hệ tọa độ riêng của phần tử.

$$[K]\{\Delta\} = \{F\}$$

trong đó vectơ ẩn chuyển vị nút $\{\Delta\}$ gồm các thành phần xếp theo thứ tự chuyển vị nút của toàn kết cấu, vectơ lực nút $\{F\}$ và ma trận cứng toàn hệ $[K]$ cũng có các thành phần xếp theo thứ tự tương ứng với chuyển vị nút.

$[K]$ và $\{F\}$ ở đây được lập từ các ma trận độ cứng $[k]_e$ và lực nút $\{f\}_e$ của từng phần tử trong kết cấu ở hệ tọa độ chung.

Đối với mỗi phần tử e có một hệ phương trình cân bằng dạng (2.8) ở hệ tọa độ chung là:

$$[k]_e \cdot \{\delta\}_e = \{f\}_e$$

trong đó $\{\delta\}_e$ là vectơ chuyển vị nút có các thành phần được xếp theo thứ tự đã được quy định sẵn cho từng phần tử. Cấu trúc của ma trận cứng $[k]_e$ và vectơ lực phần tử $\{f\}_e$ cũng tương ứng với chuyển vị nút $\{\delta\}_e$

Do thứ tự các thành phần trong vectơ chuyển vị nút $\{\delta\}_e$ của từng phần tử nói chung khác với thứ tự trong vectơ chuyển vị nút $\{\Delta\}$ của toàn kết cấu, nên cần lưu ý xếp đúng vị trí của từng phần tử trong $[k]_e$ và $\{f\}_e$ vào $[K]$ và $\{F\}$. Việc sắp xếp này thường được áp dụng phương pháp số mã có nội dung như sau:

Mỗi chuyển vị nút và lực nút tương ứng được dùng hai số mã để đặt tên:

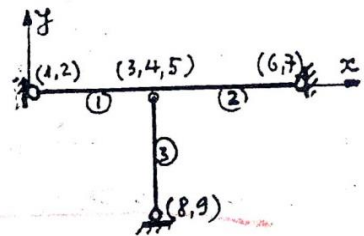
1. Số mã cục bộ là số mã từ 1 đến m (m là tổng số chuyển vị nút của mỗi phần tử). Đó là thứ tự sắp xếp trong vectơ chuyển vị nút $\{\delta\}_e$ và lực nút $\{f\}_e$ của một phần tử. Nếu các phần tử có các chuyển vị nút (m) như nhau thì số mã cục bộ của chuyển vị nút giống nhau.

2. Số mã toàn thể là số mã từ 1 đến n (n là tổng số chuyển vị nút của toàn kết cấu). Đó là thứ tự sắp xếp trong vectơ chuyển vị nút $\{\Delta\}$ và lực nút $\{F\}$ của toàn kết cấu.

Mỗi thành phần của $[k]_e$ hoặc $\{f\}_e$ tương ứng với một số mã cục bộ của chuyển vị nút cụ thể. Căn cứ vào số mã toàn thể của chuyển vị nút này mà sắp xếp vị trí của thành phần $[k]_e$ và $\{f\}_e$ vào đúng vị trí trong ma trận $[K]$ và vector $\{F\}$ của toàn kết cấu.

Có thể minh họa nội dung sắp xếp trên qua ví dụ sau (hình 2.19). Trên hình đã ghi tên của phần tử và số mã toàn thể của chuyển vị nút. Sự tương ứng giữa số mã cục bộ và số mã toàn thể của chuyển vị nút trong từng phần tử được ghi trong bảng:

Phần tử			Số mã cục bộ					
Tên	Loại	θ°	1	2	3	4	5	6
			Số mã toàn thể					
1		0°	1	2	3	4	5	
2		0°	3	4	5	6	7	
3		-90°	3	4	8	9		



Hình 2.14

Với từng phần tử, lập được ma trận độ cứng phần tử $[k]_e$ và vector lực nút phần tử $\{f\}_e$ ở hệ tọa độ chung, với các ký hiệu phân biệt như sau:

$$[k]_1 = \begin{matrix} CB \rightarrow \\ \downarrow \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \uparrow \\ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \leftarrow TT \end{matrix} \begin{bmatrix} * & & & & \\ * & * & & & \\ * & * & * & & \\ * & * & * & * & \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} ; \{f\}_1 = \begin{Bmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{Bmatrix}$$

$$[k]_2 = \begin{matrix} CB \rightarrow \\ \downarrow \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \uparrow \\ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \leftarrow TT \end{matrix} \begin{bmatrix} + & & & & \\ + & + & & & \\ + & + & + & & \\ + & + & + & + & \\ + & + & + & + & + \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} ; \{f\}_2 = \begin{Bmatrix} + \\ + \\ + \\ + \\ + \end{Bmatrix}$$

Căn cứ bảng số mã đã lập trên, với mỗi phần tử của ma trận $[k]_e$ và vectơ $\{f\}_e$ được sắp xếp vào ma trận độ cứng $[K]$ và vectơ lực nút $\{F\}$ của toàn hệ. Chẳng hạn, phần tử k_{43} của $[k]_3$ được xếp vào vị trí của k_{98} trong $[K]$; phần tử f_4 của $\{f\}_2$ được xếp vào vị trí của f_6 trong $\{F\}$

$$[k]_3 = \begin{matrix} CB \rightarrow \\ \downarrow \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \leftarrow TT \end{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{bmatrix} \Delta & & & \\ \Delta & \Delta & (\Delta x) & \\ \Delta & \Delta & \Delta & \\ \Delta & \Delta & \Delta & \Delta \end{bmatrix} \end{matrix} ; \{f\}_3 = \begin{Bmatrix} \Delta \\ \Delta \\ \Delta \\ \Delta \end{Bmatrix}$$

$$[K] = \begin{matrix} \begin{bmatrix} * & & & & & & & & \\ * & * & & & & & & & \\ * & * & * + \Delta & & & & & & \\ * & * & * + \Delta & * + \Delta & & & & & \\ * & * & * + & * + & * + & & & & \\ 0 & 0 & + & + & + & + & & & \\ 0 & 0 & + & + & + & + & + & & \\ 0 & 0 & \Delta & \Delta & 0 & 0 & 0 & \Delta & \\ 0 & 0 & \Delta & \Delta & 0 & 0 & 0 & \Delta & \Delta \end{bmatrix} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} ; \{F\} = \begin{Bmatrix} * \\ * \\ * + \Delta \\ * + \Delta \\ * + \\ + \\ + \\ \Delta \\ \Delta \end{Bmatrix}$$

Các thành phần trong ma trận của từng phần tử được xếp vào cùng một vị trí của ma trận toàn hệ đều được cộng lại với nhau.

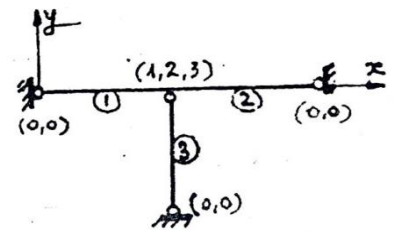
2.6. Cách xử lý điều kiện biên

Để giải được hệ phương trình $[K]\{\Delta\} = \{F\}$ cần phải có định thức của ma trận $[K]$ khác không ($\det [K] \neq 0$), tức là hệ phương trình không suy biến. Với bài toán kết cấu, điều này chỉ có thể đạt được khi điều kiện biên được thoả mãn (kết cấu phải bất biến hình). Đó là điều kiện cho trước một số chuyển vị nút nào đó, bằng không, hoặc bằng một giá trị xác định.

1 - Trường hợp tại một nút của phần tử, có liên kết giữ cho chuyển vị nút bằng không (với ví dụ hệ cho trên hình 2.14 các chuyển vị nút 1, 2, 6, 7, 8, 9 đều bằng không), ta xử lý như sau:

+ Không cho số mã của chuyển vị nút đó, hoặc ghi "0". Việc đánh số mã toàn thể của chuyển vị nút theo thứ tự và vector chuyển vị nút toàn hệ $\{\Delta\}$ chỉ bao gồm các chuyển vị nút còn lại. Với hệ đã cho trên hình 2.14 được đánh số lại như trên hình 2.15 và bảng số mã cũng được lập lại:

Phần tử			Số mã cục bộ					
Tên	Loại	θ°	1	2	3	4	5	6
			Số mã toàn thể					
1		0°	0	0	1	2	3	
2		0°	1	2	3	0	0	
3		-90°	1	2	0	0		



Hình 2.15

+ Khi lập $[k]_e$ và $\{f\}_e$ các dòng và cột tương ứng với số mã chuyển vị nút bằng không trên đều ghi số không (0):

Chẳng hạn, với phần tử 3:

$$[k]_3 = \begin{matrix} CB \rightarrow \\ \downarrow \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \leftarrow TT \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \Delta & & & \\ \Delta & \Delta & (\bar{\Delta}x) & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} ; \quad \{f\}_3 = \begin{Bmatrix} \Delta \\ \Delta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Cuối cùng, với toàn hệ, được:

$$[K] = \begin{bmatrix} * + \Delta & & (\bar{\Delta}x) \\ * + \Delta & * + \Delta & \cdot \\ * + & * + & * + \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} ; \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} * + \Delta \\ * + \Delta \\ * + \end{Bmatrix}$$

2. Trường hợp một chuyển vị nút được cho trước một giá trị xác định, chẳng hạn $\Delta_m = a$ (kể cả $a = 0$). Khi lập chương trình cho máy tính có thể xử lý theo hai cách sau:

a. Xử lý kiểu gán số không:

- Trong ma trận $[K]$ đã lập được, gán $K_{mm} = 1$, còn với mọi i, j khác m gán $K_{mj} := 0, K_{im} := 0$

Trong vector $\{F\}$ đã lập được, gán $F_m := a$

Ví dụ với hệ phương trình của bài toán có $[K]$ cấp (4×4) , có điều kiện biên $\Delta_m = \Delta_2 = a$, sau khi xử lý điều kiện biên như trên được:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & & & \\ 0 & 1 & (dx) & \\ K_{31} & 0 & K_{33} & \\ K_{41} & 0 & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} x \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ a \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix}$$

Như vậy hệ phương trình $[K]\{\Delta\} = \{F\}$ trên đã thoả mãn điều kiện biên, vì phương trình thứ hai lúc này chính là $\Delta_2 = a$.

b. Xử lý kiểu cộng một số vô cùng lớn

Sử dụng một số A vô cùng lớn, chẳng hạn $A \geq 10^{20}$, và thực hiện phép gán các trị của ma trận $[K]$ và $\{F\}$ đã lập được theo thứ tự sau:

- Gán $K_{mm} := K_{mm} + A$

- Sau đó gán $F_m := K_{mm} \cdot a$

Sau khi xử lý điều kiện biên, cũng đối với ví dụ ma trận $[K]$ cấp (4×4) như trên, được:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & & & \\ K_{21} & K_{22} + A & (dx) & \\ K_{31} & K_{33} & K_{33} & \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} x \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ (K_{22} + A)a \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix}$$

Hệ phương trình trên đã thoả mãn điều kiện biên, vì phương trình thứ hai

$$K_{21}\Delta_1 + (K_{22} + A)\Delta_2 + K_{23}\Delta_3 + K_{24}\Delta_4 = (K_{22} + A)a$$

Chia cả hai vế cho $(K_{22} + A)$ lại được $\Delta_2 = a$.

2.7. Xác định nội lực của phần tử

Sau khi giải hệ phương trình $[K]\{\Delta\} = \{F\}$ được vector chuyển vị nút toàn kết cấu $\{\Delta\}$ trong hệ tọa độ chung, từ đó có thể xác định được nội lực cuối cùng trong từng phần tử.

Căn cứ phương trình quan hệ giữa phản lực liên kết nút và chuyển vị nút của một phần tử e theo công thức (2.1)

$$\{\bar{N}\}_e = [\bar{k}]_e \cdot \{\bar{\delta}\}_e \quad (a)$$

nếu biết chuyển vị nút phần tử $\{\bar{\delta}\}_e$ ở hệ trục tọa độ riêng của phần tử đó, thì có thể tìm được phản lực liên kết nút $\{\bar{N}\}_e$ (lực nút) của phần tử, và đó cũng chính là các nội lực tại điểm của phần tử sát với nút (hay nội lực tại điểm nút của phần tử).

Chuyển vị nút $\{\bar{\delta}\}_e$ của phần tử ở hệ tọa độ riêng có thể tìm được từ chuyển vị nút phần tử $\{\delta\}_e$ ở hệ tọa độ chung theo công thức chuyển trục (2.12)

$$\{\bar{\delta}\}_e = [L]_e \cdot \{\delta\}_e \quad (b)$$

$[L]_e$ - ma trận biến đổi tọa độ. $[L]_e$ được thiết lập cho từng loại phần tử khác nhau, theo các công thức (2.13). Trong khi lập trình ta sử dụng phương pháp số mã để tìm lại $\{\bar{\delta}\}_e$.

$\{\delta\}_e$ - chuyển vị nút phần tử ở hệ tọa độ chung, nhận được từ vector chuyển vị nút toàn kết cấu $\{\Delta\}$ sau khi giải hệ phương trình.

Thay thế (b) vào (a) được nội lực tại các điểm nút của phần tử do các chuyển vị nút phần tử gây nên:

$$\{\bar{N}\}_e = [\bar{k}]_e \cdot [L]_e \cdot \{\delta\}_e \quad (c)$$

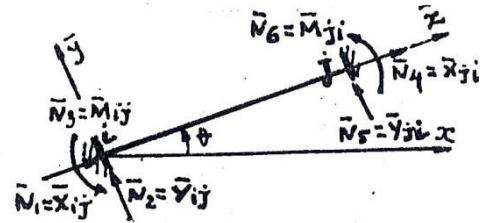
Xét trường hợp tổng quát, trong phần tử còn có tải trọng tác dụng, thì nội lực $[\bar{N}]_e$ tính trên còn phải thêm nội lực $\{\bar{N}_q\}_e$ do tải trọng trong phần tử gây nên

$$\text{Dùng ký hiệu } [S]_e = [\bar{k}]_e \cdot [L]_e \quad (2.17)$$

cuối cùng được nội lực tại các điểm nút của phần tử là:

$$\{\bar{N}\}_e = [S]_e \cdot \{\delta\}_e + \{\bar{N}_q\}_e \quad (2.18)$$

Nội lực $\{\bar{N}_q\}_e$ tính bằng lực nút phần tử $\{\bar{P}_q\}_e$ theo công thức (2.11) do ngoại lực đặt trên phần tử nhưng lấy dấu ngược lại, hay cũng chính bằng phản lực liên kết nút phần tử $\{\bar{R}_q\}_e$ do tải trọng đặt trên phần tử gây nên:



Hình 2.16

$$\{\bar{N}_q\}_e = - \{\bar{P}_q\}_e = \{\bar{R}_q\}_e \quad (d)$$

Khi tính hệ dầm phẳng, các phần tử đơn giản là các đoạn dầm thẳng, có thể theo (2.17) lập sẵn các công thức tính ma trận $[S]$ cho từng loại đoạn dầm.

- Phần tử dầm hai đầu liên kết ngàm (hình 2.16): Với $[\bar{k}]_e$ theo (2.14) và $[L]_e$ theo (2.13) lập được ($c = \cos\theta$; $s = \sin\theta$)

CHƯƠNG 3

ỔN ĐỊNH UỐN DỌC CỦA DÀM CÓ XÉT ĐẾN BIẾN DẠNG TRƯỢT NGANG

3.1. Lý thuyết dầm có xét biến dạng trượt ngang

Lý thuyết xét biến dạng trượt trong dầm do Timoshenko đưa ra và thường được gọi là lý thuyết dầm Timoshenko. Khi xây dựng lý thuyết này vẫn sử dụng giả thiết tiết diện phẳng của lý thuyết dầm thông thường, tuy nhiên do có biến dạng trượt, trục dầm sẽ xoay đi một góc và không còn thẳng góc với tiết diện dầm nữa.

Lý thuyết xét biến dạng trượt được dùng phổ biến trong phương pháp phần tử hữu hạn hiện nay là dùng hàm độ võng y và hàm góc xoay θ do momen uốn gây ra là hai hàm chưa biết. Trong trường hợp này biến dạng trượt tại trục trung hòa được xác định như sau, ví dụ như [36].

$$\gamma = \frac{dy}{dx} - \theta \quad (3.1)$$

Từ đó ta có các công thức xác định M và Q

$$\begin{aligned} M &= -EJ \left(\frac{d\theta}{dx} \right) \\ Q &= \frac{GF}{\alpha} \left[-\frac{dy}{dx} + \theta \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

Trong các công thức trên EJ là độ cứng uốn, GF là độ cứng cắt của tiết diện, G là môđun trượt của vật liệu, F là diện tích tiết diện, α là hệ số xét sự phân bố không đều của ứng suất tiếp $\tau_{\text{tr}}^{\text{an}}$ chiều cao tiết diện.

Các tác giả [36] cho rằng khi môđun trượt $G \rightarrow \infty$ thì từ (3.2) suy ra

$$\theta = \frac{dy}{dx} \quad (3.3)$$

nghĩa là trở về lý thuyết dầm không xét biến dạng trượt: Góc xoay của đường độ võng là do mômen gây ra. Theo nghiên cứu sinh lập luận trên không đúng bởi vì khi thỏa mãn phương trình (3.3) thì từ phương trình (3.2) suy ra lực cắt $Q=0$, dẫn về trường hợp uốn thuần túy của dầm. Vì lý do đó nên lý thuyết xét biến dạng trượt dùng y và θ làm ẩn không hội tụ về lý thuyết dầm thông

thường và khi áp dụng vào bài toán tấm, nó cũng không hội tụ về lý thuyết tấm thông thường (lý thuyết tấm Kierchhoff, [33, 36]. Phương hướng chung để khắc phục thiếu sót vừa nêu là bổ sung thêm các nút xét lực cắt Q trong các phần tử dầm hoặc phần tử tấm [33, 34, 36] hoặc dùng phần tử có hàm dạng là đa thức bậc thấp (bậc nhất) [39]. Vấn đề tìm phần tử có hàm dạng không bị hiện tượng biến dạng trượt bị khóa, shear locking, vẫn đang được tiếp tục nghiên cứu [40]. Tình hình chung hiện nay về lý thuyết xét biến dạng trượt trong dầm và tấm là như trên.

Khác với các tác giả khác, trong [27, 28] lý thuyết xét biến dạng trượt được xây dựng trên cơ sở hai hàm chưa biết là hàm độ võng y và hàm lực cắt Q . Trong trường hợp này biến dạng trượt xác định theo

$$\gamma = \frac{\alpha Q}{GF} \quad (3.4)$$

α là hệ số xét sự phân bố không đều của ứng suất cắt tại trục dầm.

Góc xoay do momen uốn sinh ra bằng hiệu giữa góc xoay đường độ võng với góc xoay do lực cắt gây ra.

$$\theta = \frac{dy}{dx} - \gamma = \frac{dy}{dx} - \frac{\alpha Q}{GF} \quad (3.5)$$

Momen uốn sẽ bằng

$$M = -EJ \frac{d\theta}{dx} = EJ \left(-\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right) \quad (3.6)$$

Biến dạng uốn χ

$$\chi = -\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \quad (3.7)$$

Dựa trên lý thuyết này ta sẽ xây dựng phương trình cân bằng và các điều kiện biên của dầm như sau. Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss ta viết phiếm hàm lượng cưỡng bức (chuyển động) như sau: (giả sử dầm có lực phân bố đều q).

$$Z = \int_0^l M\chi dx + \int_0^l Q\gamma dx - \int_0^l qy dx \rightarrow \min \quad (3.8)$$

Các hàm độ võng y , hàm biến dạng trượt γ và hàm biến dạng uốn χ là các đại lượng biến phân, nghĩa là điều kiện cần và đủ để hệ ở trạng thái cân bằng là

$$\delta Z = \int_0^l M\delta\chi dx + \int_0^l Q\delta\gamma dx - \int_0^l q\delta y dx = 0$$

Hay

$$\begin{aligned} \delta Z &= \int_0^l M\delta \left[-\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right] dx + \int_0^l Q\delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] dx - \int_0^l q\delta[y] dx \\ &= 0 \quad (3.9) \end{aligned}$$

Trong phương trình tích phân (3.9) hai đại lượng cần tìm là $y(x)$ và $Q(x)$ do đó có thể tách ra thành hai phương trình sau:

$$\int_0^l M\delta \left[-\frac{d^2y}{dx^2} \right] dx - \int_0^l q\delta[y] dx = 0 \quad (3.10)$$

$$\int_0^l M\delta \left[\frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right] dx + \int_0^l Q\delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] dx = 0 \quad (3.11)$$

Lấy tích phân từng phần phương trình (3.10)

$$\begin{aligned} \int_0^l M\delta \left[-\frac{d^2y}{dx^2} \right] dx &= - \int_0^l M d \left(\delta \left[\frac{dy}{dx} \right] \right) dx \\ &= -M\delta \left[\frac{dy}{dx} \right] \Big|_0^l + \int_0^l \frac{dM}{dx} \delta \left[\frac{dy}{dx} \right] dx \end{aligned}$$

Tích phân từng phần thành phần cuối của biểu thức trên ta có

$$\int_0^l M\delta \left[-\frac{d^2y}{dx^2} \right] dx = -M\delta \left[\frac{dy}{dx} \right] \Big|_0^l + \frac{dM}{dx} \delta[y] \Big|_0^l - \int_0^l \frac{d^2M}{dx^2} \delta[y] dx$$

Phương trình (3.10) sau khi lấy tích phân từng phần có dạng

$$\begin{aligned}
& -M\delta \left[\frac{dy}{dx} \right]_0^l + \frac{dM}{dx} \delta[y]_0^l \\
& - \int_0^l \left(\frac{d^2M}{dx^2} + q \right) \delta[y] dx = 0
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Bởi vì các đại lượng $\delta[y]$ và $\delta \left[\frac{dy}{dx} \right]$ là nhỏ và bất kỳ nên từ (3.12) ta có

$$\frac{d^2M}{dx^2} + q = 0 \tag{3.12a}$$

$$-M\delta \left[\frac{dy}{dx} \right]_0^l = 0 \tag{3.12b}$$

$$\frac{dM}{dx} \delta[y]_0^l = 0 \tag{3.12c}$$

Tích phân từng phần phương trình (3.11):

$$\begin{aligned}
\int_0^l M\delta \left[\frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right] dx &= \int_0^l M d \left(\delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] \right) dx \\
&= M \left(\delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] \right)_0^l - \int_0^l \frac{dM}{dx} \delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] dx
\end{aligned}$$

Sau khi lấy tích phân từng phần

$$M \left(\delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] \right)_0^l + \int_0^l \left(-\frac{dM}{dx} + Q \right) \delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] dx = 0 \tag{3.13}$$

Bởi vì biến phân $\delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right]$ là nhỏ và bất kỳ nên từ (2.13) ta có

$$-\frac{dM}{dx} + Q = 0 \tag{3.13a}$$

$$M\delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right]_0^l = 0 \tag{3.13b}$$

Sử dụng công thức (3.6), hai phương trình vi phân cân bằng của dầm (2.12a) và (3.13a) có dạng.

$$EJ \left[\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{\alpha}{GF} \frac{d^3Q}{dx^3} \right] = q \tag{3.14a}$$

$$EJ \left[\frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{\alpha}{GF} \frac{d^2 Q}{dx^2} \right] = Q \quad (3.15a)$$

Phương trình (3.14a) và (3.15a) có thể viết lại dưới dạng

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{\alpha h^2}{6} \frac{d^3 Q}{dx^3} = q \quad (3.14b)$$

$$EJ \frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{\alpha h^2}{6} \frac{d^2 Q}{dx^2} = Q \quad (3.15b)$$

Để nhận được các điều kiện biên của dầm thì kết hợp (3.12b) và (3.13b) ta có

$$M\delta \left[-\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha Q}{GF} \right]_0^l = 0 \quad (3.16)$$

Chú ý tới phương trình (3.13a), phương trình (3.12c) viết lại như sau

$$Q\delta[y]_0^l = 0 \quad (3.17)$$

Tóm lại, lý thuyết xét biến dạng trượt cho ta hai phương trình vi phân (3.14) và (3.15) đối với hai hàm y và Q : phương trình (3.14) là phương trình vi phân cân bằng giữa nội lực và ngoại lực, phương trình (3.15) là phương trình liên hệ giữa mômen uốn và lực cắt. Các phương trình (3.16) và (3.17) là các điều kiện biên ở hai đầu dầm.

Ta xét điều kiện biên (3.16)

Nếu như tại $x=0$ hoặc $x=l$, góc xoay θ do mômen uốn gây ra có biến phân

$$\delta\theta = \delta \left[-\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha Q}{GF} \right]_0^l \neq 0 \text{ thì } M|_0^l = 0 \\ \rightarrow \text{liên kết khớp} \quad (3.18a)$$

Nếu như góc xoay θ không có biến phân

$$\delta\theta = \delta \left[-\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha Q}{GF} \right]_0^l = 0 \text{ thì } M|_0^l \text{ bất kỳ} \rightarrow \text{liên kết ngàm} \quad (3.18b)$$

Đối với điều kiện (3.17), nếu như chuyển vị y tại $x=0$ hoặc $x=l$ có biến phân.

$$\delta[y]_0^l \neq 0 \text{ thì } Q|_0^l = 0, \\ \rightarrow \text{không có gối tựa} \quad (3.18c)$$

$$\text{Nếu như } \delta[y]_0^l = 0 \text{ thì } Q|_0^l \text{ bất kỳ,} \rightarrow \text{liên kết gối tựa} \quad (3.18d)$$

Khi không xét biến dạng trượt, $G \rightarrow \infty$ hoặc $h \rightarrow 0$ thờ cộc phương trởnh (3.14) và (3.15) cũng như các phương trởnh về điều kiện biên (3.16) và (3.17) hoặc (3.18) đều dẫn về lý thuyết dầm Euler- Bernoulli. Cho nên có thể nói lý thuyết xét biến dạng trượt nêu trên (xem hàm y và hàm Q là hai hàm chưa biết) là lý thuyết đầy đủ về dầm.

Cuối cùng cần lưu ý rằng khi xét tính liên tục về góc xoay giữa hai đoạn dầm là nói đến tính liên tục của góc xoay do mômen gây ra xác định theo công thức (3.5), không phải liên tục của góc xoay $\frac{dy}{dx}$.

Hệ số α

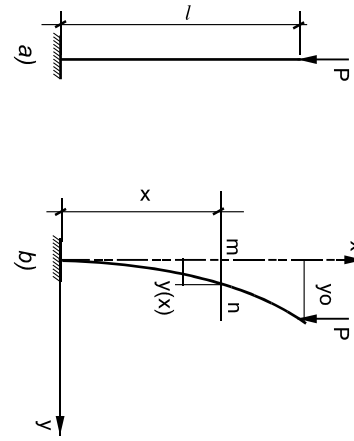
Hệ số α là hệ số tập trung ứng suất cắt tại trục dầm.

Đối với tiết diện chữ nhật $\alpha=1.5$, đối với tiết diện tròn $\alpha=4/3$. Tuy nhiên khi xét biến dạng trượt các trị trên thay đổi tương ứng bằng 1.2 và 1.11 [31, 60]. Trong tính toán sau này tác giả dùng hệ số $\alpha=1.2$ đối với tiết diện chữ nhật. Phương pháp chung để xác định hệ số α là cân bằng tổng theo chiều cao dầm công của ứng suất cắt thực hiện trên biến dạng trượt tương ứng với công lực cắt thực hiện trên biến dạng trượt tại trục dầm, vấn đề này đã được nhiều tác giả nghiên cứu [31, 33].

3.2. Bài toán ổn định của dầm chịu nén có xét biến dạng trượt [15, 18]

Phương pháp chung để đánh giá sự mất ổn định của cơ hệ là đưa hệ ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu của nó và kiểm tra xem nó có tồn tại trạng thái cân bằng mới không. Nếu như tìm được trạng thái cân bằng mới khác với trạng thái cân bằng ban đầu thì có thể xem hệ là mất ổn định và lực giữ cho hệ ở trạng thái cân bằng mới này gọi là lực tới hạn, trường hợp ngược lại hệ là ổn định.

Để đơn giản trình bày mà không mất đi tính tổng quát của phương pháp, ta xét dầm chịu nén một đầu ngàm một đầu tự do, chịu lực như (hình 3.1a). Dầm có trạng thái cân bằng ban đầu là trạng thái chịu nén thẳng đứng. Ở trạng thái cân bằng này dầm bị co ngắn lại một đoạn là $\Delta = Pl/EF$, EF là độ cứng kéo nén của dầm, E là mô đun đàn hồi của vật liệu, l là chiều dài ban đầu của dầm, P là lực tác dụng.



Hình 3.1. Dầm ngàm – Tự do

Để xét trạng thái cân bằng này của dầm có ổn định hay không ta cho một điểm bất kỳ trên dầm lệch ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu một đoạn y_0 nào đó. Khi đó dầm sẽ bị chuyển vị theo đường đàn hồi $y(x)$ và lực P ngoài tác dụng nén còn gây ra mômen uốn $M_p = P(y-y_0)$. Bây giờ trong dầm có nội lực mômen uốn M và lực cắt Q khác với trạng thái ban đầu chỉ chịu nén (hình 3.1b) và momen ngoại lực M_p . Độ co ngắn Δ của dầm thường là nhỏ so với chiều dài dầm cho nên để đơn giản ta xem chiều dài dầm sau biến dạng vẫn bằng l .

Biến dạng uốn của dầm χ xác định theo (3.7), biến dạng trượt γ xác định theo (3.4). Lượng cường bức theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss của bài toán này được viết như sau:

$$Z = \int_l (M - M_p) \chi dx + \int_l Q \gamma dx \rightarrow \min \quad (3.19)$$

Chú ý momen nội lực và momen ngoại lực luôn khác dấu nhau. Trong (3.19), χ và γ là hai đại lượng biến phân, do đó điều kiện cần và đủ để dầm ở trạng thái cân bằng là

$$\delta Z = \int_l (M - M_p) \delta \chi dx + \int_l Q \delta \gamma dx = 0 \quad (3.20)$$

$$\text{Hay} \quad \delta Z = \int_l (M - M_p) \delta \left(-\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right) dx + \int_l Q \delta \left(\frac{\alpha Q}{GF} \right) dx = 0 \quad (3.20a)$$

Sử dụng phép tính biến phân đối với phương trình (3.20a) nhận được hai phương trình cân bằng sau

$$-\frac{d^2(M - M_p)}{dx^2} = 0 \quad (3.21a)$$

$$\left(-\frac{d(M - M_p)}{dx} + Q\right) \frac{\alpha}{GF} = 0 \quad (3.21b)$$

Thay M xác định theo (3.6) vào hai phương trình (3.21) ta có

$$EJ \left(\frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{\alpha}{GF} \frac{d^3 Q}{dx^3} \right) + P \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (3.22a)$$

$$EJ \left(\frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{\alpha}{GF} \frac{d^2 Q}{dx^2} \right) + P \frac{dy}{dx} + Q = 0 \quad (3.22b)$$

Hai phương trình (3.22) là hai phương trình vi phân cân bằng của dầm chịu uốn dọc bởi lực P đặt ở đầu dầm có xét đến biến dạng trượt. Đó là hai phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất (không có vế phải) mà phương pháp giải chúng cùng với các điều kiện biên ở hai đầu dầm đã được trình bày ở chương 1.

Dưới đây trình bày phương pháp chuyển vị cưỡng bức theo [18] giải hệ phương trình (3.22).

3.3. Phương pháp chuyển vị cưỡng bức [18]

Phương pháp chuyển vị cưỡng bức nhằm đưa phương trình (3.22a) là phương trình cân bằng giữa nội lực và ngoại lực về phương trình có vế phải bằng cách cho một điểm nào đó trong dầm, ví dụ điểm $x=x_1$, một chuyển vị y_0 :

$$g = y_{x=x_1} - y_0 = 0 \quad (3.23)$$

Đưa bài toán tìm cực trị của (3.19) với điều kiện ràng buộc (3.23) về bài toán cực trị không ràng buộc bằng cách xây dựng phiếm hàm mở rộng Lagrange F như sau:

$$F = Z + \lambda g \rightarrow \min$$

$$F = \int_l (M - M_p) \chi dx + \int_l Q \gamma dx + \lambda (y_{x=x_1} - y_0) \rightarrow \min \quad (3.24)$$

Trong đó λ là thừa số Lagrange và cũng là ẩn của bài toán. Từ điều kiện

$$\delta F = \int_l (M - M_p) \delta \chi dx + \int_l Q \delta \gamma dx + \delta(\lambda g) = 0$$

nhận được hai phương trình sau:

$$EJ \left(\frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{\alpha}{GF} \frac{d^3 Q}{dx^3} \right) + P \frac{d^2 y}{dx^2} = \begin{cases} -\lambda & \text{khi } x = x_1 \\ 0 & \text{khi } x \neq x_1 \end{cases} \quad (3.25a)$$

$$EJ \left(\frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{\alpha}{GF} \frac{d^2 Q}{dx^2} \right) + P \frac{dy}{dx} + Q = 0 \quad (3.25b)$$

cùng với phương trình (3.23).

Phương trình (3.25a) là phương trình có vế phải. Để nó trở thành phương trình uốn dọc (3.22a) của dầm thì

$$\lambda = 0 \quad (3.26)$$

Về mặt toán học, phương trình (3.26) là phương trình đa thức xác định các trị riêng của hệ (3.22) bởi vì nghiệm của nó cũng là nghiệm của (3.22). Về cơ học, λ có thứ nguyên là lực. Đó là lực giữ để cho dầm có chuyển vị y_0 tại điểm $x=x_1$. Lực giữ phải bằng không, suy ra phương trình (3.26). Trị riêng của (3.22) phụ thuộc vào thông số P , suy ra λ cũng là hàm của P . Cho nên giải phương trình (3.26) theo P , sẽ nhận được các lực tới hạn của dầm bị uốn dọc.

3.4. Xác định lực tới hạn của dầm chịu nén có xét đến biến dạng trượt ngang bằng phương pháp phần tử hữu hạn

Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn để nghiên cứu các bài toán ổn định tĩnh của dầm có xét đến biến dạng trượt ngang sẽ được trình bày trong mục này. Phương pháp xây dựng bài toán là phương pháp phần tử hữu hạn, sử dụng phương pháp chuyển vị cưỡng bức để giải các bài toán trị riêng và véc-tơ riêng. Nội dung mục này bao gồm: Xây dựng ma trận độ cứng phần tử có xét biến dạng trượt do lực cắt Q gây ra, lần lượt trình bày bài toán tĩnh, bài toán xác định lực tới hạn Euler của dầm chịu uốn dọc và các ví dụ tính.

Phương pháp phần tử hữu hạn chia công trình thành những phần nhỏ được gọi là các phần tử, tính toán công trình được dẫn về tính toán những phần tử nhỏ sau đó kết nối các phần tử đó lại với nhau ta lại được lời giải của một công trình hoàn chỉnh. Tương tự, phương pháp sai phân hữu hạn cũng chia công trình thành những đoạn nhỏ và trạng thái chuyển vị...được xác định tại mỗi điểm sai phân. Sự khác nhau giữa hai phương pháp nằm ở chỗ đối với sai phân hữu hạn trạng thái chuyển vị của các điểm thuộc đoạn nằm giữa hai nút thường được tính theo phương pháp nội suy tuyến tính còn phương pháp phần tử hữu hạn các trạng thái chuyển vị giữa hai điểm được xác định bằng các hàm dạng đã cho. Ưu điểm chủ yếu của phương pháp phần tử hữu hạn là nhờ chia công trình thành các đoạn nhỏ thì dễ dàng mô tả được các hình dạng phức tạp của công trình, đặc biệt là vì các đoạn nhỏ cho nên mô tả trạng thái chuyển vị bằng các đa thức bậc thấp. Ví dụ nếu chọn hàm xấp xỉ là đa thức thì phải chọn đa thức bậc 9 để mô tả đường độ võng của dầm nhưng khi dùng phần tử hữu hạn thì ta có thể dùng các đa thức bậc thấp 2, 3 hoặc 4 để mô tả chuyển vị của mỗi phần tử. Sở dĩ như vậy là do trạng thái ứng suất trong mỗi phần tử nhỏ thì khác nhau rất ít. Thông thường đối với phần tử dầm chịu uốn thì dùng đa thức bậc 3 để mô tả chuyển vị.

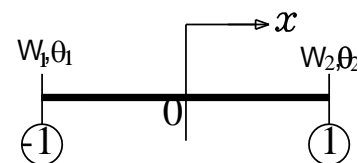
$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

Ta thấy có 4 thông số cần xác định. Tuy nhiên để tiện dùng ta thay 4 thông số a_0, a_1, a_2, a_3 bằng chuyển vị, góc xoay của phần tử hai nút như hình 3.2.

Do dùng hàm bậc 3 cho nên các lực tác dụng lên phần tử đều phải quy về nút kể cả lực quán tính trong bài toán động.

3.4.1. Ma trận độ cứng phần tử

Đối với phần tử chịu uốn như dầm thường dùng đa thức bậc ba để tính chuyển vị của nó, do đó có bốn thông số cần xác định. Có thể chọn phần tử hai nút, mỗi nút có hai thông số là chuyển vị W và góc xoay θ tại nút đó, hình 3.2.



Hình 3.2. Phần tử hai nút

Để tính toán được tổng quát, chiều dài phần tử lấy bằng hai đơn vị (phần tử đẳng thông số), gốc tọa độ đặt ở giữa. Như vậy, nếu biết được các

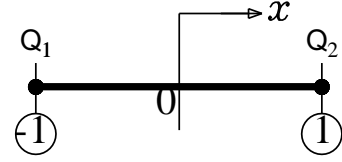
thông số $W_1, \theta_1, W_2, \theta_2$ thì chuyển vị mỗi điểm nằm trong phần tử xác định theo đa thức bậc ba sau đây.

$$W(x) = f_1 W_1 + f_2 \theta_1 + f_3 W_2 + f_4 \theta_2 \quad (3.27)$$

trong đó: $f_1 = 1/4(x-1)^2(x+2); f_2 = 1/4(x-1)^2(x+1);$

$$f_3 = 1/4(x+1)^2(-x+2); f_4 = 1/4(x+1)^2(x-1);$$

Từ các công thức trên ta thấy chuyển vị của nút 1 (có tọa độ $x = -1$) bằng W_1 , chuyển vị tại nút 2 (có tọa độ $x=1$) bằng W_2 . Lấy đạo hàm $W(x)$ theo x và ta lại có góc xoay tại nút 1 ($x = -1$) là θ_1 , góc xoay tại nút 2 ($x = 1$) là θ_2 .



Hình 3.3. Phần tử hai nút

Ta cũng dùng đa thức bậc ba để xấp xỉ hàm lực cắt của phần tử, ở đây phần tử lực cắt cũng chứa hai nút (Hình 3.3), mỗi nút có một thông số chưa biết Q_i là lực cắt phần tử tại vị trí đó.

Chiều dài phần tử lấy bằng hai đơn vị, gốc tọa độ đặt ở giữa phần tử. Nếu biết các lực cắt Q_1, Q_2 tại hai nút thì lực cắt V tại điểm bất kỳ của phần tử tính theo công thức.

$$V = Q_1 f_5 + Q_2 f_6 \quad (3.28)$$

trong đó: $f_5 = 1/2(1-x); f_6 = 1/2(1+x);$

Đưa vào (3.28) các giá trị x sau

$$x = -1 \quad \text{ta có lực cắt } V = Q_1$$

$$x = 1 \quad \text{ta có lực cắt } V = Q_2$$

Như vậy, mỗi phần tử có hai chuyển vị nút W_1, W_2 hai góc xoay θ_1, θ_2 và hai lực cắt nút Q_1, Q_2 , tổng cộng có sáu thông số (6 ẩn) cần xác định.

Gọi X là véc tơ cột chứa sáu ẩn của phần tử theo thứ tự sau.

$$X = [W_1, \theta_1, W_2, \theta_2, Q_1, Q_2] \quad (3.29)$$

thì có thể viết lại các biểu thức (3.27) và (3.28) dưới dạng ma trận như sau.

$$W = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] X; V = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ f_5 \ f_6] X \quad (3.30)$$

Sau khi đã biết các hàm chuyển vị và hàm lực cắt thì dễ dàng tính được biến dạng uốn χ_x , nội lực mômen M_x , biến dạng trượt γ_x , góc xoay φ (do mômen gây ra) của phần tử như sau.

$$\chi_x = \left[-\frac{d^2 W}{dx^2} \beta^2 + \frac{\alpha}{GF} \frac{dV}{dx} \beta \right] \quad (3.31)$$

$$M_x = EJ\chi_x \quad (3.32)$$

$$\gamma_x = \frac{\alpha}{GF} [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ f_5 \ f_6] X \quad (3.33)$$

$$\phi = \left[-\frac{dW}{dx} \beta + \frac{\alpha}{GF} V \right] \quad (3.34)$$

Trong các công thức trên $\beta = \frac{2}{\Delta x}$ là hệ số đưa chiều dài hai đơn vị của phần tử về chiều dài thật Δx của nó.

Biết được hàm độ võng, hàm lực cắt của phần tử thì dễ dàng tính được ma trận độ cứng phần tử. Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss ta viết lượng cưỡng bức đối với bài toán tĩnh như sau.

$$Z = \int_{-1}^1 M_x [\chi_x] dx + \int_{-1}^1 V [\gamma_x] dx \rightarrow \text{Min} \quad (3.35)$$

χ_x và γ_x là các biểu thức chứa các ẩn $X(i)$ cho nên điều kiện dừng của (3.35) được viết lại như sau.

$$\delta Z = \int_{-1}^1 M_x \delta [\chi_x] dx + \int_{-1}^1 V \delta [\gamma_x] dx = 0$$

$$\text{Hay} \quad \delta Z = \frac{1}{\beta} \left(\int_{-1}^1 M_x \left[\frac{\partial \chi_x}{\partial X(i)} \right] dx + \int_{-1}^1 V \left[\frac{\partial \gamma_x}{\partial X(i)} \right] dx \right) = 0 \quad (3.36)$$

Hệ số $\frac{1}{\beta} = \frac{\Delta x}{2}$ để đưa tích phân từ (-1) đến (1) về tích phân theo chiều dài phần tử. Có sáu ẩn ta có được sáu phương trình và có dạng sau.

$$A_e X = B \quad (3.37)$$

trong đó: B - véc tơ tải trọng.

Các tích phân trong (3.36) có thể tính chính xác hoặc tính theo các tích phân gần đúng (tích phân số) của Gauss (không trình bày ở đây). Sau khi tính, với trường hợp chia dầm thành bốn phần tử, nhận được $A_e [6 \times 6]$ như sau.

$$[A]_e = \begin{bmatrix} 768 & -768 & 96 & 96 & 0 & 0 \\ -768 & 768 & -96 & -96 & 0 & 0 \\ 96 & -96 & 16 & 8 & -0.0001 & 0.0001 \\ 96 & -96 & 8 & 16 & 0.0001 & -0.0001 \\ 0 & 0 & -0.0001 & 0.0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0001 & -0.0001 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ma trận A_e gọi là ma trận độ cứng phần tử, dx là độ dài một phần tử. Bởi vì hàm độ võng của phần tử là đa thức bậc ba nên các lực tác dụng cũng như lực quán tính của các phần tử đều phải phân bố về nút của nó.

Nếu như tại nút (1) có lực tác dụng P thì vế phải B(1)=P...

Biết được ma trận độ cứng phần tử thì dễ dàng xây dựng được ma trận độ cứng của toàn dầm. Giả sử dầm chỉ có một phần tử thì ma trận Ae chính là ma trận độ cứng tổng thể của dầm. Giả sử chuyển vị tại nút (1) bằng không thì ta bỏ dòng 1, cột 1 của ma trận Ae, giả sử lực cắt tại nút 2, $Q_2=0$ thì ta bỏ tiếp cột 6, dòng 6 của Ae bởi vì chúng ta không có hai ẩn này.

Chú ý ngoài các ẩn chuyển vị, góc xoay, lực cắt của dầm còn phải xét thêm các ẩn là các thừa số Lagrange λ của các điều kiện liên kết ở hai đầu dầm.

Ngoài ra còn cần đưa thêm các điều kiện liên tục về góc xoay tại điểm tiếp giáp giữa hai phần tử (3.34).

3.4.2. Bài toán ổn định tĩnh

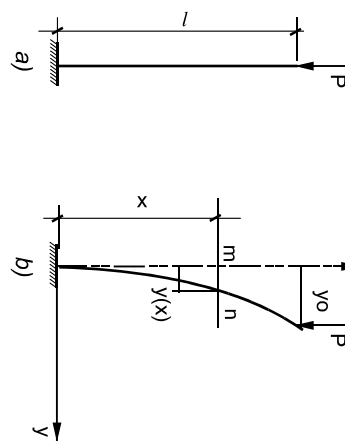
Ví dụ 1. Dầm đầu ngàm - đầu tự do

Xét dầm có lực P là lực nén dọc trục đặt ở nút đầu tự do của dầm. Khi lệch ra khỏi vị trí cân bằng, lực P gây ra mômen uốn M_p trong dầm.

$$M_p = P(y - W_0)$$

W_0 là chuyển vị ngang tại nút ở đầu tự do của dầm. Đối với mỗi phần tử i của dầm ta có

$$M_{pi} = P[WX_i - W_0]$$



Hình 3.5. Dầm ngàm - tự do

X_i là thông số chuyển vị của phần tử i. Mômen M_{pi} gây ra biến dạng uốn χ_i cho nên trong thành phần lượng cưỡng bức ta viết thêm

$$\sum M_p \delta \chi_i dx = \sum_{i=1}^{npt} \frac{\Delta x}{2} \int_{-1}^1 P W X_i \delta \chi_i dx - \sum_{i=1}^{npt} \frac{\Delta x}{2} \int_{-1}^1 P W_0 X_i \delta \chi_i dx$$

Cách tính các tích phân trên tương tự như khi tính ma trận độ cứng phần tử. Đây là bài toán trị riêng cho nên dùng phương pháp chuyển vị cưỡng bức. Cho một nút bất kỳ nào đó của dầm có chuyển vị y_0 thì trong phiếm hàm lượng cưỡng bức phải xét thêm đại lượng.

$$\delta \lambda (W_i - y_0) \tag{a}$$

W_i là chuyển vị nút i của dầm, i là bất kỳ, λ là thừa số Lagrange là ẩn mới của bài toán. Như vậy, ma trận A thêm một dòng và thêm một cột và véc tơ B thêm một dòng. Sau khi giải phương trình

$$AX = B \quad (b)$$

tìm được nghiệm λ . λ là phương trình đa thức đối với P , giải phương trình $\lambda(P) = 0$ sẽ có các lực tới hạn của dầm.

Dầm ngàm-tự do (phần tử lực cắt 2 nút)

Bảng 4.1. Lực tới hạn của dầm đầu ngàm - đầu tự do tính cho hai trường hợp h/l . Dầm có 4 phần tử, phần tử lực cắt 2 nút.

Tỷ lệ h/l	Dãy các lực tới hạn P_{th}				
	P_{1th}	P_{2th}	P_{3th}	P_{4th}	P_{5th}
1/10	$2,528 \frac{EJ}{l^2}$	$25,878 \frac{EJ}{l^2}$	$82,315 \frac{EJ}{l^2}$	$171,393 \frac{EJ}{l^2}$	$378,156 \frac{EJ}{l^2}$
1/3	$2,528 \frac{EJ}{l^2}$	$25,878 \frac{EJ}{l^2}$	$82,315 \frac{EJ}{l^2}$	$171,393 \frac{EJ}{l^2}$	$378,156 \frac{EJ}{l^2}$

Bảng 4.2. Lực tới hạn của dầm đầu ngàm - đầu tự do tính cho hai trường hợp h/l . Dầm có 9 phần tử, phần tử lực cắt 2 nút.

Tỷ lệ h/l	Dãy các lực tới hạn P_{th}				
	P_{1th}	P_{2th}	P_{3th}	P_{4th}	P_{5th}
1/10	$2,472 \frac{EJ}{l^2}$	$22,609 \frac{EJ}{l^2}$	$64,327 \frac{EJ}{l^2}$	$129,402 \frac{EJ}{l^2}$	$219,623 \frac{EJ}{l^2}$
1/3	$2,472 \frac{EJ}{l^2}$	$22,609 \frac{EJ}{l^2}$	$64,327 \frac{EJ}{l^2}$	$129,402 \frac{EJ}{l^2}$	$219,623 \frac{EJ}{l^2}$

Dầm ngàm-tự do (phần tử lực cắt 4 nút)

Bảng 4.3. Lực tới hạn của dầm đầu ngàm - đầu tự do tính cho hai trường hợp h/l . Dầm có 9 phần tử, phần tử lực cắt 4 nút

Tỷ lệ h/l	Dãy các lực tới hạn P_{th}				
	P_{1th}	P_{2th}	P_{3th}	P_{4th}	P_{5th}
1/10	$2,467 \frac{EJ}{l^2}$	$22,206 \frac{EJ}{l^2}$	$61,687 \frac{EJ}{l^2}$	$120,924 \frac{EJ}{l^2}$	$199,976 \frac{EJ}{l^2}$
1/3	$2,467 \frac{EJ}{l^2}$	$22,206 \frac{EJ}{l^2}$	$61,685 \frac{EJ}{l^2}$	$120,911 \frac{EJ}{l^2}$	$199,919 \frac{EJ}{l^2}$

Nhận xét:

Kết quả tính toán lực tới hạn luôn phụ thuộc vào tỉ số giữa chiều cao tiết diện và chiều dài dầm h/l . Tuy nhiên, với trường hợp này bài toán dầm

một đầu ngàm– một đầu tự do là bài toán tĩnh định nên ảnh hưởng của biến dạng trượt đến lực tới hạn là không đáng kể. Về mặt số học thì khi tỉ số h/l càng nhỏ ($h/l \leq 1/10$) trở đi thì có thể bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt nhưng ở đây dùng lý thuyết đầy đủ về dầm để tính toán một cách dễ dàng do đó nên xét biến dạng trượt trong mọi trường hợp.

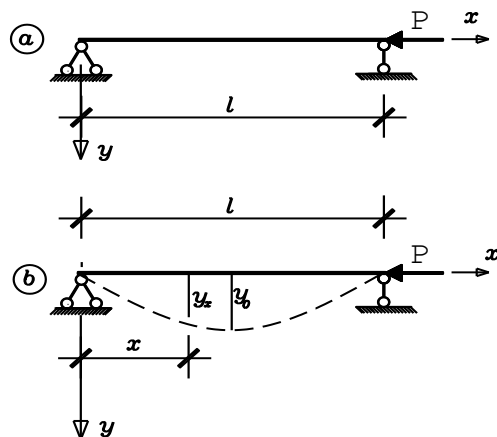
Ở bảng 3.3 có ba lực tới hạn đầu tiên là chính xác, khi chia dầm thành bốn phần tử kết quả nhận được ở bảng 4.1 có sai số lần lượt là 2,47%, 16,53%, 33,43%. Như vậy, ta cần rời rạc hóa dầm thành nhiều phần tử hơn để nhận được kết quả chính xác. Thật vậy, khi chia dầm thành 9 phần tử kết quả nhận được ở bảng 3.2 đã tiệm cận kết quả chính xác cụ thể sai số chỉ còn là 0,2%, 1,81%, 4,27% đối với ba lực tới hạn đầu tiên.

Qua kết quả ở bảng 3.2 và 3.3 ta thấy khi chia dầm thành 9 phần tử lực tới hạn trong hai trường hợp, phần tử lực cắt 4 nút nhận được ba lực tới hạn đầu tiên chính xác so với kết quả nhận được từ lời giải bán giải tích, còn với phần tử lực cắt hai nút vẫn còn sai số tương ứng là 0,2%, 1,81%, 4,27% đối với ba lực tới hạn đầu tiên.

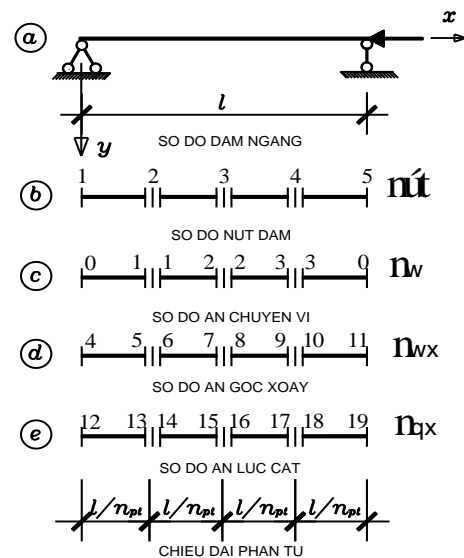
Do vậy muốn tăng độ chính xác của kết quả nhận được thì hoặc là tăng thêm số phần tử hoặc tăng số nút trong phần tử lực cắt.

Ví dụ 2. Dầm hai đầu khớp

Xác định lực tới hạn cho dầm chịu nén như hình 3.6a.



Hình 3.6. Dầm hai đầu khớp



Hình 3.7. Đánh số nút, số ẩn

Chia dầm ra làm n_{pt} phần tử (hình 3.7), nội lực mô men uốn do lực P gây ra trong các phần tử của dầm là:

$$M_{P_i} = P \cdot w_{x_i} \quad (i = 1 \div npt) \quad (a)$$

Mô men uốn M_{P_i} gây ra biến dạng uốn χ_{P_i} do đó trong thành phần lượng ràng buộc của bài toán ta phải viết thêm thành phần này, như vậy lượng ràng buộc cho bài toán ổn định có thể viết như sau:

$$Z = \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{npt} \int_0^1 (M_i - M_{P_i}) [\chi_i] dx - \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{npt} \int_0^1 V \cdot [\gamma_i] dx \rightarrow \min \quad (b)$$

Điều kiện dừng của phiếm hàm lượng cưỡng bức (b) là:

$$\begin{aligned} \delta Z &= \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{npt} \int_0^1 (M_i - M_{P_i}) \delta [\chi_i] dx - \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{npt} \int_0^1 V \delta [\gamma_i] dx = 0 \\ \text{hay } \delta Z &= \frac{\Delta x}{2} \left(\sum_{i=1}^{npt} \int_0^1 (M_i - M_{P_i}) \left[\frac{\partial \chi_i}{\partial X_i} \right] dx - \sum_{i=1}^{npt} \int_0^1 V \cdot \left[\frac{\partial \gamma_i}{\partial X_i} \right] dx \right) = 0 \end{aligned} \quad (c)$$

Gọi n_w là số thông số chuyển vị tại các nút của dầm có chuyển vị; n_{wx} là số thông số góc xoay tại các nút của dầm có góc xoay. Dựa vào điều kiện này ta sẽ xây dựng được ma trận độ cứng của dầm có bậc: $n \times n$ ($n = n_w + n_{wx}$), trong bài toán này $n = 19$ (sau khi bỏ đi những hàng và cột tương ứng có chuyển vị hoặc góc xoay bằng không).

Bây giờ xét các điều kiện liên kết khớp tại hai đầu dầm và các điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử.

Điều kiện mômen uốn tại hai đầu dầm bằng không được viết như sau.

$$\left. \begin{aligned} \left(-\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right) \Big|_{x=0} &= 0 \\ \left(-\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right) \Big|_{x=l} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Trong phiếm hàm mở rộng điều kiện trên được viết như sau

$$\left. \begin{aligned} \delta \lambda_1 \left(-\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right) \Big|_{x=0} &= 0 \\ \delta \lambda_2 \left(-\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right) \Big|_{x=l} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

λ_1, λ_2 là thừa số Lagrange và là hai ẩn của bài toán. Như vậy, ma trận a bây giờ có kích thước $(n+2) \times (n+2)$ để chứa thêm hai ẩn λ_1, λ_2 có số thứ tự là $(n+1, n+2)$, trong bài toán này là $(20, 21)$.

Điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử được viết như sau

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{dy}{dx} - \frac{\alpha}{GF} Q \right) \Big|_{\text{nút 2 phần tử trước}} - \left(\frac{dy}{dx} - \frac{\alpha}{GF} Q \right) \Big|_{\text{nút 1 phần tử sau}} = 0 \\ \text{hay } \delta \lambda_i & \left[\left(\frac{dy}{dx} - \frac{\alpha}{GF} Q \right) \Big|_{\text{nút 2 phần tử trước}} - \left(\frac{dy}{dx} - \frac{\alpha}{GF} Q \right) \Big|_{\text{nút 1 phần tử sau}} \right] = 0 \end{aligned} \right\}$$

với ($i=npt-1$), trong ví dụ này ta chia dầm thành 4 phần tử nên số điều kiện liên tục về góc tại các nút giữa các phần tử là $(4-1=3)$, ứng với $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$.

Vì $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ là ẩn số $(k+1)$, trong ví dụ trên là ẩn số 22, nên ta phải mở rộng ma trận a. Bây giờ nó có kích thước $(n+5) \times (n+5)$, (24×24) . Vv...Gọi k_1 và k_2 là góc xoay và lực cắt tại nút 2 phần tử trước, k_3 và k_4 là góc xoay và lực cắt tại nút 1 phần tử sau thì ta lại có.

$$\left. \begin{aligned} a(k+1, k_1) &= 1 \frac{2}{\Delta x}, & a(k_2, k+1) &= \frac{2}{\Delta x} \\ a(k+1, k_2) &= -\frac{\alpha}{GF}, & a(k_2, k+1) &= -\frac{\alpha}{GF} \\ a(k+1, k_3) &= -1 \frac{2}{\Delta x}, & a(k_3, k+1) &= -\frac{2}{\Delta x} \\ a(k+1, k_4) &= \frac{\alpha}{GF}, & a(k_4, k+1) &= \frac{\alpha}{GF} \end{aligned} \right\}$$

Trong ví dụ trên (Hình 3.7): $k_1=5, k_2=13, k_3=6, k_4=14$. Như vậy ma trận độ cứng của của dầm được mở rộng thêm $(npt-1)$ hàng và $(npt-1)$ cột, ở đây là ba hàng, ba cột.

Theo phương pháp chuyển vị cưỡng bức tại một vị trí (nút) nào đó của dầm, ta cho lệch khỏi vị trí cân bằng một chuyển vị y_0 . Chẳng hạn tại nút thứ k ta cho một chuyển vị cưỡng bức y_0 ta có:

$$w|_{xk} - y_0 = 0 \tag{d}$$

Như vậy ma trận độ cứng của phần tử lại được mở rộng thêm 1 hàng, một cột và lúc này ma trận độ cứng có bậc

$$\begin{aligned} & [(nw+nwx+nqx+nđkb+nlt+ny_0) \times (nw+nwx+nqx+nđkb+nlt+ny_0)] \\ & = [(3+8+8+2+3+1) \times (3+8+8+2+3+1)] = [25 \times 25] \end{aligned}$$

Trong đó: $nđkb$ là số điều kiện biên, nlt là số điều kiện liên tục, ny_0 là điều kiện chuyển vị cưỡng bức có trong các ràng buộc của bài toán

với hệ số trong ma trận độ cứng:

$$\left. \begin{aligned} a(25, k) &= 1 \\ a(k, 25) &= 1 \end{aligned} \right\} \tag{e}$$

Ma trận về phải lúc này có bậc: $[(nw+nwx+nqx+nm+npt) \times 1]$ với giá trị hệ số $[B(nw+nwx+nqx+nm+npt)=y_0]$ còn các hệ số còn lại bằng không.

Giải phương trình $[A]X=B$ ta sẽ tìm được các ẩn số là các chuyển vị tại các nút của phần tử và các thừa số Lagrange. Tiếp theo, ta cho thừa số Lagrange tương ứng với chuyển vị cưỡng bức bằng không ta sẽ tìm được giá trị lực P tương ứng là các giá trị tới hạn của lực nén lên dầm.

Khi chia dầm thành bốn phần tử như hình 3.7, ta nhận được $\lambda(P)$ là đa thức bậc 18 của P , giải phương trình $\lambda(P)=0$ theo ẩn số P ta sẽ tìm được 18 giá trị lực tới hạn P_{th} , ở đây đưa ra 5 lực tới hạn đầu tiên lần lượt là:

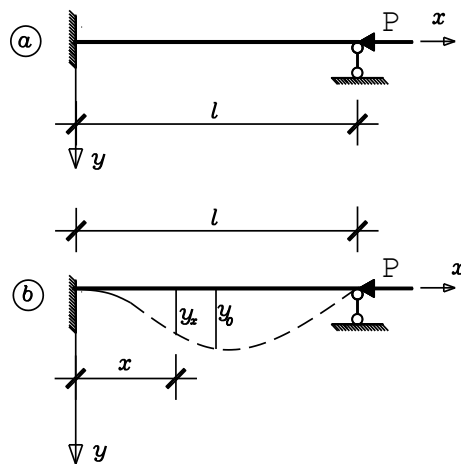
Bảng 3.4. Lực tới hạn của dầm hai đầu khớp tính cho hai trường hợp h/l . Dầm có 4 phần tử, phần tử lực cắt 2 nút.

Tỷ lệ h/l	Dãy các lực tới hạn P_{th}				
	P_{1th}	P_{2th}	P_{3th}	P_{4th}	P_{5th}
1/10	$9,869 \frac{EJ}{l^2}$	$39,487 \frac{EJ}{l^2}$	$88,925 \frac{EJ}{l^2}$	$158,473 \frac{EJ}{l^2}$	$248,872 \frac{EJ}{l^2}$
1/3	$9,869 \frac{EJ}{l^2}$	$39,487 \frac{EJ}{l^2}$	$88,925 \frac{EJ}{l^2}$	$158,473 \frac{EJ}{l^2}$	$248,872 \frac{EJ}{l^2}$

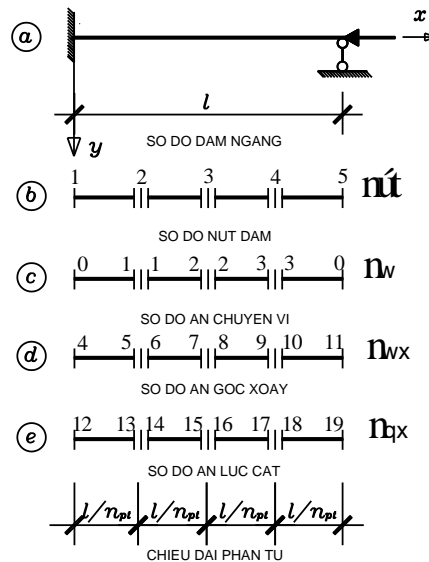
Ta thấy các kết quả trên đúng với kết quả phân tích theo giải tích.

Ví dụ 3. Dầm đầu ngàm - đầu khớp

Xác định lực tới hạn cho dầm chịu nén như hình 3.8a.



Hình 3.8. Dầm hai đầu khớp



Hình 3.9. Đánh số nút, số ẩn

Chia dầm ra làm n_{pt} phần tử (hình 3.8), nội lực mô men uốn do lực P gây ra trong các phần tử của dầm là:

$$M_{P_i} = P \cdot w_{x_i} \quad (i = 1 \div npt) \quad (a)$$

Mô men uốn M_{P_i} gây ra biến dạng uốn χ_{P_i} do đó trong thành phần lượng ràng buộc của bài toán ta phải viết thêm thành phần này, như vậy lượng ràng buộc cho bài toán ổn định có thể viết như sau:

$$Z = \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{npt} \int_0^1 (M_i - M_{P_i}) [\chi_i] dx - \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{npt} \int_0^1 V \cdot [\gamma_i] dx \rightarrow \min \quad (b)$$

Điều kiện dừng của phiếm hàm lượng cưỡng bức (b) là:

$$\begin{aligned} \delta Z &= \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{npt} \int_0^1 (M_i - M_{P_i}) \delta[\chi_i] dx - \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{npt} \int_0^1 V \delta[\gamma_i] dx = 0 \\ \text{hay } \delta Z &= \frac{\Delta x}{2} \left(\sum_{i=1}^{npt} \int_0^1 (M_i - M_{P_i}) \left[\frac{\partial \chi_i}{\partial X_i} \right] dx - \sum_{i=1}^{npt} \int_0^1 V \cdot \left[\frac{\partial \gamma_i}{\partial X_i} \right] dx \right) = 0 \end{aligned} \quad (c)$$

Gọi n_w là số thông số chuyển vị tại các nút của dầm có chuyển vị; n_{wx} là số thông số góc xoay tại các nút của dầm có góc xoay, n_{qx} là số thông số lực cắt. Dựa vào điều kiện này ta sẽ xây dựng được ma trận độ cứng của dầm có bậc: $n \times n$ ($n = n_w + n_{wx} + n_{qx}$), trong bài toán này $n = 19$ (sau khi bỏ đi những hàng và cột tương ứng có chuyển vị hoặc góc xoay bằng không).

Bây giờ xét các điều kiện liên kết tại hai đầu dầm và các điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử.

Đầu trái dầm là ngàm nên góc xoay bằng không được viết như sau

$$\left(\frac{dy}{dx} - \frac{\alpha}{GF} Q \right) \Big|_{x=0} = 0$$

Trong phiếm hàm mở rộng điều kiện trên được viết như sau

$$\lambda_1 \left(\frac{dy}{dx} - \frac{\alpha}{GF} Q \right) \Big|_{x=0} = 0$$

Điều kiện mômen uốn tại đầu trái dầm bằng không được viết như sau.

$$\left(-\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right) \Big|_{x=l} = 0$$

Trong phiếm hàm mở rộng điều kiện trên được viết như sau

$$\delta \lambda_2 \left(-\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right) \Big|_{x=l} = 0$$

λ_1, λ_2 là thừa số Lagrange và là hai ẩn của bài toán. Như vậy, ma trận a bây giờ có kích thước $(n+2) \times (n+2)$ để chứa thêm hai ẩn λ_1, λ_2 có số thứ tự là $(n+1, n+2)$, trong bài toán này là $(20, 21)$.

Điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử được viết như sau

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{dy}{dx} - \frac{\alpha}{GF} Q \right) \Big|_{\text{nút 2 phần tử trước}} - \left(\frac{dy}{dx} - \frac{\alpha}{GF} Q \right) \Big|_{\text{nút 1 phần tử sau}} = 0 \\ \text{hay } \delta \lambda_i & \left[\left(\frac{dy}{dx} - \frac{\alpha}{GF} Q \right) \Big|_{\text{nút 2 phần tử trước}} - \left(\frac{dy}{dx} - \frac{\alpha}{GF} Q \right) \Big|_{\text{nút 1 phần tử sau}} \right] = 0 \end{aligned} \right\}$$

với ($i=npt-1$), trong ví dụ này ta chia dầm thành 4 phần tử nên số điều kiện liên tục về góc tại các nút giữa các phần tử là ($4-1=3$), ứng với $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$.

Vì $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ là ẩn số ($k+1$), trong ví dụ trên là ẩn số 22, 23, 24, nên ta phải mở rộng ma trận a. Bây giờ nó có kích thước $(n+5) \times (n+5)$, (24×24). Vv... Gọi k_1 và k_2 là góc xoay và lực cắt tại nút 2 phần tử trước, k_3 và k_4 là góc xoay và lực cắt tại nút 1 phần tử sau thì ta lại có.

$$\left. \begin{aligned} a(k+1, k_1) &= 1 \frac{2}{\Delta x}, & a(k_2, k+1) &= \frac{2}{\Delta x} \\ a(k+1, k_2) &= -\frac{\alpha}{GF}, & a(k_2, k+1) &= -\frac{\alpha}{GF} \\ a(k+1, k_3) &= -1 \frac{2}{\Delta x}, & a(k_3, k+1) &= -\frac{2}{\Delta x} \\ a(k+1, k_4) &= \frac{\alpha}{GF}, & a(k_4, k+1) &= \frac{\alpha}{GF} \end{aligned} \right\}$$

Trong ví dụ trên (Hình 3.9): $k_1=5, k_2=13, k_3=6, k_4=14$. Như vậy ma trận độ cứng của của dầm được mở rộng thêm $(npt-1)$ hàng và $(npt-1)$ cột, ở đây là ba hàng, ba cột.

Theo phương pháp chuyển vị cưỡng bức tại một vị trí (nút) nào đó của dầm, ta cho lệch khỏi vị trí cân bằng một chuyển vị y_0 . Chẳng hạn tại nút thứ k ta cho một chuyển vị cưỡng bức y_0 ta có:

$$w|_{xk} - y_0 = 0 \tag{d}$$

Như vậy ma trận độ cứng của phần tử lại được mở rộng thêm 1 hàng, một cột và lúc này ma trận độ cứng có bậc

$$\begin{aligned} & [(nw+nwx+nqx+nđkb+nlt+ny_0)x(nw+nwx+nqx+nđkb+nlt+ny_0)] \\ & = [(3+8+8+2+3+1)x(3+8+8+2+3+1)] = [25 \times 25] \end{aligned}$$

với hệ số trong ma trận độ cứng:

$$\left. \begin{aligned} a(25, k) &= 1 \\ a(k, 25) &= 1 \end{aligned} \right\} \tag{e}$$

Ma trận về phải lúc này có bậc: $[(nw+nwx+nqx+nm+npt)x1]$ với giá trị hệ số $[B(nw+nwx+nqx+nm+npt)=y_0]$ còn các hệ số còn lại bằng không.

Giải phương trình $[A]X=B$ ta sẽ tìm được các ẩn số là các chuyển vị tại các nút của phần tử và các thừa số Lagrange. Tiếp theo, ta cho thừa số Lagrange tương ứng với chuyển vị cưỡng bức bằng không ta sẽ tìm được giá trị lực P tương ứng là các giá trị tới hạn của lực nén lên dầm.

Khi chia dầm thành bốn phần tử như hình 3.9, ta nhận được $\lambda(P)$ là đa thức bậc 7 của P, giải phương trình $\lambda(P)=0$ theo ẩn số P ta sẽ tìm được 7 giá trị lực tới hạn P_{th} , ở đây đưa ra 5 lực tới hạn đầu tiên lần lượt là:

Bảng 3.5. Lực tới hạn của dầm đầu ngàm - đầu khớp tính cho hai trường hợp h/l. Dầm có 8 phần tử, phần tử lực cắt 2 nút.

Tỷ lệ h/l	Dãy các lực tới hạn P_{th}				
	P_{1th}	P_{2th}	P_{3th}	P_{4th}	P_{5th}
1/10	$20,192 \frac{EJ}{l^2}$	$59,748 \frac{EJ}{l^2}$	$119,453 \frac{EJ}{l^2}$	$200,363 \frac{EJ}{l^2}$	$304,649 \frac{EJ}{l^2}$
1/3	$20,192 \frac{EJ}{l^2}$	$59,748 \frac{EJ}{l^2}$	$119,453 \frac{EJ}{l^2}$	$200,363 \frac{EJ}{l^2}$	$304,649 \frac{EJ}{l^2}$

Ta thấy các kết quả trên đúng với kết quả phân tích theo giải tích với ba lực tới hạn đầu tiên và kết quả hầu như không thay đổi khi h/l thay đổi.

Bảng 3.6. Lực tới hạn của dầm đầu ngàm - đầu khớp tính cho hai trường hợp h/l. Dầm có 8 phần tử, phần tử lực cắt 4 nút.

Tỷ lệ h/l	Dãy các lực tới hạn P_{th}				
	P_{1th}	P_{2th}	P_{3th}	P_{4th}	P_{5th}
1/10	$20,237 \frac{EJ}{l^2}$	$59,854 \frac{EJ}{l^2}$	$119,553 \frac{EJ}{l^2}$	$200,253 \frac{EJ}{l^2}$	$303,835 \frac{EJ}{l^2}$
1/3	$22,755 \frac{EJ}{l^2}$	$67,021 \frac{EJ}{l^2}$	$132,654 \frac{EJ}{l^2}$	$220,207 \frac{EJ}{l^2}$	$328,914 \frac{EJ}{l^2}$
Chênh lệch	12,44%	11,97%	10,95%	9,96%	8,25%

Khi phần tử lực cắt bốn nút ta nhận thấy ngay sự thay đổi tương đối lớn trong hai trường hợp không xét ($h/l=1/10$) và có xét biến dạng trượt ngang ($h/l=1/3$), theo bảng 3.6. Như vậy, cách lựa chọn số ẩn cho phần tử mẫu chịu cắt cần được lưu ý.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Qua kết quả nghiên cứu tác giả rút ra kết luận sau:

1. Tác giả đã áp dụng thành công phương pháp phần tử hữu hạn và lý thuyết dầm có xét biến dạng trượt ngang đối với các bài toán ổn định của dầm, đã tìm được kết quả quan trọng của bài toán ổn định là lực tới hạn.

2. Tác giả đã áp dụng được phương pháp chuyển vị cưỡng bức cho bài toán ổn định đàn hồi của dầm chịu uốn dọc có xét đến biến dạng trượt ngang. Bằng phép tính biến phân đưa phương trình vi phân không có vế phải về phương trình vi phân có vế phải bằng cách cho một điểm nào đó trong dầm, ví dụ điểm $x=x_1$, một chuyển vị y_0 : từ đó chứng minh được rằng phương trình $\lambda=0$ (phương trình vế phải) là phương trình xác định trị riêng. Đối với bài toán ổn định tĩnh thì các trị riêng tìm được là các lực tới hạn P_{th} . Dùng phương pháp chuyển vị cưỡng bức để giải bài toán ổn định của dầm cho ta ngay phương trình đa thức xác định lực tới hạn mà không phải thông qua các phép biến đổi phức tạp để đưa ma trận về ma trận đường chéo.

- Đã xác định được lực tới hạn cho các dầm có các điều kiện biên khác nhau có kể đến biến dạng trượt ngang. Kết quả tính toán lực tới hạn của dầm khi không xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang (trường hợp tỉ số $h/l=1/10$) đều trùng khớp với kết quả nhận được khi giải bằng các phương pháp hiện có.

- Lực tới hạn khi xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt đều nhỏ thua lực tới hạn khi không xét đến biến dạng trượt ngang. Lực tới hạn nhận được của dầm trong hai trường hợp có xét và không xét biến dạng trượt ngang sai khác nhau đáng kể.

- Khi dầm tĩnh định lực tới hạn không thay đổi khi h/l thay đổi

- Khi dầm được rời rạc hóa thành nhiều phần tử sẽ nhận được nhiều lực tới hạn chính xác hơn

Kiến nghị:

Có thể dùng kết quả nghiên cứu của luận văn làm tài liệu tham khảo, nghiên cứu và học tập, cũng như ứng dụng trong thực tế tính toán kết cấu công trình

DANH MỤC TÀI LIỆU THAM KHẢO

I. Tiếng Việt

- [1] Hà Huy Cương (2005), *Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss*, Tạp chí Khoa học và kỹ thuật, IV/ Tr. 112 ÷118.
- [2] Nguyễn Văn Liên, Nguyễn Phương Thành, Đinh Trọng Bằng (2003), *Giáo trình Sức bền vật liệu*, Nhà xuất bản xây dựng, tái bản lần thứ 3, 330 trang.
- [3] Nguyễn Phương Thành(2002), *Nghiên cứu trạng thái ứng suất - biến dạng tấm nhiều lớp chịu tải trọng động có xét lực ma sát ở các mặt tiếp xúc*, Luận án tiến sỹ kỹ thuật.
- [4] Vương Ngọc Lưu(2002), *Nghiên cứu trạng thái ứng suất - biến dạng của tấm sàn Sandwich chịu tải trọng tĩnh và động*, Luận án tiến sỹ kỹ thuật.
- [5] Trần Hữu Hà(2006), *Nghiên cứu bài toán tương tác giữa cọc và nền dưới tác dụng của tải trọng*, Luận án tiến sỹ kỹ thuật.
- [6] Phạm Văn Trung (2006), *Phương pháp mới Tính toán hệ dây và mái treo*, Luận án Tiến sỹ kỹ thuật.
- [7] Vũ Hoàng Hiệp (2007), *Nghiên cứu trạng thái ứng suất - biến dạng của dầm nhiều lớp chịu tải tĩnh và động*, Luận án tiến sỹ kỹ thuật, Hà nội.
- [8] Nguyễn Văn Đạo (2001), *Cơ học giải tích*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà nội, 337 trang.
- [9] Nguyễn Văn Đạo, Trần Kim Chi, Nguyễn Dũng (2005), *Nhập môn Động lực học phi tuyến và chuyển động hỗn độn*. Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà nội.
- [10] Lều Thọ Trình, Đỗ Văn Bình (2006), *Giáo trình ổn định công trình*, Nhà xuất bản Khoa học kỹ thuật.
- [11] Vũ Hoàng Hiệp (2008), *Tính kết cấu có xét biến dạng trượt*, Tạp chí xây dựng số7.
- [12] Đoàn Văn Duân, Nguyễn Phương Thành (2007), *Phương pháp mới tính toán ổn định của dầm*, Tạp chí Xây dựng số 12 (Tr41-Tr44).

- [13] Đoàn Văn Duẩn (2007), *Phương pháp nguyên lý Cực trị Gauss đối với các bài toán ổn định công trình*, Luận văn thạc sỹ kỹ thuật.
- [14] Đoàn Văn Duẩn (2008), *Phương pháp mới tính toán ổn định của khung*, Tạp chí Xây dựng số 01 (Tr35-Tr37).
- [15] Đoàn Văn Duẩn (2008), *Nghiên cứu ổn định uốn dọc của dầm có xét biến dạng trượt*, Tạp chí Xây dựng số 12 (Tr33-Tr37).
- [16] Đoàn Văn Duẩn (2009), *Phương pháp nghiên cứu ổn định tổng thể của dàn*, Tạp chí Xây dựng số 03 (Tr86-Tr89).
- [17] Đoàn Văn Duẩn (2010), *Phương pháp phân tử hữu hạn nghiên cứu ổn định uốn dọc của dầm*, Tạp chí kết cấu và Công nghệ xây dựng, số 05, Quý IV(Tr30-Tr36).
- [18] Đoàn Văn Duẩn (2011), *Nghiên cứu ổn định đàn hồi của kết cấu hệ dầm có xét đến biến dạng trượt*, Luận án Tiến sỹ kỹ thuật.
- [19] Đoàn Văn Duẩn (2012), *Phương pháp mới tính toán dây mềm*, Tạp chí kết cấu và công nghệ Xây dựng số 09, Quý II (Tr56-Tr61).
- [20] Đoàn Văn Duẩn (2014), *Phương pháp chuyển vị cưỡng bức giải bài toán trị riêng và véc tơ riêng*, Tạp chí Xây dựng số 11 (Tr82-Tr84).
- [21] Đoàn Văn Duẩn (2015), *Phương pháp mới nghiên cứu ổn định động lực học của dầm*, Tạp chí Xây dựng số 01 (Tr86-Tr88).
- [22] Đoàn Văn Duẩn (2015), *Bài toán cơ học kết cấu dưới dạng tổng quát*, Tạp chí Xây dựng số 02 (Tr59-Tr61).
- [23] Đoàn Văn Duẩn (2015), *Phương pháp so sánh nghiên cứu nội lực và chuyển vị của hệ dầm*, Tạp chí Xây dựng số 11 (Tr56-Tr58).
- [24] Đoàn Văn Duẩn (2015), *Tính toán kết cấu khung chịu uốn bằng phương pháp so sánh*, Tạp chí Xây dựng số 12 (Tr62-Tr64).
- [25] Trần Thị Kim Huệ (2005), *Phương pháp nguyên lý Cực trị Gauss đối với các bài toán cơ học kết cấu*, Luận văn thạc sỹ kỹ thuật.
- [26] Nguyễn Thị Liên (2006), *Phương pháp nguyên lý Cực trị Gauss đối với các bài toán động lực học công trình*, Luận văn thạc sỹ kỹ thuật.

[27] Vũ Dâm Thủy (2009), *Xây dựng bài toán dầm khi xét đầy đủ hai thành phần nội lực momen và lực cắt*. Tạp chí Xây dựng số 4.

[28] Vũ Dâm Thủy (2009), *Dao động tự do của dầm khi xét ảnh hưởng của lực cắt*. Tạp chí Xây dựng, số 7.

[29] Timoshenko C.P, Voinópki- Krige X, (1971), *Tám và Vở*. Người dịch, Phạm Hồng Giang, Vũ Thành Hải, Đoàn Hữu Quang, Nxb Khoa học và kỹ thuật, Hà Nội.

II. Tiếng Pháp

[30] Robert L’Hermite (1974), *Flambage et Stabilité – Le flambage élastique des pièces droites*, édition Eyrolles, Paris.

III. Tiếng Anh

[31] Stephen P.Timoshenko-Jame M.Gere (1961), *Theory of elastic stability*, McGraw-Hill Book Company, Inc, New york – Toronto – London, 541 Tr.

[32] William T.Thomson (1998), *Theory of Vibration with Applications* (Tái bản lần thứ 5). Stanley Thornes (Publishers) Ltd, 546 trang.

[33] Klaus – Jurgen Bathe (1996), *Finite Element procedures*. Part one, Prentice – Hall International, Inc, 484 trang.

[34] Klaus – Jurgen Bathe (1996), *Finite Element procedures*. Part two, Prentice – Hall International, Inc, 553 trang.

[35] Ray W.Clough, Joseph Penzien(1993), *Dynamics of Structures* (Tái bản lần thứ 2), McGraw-Hill Book Company, Inc, 738 trang.

[36] O.C. Zienkiewicz-R.L. Taylor (1991), *The finite element method* (four edition) Volume 2, McGraw-Hill Book Company, Inc, 807 trang.

[37] G.Korn-T.Korn (1961), *Mathematical Handbook for sientists and Engineers*, McGraw-Hill, New york (Bản dịch tiếng Nga, I.Bramovich chủ biên, Nhà xuất bản Nauka-Moscow, 1964).

- [38] Stephen P. Timoshenko-J. Goodier (1970), *Theory of elasticity*, McGraw-Hill, New York (Bản dịch tiếng Nga, G. Shapiro chủ biên, Nhà xuất bản Nauka-Moscow, 1979), 560 trang.
- [39] D.R.J. Owen, E. Hinton (1986), *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*, Pineridge Press Lt.
- [40] Lars Olovsson, Kjell Simonsson, Mattias Unosson (2006), *Shear locking reduction in eight-node tri-linear solid finite elements*, J. 'Computers @ Structures', 84, trg 476-484.
- [41] C.A. Brebbia, J.C.F. Telles, L.C. Wrobel (1984), *Boundary Element Techniques. Theory and Applications in Engineering*. Nxb Springer – Verlag. (Bản dịch tiếng Nga, 1987).
- [42] Chopra Anil K (1995). *Dynamics of structures*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New – Jersey 07632.
- [43] Wilson Edward L. Professor Emeritus of structural Engineering University of California at Berkeley (2002). *Three – Dimensional Static and Dynamic Analysis of structures*, Inc. Berkeley, California, USA. Third edition, Reprint January.
- [44] Wilson, E. L., R. L. Taylor, W. P. Doherty and J. Ghaboussi (1971). "Incompatible Displacement Models", Proceedings, ORN Symposium on "Numerical and Computer Method in Structural Mechanics". University of Illinois, Urbana. September. Academic Press.
- [45] Strang, G (1972). "Variational Crimes in the Finite Element Method" in "The Mathematical Foundations of the Finite Element Method". P.689 -710 (ed. A.K. Aziz). Academic Press.
- [46] Irons, B. M. and O. C. Zienkiewicz (1968). "The isoparametric Finite Element System – A New Concept in Finite Element Analysis", Proc. Conf. "Recent Advances in Stress Analysis". Royal Aeronautical Society. London.
- [47] Kolousek Vladimir, DSC Professor, Technical University, Pargue (1973). *Dynamics in engineering structures*. Butter worths London.

- [48] Felippa Carlos A (2004). *Introduction of finite element methods*. Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures University of Colorado Boulder, Colorado 80309-0429, USA, Last updated Fall.
- [49] Wang C.M, Reddy J.N, Lee K.H.(2000), *Shear deformable beams and plates – Relationships with Classical Solutions*. ELSEVIER, Amsterdam – Lausanne- New York – Oxford –Shannon – Singapore – Tokyo.
- [50] Barbero Ever J, Department of Mechanics & Aerospace Engineering, West Virginia University, USA (1999), *Introduction to Composite Materials Design*. Taylor and Francis.
- [51] Decolon C (2002). *Analysis of Composite Structures*. Hermes Penton, Ltd, UK.
- [52] Fu-le Li, ZHI-zhong Sun, Corresponding author, Department of Mathematics, Shoutheast University, Nanjing 210096, PR China (2007). *A finite difference scheme for solving the Timoshenko beam equations with boundary feedback*. Journal of Computational and applied Mathematics 200, 606 – 627, Elsevier press. Available online at www.sciencedirect.com.
- [53] Khaji N., Corresponding author, Shafiei M., Civil Engineering Department Tarbiat Modares University, P. O. Box 14155-4838, Tehran, Iran ((2009)). *Closed - form solutions for crack detection problem of Timoshenko beams with various boundary conditions*. International Journal of Mechanical Sciences 51, 667-681. Contents lists available at Science Direct journal homepage: www.elsevier.com/locate/ijmecsci.
- [54] Antes H. Institute of Applied Mechanics, University Carolo Wilhelmina, D-38023 Braunschweig, Germany (2003). *Fundamental solution and integralequations for Timoshenko beams*. Computers and Structures 81, 383-396. Pergamon press. Available online at www.sciencedirect.com.

[55] Nguyen Dinh Kien (2007). *Free Vibration of prestress Timoshenko beams resting on elastic foundation. Viet nam Journal of Mechanics, VAST, Vol.29, No. 1,pp. 1-12.*

[56] Grawford F (1974). *Waves, Berkeley physics course, volume 3. McGraw – hill Book Company.*