

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC DÂN LẬP HẢI PHÒNG**
.....

BÙI ĐỨC CƯỜNG

**TÍNH TOÁN NỘI LỰC VÀ CHUYỂN VỊ CỦA HỆ KHUNG
BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN**

LUẬN VĂN THẠC SĨ KỸ THUẬT

**CHUYÊN NGÀNH: KỸ THUẬT XÂY DỰNG CÔNG TRÌNH DÂN DỤNG
VÀ CÔNG NGHIỆP; MÃ SỐ: 60.58.02.08**

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

TS. ĐỖ TRỌNG QUANG

HẢI PHÒNG, THÁNG 11 NĂM 2018

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các số liệu, kết quả trong luận văn là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Tác giả luận văn

Bùi Đức Cường

LỜI CẢM ƠN

Qua quá trình học tập và nghiên cứu, được sự giúp đỡ, của các cán bộ, giáo viên của Khoa xây dựng, Phòng đào tạo Đại học và Sau đại học - trường Đại học Dân lập Hải phòng, tôi đã hoàn thành chương trình học tập và nghiên cứu luận văn.

Tôi xin trân trọng cảm ơn TS. Đỗ Trọng Quang đã tận tình giúp đỡ và cho nhiều chỉ dẫn khoa học có giá trị cũng như thường xuyên động viên, tạo mọi điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu hoàn thành luận văn.

Cuối cùng, tôi xin cảm ơn những người thân, bạn bè đã luôn bên tôi, động viên tôi hoàn thành khóa học và bài luận văn này.

Xin trân trọng cảm ơn!

Hải Phòng, ngày tháng năm 2018

Tác giả

Bùi Đức Cường

MỤC LỤC

LỜI CAM ĐOAN.....	i
MỤC LỤC.....	iii
MỞ ĐẦU.....	1
CHƯƠNG 1. CÁC PHƯƠNG PHÁP XÂY DỰNG VÀ GIẢI BÀI TOÁN CƠ HỌC KẾT CẤU	3
1.1. Phương pháp xây dựng bài toán cơ học.....	3
1.1.1. Phương pháp xây dựng phương trình vi phân cân bằng phân tố.....	3
1.1.2. Phương pháp năng lượng.....	7
1.1.3. Nguyên lý công ảo.....	10
1.1.4. Phương trình Lagrange:	12
1.2. Bài toán cơ học kết cấu và các phương pháp giải	10
1.2.1. Phương pháp lực.....	15
1.2.2. Phương pháp chuyển vị	16
1.2.3. Phương pháp hỗn hợp và phương pháp liên hợp	16
1.2.4. Phương pháp phần tử hữu hạn	16
1.2.5. Phương pháp sai phân hữu hạn	17
1.2.6. Phương pháp hỗn hợp sai phân – biến phân	17
CHƯƠNG 2: PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN	18
2.1. Phương pháp phần tử hữu hạn	18
2.1.1 Nội dung phương pháp phần tử hữu hạn theo mô hình chuyển vị	19
2.1.2. Cách xây dựng ma trận độ cứng của phần tử chịu uốn	38
2.1.3. Cách xây dựng ma trận độ cứng tổng thể của kết cấu.....	40
CHƯƠNG 3. TÍNH TOÁN KHUNG PHẪNG CHỊU UỐN THEO PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN.....	45
3.1. Phương pháp phần tử hữu hạn tính toán khung phẳng chịu uốn	45
3.2. Các ví dụ tính toán khung.....	48
KẾT LUẬN	75
Danh mục tài liệu tham khảo.....	76

MỞ ĐẦU

Bài toán cơ học kết cấu có tầm quan trọng đặc biệt trong lĩnh vực cơ học công trình, đòi hỏi phải nghiên cứu đầy đủ cả về mặt lý thuyết và thực nghiệm. Vấn đề nội lực và chuyển vị của kết cấu được nhiều nhà khoa học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu theo nhiều hướng khác nhau. Tựu chung lại, các phương pháp xây dựng bài toán gồm: Phương pháp xây dựng phương trình vi phân cân bằng phân tố; Phương pháp năng lượng; Phương pháp nguyên lý công ảo và Phương pháp sử dụng trực tiếp Phương trình Lagrange. Các phương pháp giải về cơ bản gồm: Phương pháp lực, phương pháp chuyển vị, phương pháp hỗn hợp, liên hợp; Các phương pháp số gồm: Phương pháp sai phân, Phương pháp biến phân, phương pháp hỗn hợp sai phân - biến phân và phương pháp phần tử hữu hạn.

Hiện nay, kết cấu chính thường được sử dụng trong các công trình dân dụng và công nghiệp thường là khung cứng thuần túy hoặc khung kết hợp với lõi và vách cứng. Với số lượng phần tử rất lớn dẫn đến số ẩn của bài toán rất lớn, vấn đề đặt ra là với những bài toán như vậy thì dùng phương pháp nào để tìm lời giải của chúng một cách nhanh chóng, thuận tiện và có hiệu quả nhất. Với sự phát triển mạnh mẽ của máy tính điện tử, đồng thời các phần mềm lập trình kết cấu ngày càng hiện đại, tác giả nhận thấy rằng phương pháp phần tử hữu hạn là một phương pháp số đáp ứng được các yêu cầu nêu trên.

Thực chất của phương pháp phần tử hữu hạn là rời rạc hóa bản thân kết cấu. Các phần tử liên kết liên hệ với nhau bằng các phương trình cân bằng và các phương trình liên tục. Để giải quyết bài toán cơ học kết cấu, có thể tiếp cận phương pháp này bằng đường lối trực tiếp, suy diễn vật lý hoặc đường lối toán học, suy diễn biến phân. Tuy nhiên bằng cách nào đi chăng nữa thì kết quả thu được là một ma trận (độ cứng hoặc độ mềm). Ma trận đó được xây dựng dựa trên cơ sở cực trị hóa phiếm hàm biểu diễn năng lượng. Trong phạm

vi mỗi phần tử riêng biệt, các hàm chuyển vị được xấp xỉ gần đúng theo một dạng nào đó, thông thường là các đa thức.

Đối tượng, phương pháp và phạm vi nghiên cứu của đề tài

Trong luận văn này, tác giả sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn nói trên để xây dựng và giải bài toán khung phẳng chịu uốn chịu tác dụng của tải trọng tĩnh.

Mục đích nghiên cứu của đề tài

*“Tính toán nội lực và chuyển vị của hệ khung
bằng phương pháp phần tử hữu hạn”*

Nhiệm vụ nghiên cứu của đề tài

1. Tìm hiểu và giới thiệu các phương pháp xây dựng và các phương pháp giải bài toán cơ học kết cấu hiện nay.
2. Trình bày phương pháp phần tử hữu hạn
3. Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn để giải bài toán khung phẳng, chịu tác dụng của tải trọng phân bố đều.
4. Lập chương trình máy tính điện tử cho các bài toán nêu trên.

CHƯƠNG 1.

CÁC PHƯƠNG PHÁP XÂY DỰNG VÀ GIẢI BÀI TOÁN CƠ HỌC KẾT CẤU

Trong chương này trình bày các phương pháp truyền thống để xây dựng các bài toán cơ học nói chung; giới thiệu bài toán cơ học kết cấu (bài toán tĩnh) và các phương pháp giải thường dùng hiện nay.

1.1. Phương pháp xây dựng bài toán cơ học

Bốn phương pháp chung để xây dựng bài toán cơ học kết cấu được trình bày dưới đây. Dùng lý thuyết dầm chịu uốn để minh họa.

1.1.1. Phương pháp xây dựng phương trình vi phân cân bằng phân tố

Phương trình vi phân cân bằng được xây dựng trực tiếp từ việc xét các điều kiện cân bằng lực của phân tố được tách ra khỏi kết cấu. Trong sức bền vật liệu khi nghiên cứu dầm chịu uốn ngang sử dụng các giả thiết sau:

- Trục dầm không bị biến dạng nên không có ứng suất.
- Mặt cắt thẳng góc với trục dầm sau khi biến dạng vẫn phẳng và thẳng góc với trục dầm (giả thiết Euler–Bernoulli).
- Không xét lực nén giữa các thớ theo chiều cao của dầm

Với giả thiết thứ ba thì chỉ có ứng suất pháp σ_x và các ứng suất tiếp σ_{xz} , σ_{zx} tác dụng lên phân tố dầm (hình 1.3), ứng suất pháp σ_z bằng không. Hai giả thiết thứ ba và thứ nhất dẫn đến trục dầm chỉ có chuyển vị thẳng đứng $y(x)$ và nó được gọi là đường độ võng hay đường đàn hồi của dầm. Giả thiết thứ nhất xem chiều dài trục dầm không thay đổi khi bị võng đòi hỏi độ võng của dầm là nhỏ so với chiều cao dầm, $y_{\max} / h \leq 1/5$. Với giả thiết thứ hai thì biến dạng trượt do ứng suất tiếp gây ra không được xét trong tính độ võng của dầm như trình bày dưới đây. Giả thiết này chỉ đúng khi tỉ lệ $h/l \leq 1/5$. Chuyển vị ngang u của điểm nằm ở độ cao z so với trục dầm bằng

$$u = -z \frac{dy}{dx}$$

Biến dạng và ứng suất xác định như sau

$$\varepsilon_x = -z \frac{d^2 y}{dx^2}; \quad \sigma_{xx} = -Ez \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Momen tác dụng lên trục dầm:

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} -Ebz^2 \frac{d^2 y}{dx^2} dz = -\frac{Ebh^3}{12} \frac{d^2 y}{dx^2}$$

hay $M = EJ\chi$ (1.7)

trong đó: $EJ = \frac{Ebh^3}{12}$, $\chi = -\frac{d^2 y}{dx^2}$

EJ được gọi là độ cứng uốn của dầm; χ là độ cong của đường đàn hồi và sẽ được gọi là biến dạng uốn; b là chiều rộng dầm. Để đơn giản trình bày, ở đây chỉ dùng trường hợp dầm có tiết diện chữ nhật.

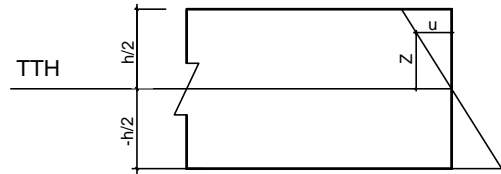
Cách tính nội lực momen ở trên không xét đến biến dạng trượt do các ứng suất tiếp gây ra. Tổng các ứng suất tiếp σ_{zx} trên mặt cắt sẽ cho ta lực cắt

Q tác dụng lên trục dầm:
$$Q = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{zx} dz$$

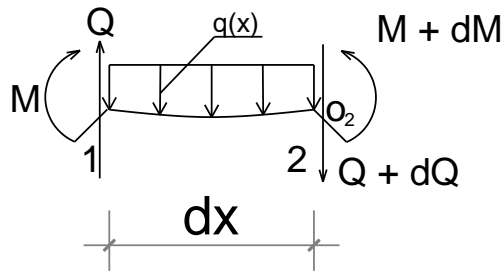
Biểu thức của ứng suất tiếp σ_{zx} trong tích phân trên sẽ trình bày sau.

Nhờ các giả thiết nêu trên, thay cho trạng thái ứng suất trong dầm, ta chỉ cần nghiên cứu phương trình cân bằng của các nội lực M và Q tác dụng lên trục dầm.

Xét phân tố dx của trục dầm chịu tác dụng của các lực M, Q và ngoại lực phân bố q, hình 1.3. Chiều dương của M, Q và q trên hình vẽ tương ứng với chiều dương của độ võng hướng xuống dưới.



Hình 1.2. Phân tố dầm



Hình 1.3. Xét cân bằng phân tố

Lấy tổng momen đối với điểm O_2 , bỏ qua các vô cùng bé bậc cao ta có

$$\frac{dM}{dx} - Q = 0 \quad (1.8)$$

Lấy tổng hình chiếu các lực lên trục thẳng đứng:

$$\frac{dQ}{dx} + q = 0 \quad (1.9)$$

Phương trình (1.8) là phương trình liên hệ giữa momen uốn và lực cắt, phương trình (1.9) là phương trình cân bằng lực cắt Q và ngoại lực phân bố q . Đó là hai phương trình xuất phát (hai phương trình đầu tiên) của phương pháp cân bằng phân tố. Lấy đạo hàm phương trình (1.8) theo x rồi cộng với phương trình (1.9), ta có phương trình dẫn xuất sau

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + q = 0 \quad (1.10)$$

Thay M xác định theo (1.7) vào (1.10) nhận được phương trình vi phân xác định đường đàn hồi của thanh

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = q \quad (1.11)$$

Phương trình (1.11) được giải với các điều kiện biên của y và các đạo hàm đến bậc ba của y (4 điều kiện), hai điều kiện biên tại mỗi đầu cuối thanh.

Các điều kiện biên thường dùng như sau

a) Liên kết khớp tại $x=0$:

Chuyển vị bằng không, $y|_{x=0} = 0$, momen uốn $M = 0$, suy ra

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} = 0$$

b) Liên kết ngàm tại $x=0$:

Chuyển vị bằng không, $y|_{x=0} = 0$, góc xoay bằng không, $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0$

c) không có gối tựa tại $x=0$:

Momen uốn $M = 0$, suy ra $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} = 0$; lực cắt $Q=0$, suy ra $\left. \frac{d^3 y}{dx^3} \right|_{x=0} = 0$

Các điều kiện tại $x=1$ cũng lấy tương tự như trên.

Bây giờ tìm hiểu sự phân bố ứng suất tiếp σ_{zx} trên chiều dày h của dầm. Trước tiên viết phương trình cân bằng ứng suất trên trục x như sau

$$-\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \quad \text{hay} \quad \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = -Ez \frac{d^3 y}{dx^3}$$

Tích phân phương trình trên theo z : $\sigma_{xz} = -\frac{Ez^2}{2} \frac{d^3 y}{dx^3} + C(x)$

Hàm $C(x)$ xác định từ điều kiện ứng suất tiếp bằng không tại mặt trên và mặt dưới dầm, $z = \pm \frac{h}{2}$. Ta có: $C(x) = \frac{Eh^2}{8} \frac{d^3 y}{dx^3}$

Ứng suất tiếp phân bố trên mặt cắt dầm có dạng

$$\sigma_{xz} = -\frac{E}{8} \frac{d^3 y}{dx^3} (4z^2 - h^2)$$

Đó là hàm parabol bậc hai. Ứng suất tiếp lớn nhất tại trục dầm ($z=0$) có giá trị bằng

$$\sigma_{xz}|_{z=0} = \frac{Eh^2}{8} \frac{d^3 y}{dx^3}$$

Tích phân hàm ứng suất tiếp theo chiều cao dầm rồi nhân với chiều rộng b ta có

lực cắt Q tác dụng lên phần trái của dầm

$$Q = \frac{Ebh^3}{12} \frac{d^3 y}{dx^3}$$

Ứng suất tiếp trung bình trên chiều cao dầm bằng: $\sigma_{xz}^{tb} = \frac{Eh^2}{12} \frac{d^3 y}{dx^3}$

Tỉ lệ giữa ứng suất tiếp max tại trục dầm và ứng suất trung bình $\alpha=1.5$.

1.1.2. Phương pháp năng lượng

Năng lượng của cơ hệ bao gồm động năng T và thế năng Π . Động năng được xác định theo khối lượng và vận tốc chuyển động, còn thế năng Π bao gồm thế năng biến dạng và công của các trường lực, phụ thuộc vào chuyển vị. Trường lực là lực có thế như lực trọng trường. Các lực ngoài tác dụng lên cơ hệ là lực không thế.

Đối với hệ bảo toàn, năng lượng là không đổi

$$T + \Pi = \text{const} \quad (1.12)$$

Do đó tốc độ thay đổi năng lượng phải bằng không

$$\frac{d}{dt}(T + \Pi) = 0 \quad (1.13)$$

Ta xét bài toán tĩnh, $T=0$, do đó

$$\Pi = \text{const} \quad (1.14)$$

Thế năng Π có thể biểu thị qua ứng suất và nội lực cũng có thể biểu thị qua chuyển vị và biến dạng. Vì vậy ta có hai nguyên lý biến phân năng lượng sau:

Nguyên lý thế năng biến dạng cực tiểu

Khi phương trình cân bằng được biểu thị qua ứng suất hoặc nội lực và do đó thế năng biến dạng cũng biểu thị qua ứng suất hoặc nội lực ta có nguyên lý thế năng biến dạng cực tiểu, nguyên lý Castiliano (1847-1884). Nguyên lý phát biểu như sau:

Trong tất cả các trạng thái cân bằng lực có thể thì trạng thái cân bằng thực xảy ra khi thế năng biến dạng là cực tiểu.

Trạng thái cân bằng lực có thể là trạng thái mà các lực tác dụng lên phân tử thỏa mãn các phương trình cân bằng. Ta viết nguyên lý dưới dạng sau:

$$\Pi(F) \rightarrow \min$$

Với ràng buộc là các phương trình cân bằng viết dưới dạng lực.

Đối với dầm ta có:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EJ} dx \rightarrow \min \quad (1.15)$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q \quad (1.16)$$

Nội lực cần tìm mômen uốn là hàm phân bố theo chiều dài dầm $M(x)$ và phải thỏa mãn các điều kiện liên kết ở hai đầu thanh (được xác định ở hai đầu thanh). Đây là bài toán cực trị có ràng buộc. Bằng cách dùng thừa số Lagrange $\lambda(x)$ đưa về bài toán không ràng buộc sau:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EJ} dx + \int_0^l \lambda(x) \left[\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right] dx \rightarrow \min \quad (1.17)$$

$\lambda(x)$ là thừa số Lagrange và cũng là ẩn của bài toán. Theo phép tính biến phân từ phiếm hàm (1.17) ta nhận được hai phương trình sau (phương trình Euler–Lagrange).

$$M = -EJ \frac{d^2 \lambda}{dx^2} \quad (1.18)$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q \quad (1.19)$$

$\lambda(x)$ có thứ nguyên là chuyển vị cho nên phương trình (1.18) biểu thị quan hệ giữa M và chuyển vị. Thế (1.18) vào (1.19) ta có

$$EJ \frac{d^4 \lambda}{dx^4} = q \quad (1.20)$$

$\lambda(x)$ là độ võng của dầm và phương trình (1.20) là phương trình vi phân cân bằng của dầm viết theo chuyển vị nhận được ở trên.

Nguyên lý công bù cực đại

Khi dùng ẩn là các chuyển vị và biến dạng thì có nguyên lý công bù cực đại.

Trong tất cả các chuyển vị động học có thể (khả dĩ) thì chuyển vị thực là chuyển vị có công bù cực đại.

Chuyển vị động học có thể là chuyển vị thỏa mãn các phương trình liên hệ giữa chuyển vị và biến dạng và thỏa mãn các điều kiện biên. Công bù bằng tích của ngoại lực và chuyển vị trừ đi năng lượng biến dạng.

$$[\text{Công ngoại lực} - \text{thế năng biến dạng}] \rightarrow \max$$

Với ràng buộc là các phương trình liên hệ giữa chuyển vị và biến dạng.

Lấy ví dụ đối với dầm chịu uốn, ta có

$$\int_0^l qy dx - \frac{1}{2} \int_0^l EJ \chi^2 dx \rightarrow \max \quad (1.21)$$

Với ràng buộc:

$$\chi = -\frac{d^2 y}{dx^2} \quad (1.22)$$

χ là biến dạng uốn cũng là độ cong của đường độ võng. Tích phân thứ nhất trong (1.21) là công toàn phần của ngoại lực (không có hệ số $\frac{1}{2}$), tích phân thứ hai là thế năng biến dạng biểu thị qua biến dạng uốn.

Thay χ từ (1.22) vào (1.21), ta có

$$\int_0^l qy dx - \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left(-\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 dx \rightarrow \max \quad (1.23)$$

Thay dấu của (1.23) ta có

$$\frac{1}{2} \int_0^l EJ \left(-\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^l qy dx \rightarrow \min \quad (1.24)$$

Khi y có giá trị xác định tại hai đầu mút dầm thì điều kiện cần để biểu thức (1.24) cực tiểu là phương trình Euler sau

$$EJ \frac{d^4y}{dx^4} = q \quad (1.25)$$

Phương trình (1.25) là phương trình vi phân cân bằng của dầm chịu uốn. Nguyên lý công bù cực đại dưới dạng biểu thức (1.24) được sử dụng rộng rãi trong tính toán công trình theo phương pháp phần tử hữu hạn.

1.1.3. Nguyên lý công ảo

Nguyên lý công ảo được sử dụng rất rộng rãi trong cơ học. Theo K.F. Gauss (1777-1855) thì mọi nguyên lý trong cơ học hoặc trực tiếp hoặc gián tiếp đều rút ra từ nguyên lý chuyển vị ảo.

Xét cơ hệ chất điểm ở trạng thái cân bằng ta có

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0,$$

(1.26)

$\sum X; \sum Y; \sum Z$: là tổng hình chiếu của tất cả các lực tác dụng lên ba trục của hệ toạ độ Đề các. Ta viết biểu thức sau:

$$\sum X\delta U + \sum Y\delta V + \sum Z\delta W = 0,$$

(1.27)

ở đây xem các $\delta U; \delta V; \delta W$; là các thừa số bất kỳ.

Từ (1.26) ta có (1.27) và ngược lại từ (1.27) ta sẽ nhận được (1.26) bởi vì các $\delta U; \delta V; \delta W$; là những thừa số bất kỳ. Bây giờ ta xem $\delta U; \delta V; \delta W$; là các biến phân của các chuyển vị ảo theo ba chiều của hệ tọa độ vuông góc. Chuyển vị ảo là chuyển vị bé do nguyên nhân bất kỳ bên ngoài nào đó gây ra. Các chuyển vị ảo này phải thoả mãn các điều kiện liên kết của hệ.

Khi có chuyển vị ảo thì vị trí của các lực tác dụng trên hệ có thể thay đổi nhưng phương chiều và độ lớn của nó vẫn giữ nguyên không đổi. Như vậy, các chuyển vị ảo $\delta U; \delta V; \delta W$ là các đại lượng độc lập với lực tác dụng và từ hai biểu thức (1.26) và (1.27) ta có nguyên lý công ảo:

Nếu như tổng công của các lực tác dụng của hệ thực hiện trên các chuyển vị ảo bằng không thì hệ ở trạng thái cân bằng.

Đối với hệ đàn hồi (hệ biến dạng) thì ngoài ngoại lực còn có nội lực. Vấn đề đặt ra ở đây là cách tính công của nội lực như thế nào.

Trước hết ta cần phải đưa thêm yêu cầu đối với chuyển vị ảo như sau:

Các chuyển vị ảo phải thoả mãn các liên hệ giữa chuyển vị và biến dạng. Nếu như các chuyển vị có biến dạng $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \dots$ thì biến phân các chuyển vị ảo $\delta u; \delta v; \delta w$ cũng phải có các biến dạng ảo tương ứng:

$$\frac{\partial}{\partial x} \delta u; \frac{\partial}{\partial y} \delta v; \dots$$

Thông thường công của nội lực (hoặc ứng suất) được tính qua thế năng biến dạng. Khi có các chuyển vị ảo $\delta U; \delta V; \delta W$; thì thế năng biến dạng Π sẽ thay đổi bằng đại lượng biến phân $\delta \Pi$. Do đó nguyên lý chuyển vị ảo đối với hệ biến dạng được viết như sau:

$$\delta \Pi - \sum X \delta U - \sum Y \delta V - \sum Z \delta W = 0, \quad (1.28)$$

Các đại lượng biến phân trong (1.28) đều là chuyển vị ảo cho nên nếu xem nội lực (ứng suất) trong quá trình chuyển vị ảo cũng không đổi thì dấu biến phân trong (1.28) có thể viết lại như sau:

$$\delta[\Pi - \sum XU - \sum YV - \sum ZW] = 0 \quad (1.29)$$

Hai biểu thức (1.28) và (1.29) dưới dạng chi tiết hơn được trình bày trong [30, Tr.261].

$$\delta \int_0^l \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 - qy \right] dx = 0 \text{ hay } \int_0^l \delta \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 - qy \right] dx = 0 \quad (1.30)$$

Phương trình Euler của (1.30) như sau: $EJ \frac{d^4 y}{dx^4} - q = 0$

1.1.4. Phương trình Lagrange:

Phương trình Lagrange là phương trình vi phân của chuyển động được biểu thị qua các tọa độ tổng quát (các chuyển vị tổng quát).

Gọi T là động năng và Π là thế năng của hệ, các q_i là các chuyển vị tổng quát và Q_i là các lực tổng quát thì phương trình Lagrange có dạng:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i, (i=1,2,3,\dots,n) \quad (1.31)$$

trong đó: $\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial t}$ là vận tốc của chuyển động. Đối với mỗi chuyển vị q_i sẽ có

một phương trình Lagrange. Động năng T trong tọa độ tổng quát là hàm của vận tốc và có thể là hàm của cả chuyển vị tổng quát.

Thế năng toàn phần của hệ bao gồm thế năng biến dạng và thế năng của lực có thế (lực trọng trường là lực có thế). Q_i là lực không thế có thể được hiểu là các lực ngoài tác dụng lên hệ (lực tổng quát). áp dụng phương trình Lagrange để xây dựng phương trình chuyển động của dầm chịu uốn như sau:

Gọi y_i là chuyển vị (tổng quát) của điểm i của dầm và q_i là lực tác dụng tại điểm i của dầm và m_i là khối lượng.

Động năng của dầm

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m \dot{y}_i^2 dx \quad \text{trong đó:} \quad \dot{y}_i = \frac{\partial y_i}{\partial t} \quad (1.32)$$

Thế năng biến dạng của dầm chịu uốn

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} EJ \left(\frac{\partial^2 y_i}{\partial x^2} \right)_i^2 \quad (1.33)$$

Dấu tổng lấy cho tất cả các điểm i của dầm. Phương trình Lagrange đối với dầm có dạng

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial y_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} = q_i, \quad (1.34)$$

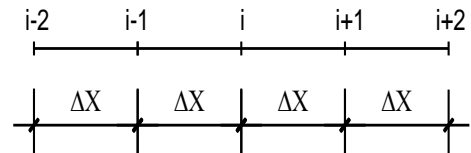
Ta tính hai thành phần đầu của phương trình (1.34)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \right) = \frac{\partial}{\partial t} m_i \dot{y}_i = m_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} = m_i \ddot{y}_i \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y_i} = 0$$

Để tính thế năng biến dạng có thể dùng phương pháp sai phân hữu hạn, hình 1.5.

Bởi vì độ võng y_i của dầm chỉ có mặt trong biểu thức thế năng biến dạng của ba điểm liên tiếp $i-1$, i và $i+1$, cho nên chỉ cần tính thế năng biến dạng của dầm (1.33) cho ba điểm này, Δx là khoảng cách giữa các điểm.



Hình 1.4. Bước sai phân

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} EJ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_i^2 &= \frac{1}{2} EJ \left(\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{\Delta x^2} \right)^2 \\ \frac{1}{2} EJ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{i-1}^2 &= \frac{1}{2} EJ \left(\frac{y_{i-2} - 2y_{i-1} + y_i}{\Delta x^2} \right)^2 \\ \frac{1}{2} EJ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{i+1}^2 &= \frac{1}{2} EJ \left(\frac{y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}}{\Delta x^2} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.36)$$

Tổng cộng ba phương trình trên cho ta thế năng của dầm để tính y_i . Ta tính $\frac{\partial \Pi}{\partial y_i}$ của phương trình (1.34).

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} &= EJ \left(\frac{-2y_{i-1} + 4y_i - 2y_{i+1} + y_{i-2} - 2y_{i-1} + y_i + y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}}{\Delta x^4} \right) \\ &= EJ \left(\frac{y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}}{\Delta x^4} \right) = EJ \frac{\Delta_i^4}{\Delta x^4} \Big|_i \end{aligned} \right\} \quad (1.37)$$

Biểu thức (1.37) biểu thị sai phân hữu hạn của $EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \Big|_i$.

Cộng (1.35) và (1.37) nhận được phương trình Lagrange đối với chuyển vị y_i

$$m \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \Big|_i = q_i \quad (1.38)$$

Điểm i là bất kỳ nên nhận được phương trình vi phân cân bằng của dầm

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = q \quad (1.39)$$

Đối với bài toán tĩnh $T=0$ ta có: $EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = q$ (1.40)

Phương pháp sử dụng phương trình Lagrange để nhận được phương trình vi phân của đường độ võng của dầm trình bày ở đây là của tác giả.

ở trên trình bày bốn phương pháp chung để xây dựng bài toán cơ, lấy bài toán dầm chịu uốn làm ví dụ để biết cách sử dụng chúng và để thấy bốn

đường lối đó là tương đương nhau nghĩa là đều dẫn về phương trình vi phân cân bằng của hệ.

1.2. Bài toán cơ học kết cấu và các phương pháp giải

Bài toán cơ học kết cấu nhằm xác định nội lực và chuyển vị của hệ thanh, tấm, vỏ dưới tác dụng của các loại tải trọng, nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức,... và được chia làm hai loại:

- Bài toán tĩnh định: là bài toán có cấu tạo hình học bất biến hình và đủ liên kết tựa với đất, các liên kết sắp xếp hợp lý, chịu các loại tải trọng. Để xác định nội lực và chuyển vị chỉ cần dùng các phương trình cân bằng tĩnh học là đủ;

- Bài toán siêu tĩnh: là bài toán có cấu tạo hình học bất biến hình và thừa liên kết (nội hoặc ngoại) chịu các loại tải trọng, nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức,... Để xác định nội lực và chuyển vị ngoài các phương trình cân bằng ta còn phải bổ sung các phương trình biến dạng.

Nếu tính đến tận ứng suất, có thể nói rằng mọi bài toán cơ học vật rắn biến dạng nói chung và bài toán cơ học kết cấu nói riêng đều là bài toán siêu tĩnh.

Đã có nhiều phương pháp để giải bài toán siêu tĩnh. Hai phương pháp truyền thống cơ bản là phương pháp lực và phương pháp chuyển vị. Khi sử dụng chúng thường phải giải hệ phương trình đại số tuyến tính. Số lượng các phương trình tùy thuộc vào phương pháp phân tích. Từ phương pháp chuyển vị ta có hai cách tính gần đúng hay được sử dụng là H. Cross và G. Kani. Từ khi xuất hiện máy tính điện tử, người ta bổ sung thêm các phương pháp số khác như: Phương pháp phân tử hữu hạn; Phương pháp sai phân hữu hạn...

1.2.1. Phương pháp lực

Trong hệ siêu tĩnh ta thay các liên kết thừa bằng các lực chưa biết, còn giá trị các chuyển vị trong hệ cơ bản tương ứng với vị trí và phương của các lực ẩn số do bản thân các lực đó và do các nguyên nhân bên ngoài gây ra bằng không. Từ điều kiện này ta lập được hệ các phương trình đại số tuyến tính, giải hệ này ta tìm được các ẩn số và từ đó suy ra các đại lượng cần tìm.

1.2.2. Phương pháp chuyển vị

Khác với phương pháp lực, phương pháp chuyển vị lấy chuyển vị tại các nút làm ẩn. Những chuyển vị này phải có giá trị sao cho phản lực tại các liên kết đặt thêm vào hệ do bản thân chúng và do các nguyên nhân bên ngoài gây ra bằng không. Lập hệ phương trình đại số tuyến tính thỏa mãn điều kiện này và giải hệ đó ta tìm được các ẩn, từ đó xác định các đại lượng còn lại. Hệ cơ bản trong phương pháp chuyển vị là duy nhất và giới hạn giải các bài toán phụ thuộc vào số các phần tử mẫu có sẵn.

1.2.3. Phương pháp hỗn hợp và phương pháp liên hợp

Phương pháp hỗn hợp, phương pháp liên hợp là sự kết hợp song song giữa phương pháp lực và phương pháp chuyển vị. Trong phương pháp này ta có thể chọn hệ cơ bản theo phương pháp lực nhưng không loại bỏ hết các liên kết thừa mà chỉ loại bỏ các liên kết thuộc bộ phận thích hợp với phương pháp lực; hoặc chọn hệ cơ bản theo phương pháp chuyển vị nhưng không đặt đầy đủ các liên kết phụ nhằm ngăn cản toàn bộ các chuyển vị nút mà chỉ đặt các liên kết phụ tại các nút thuộc bộ phận thích hợp với phương pháp chuyển vị. Trường hợp đầu hệ cơ bản là siêu tĩnh, còn trường hợp sau hệ cơ bản là siêu động.

Trong cả hai cách nói trên, bài toán ban đầu được đưa về hai bài toán độc lập: Một theo phương pháp lực và một theo phương pháp chuyển vị.

1.2.4. Phương pháp phần tử hữu hạn

Thực chất của phương pháp phần tử hữu hạn là rời rạc hóa bản thân kết cấu (chia kết cấu thành một số phần tử có kích thước hữu hạn). Các phần tử liên hệ liên hệ với nhau bằng các phương trình cân bằng và các phương trình liên tục.

Để giải quyết bài toán cơ học kết cấu, có thể tiếp cận phương pháp này bằng đường lối trực tiếp, suy diễn vật lý hoặc đường lối toán học, suy diễn biến phân. Tuy nhiên bằng cách nào đi chăng nữa thì kết quả thu được là một ma trận (độ cứng hoặc độ mềm). Ma trận đó được xây dựng dựa trên cơ sở

cực trị hóa phiếm hàm biểu diễn năng lượng. Trong phạm vi mỗi phần tử riêng biệt, các hàm chuyển vị được xấp xỉ gần đúng theo một dạng nào đó, thông thường là các đa thức.

1.2.5. Phương pháp sai phân hữu hạn

Phương pháp sai phân hữu hạn cũng là thay thế hệ liên tục bằng mô hình rời rạc, song hàm cần tìm (hàm mang đến cho phiếm hàm giá trị dừng), nhận những giá trị gần đúng tại một số hữu hạn điểm của miền tích phân, còn giá trị các điểm trung gian sẽ được xác định nhờ một phương pháp tích phân nào đó. Phương pháp này cho lời giải số của phương trình vi phân về chuyển vị và nội lực tại các điểm nút. Thông thường ta phải thay đạo hàm bằng các sai phân của hàm tại các nút. Phương trình vi phân của chuyển vị hoặc nội lực được viết dưới dạng sai phân tại mỗi nút, biểu thị quan hệ của chuyển vị tại một nút và các nút lân cận dưới tác dụng của ngoại lực.

1.2.6. Phương pháp hỗn hợp sai phân – biến phân

Kết hợp phương pháp sai phân với phương pháp biến phân ta có một phương pháp linh động hơn: Hoặc là sai phân các đạo hàm trong phương trình biến phân hoặc là sai phân theo một phương và biến phân theo một phương khác (đối với bài toán hai chiều).

CHƯƠNG 2

PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Trong chương trình bày một số khái niệm cơ bản của phương pháp phần tử hữu hạn, và sử dụng nó để xây dựng và giải bài toán dao động tự do của dầm, được trình bày trong chương 3.

2.1. Phương pháp phần tử hữu hạn

Phương pháp phần tử hữu hạn là một phương pháp số đặc biệt có hiệu quả để tìm dạng gần đúng của một hàm chưa biết trong miền xác định V của nó. Tuy nhiên phương pháp phần tử hữu hạn không tìm dạng xấp xỉ của hàm cần tìm trên toàn miền V mà chỉ trong từng miền con V_e (phần tử) thuộc miền xác định V . Do đó phương pháp này rất thích hợp với hàng loạt bài toán vật lý và kỹ thuật trong đó hàm cần tìm được xác định trên các miền phức tạp gồm nhiều vùng nhỏ có đặc tính hình học, vật lý khác nhau, chịu những điều kiện biên khác nhau. Phương pháp ra đời từ trực quan phân tích kết cấu, rồi được phát biểu một cách chặt chẽ và tổng quát như một phương pháp biến phân hay phương pháp dư có trọng nhưng được xấp xỉ trên mỗi phần tử.

Trong phương pháp phần tử hữu hạn chia kết cấu công trình thành một số hữu hạn các phần tử. Các phần tử này được nối với nhau tại các điểm định trước thường tại đỉnh phần tử (thậm trí tại các điểm trên biên phần tử) gọi là nút. Như vậy việc tính toán kết cấu công trình được đưa về tính toán trên các phần tử của kết cấu sau đó kết nối các phần tử này lại với nhau ta được lời giải của một kết cấu công trình hoàn chỉnh. Tương tự như phương pháp sai phân hữu hạn cũng chia công trình thành các đoạn nhỏ (phần tử) và các trạng thái chuyển vị (trường chuyển vị) v.v... được xác định tại các điểm nút sai phân. Sự khác biệt của hai phương pháp là Phương pháp sai phân hữu hạn sau khi tìm được các chuyển vị tại các nút của sai phân còn các điểm nằm giữa

hai nút được xác định bằng nội suy tuyến tính, còn phương pháp phần tử hữu hạn sau khi xác định được chuyển vị tại các nút của phần tử thì các điểm bên trong được xác định bằng hàm nội suy (hàm dạng).

Với bài toán cơ học vật rắn biến dạng, tùy theo ý nghĩa vật lý của hàm nội suy có thể phân tích bài toán theo 3 loại mô hình sau:

- Mô hình chuyển vị: Xem chuyển vị là đại lượng cần tìm và hàm nội suy biểu diễn gần đúng dạng phân bố của chuyển vị trong phần tử.

- Mô hình cân bằng: Hàm nội suy biểu diễn gần đúng dạng phân bố của ứng suất hay nội lực trong phần tử.

- Mô hình hỗn hợp: Coi các đại lượng chuyển vị và ứng suất là 2 yếu tố độc lập riêng biệt. Các hàm nội suy biểu diễn gần đúng dạng phân bố của cả chuyển vị lẫn ứng suất trong phần tử.

Hiện nay, khi áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn để giải các bài toán cơ học thường sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn theo mô hình chuyển vị. Sau đây luận văn trình bày nội dung phương pháp phần tử hữu hạn theo mô hình chuyển vị.

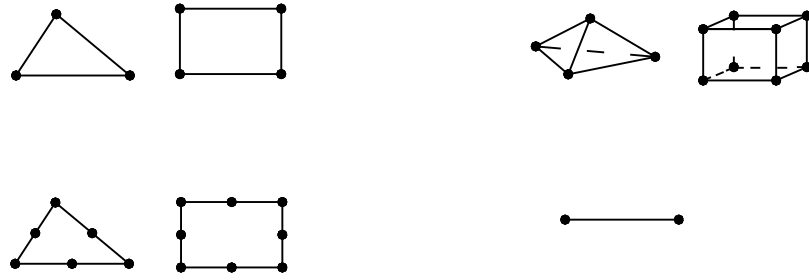
2.1.1 Nội dung phương pháp phần tử hữu hạn theo mô hình chuyển vị

Trong phương pháp phần tử hữu hạn - mô hình chuyển vị, thành phần chuyển vị được xem là đại lượng cần tìm. Chuyển vị được lấy xấp xỉ trong dạng một hàm đơn giản gọi là hàm nội suy (hay còn gọi là hàm chuyển vị). Trình tự phân tích bài toán theo phương pháp phần tử hữu hạn - mô hình chuyển vị có nội dung như sau:

2.1.1.1. Rời rạc hoá miền khảo sát

Miền khảo sát (đối tượng nghiên cứu) được chia thành các miền con hay còn gọi là các phần tử có hình dạng hình học thích hợp. Các phần tử này được coi là liên kết với nhau tại các nút nằm tại đỉnh hay biên của phần tử. Số nút của phần tử không lấy tùy tiện mà phụ thuộc vào hàm chuyển vị định chọn.

Các phần tử thường có dạng hình học đơn giản (hình 2.1)



Hình 2.1 Dạng hình học đơn giản của phần tử

2.1.1.2. Chọn hàm xấp xỉ

Một trong những tư tưởng của phương pháp phần tử hữu hạn là xấp xỉ hoá đại lượng cần tìm trong mỗi miền con. Điều này cho phép ta khả năng thay thế việc tìm nghiệm vốn phức tạp trong toàn miền V bằng việc tìm nghiệm tại các nút của phần tử, còn nghiệm trong các phần tử được tìm bằng việc dựa vào hàm xấp xỉ đơn giản.

Giả thiết hàm xấp xỉ (hàm chuyển vị) sao cho đơn giản đối với việc tính toán nhưng phải thoả mãn điều kiện hội tụ. Thường chọn dưới dạng hàm đa thức. Biểu diễn hàm xấp xỉ theo tập hợp giá trị các thành phần chuyển vị và có thể cả đạo hàm của nó tại các nút của phần tử. Hàm xấp xỉ này thường được chọn là hàm đa thức vì các lý do sau:

- Đa thức khi được xem như một tổ hợp tuyến tính của các đơn thức thì tập hợp các đơn thức thoả mãn yêu cầu độc lập tuyến tính như yêu cầu của Ritz, Galerkin.

- Hàm xấp xỉ dạng đa thức thường dễ tính toán, dễ thiết lập công thức khi xây dựng các phương trình của phần tử hữu hạn và tính toán bằng máy tính. Đặc biệt là dễ tính đạo hàm, tích phân.

- Có khả năng tăng độ chính xác bằng cách tăng số bậc của đa thức xấp xỉ (về lý thuyết đa thức bậc vô cùng sẽ cho nghiệm chính xác). Tuy nhiên, khi thực hành tính toán ta thường lấy đa thức xấp xỉ bậc thấp mà thôi.

Tập hợp các hàm xấp xỉ sẽ xây dựng nên một trường chuyển vị xác định một trạng thái chuyển vị duy nhất bên trong phần tử theo các thành phần

chuyển vị nút. Từ trường chuyển vị sẽ xác định một trạng thái biến dạng, trạng thái ứng suất duy nhất bên trong phần tử theo các giá trị của các thành phần chuyển vị nút của phần tử.

Khi chọn bậc của hàm đa thức xấp xỉ cần lưu ý các yêu cầu sau:

- Các đa thức xấp xỉ cần thỏa mãn điều kiện hội tụ. Đây là yêu cầu quan trọng vì phương pháp phần tử hữu hạn là một phương pháp số, do đó phải đảm bảo khi kích thước phần tử giảm thì kết quả sẽ hội tụ đến nghiệm chính xác.

- Các đa thức xấp xỉ được chọn sao cho không mất tính đẳng hướng hình học.

- Số tham số của các đa thức xấp xỉ phải bằng số bậc tự do của phần tử, tức là bằng số thành phần chuyển vị nút của phần tử. Yêu cầu này cho khả năng nội suy đa thức của hàm xấp xỉ theo giá trị đại lượng cần tìm, tức là theo giá trị các thành phần chuyển vị tại các điểm nút của phần tử.

2.1.1.3. Xây dựng phương trình cân bằng trong từng phần tử, thiết lập ma trận độ cứng $[K]_e$ và vectơ tải trọng nút $\{F\}_e$ của phần tử thứ e .

Thiết lập mối quan hệ giữa ứng suất và chuyển vị nút phần tử

Cần thiết lập biểu thức tính biến dạng và ứng suất tại một điểm bất kì trong phần tử thông qua ẩn cơ bản là chuyển vị nút phần tử $\{\delta\}_e$. Sử dụng các công thức trong Lí thuyết đàn hồi, mối quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị :

$$\{\varepsilon\} = [\nabla]\{u\} \quad (2.1)$$

Ta có: $\{u\} = [N]\{\delta\}_e \quad (2.2)$

trong đó: $[N]$ - gọi là ma trận hàm dạng, chứa các tọa độ của các điểm nút của phần tử và các biến của điểm bất kì đang xét.

Thay (2.2) vào (2.1), ta được:

$$\{\varepsilon\} = [\nabla][N]\{\delta\}_e = [B]\{\delta\}_e \quad (2.3)$$

trong đó : $[B] = [\nabla][N]$ - ma trận chứa đạo hàm của hàm dạng.

Theo lý thuyết đàn hồi quan hệ giữa ứng suất và biến dạng :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (2.4)$$

Thay (2.3) vào (2.4), ta được :

$$\{\sigma\} = [D][B]\{\delta\}_e \quad (2.5)$$

Thế năng toàn phần Π_e của phần tử

Xét trường hợp phần tử chịu tải trọng tập trung tại nút $\{P_n\}_e$ (ứng với chuyển vị nút $\{\delta\}_e$) và chịu tải trọng phân bố trên bề mặt phần tử có cường độ tại điểm M bất kì là $\{q\} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix}$.

Thiết lập biểu thức tính thế năng toàn phần Π_e của phần tử theo công của ngoại lực W_e và thế năng biến dạng U_e của phần tử đó.

$$\Pi_e = U_e - W_e \quad (2.6)$$

Công ngoại lực W_e (không xét lực thể tích) được tính:

$$W_e = \{\delta\}_e^T \{P_n\}_e + \int_S \{u\}^T \{q\} dS$$

Từ (2.2), ta có: $\{u\} = [N]\{\delta\}_e \Rightarrow \{u\}^T = ([N]\{\delta\}_e)^T = \{\delta\}_e^T [N]^T$

Thay vào biểu thức tính công ngoại lực W_e trên, thu được:

$$W_e = \{\delta\}_e^T \{P_n\}_e + \{\delta\}_e^T \int_S [N]^T \{q\} dS \quad (2.7)$$

Thế năng biến dạng U_e của PT được tính:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV$$

Thay (2.3) và (2.5) vào biểu thức tính thế năng biến dạng U_e của phần tử, ta có:

$$U_e = \frac{1}{2} \{\delta\}_e^T \left(\int_V [B]^T [D] [B] dV \right) \{\delta\}_e \quad (2.8)$$

Thay (2.7) và (2.8) vào (2.6) thu được thế năng toàn phần của phần tử :

$$\Pi_e = U_e - W_e = \frac{1}{2} \{\delta\}_e^T \left(\int_V [B]^T [D] [B] dV \right) \{\delta\}_e - \left(\{\delta\}_e^T \{P_n\}_e + \{\delta\}_e^T \int_S [N]^T \{q\} dS \right) \quad (2.9)$$

$$\text{Đặt: } [K]_e = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (2.10)$$

$[K]_e$ gọi là ma trận độ cứng phần tử. Vì $[D]$ là ma trận đối xứng nên tích $([B]^T [D] [B])$ cũng đối xứng và do đó $[K]_e$ là ma trận đối xứng.

$$\text{Đặt: } \{F\}_e = \{P_n\}_e + \int_S [N]^T \{q\} dS = \{P_n\}_e + \{P_q\}_e \quad (2.11)$$

$\{F\}_e$ - là vectơ tải trọng nút của phần tử; được xây dựng bởi ngoại lực đặt tại nút phần tử $\{P_n\}_e$ và ngoại lực đặt trong phần tử qui về nút $\{P_q\}_e$

trong đó:
$$\{P_q\}_e = \int_S [N]^T \{q\} dS \quad (2.12)$$

Thay (2.11) và (2.12) vào (2.9), ta được :

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \{\delta\}_e^T [K]_e \{\delta\}_e - \{\delta\}_e^T \{F\}_e \quad (2.13)$$

Thiết lập phương trình cân bằng

Theo nguyên lí dừng thế năng toàn phần, điều kiện cân bằng của phần tử tại các điểm nút :

$$\partial \Pi_e = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Pi_e}{\partial \{\delta\}_e} = 0 \quad (2.14)$$

Tiến hành lấy đạo hàm riêng lần lượt với từng chuyển vị nút và cho bằng 0, thu được m phương trình (cho phần tử có m chuyển vị nút):

$$\frac{\partial \Pi_e}{\partial \{\delta\}_e} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \Pi_e}{\partial \delta_1} \\ \frac{\partial \Pi_e}{\partial \delta_2} \\ \dots \\ \frac{\partial \Pi_e}{\partial \delta_m} \end{array} \right\} = 0 \quad (2.15)$$

Thay Π_e theo (2.13) vào (2.15) và áp dụng phép lấy đạo hàm riêng đối với ma trận $\left(\frac{\partial (\{X\}^T [A] \{X\})}{\partial \{X\}} = 2[A] \{X\}; \frac{\partial (\{X\}^T \{B\})}{\partial \{X\}} = \{B\} \right)$, thu được:

$$[K]_e \{\delta\}_e - \{F\}_e = 0 \quad (2.16)$$

Suy ra :
$$[K]_e \{\delta\}_e = \{F\}_e \quad (2.17)$$

trong đó:

$\{F\}_e$ - vectơ tải trọng nút của phần tử thứ e xét trong hệ tọa độ địa phương;

$\{\delta\}_e$ - vectơ chuyển vị nút của phần tử thứ e xét trong hệ tọa độ địa phương;

$[K]_e$ - ma trận độ cứng của phần tử thứ e xét trong hệ tọa độ địa phương.

Phương trình (2.17) chính là phương trình cân bằng của phần tử thứ e.

2.1.1.4. Ghép nối các phần tử xây dựng phương trình cân bằng của toàn hệ.

Giả sử hệ kết cấu được rời rạc hoá thành m phần tử. Theo (2.17) ta viết được m phương trình cân bằng cho tất cả m phần tử trong hệ tọa độ riêng của từng phần tử. Sau khi chuyển về hệ tọa độ chung của toàn kết cấu, tiến tới gộp các phương trình cân bằng của từng phần tử trong cả hệ, thu được phương trình cân bằng cho toàn hệ kết cấu trong hệ tọa độ chung:

$$[K']\{\delta'\} = \{F'\} \quad (2.18)$$

Do thứ tự các thành phần trong vector chuyển vị nút $\{\delta'\}_e$ của từng phần tử khác với thứ tự trong vector chuyển vị nút $\{\delta'\}$ của toàn hệ kết cấu, nên cần lưu ý xếp đúng vị trí của từng thành phần trong $[K']_e$ và $\{F'\}_e$ vào $[K']$ và $\{F'\}$. Việc sắp xếp này thường được áp dụng phương pháp số mã, hay sử dụng ma trận định vị phần tử $[H]_e$ để thiết lập các ma trận tổng thể và vector tải trọng nút tổng thể của toàn hệ kết cấu.

Áp dụng ma trận định vị phần tử $[H]_e$

Giả sử hệ kết cấu được rời rạc hoá thành m phần tử. Số bậc tự do của toàn hệ là n . Vectơ chuyển vị nút tổng thể có dạng:

$$\{\delta'\} = \{\delta'_1 \quad \delta'_2 \quad \dots \quad \delta'_n\}^T \quad (2.19)$$

Với phần tử thứ e , số bậc tự do là n_e , có vectơ chuyển vị nút trong hệ tọa độ chung là $\{\delta'\}_e$. Các thành phần của $\{\delta'\}_e$ nằm trong số các thành phần của $\{\delta'\}$. Do đó có sự biểu diễn quan hệ giữa 2 vectơ này như sau:

$$\{\delta'\}_e = [H]_e \{\delta'\} \quad (2.20)$$

$(n_e \times 1) \quad (n_e \times n) \quad (n \times 1)$

trong đó: $[H]_e$ - là ma trận định vị của phần tử e , nó cho thấy hình ảnh sắp xếp các thành phần của vectơ $\{\delta'\}_e$ trong $\{\delta'\}$.

Dựa vào (2.13) ta xác định được thế năng toàn phần cho từng phần tử. Thay (2.20) vào (2.13), sau đó cộng gộp của m phần tử, xác định được thế năng toàn phần của hệ:

$$\Pi = \sum_{e=1}^m \left[\frac{1}{2} \{\delta'\}^T [\mathbf{H}]_e^T [\mathbf{K}']_e [\mathbf{H}]_e \{\delta'\} - \{\delta'\}^T [\mathbf{H}]_e^T \{\mathbf{F}'\}_e \right] \quad (2.21)$$

Biểu thức (2.21) biểu diễn thế năng toàn phần của hệ theo vector chuyển vị nút tổng thể $\{\delta'\}$. áp dụng nguyên lý thế năng dừng toàn phần sẽ có điều kiện cân bằng của toàn hệ tại điểm nút:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{\delta'\}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial \delta'_1} \\ \frac{\partial \Pi_e}{\partial \delta'_2} \\ \dots \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \delta'_n} \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.22)$$

Áp dụng phép lấy đạo hàm riêng đối với ma trận thu được:

$$\left(\sum_{e=1}^m [\mathbf{H}]_e^T [\mathbf{K}']_e [\mathbf{H}]_e \right) \{\delta'\} - \sum_{e=1}^m [\mathbf{H}]_e^T \{\mathbf{F}'\}_e = \{0\} \quad (2.23)$$

Nhận thấy đây chính là phương trình cân bằng cho toàn hệ. So sánh với (2.18), thu được:

$$\text{Ma trận độ cứng tổng thể: } [\mathbf{K}'] = \sum_{e=1}^m [\mathbf{H}]_e^T [\mathbf{K}']_e [\mathbf{H}]_e \quad (2.24)$$

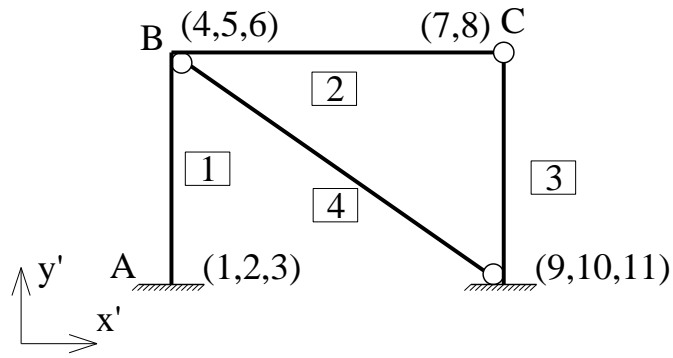
$$\text{Vector tải trọng nút tổng thể: } \{\mathbf{F}'\} = \sum_{e=1}^m [\mathbf{H}]_e^T \{\mathbf{F}'\}_e \quad (2.25)$$

Ví dụ 2.1: Xác định các ma trận định vị $[\mathbf{H}]_e$ của dầm với 4 điểm nút, có các thành phần chuyển vị nút như trên hình 2.2.

Lời giải

Vector chuyển vị nút tổng thể của kết cấu trong hệ tọa độ chung:

$$\{\delta'\} = \{\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3 \quad \delta_4 \quad \delta_5 \quad \delta_6 \quad \delta_7 \quad \delta_8 \quad \delta_9 \quad \delta_{10} \quad \delta_{11}\}^T$$



Hình 2.2 Hình ví dụ 2.1

Vecto chuyển vị nút của từng phần tử biểu diễn theo vectơ chuyển vị nút tổng thể:

$$\{\delta'\}_1 = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} = [\mathbf{H}]_1 \{\delta'\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_9 \\ \delta_{10} \\ \delta_{11} \end{Bmatrix}$$

$$\{\delta'\}_2 = \begin{Bmatrix} \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \end{Bmatrix} = [\mathbf{H}]_2 \{\delta'\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{10} \\ \delta_{11} \end{Bmatrix}$$

$$\{\delta'\}_3 = \begin{Bmatrix} \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \\ \delta_{10} \\ \delta_{11} \end{Bmatrix} = [\mathbf{H}]_3 \{\delta'\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{10} \\ \delta_{11} \end{Bmatrix}$$

$$\{\delta'\}_4 = \begin{Bmatrix} \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_9 \\ \delta_{10} \end{Bmatrix} = [\mathbf{H}]_4 \{\delta'\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{11} \end{Bmatrix}$$

Ma trận độ cứng, véc tơ tải tác dụng tại nút của từng phần tử:

$$[K']_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ & & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ & & & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ & & & & a_{55} & a_{56} \\ & & & & & a_{66} \end{bmatrix} \quad ; \{F'\}_1 = \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{Bmatrix}$$

$$[K']_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ & & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ & & & b_{44} & b_{45} \\ & & & & b_{55} \end{bmatrix} \quad ; \{F'\}_2 = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{Bmatrix}$$

$$[K']_3 = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ & & & c_{44} & c_{45} \\ & & & & c_{55} \end{bmatrix} \quad ; \{F'\}_3 = \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_2 \\ g_2 \\ g_2 \end{Bmatrix}$$

$$[K']_4 = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ & & d_{33} & d_{34} \\ & & & d_{44} \end{bmatrix} \quad ; \{F'\}_4 = \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{Bmatrix}$$

Ma trận độ cứng tổng thể: $[K'] = \sum_{e=1}^4 [H]_e^T [K']_e [H]_e$

$$[K'] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & a_{44} + b_{11} + d_{11} & a_{45} + b_{12} + d_{12} & a_{46} + b_{13} & b_{14} & b_{15} & d_{13} & d_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & a_{55} + b_{22} + d_{22} & a_{56} + b_{23} & b_{24} & b_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & a_{66} + b_{33} & b_{34} & b_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & b_{44} + c_{11} & b_{45} + c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & b_{55} + c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & c_{33} + e_{33} & c_{34} + e_{34} & c_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & c_{44} + e_{44} & c_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & c_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vectơ tải trọng nút tổng thể: $[F'] = \sum_{e=1}^4 [H]_e^T \{F'\}_e$

$$[F'] = \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 + f_1 + h_1 \\ e_5 + f_2 + h_2 \\ e_6 + f_3 \\ f_4 + g_1 \\ f_5 + g_2 \\ g_3 + h_3 \\ g_4 + h_4 \\ g_5 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{matrix}$$

Việc sử dụng ma trận định vị $[H]_e$ trong (2.24) và (2.25) để tính ma trận độ cứng $[K']$ và vectơ tải trọng nút $\{F'\}$ thực chất là sắp xếp các thành phần của ma trận độ cứng phần tử $[K']_e$ và vectơ tải trọng nút phần tử $\{F'\}_e$ vào vị trí của nó trong ma trận độ cứng tổng thể $[K']$ và vectơ tải trọng nút tổng thể $\{F'\}$. Tuy nhiên trong thực tế người ta hay sử dụng phương pháp số mã.

Phương pháp đánh số mã

Khi tiến hành ghép nối ma trận độ cứng của kết cấu và véc tơ tải trọng tác dụng tại nút, ta làm theo các bước sau:

- Tiến hành đánh số mã của các thành phần véc tơ chuyển vị nút tại các nút của kết cấu và đánh số mã cho phần tử.
- Lập bảng xác định mã cục bộ của các phần tử theo mã tổng thể của kết cấu.
- Tính toán xác định các ma trận độ cứng, véc tơ tải trọng tác dụng tại các nút của phần tử theo mã cục bộ và tương ứng với mã tổng thể trong hệ tọa độ chung.
- Tiến hành ghép nối ma trận độ cứng và véc tơ tải trọng tác dụng nút của các phần tử thành ma trận độ cứng và véc tơ tải trọng tác dụng nút của toàn bộ hệ kết cấu trong hệ tọa độ chung theo công thức.

$$k'_{ij} = \sum (k'_{ij})_e \quad (2.26)$$

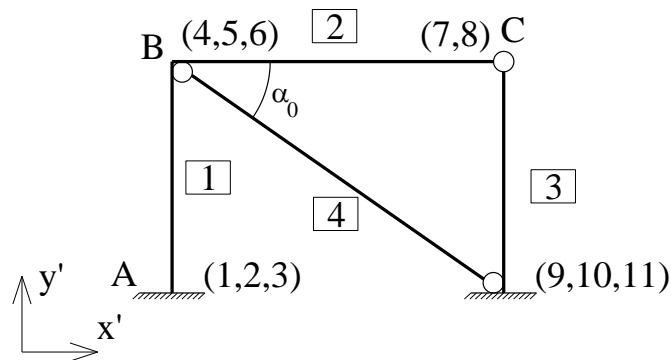
trong đó:

- + i, j : là số hiệu mã tổng thể của toàn bộ kết cấu trong hệ tọa độ chung;

+ k'_{ij} : là hệ số của trong ma trận độ cứng của toàn bộ kết cấu tương ứng với hàng có số hiệu mã tổng thể i và cột có số hiệu mã tổng thể j trong hệ tọa độ chung;

+ $(k'_{ij})_e$: là hệ số của ma ma trận độ cứng của phần tử tương ứng với hàng có số hiệu mã tổng thể i và cột có số hiệu mã tổng thể j trong hệ tọa độ chung

Ví dụ 2.2: Thiết lập ma trận độ cứng tổng thể $[K']$ và vectơ tải trọng nút $\{F'\}$ của toàn hệ kết cấu của hệ trên hình 2.3.



Hình 2.3 Hình ví dụ 2.2

Lời giải

- Đánh số mã của các thành phần véc tơ chuyển vị nút tại các nút của kết cấu và đánh số mã cho các phần tử như hình.
- Lập bảng xác định mã cục bộ của các phần tử theo mã tổng thể của kết cấu.

Phần tử			Mã cục bộ					
TT	Loại	α	1	2	3	4	5	6
			Số mã toàn thể					
1		90	1	2	3	4	5	6
2		0	4	5	6	7	8	
3		-90	7	8	9	10	11	
4		α_0	4	5	9	10		

- Tính toán xác định các ma trận độ cứng $[K']_e$, véc tơ tải trọng tác dụng tại các nút $\{F'\}_e$ của phần tử theo mã cục bộ và tương ứng với mã tổng thể trong hệ tọa độ chung.

$$\begin{array}{c}
\text{CB } 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \\
1 \left[\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ & a_{22} & & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ & & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ & & & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ & (\dot{\mathbf{x}}) & & & a_{55} & a_{56} \\ & & & & & a_{66} \end{array} \right] \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \\
2 \\
3 \\
4 \\
5 \\
6 \\
1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad \text{TT}
\end{array}
; \{F'\}_1 = \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\text{CB } 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \\
1 \left[\begin{array}{ccccc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ & & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ & (\dot{\mathbf{x}}) & & b_{44} & b_{45} \\ & & & & b_{55} \end{array} \right] \begin{array}{l} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \\
2 \\
3 \\
4 \\
5 \\
4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad \text{TT}
\end{array}
; \{F'\}_2 = \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\text{CB } 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \\
1 \left[\begin{array}{ccccc} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ & (\dot{\mathbf{x}}) & & c_{44} & c_{45} \\ & & & & c_{55} \end{array} \right] \begin{array}{l} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{array} \\
2 \\
3 \\
4 \\
5 \\
7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad \text{TT}
\end{array}
; \{F'\}_3 = \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} g_1 \\ g_2 \\ g_2 \\ g_2 \\ g_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\text{CB } 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\
1 \left[\begin{array}{cccc} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ & (\dot{\mathbf{x}}) & d_{33} & d_{34} \\ & & & d_{44} \end{array} \right] \begin{array}{l} 4 \\ 5 \\ 9 \\ 10 \end{array} \\
2 \\
3 \\
4 \\
4 \quad 5 \quad 9 \quad 10 \quad \text{TT}
\end{array}
; \{F'\}_4 = \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 \\ 5 \\ 9 \\ 10 \end{array}
\end{array}$$

- Tiến hành ghép nối ma trận độ cứng và véctơ tải trọng tác dụng nút của các phần tử thành ma trận độ cứng $[K']$ và véctơ tải trọng tác dụng nút $\{F'\}$ của toàn bộ hệ kết cấu trong hệ tọa độ chung theo công thức.

$$[K'] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & a_{44} + b_{11} + d_{11} & a_{45} + b_{12} + d_{12} & a_{46} + b_{13} & b_{14} & b_{15} & d_{13} & d_{14} & 0 \\ & & & & a_{55} + b_{22} + d_{22} & a_{56} + b_{23} & b_{24} & b_{25} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & a_{66} + b_{33} & b_{34} & b_{35} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & b_{44} + c_{11} & b_{45} + c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ & & & & & & & b_{55} + c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ & & & & & & & & c_{33} + e_{33} & c_{34} + e_{34} & c_{35} \\ & & & & & & & & & c_{44} + e_{44} & c_{45} \\ & & & & & & & & & & c_{55} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{matrix}$$

(đx)

$$[F'] = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 + f_1 + h_1 \\ e_5 + f_2 + h_2 \\ e_6 + f_3 \\ f_4 + g_1 \\ f_5 + g_2 \\ g_3 + h_3 \\ g_4 + h_4 \\ g_5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{matrix}$$

2.1.1.5: Sử lý điều kiện biên của bài toán

Phương pháp phần tử hữu hạn là cuối cùng đưa về giải phương trình toán học:

$$[K']\{\delta'\} = \{F'\} \quad (2.27)$$

Để phương trình này không có nghiệm tầm thường thì điều kiện định thức của ma trận $[K']$ khác 0 ($\det [K']$ khác 0), khi đó phương trình không suy biến. Với bài toán kết cấu, điều này chỉ đạt được khi điều kiện biên được thoả mãn (kết cấu phải bất biến hình). Đó là điều kiện cho trước một số

chuyển vị nút nào đó bằng 0 hay bằng một giá trị xác định hoặc một số chuyển vị nút phải liên hệ với nhau. Sau khi áp đặt điều kiện biên vào, phương trình cân bằng của toàn hệ kết cấu trong hệ tọa độ chung có dạng:

$$[K^*]\{\delta^*\} = \{F^*\} \quad (2.28)$$

Trong thực tế khi phân tích kết cấu thường gặp 2 điều kiện biên sau:

- Biên làm một hoặc nhiều thành phần chuyển vị bằng 0.
- Biên làm một hoặc nhiều thành phần chuyển vị có một giá trị xác định

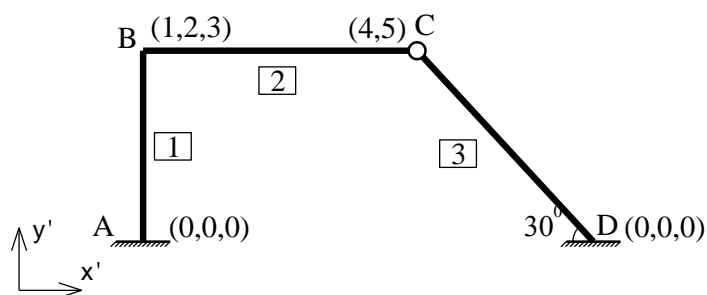
Khi biên có thành phần chuyển vị nào đó bằng 0

Thành phần chuyển vị tại một nút của phần tử bằng 0 do tương ứng với các thành phần chuyển vị này là các liên kết với đất, ta xử lý bằng cách:

- Khi đánh mã chuyển vị cho toàn bộ hệ, những thành phần chuyển vị tại nút nào đó bằng 0 thì ghi mã của chuyển vị đó là 0. Việc đánh số mã toàn thể của chuyển vị nút theo thứ tự và vectơ chuyển vị nút của toàn hệ chỉ bao gồm các chuyển vị nút còn lại.

- Khi lập ma trận $[K']_e$ và vectơ $\{F'\}_e$ của từng PT, các hàng và cột tương ứng với số mã chuyển vị nút bằng không thì không cần tính. Và khi thiết lập ma trận độ cứng tổng thể $[K']$ và vectơ tải trọng nút tổng thể $\{F'\}$ thì những hàng và cột nào có mã bằng 0 thì ta loại bỏ hàng, cột.

Ví dụ 2.3: Thiết lập ma trận độ cứng tổng thể $[K']$ và vectơ tải trọng nút $\{F'\}$ của toàn hệ kết cấu như hình 2.4 (có xét tới điều kiện biên).



Hình 2.4 Hình ví dụ 2.3

Lời giải:

Lập bảng số mã khi xét tới điều kiện biên:

Phần tử			Mã cục bộ					
TT	Loại	α	1	2	3	4	5	6
			Số mã toàn thể					
1		90	0	0	0	1	2	3
2		0	1	2	3	4	5	
3		-30	4	5	0	0	0	

Ma trận độ cứng $[K']_e$ và vector tải trọng nút $\{F'\}_e$ của từng phần tử trong hệ trục tọa độ chung:

$$[K']_1 = \begin{matrix} & \text{CB} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} x & x & x & x & x & x \\ & x & x & x & x & x \\ & & x & x & x & x \\ & & & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ & & & & a_{55} & a_{56} \\ & & & & & a_{66} \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \\ \text{TT} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} & \end{matrix}$$

$$; \{F'\}_1 = \begin{matrix} \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$[K']_2 = \begin{matrix} & \text{CB} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ & & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ & & & b_{44} & b_{45} \\ & & & & b_{55} \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \\ \text{TT} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{matrix} & \end{matrix}$$

$$; \{F'\}_2 = \begin{matrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$\text{CB} \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$[K']_3 = \begin{matrix} 1 & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & x & x & x \end{bmatrix} & 4 \\ 2 & & \begin{bmatrix} c_{22} & x & x & x \end{bmatrix} & 5 \\ 3 & & & \begin{bmatrix} x & x & x \end{bmatrix} & 0 \\ 4 & & & & \begin{bmatrix} (dx) & x & x \end{bmatrix} & 0 \\ 5 & & & & & \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} & 0 \end{matrix} ; \{F'\}_3 = \begin{matrix} \begin{bmatrix} f_1 \end{bmatrix} & 4 \\ \begin{bmatrix} f_2 \end{bmatrix} & 5 \\ \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} & 0 \\ \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} & 0 \\ \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} & 0 \end{matrix}$$

4 5 0 0 0 TT

Căn cứ vào bảng số mã, thu được ma trận độ cứng và vectơ tải trọng nút tổng thể (có xét tới điều kiện biên) như sau:

$$[K^*] = \begin{matrix} \begin{bmatrix} (a_{44} + b_{11}) & (a_{45} + b_{12}) & (a_{46} + b_{13}) & b_{14} & b_{15} \end{bmatrix} & 1 \\ & \begin{bmatrix} (a_{55} + b_{22}) & (a_{56} + b_{23}) & b_{24} & b_{25} \end{bmatrix} & 2 \\ & & \begin{bmatrix} (a_{66} + b_{33}) & b_{34} & b_{35} \end{bmatrix} & 3 \\ & & & \begin{bmatrix} (dx) & (b_{44} + c_{11}) & (b_{45} + c_{12}) \end{bmatrix} & 4 \\ & & & & \begin{bmatrix} (b_{55} + c_{22}) \end{bmatrix} & 5 \end{matrix}$$

1 2 3 4 5

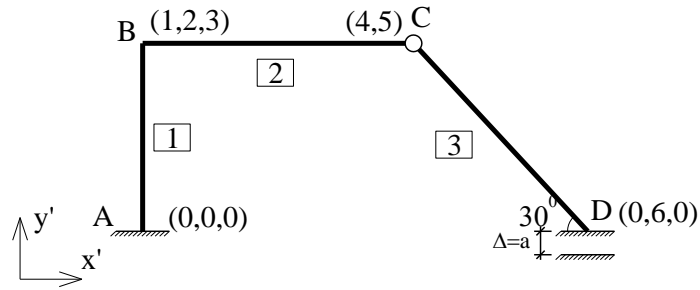
$$\{F^*\} = \{(d_4 + e_1) \quad (d_5 + e_2) \quad (d_6 + e_3) \quad (e_4 + f_1) \quad (e_5 + f_2)\}^T$$

Khi biên có thành phần chuyển vị cho trước một giá trị

Khi thành phần chuyển vị tại một nút nào đó cho trước một giá trị xác định, thí dụ $\Delta m = a$ (hay liên kết tương ứng với các thành phần chuyển vị nút δm chịu chuyển vị cưỡng bức có giá trị bằng a). Lúc này ta có thể giải quyết bài toán này theo 2 cách:

Cách 1: Khi đánh số mã của bậc tự do (các thành phần chuyển vị) tổng thể kết cấu thì thành phần chuyển vị tại nút có chuyển vị bằng a ta vẫn đánh mã bình thường chẳng hạn mã là m . Sau khi lập được ma trận độ cứng tổng thể $[K']$ và vectơ tải trọng nút tổng thể $\{F'\}$ thay thế số hạng k_{mm} trong ma trận thể $[K']$ bằng $(k_{mm} + A)$ và thay số hạng tại hàng m trong ma trận $\{F'\}$ là f_m bằng $(k_{mm} + A)a$.

Ví dụ 2.4: Thiết lập ma trận độ cứng tổng thể $[K']$ và vector tải trọng nút $\{F'\}$ của toàn hệ kết cấu như hình 2.5 (có xét tới điều kiện biên).



Hình 2.5 Hình ví dụ 2.4

Lời giải

Hệ được đánh số phần tử và số mã chuyển vị tổng thể của kết cấu như hình 2.5.

Bảng số mã khi xét tới điều kiện biên:

Phần tử			Mã cục bộ					
TT	Loại	α	1	2	3	4	5	6
			Số mã toàn thể					
1		90	0	0	0	1	2	3
2		0	1	2	3	4	5	
3		-30	4	5	0	6	0	

Ma trận độ cứng $[K']_e$ và vector tải trọng nút $\{F'\}_e$ của từng phần tử trong hệ trục tọa độ chung:

$$[K']_1 = \begin{matrix} & \text{CB} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \text{x} & \text{x} & \text{x} & \text{x} & \text{x} & \text{x} \\ & \text{x} & \text{x} & \text{x} & \text{x} & \text{x} \\ & & \text{x} & \text{x} & \text{x} & \text{x} \\ & & & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ & & & & a_{55} & a_{56} \\ & & & & & a_{66} \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix} \quad ; \quad \{F'\}_1 = \begin{matrix} \begin{bmatrix} \text{x} \\ \text{x} \\ \text{x} \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$\begin{array}{cccccc}
& 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & \text{TT} \\
\text{CB} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & \\
[\mathbf{K}']_2 = & \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} \mathbf{b}_{11} & \mathbf{b}_{12} & \mathbf{b}_{13} & \mathbf{b}_{14} & \mathbf{b}_{15} \\ & \mathbf{b}_{22} & \mathbf{b}_{23} & \mathbf{b}_{24} & \mathbf{b}_{25} \\ & & \mathbf{b}_{33} & \mathbf{b}_{34} & \mathbf{b}_{35} \\ & (\text{đx}) & & \mathbf{b}_{44} & \mathbf{b}_{45} \\ & & & & \mathbf{b}_{55} \end{array} \right] & \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{array}{l} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{e}_5 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \\
& 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & \text{TT} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
\text{CB} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
[\mathbf{K}']_3 = & \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} \mathbf{c}_{11} & \mathbf{c}_{12} & \mathbf{x} & \mathbf{c}_{14} & \mathbf{x} \\ & \mathbf{c}_{22} & \mathbf{x} & \mathbf{c}_{25} & \mathbf{x} \\ & & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \\ & (\text{đx}) & & \mathbf{c}_{44} & \mathbf{x} \\ & & & & \mathbf{x} \end{array} \right] & \begin{array}{l} 4 \\ 5 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{f}_4 \\ \mathbf{x} \end{array} & \begin{array}{l} 4 \\ 5 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{array} \\
& 4 & 5 & 0 & 6 & 0 & \text{TT} &
\end{array}$$

Căn cứ vào bảng số mã, thu được ma trận độ cứng và vectơ tải trọng nút tổng thể (có xét tới điều kiện biên) như sau:

$$[\mathbf{K}^*] = \begin{array}{cccccc} \left[\begin{array}{cccccc} (\mathbf{a}_{44} + \mathbf{b}_{11}) & (\mathbf{a}_{45} + \mathbf{b}_{12}) & (\mathbf{a}_{46} + \mathbf{b}_{13}) & \mathbf{b}_{14} & \mathbf{b}_{15} & 0 \\ & (\mathbf{a}_{55} + \mathbf{b}_{22}) & (\mathbf{a}_{56} + \mathbf{b}_{23}) & \mathbf{b}_{24} & \mathbf{b}_{25} & 0 \\ & & (\mathbf{a}_{66} + \mathbf{b}_{33}) & \mathbf{b}_{34} & \mathbf{b}_{35} & 0 \\ & & & (\mathbf{b}_{44} + \mathbf{c}_{11}) & (\mathbf{b}_{45} + \mathbf{c}_{12}) & \mathbf{c}_{14} \\ & (\text{đx}) & & & (\mathbf{b}_{55} + \mathbf{c}_{22}) & \mathbf{c}_{25} \\ & & & & & (\mathbf{c}_{44} + \mathbf{A}) \end{array} \right] & \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

$$\{\mathbf{F}^*\} = \{(\mathbf{d}_4 + \mathbf{e}_1) \quad (\mathbf{d}_5 + \mathbf{e}_2) \quad (\mathbf{d}_6 + \mathbf{e}_3) \quad (\mathbf{e}_4 + \mathbf{f}_1) \quad (\mathbf{e}_5 + \mathbf{f}_2) \quad (\mathbf{c}_{44} + \mathbf{A})\mathbf{a}\}^T$$

Giải hệ phương trình $[\mathbf{K}^*]\{\delta^*\} = \{\mathbf{F}^*\}$ thoả mãn điều kiện biên vì phương trình thứ 6 thu được:

$$\mathbf{K}_{61}\delta_1 + \mathbf{K}_{62}\delta_2 + \mathbf{K}_{63}\delta_3 + \mathbf{K}_{64}\delta_4 + \mathbf{K}_{65}\delta_5 + (\mathbf{c}_{44} + \mathbf{A})\delta_6 = (\mathbf{c}_{44} + \mathbf{A})\mathbf{a}$$

Chia cả 2 vế cho $(c_{44} + A)$, thu được: $\delta_6 = a$

Cách 2: Theo cách thứ 2 này thì khi đánh mã chuyển vị tổng thể cho kết cấu thì những thành phần nào chuyển vị bằng không hoặc có chuyển vị cưỡng bức ta đánh mã 0, còn các thành phần chuyển vị còn lại ta đánh mã theo thứ tự từ 1 đến hết. Sau đó ta lập ma trận độ cứng và vectơ tải trọng tác dụng nút cho toàn bộ hệ như bài toán không có chuyển vị cưỡng bức. Lúc này ta coi chuyển vị cưỡng bức như là một dạng tải trọng tác dụng lên kết cấu, vì vậy khi tính vectơ tải trọng tác dụng nút lên toàn bộ hệ phải kể thêm phần tải trọng tác dụng nút do chuyển vị cưỡng bức gây ra. Vectơ tải trọng nút lúc này là do chuyển vị cưỡng bức các liên kết tựa, được tổng hợp từ các vectơ tải trọng nút $\{P'_\Delta\}_e$ của mỗi phần tử có liên kết tựa chuyển vị cưỡng bức: $\{P'_\Delta\}_e = [T]_e^T \{P_\Delta\}_e$; trong đó: $\{P_\Delta\}_e$ nhận được bằng phản lực liên kết nút do chuyển vị cưỡng bức gồi tựa với dấu ngược lại.

2.1.1.6. Giải hệ phương trình cân bằng

Với bài toán tuyến tính, việc giải hệ phương trình đại số là không khó. Kết quả tìm được là chuyển vị của các nút:

$$\{\delta^*\} = [K^*]^{-1} \{F^*\} \quad (2.29)$$

2.1.1.7. Xác định nội lực

Từ kết quả thu được, kết hợp với các điều kiện biên xác định được vectơ chuyển vị nút của từng phần tử trong hệ tọa độ địa phương. Từ đó xác định được nội lực trong phần tử.

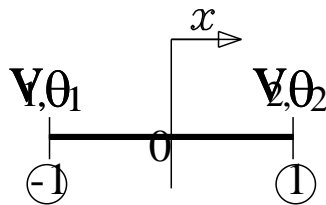
Phương pháp phần tử có ưu điểm là việc chia kết cấu ra thành các phần tử nhỏ thì dễ dàng mô tả được hình dạng phức tạp của công trình, đặc biệt vì các phần tử nhỏ nên mô tả trạng thái chuyển vị của phần tử chỉ cần các đa thức bậc thấp. Thông thường đối với phần tử dầm chịu uốn thì ta thường dùng đa thức bậc 3 để mô tả chuyển vị của phần tử:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (2.30)$$

Trong phương trình mô tả chuyển vị ta thấy có bốn thông số cần xác định. Để thuận tiện ta thay bốn thông số a_0, a_1, a_2, a_3 bằng các chuyển vị và góc xoay tại các nút của phần tử $v_1, \theta_1, v_2, \theta_2$. Vì hàm chuyển vị bậc 3 nên ta các lực tác dụng trên phần tử ta phải quy về nút của phần tử.

2.1.2. Cách xây dựng ma trận độ cứng của phần tử chịu uốn

Xét phần tử dầm có hai nút, mỗi nút có hai bậc tự do là chuyển vị và góc xoay và dầm có diện tích mặt cắt ngang là A ; mô men quán tính của mặt cắt ngang là I ; mô đun đàn hồi của vật liệu E (hình 2.6)



Hình 2.6 Phần tử hai nút

Để tính toán được tổng quát, chiều dài phần tử lấy bằng hai đơn vị, gốc tọa độ nằm ở giữa phần tử. Như vậy, nếu biết được các bậc tự do tại các nút phần tử là $v_1, \theta_1, v_2, \theta_2$ thì chuyển vị tại điểm bất kỳ trong phần tử tại tọa độ x được xác định như sau:

$$v = N_1 \cdot v_1 + N_2 \cdot \theta_1 + N_3 \cdot v_2 + N_4 \cdot \theta_2 \quad (2.31)$$

Trong đó : N_1, N_2, N_3, N_4 : là các hàm dạng và được xác định như sau:

$$N_1 = \frac{1}{4}(2 - 3x + x^3); \quad N_2 = \frac{1}{4}(1 - x - x^2 + x^3);$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(2 + 3x - x^3); \quad N_4 = \frac{1}{4}(-1 - x + x^2 + x^3).$$

Theo công thức trên ta thấy:

$$v|_{x=-1} = v_1; \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=-1} = \theta_1; \quad v|_{x=1} = v_2; \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=1} = \theta_2. \quad (2.32)$$

Như vậy, mỗi phần tử có 4 bậc tự do $X = \{v_1, \theta_1, v_2, \theta_2\}$ cần xác định. Nếu biết được X thì ta có biết được chuyển vị trong phần tử cũng như biến dạng uốn và mô men theo công thức sau:

$$\chi = -\frac{d^2v}{dx^2} = -\left[\frac{d^2N_1}{dx^2} \quad \frac{d^2N_2}{dx^2} \quad \frac{d^2N_3}{dx^2} \quad \frac{d^2N_4}{dx^2} \right] \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\}^T; \quad (2.33a)$$

$$M = EI.\chi = -EI \left[\frac{d^2N_1}{dx^2} \quad \frac{d^2N_2}{dx^2} \quad \frac{d^2N_3}{dx^2} \quad \frac{d^2N_4}{dx^2} \right] \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\}^T \quad (2.34a)$$

Công thức trên là tính toán cho phần tử có chiều dài bằng 2, nếu phần tử có chiều dài là Δx thì biến dạng uốn và mô men được tính như sau:

$$\chi = -\frac{d^2v}{dx^2} \left(\frac{2}{\Delta x} \right)^2 = -\left(\frac{2}{\Delta x} \right)^2 \left[\frac{d^2N_1}{dx^2} \quad \frac{d^2N_2}{dx^2} \quad \frac{d^2N_3}{dx^2} \quad \frac{d^2N_4}{dx^2} \right] \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\}^T \quad (2.33b)$$

$$M = EI.\chi = -EI \left(\frac{2}{\Delta x} \right)^2 \left[\frac{d^2N_1}{dx^2} \quad \frac{d^2N_2}{dx^2} \quad \frac{d^2N_3}{dx^2} \quad \frac{d^2N_4}{dx^2} \right] \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\}^T \quad (2.34b)$$

Xét phần tử có các tải trọng tập trung $F = \{P_1, P_2, M_1, M_2\}^T$ tác dụng tại các nút của phần tử. Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, lượng ràng buộc đối với bài toán tĩnh viết cho phần tử như sau:

$$Z = \frac{\Delta x}{2} \int_{-1}^1 M[\chi] dx - \sum_{i=1}^4 F_i X_i \rightarrow \min \quad (2.35)$$

Điều kiện dừng của (3.25) được viết lại như sau:

$$\delta Z = \frac{\Delta x}{2} \int_{-1}^1 M\delta[\chi] dx - \sum_{i=1}^4 F_i \delta X_i = 0 \quad (2.36)$$

hay:

$$\left(\frac{2}{\Delta x}\right)^3 \cdot EJ \cdot \begin{bmatrix} \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_4}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} dx \\ \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_4}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} dx \\ \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_4}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} dx \\ \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_4}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_4}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_4}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_4}{dx^2} \frac{d^2 N_4}{dx^2} dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$[K]\{X\} = \{F\} \quad (2.38)$$

trong đó: $[K]$: ma trận độ cứng của phần tử; $\{F\}$: véc tơ tải trọng tác dụng nút; $\{X\}$: véc tơ chuyển vị nút của phần tử.

Tính tích phân các hệ số trong $[K]$ ta có thể tính bằng phương pháp chính xác (bằng hàm $\text{int}(fx,a,b)$ có sẵn trong matlab) hoặc tính bằng phương pháp tích phân số của Gauss và kết quả độ cứng của phần tử chịu uốn ngang phẳng như sau:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{\Delta x^3} & \frac{6EI}{\Delta x^2} & -\frac{12EI}{\Delta x^3} & \frac{6EI}{\Delta x^2} \\ \frac{6EI}{\Delta x^2} & \frac{4EI}{\Delta x} & -\frac{6EI}{\Delta x^2} & \frac{2EI}{\Delta x} \\ -\frac{12EI}{\Delta x^3} & -\frac{6EI}{\Delta x^2} & \frac{12EI}{\Delta x^3} & -\frac{6EI}{\Delta x^2} \\ \frac{6EI}{\Delta x^2} & \frac{2EI}{\Delta x} & -\frac{6EI}{\Delta x^2} & \frac{4EI}{\Delta x} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

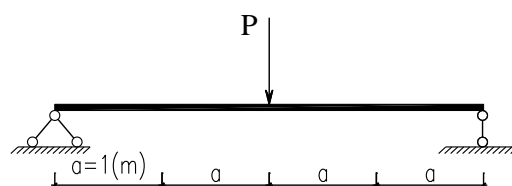
Biết được ma trận độ cứng phần tử thì ta dễ dàng xây dựng được ma trận độ cứng của toàn thanh. Nếu thanh chỉ có một phần tử thì ma trận của phần tử cũng chính là ma trận độ cứng của thanh. Trong phần tử nếu bậc tự do nào không có thì trong ma trận độ cứng của phần tử đó ta bỏ đi hàng và cột tương ứng với bậc tự do đó.

2.1.3. Cách xây dựng ma trận độ cứng tổng thể của kết cấu

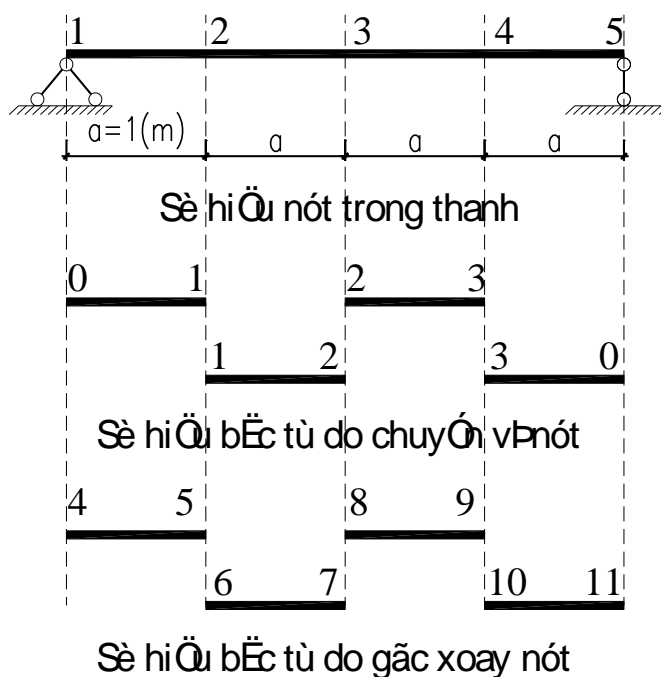
Để trình bày cách xây dựng ma trận độ cứng tổng thể của kết cấu trong phương pháp phần tử hữu hạn, luận văn xin được trình bày thông qua ví dụ

giải bài toán dầm chịu uốn dưới tác dụng của tải trọng tĩnh cụ thể sau (còn các bài toán khác thì cách xây dựng ma trận độ cứng tổng thể cũng làm tương tự):

Ví dụ 2.5: Tính toán kết cấu dầm chịu lực như (hình 2.7). Biết dầm có độ cứng $EI = 10^8 \text{ (kN.cm}^2\text{)}$



không đổi và $P=10 \text{ (kN)}$. Xác định chuyển vị tại giữa dầm.



Hình 2.8 Rời rạc hóa thanh thành các phần tử

Chia thanh ra thành n_{pt} phần tử. Các nút của phần tử phải trùng với vị trí đặt lực tập trung, chiều dài các phần tử có thể khác nhau. Mỗi phần tử có 4 bậc tự do, như vậy nếu n_{pt} phần tử rời rạc thì tổng cộng có $4 n_{pt}$ bậc tự do. Nhưng vì cần đảm bảo liên tục giữa các chuyển vị là chuyển vị của nút cuối phần tử thứ e bằng chuyển vị của nút đầu phần tử thứ $(e + 1)$ nên số bậc tự do của thanh sẽ nhỏ hơn $4 n_{pt}$. Khi giải ta chỉ cần đảm bảo điều kiện liên tục của chuyển vị còn điều kiện liên tục về góc xoay được xét bằng cách đưa vào

các điều kiện ràng buộc. Ví dụ dầm trong (ví dụ 2.5) ta chia thành 4 phần tử (hình 2.8)

Như vậy, tổng cộng số ản là 11 ản $< 4 \times 4 = 16$ ản. Gọi ma trận n_w là ma trận chuyển vị có kích thước $n_w(n_{pt}, 2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ản số là chuyển vị tại nút của các phần tử (hình 2.8)

$$n_w(1,:) = [0 \ 1]; n_w(2,:) = [1 \ 2]; n_w(3,:) = [2 \ 3]; n_w(4,:) = [3 \ 0]$$

$$n_w = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Gọi ma trận n_o là ma trận chuyển vị có kích thước $n_o(n_{pt}, 2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ản số là góc xoay tại nút của các phần tử (hình 2.8)

$$n_o(1,:) = [4 \ 5]; n_o(2,:) = [6 \ 7]; n_o(3,:) = [8 \ 9]; n_o(4,:) = [10 \ 11]$$

$$n_o = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 & 10 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \end{bmatrix}^T$$

Sau khi biết ản số thực của các thanh ta có thể xây dựng độ cứng tổng thể của thanh (có rất nhiều cách ghép nối phần tử khác nhau, tùy vào trình độ lập trình của mỗi người nên tác giả không trình bày chi tiết cách ghép nối các phần tử lại để được ma trận độ cứng của toàn thanh và có thể xem trong code mô đun chương trình của tác giả)

Nếu bài toán có n_{cv} ản số chuyển vị và n_{gx} ản số góc xoay thì ma trận độ cứng của thanh là K có kích thước $(n \times n)$, $K(n, n)$ với $n = (n_{cv} + n_{gx})$. Như ở ví dụ 2.5, $n = 11$. Bây giờ xét điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử.

Điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử được viết như sau:

$$\left(\frac{dy_i}{dx} \Big|_{nut2} \right) - \left(\frac{dy_{i+1}}{dx} \Big|_{nut1} \right) = 0 \quad (2.40)$$

$$\text{hay: } \delta\lambda_1 \left[\left(\frac{dy_1}{dx} \Big|_{\text{nút2}} \right) - \left(\frac{dy_2}{dx} \Big|_{\text{nút1}} \right) \right] = 0 \quad (2.41a)$$

$$\delta\lambda_2 \left[\left(\frac{dy_2}{dx} \Big|_{\text{nút2}} \right) - \left(\frac{dy_3}{dx} \Big|_{\text{nút1}} \right) \right] = 0 \quad (2.41b)$$

$$\delta\lambda_3 \left[\left(\frac{dy_3}{dx} \Big|_{\text{nút2}} \right) - \left(\frac{dy_4}{dx} \Big|_{\text{nút1}} \right) \right] = 0 \quad (2.41c)$$

Trong đó λ_i cũng là ẩn số của bài toán (có k ẩn số), do đó tổng số ẩn số của bài toán lúc là $(n+k)$ do đó ma trận độ cứng của phần tử lúc này cũng phải thêm k dòng và k cột như vậy kích thước của ma trận độ cứng là $K(n+k, n+k)$. Gọi k_1 là góc xoay tại nút 2 của phần tử trước, k_2 là góc xoay tại nút 1 của phần tử sau thì ta có các hệ số trong ma trận độ cứng K :

$$k(n+i, k_1) = \frac{2}{\Delta x}; k(n+i, k_2) = -\frac{2}{\Delta x} \quad (i=1 \div k) \quad (2.42a)$$

$$k(k_1, n+i) = \frac{2}{\Delta x}; k(k_2, n+i) = -\frac{2}{\Delta x} \quad (i=1 \div k) \quad (2.42b)$$

Nếu có hai phần tử thì có một điều kiện về góc xoay, có n_{pt} phần tử thì có $(2n_{pt} - 1)$ điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử. Như vậy cuối cùng ta sẽ thiết lập được phương trình:

$$[K]\{X\} = \{F\}$$

$$\text{trong đó: } \{F\} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left. \begin{matrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{matrix} \right\} \text{so - hang} = n \\ \left. \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\} \text{so - hang} = k \end{matrix}; \{X\} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix} \text{ là ẩn số của bài toán}$$

Trong ví dụ 2.5 khi chia thanh ra thành 4 phần tử. Kết quả ma trận độ cứng của thanh:

$$[K]=10^3 \begin{bmatrix} 2.4 & -1.2 & 0 & -1.2 & -1.2 & 1.2 & 1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.2 & 2.4 & -1.2 & 0 & 0 & -1.2 & -1.2 & 1.2 & 1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.2 & 2.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.2 & -1.2 & 1.2 & 1.2 & 0 & 0 & 0 \\ -1.2 & 0 & 0 & 1.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.2 & 0 & 0 & 0.8 & 1.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.10^{-5} & 0 & 0 \\ 1.2 & -1.2 & 0 & 0 & 0 & 1.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.10^{-5} & 0 & 0 \\ 1.2 & -1.2 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 1.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.10^{-5} & 0 \\ 0 & 1.2 & -1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & -2.10^{-5} & 0 \\ 0 & 1.2 & -1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 1.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.10^{-5} \\ 0 & 0 & 1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.6 & 0.8 & 0 & 0 & -2.10^{-5} \\ 0 & 0 & 1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 1.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.10^{-5} & -2.10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.10^{-5} & -2.10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.10^{-5} & -2.10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kết quả chuyển vị, góc xoay tại các nút:

$$\begin{bmatrix} w_2; w_3; w_4; \\ \varphi_1; \varphi_2; \varphi_3; \varphi_4; \varphi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.09166667(\text{cm}); 0.13333333(\text{cm}); 0.09166667(\text{cm}); \\ 0.05(\text{rad}); 0.0375(\text{rad}); 0; -0.0375(\text{rad}); -0.05(\text{rad}) \end{bmatrix}$$

Ta thấy kết quả trên so với kết quả giải chính xác theo phương pháp giải tích rất đúng ví dụ như chuyển vị tại nút 3 tính theo phương pháp giải tích:

$$w_3 = \frac{Pl^3}{48EI} = 0,13333333(\text{cm})$$

CHƯƠNG 3.
TÍNH TOÁN KHUNG PHẪNG CHỊU UỐN
THEO PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

3.1. Phương pháp phần tử hữu hạn tính toán khung phẳng chịu uốn

Phương pháp phần tử hữu hạn chia công trình thành những phần nhỏ được gọi là các phần tử, tính toán công trình được dẫn về tính toán những phần tử nhỏ sau đó kết nối các phần tử đó lại với nhau ta lại được lời giải của một công trình hoàn chỉnh. Tương tự, phương pháp sai phân hữu hạn cũng chia công trình thành những đoạn nhỏ và trạng thái chuyển vị...được xác định tại mỗi điểm sai phân. Sự khác nhau giữa hai phương pháp nằm ở chỗ đối với sai phân hữu hạn trạng thái chuyển vị của các điểm thuộc đoạn nằm giữa hai nút thường được tính theo phương pháp nội suy tuyến tính còn phương pháp phần tử hữu hạn các trạng thái chuyển vị giữa hai điểm được xác định bằng các hàm dạng đã cho. Ưu điểm chủ yếu của phương pháp phần tử hữu hạn là nhờ chia công trình thành các đoạn nhỏ thì dễ dàng mô tả được các hình dạng phức tạp của công trình, đặc biệt là vì các đoạn nhỏ cho nên mô tả trạng thái chuyển vị bằng các đa thức bậc thấp. Ví dụ nếu chọn hàm xấp xỉ là đa thức thì phải chọn đa thức bậc 9 để mô tả đường độ võng của dầm nhưng khi dùng phần tử hữu hạn thì ta có thể dùng các đa thức bậc thấp 2, 3 hoặc 4 để mô tả chuyển vị của mỗi phần tử. Sở dĩ như vậy là do trạng thái ứng suất trong mỗi phần tử nhỏ thì khác nhau rất ít. Thông thường đối với phần tử dầm chịu uốn thì dùng đa thức bậc 3 để mô tả chuyển vị.

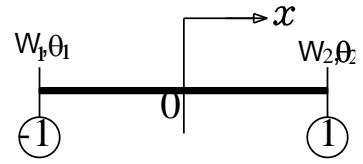
$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

Ta thấy có 4 thông số cần xác định. Tuy nhiên để tiện dùng ta thay 4 thông số a_0, a_1, a_2, a_3 bằng chuyển vị, góc xoay của phần tử hai nút như hình 3.2.

Do dùng hàm bậc 3 cho nên các lực tác dụng lên phần tử đều phải quy về nút kể cả lực quán tính trong bài toán động.

Ma trận độ cứng phần tử

Đối với phần tử chịu uốn như dầm thường dùng đa thức bậc ba để tính chuyển vị của nó, do đó có bốn thông số cần xác định. Có thể chọn phần tử hai nút, mỗi nút có hai thông số là chuyển vị W và góc xoay θ tại nút đó, hình 3.1.



Hình 3.1. Phần tử hai nút

Để tính toán được tổng quát, chiều dài phần tử lấy bằng hai đơn vị (phần tử đẳng thông số), gốc tọa độ đặt ở giữa. Như vậy, nếu biết được các thông số $W_1, \theta_1, W_2, \theta_2$ thì chuyển vị mỗi điểm nằm trong phần tử xác định theo đa thức bậc ba sau đây.

$$W(x) = f_1 W_1 + f_2 \theta_1 + f_3 W_2 + f_4 \theta_2 \quad (3.1)$$

trong đó: $f_1 = 1/4(x-1)^2(x+2)$; $f_2 = 1/4(x-1)^2(x+1)$;

$$f_3 = 1/4(x+1)^2(-x+2)$$
; $f_4 = 1/4(x+1)^2(x-1)$;

Từ các công thức trên ta thấy chuyển vị của nút 1 (có tọa độ $x = -1$) bằng W_1 , chuyển vị tại nút 2 (có tọa độ $x=1$) bằng W_2 . Lấy đạo hàm $W(x)$ theo x và ta lại có góc xoay tại nút 1 ($x = -1$) là θ_1 , góc xoay tại nút 2 ($x = 1$) là θ_2 .

Như vậy, mỗi phần tử có hai chuyển vị nút W_1, W_2 hai góc xoay θ_1, θ_2 , tổng cộng có sáu thông số (4 ẩn) cần xác định.

Gọi Δ là véc tơ cột chứa bốn ẩn của phần tử theo thứ tự sau.

$$\Delta = [W_1, \theta_1, W_2, \theta_2] \quad (3.2)$$

thì có thể viết lại biểu thức (3.1) dưới dạng ma trận như sau.

$$W = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4]X; \quad (3.3)$$

Sau khi đã biết các hàm chuyển vị thì dễ dàng tính được biến dạng uốn χ_x , nội lực mômen uốn M_x , của phần tử như sau:

$$\chi_x = \left[-\frac{d^2 W}{dx^2} \beta^2 \right] \quad (3.3)$$

$$M_x = EJ\chi_x \quad (3.4)$$

Trong các công thức trên $\beta = 2/\Delta x$ là hệ số đưa chiều dài hai đơn vị của phần tử về chiều dài thực Δx của nó.

Biết được hàm độ võng của phần tử thì dễ dàng tính được ma trận độ cứng phần tử. Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss ta viết lượng cưỡng bức đối với bài toán tĩnh như sau:

$$Z = \int_{-1}^1 M_x[\chi_x] dx \rightarrow \min \quad (3.5)$$

Trong đó χ_x là các biểu thức chứa các ẩn $X(i)$ cho nên điều kiện dừng của (3.5) được viết lại như sau:

$$\delta Z = \int_{-1}^1 M_x \delta[\chi_x] dx = 0$$

hay
$$\delta Z = \frac{1}{\beta} \left(\int_{-1}^1 M_x \left[\frac{\partial \chi_x}{\partial X_i} \right] dx \right) = 0 \quad (3.6)$$

hệ số $1/\beta = \Delta x/2$ là hệ số để đưa tích phân từ (-1) đến (1) về tích phân theo chiều dài phần tử. Có bốn ẩn ta có được bốn phương trình và có dạng như sau:

$$[K]_e \Delta = F \quad (3.7)$$

trong đó: F - véc tơ tải trọng.

Các tích phân trong (3.6) có thể tính chính xác hoặc có thể tính theo các tích phân gần đúng (tích phân số) của Gauss. Sau khi tính (3.6), nhận được ma trận độ cứng phần tử $[K]_e (4 \times 4)$ như sau:

$$[K]_e = \begin{bmatrix} 768 & -768 & 96 & 96 \\ -768 & 768 & -96 & -96 \\ 96 & -96 & 16 & 8 \\ 96 & -96 & 8 & 16 \end{bmatrix}$$

Ma trận $[K]_e$ gọi là ma trận độ cứng phần tử, dx là độ dài một phần tử. Bởi vì hàm độ võng của phần tử là đa thức bậc ba nên các lực tác dụng cũng như lực quán tính của các phần tử đều phải phân bố về nút của nó.

Nếu như tại nút (1) có lực tác dụng P thì vế phải $F(1)=P\dots$

Biết được ma trận độ cứng phần tử thì dễ dàng xây dựng được ma trận độ cứng của toàn dầm. Giả sử dầm chỉ có một phần tử thì ma trận $[K]_e$ chính là ma trận độ cứng tổng thể của dầm. Giả sử chuyển vị tại nút (1) bằng không thì ta bỏ dòng 1, cột 1 của ma trận $[K]_e$.

Chú ý ngoài các ẩn chuyển vị, góc xoay của dầm còn phải xét thêm các ẩn là các thừa số Lagrange λ của các điều kiện liên kết ở hai đầu dầm.

Ngoài ra còn cần đưa thêm các điều kiện liên tục về góc xoay tại điểm tiếp giáp giữa hai phần tử.

Khi biết được tất cả các ẩn chuyển vị, góc xoay, các điều kiện liên tục giữa các phần tử, các điều kiện biên tại hai đầu dầm, ta sẽ thành lập được ma trận độ cứng tổng thể của dầm là $[K]$, từ đầu bài biết được véc tơ tải trọng nút của dầm, ta tiến hành giải phương trình $[K]\Delta=F$ ta nhận được véc tơ Δ là véc tơ chuyển vị tại các nút dầm, sau khi có được X ta xác định được nội lực trong dầm, khung.

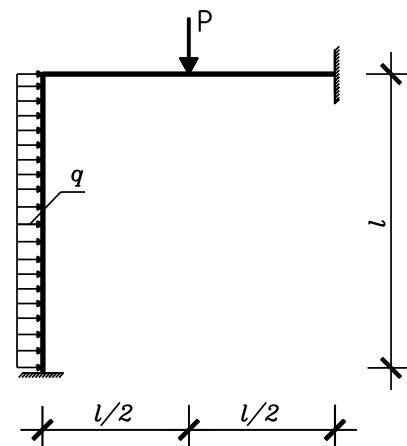
Để làm rõ tính ưu việt của phương pháp phần tử hữu hạn đối với bài toán khung ta làm một số ví dụ cụ thể sau đây.

3.2. Các ví dụ tính toán khung

Ví dụ 3.1. Khung siêu tĩnh bậc 3, hình 3.2.

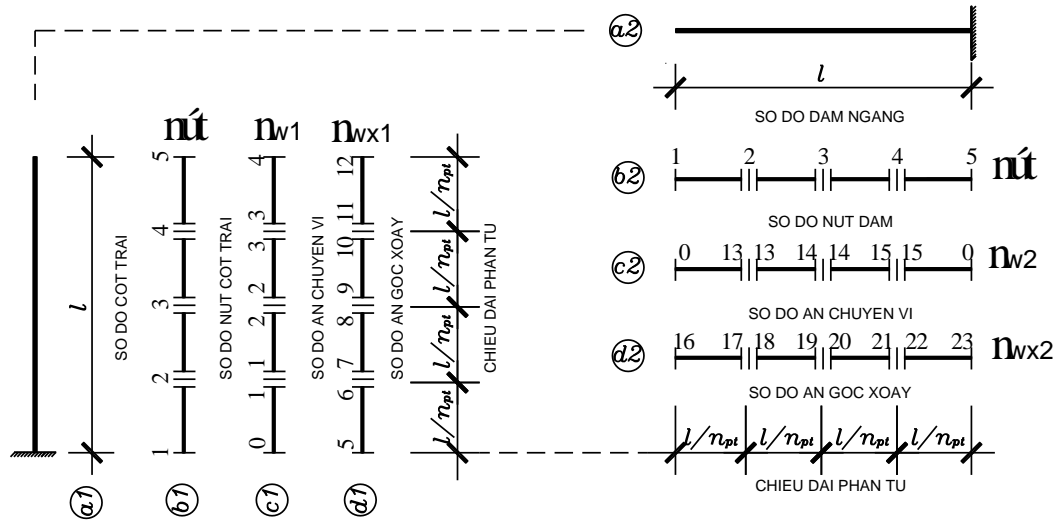
Xác định nội lực và chuyển vị của khung chịu lực như hình 3.2, độ cứng uốn $EJ=const$.

Rời rạc hóa kết cấu dầm ra thành **npt** phần tử. Các nút của phần tử phải trùng với vị trí đặt lực tập trung, hay vị trí thay đổi tiết diện, chiều dài các phần tử có thể khác



Hình 3.2. Khung siêu tĩnh bậc 3

nhau.



Hình 3.3. Sơ đồ rời rạc kết cấu

Mỗi phần tử có 4 ẩn $w_1, w_2, \theta_1, \theta_2$ vậy nếu n_{pt} phần tử rời rạc thì tổng cộng có $4 \times n_{pt}$ ẩn.

Nhưng vì cần đảm bảo liên tục giữa các chuyển vị là chuyển vị của nút cuối phần tử thứ e bằng chuyển vị của nút đầu phần tử thứ $(e + 1)$ nên số ẩn của thanh sẽ nhỏ hơn $4 \times n_{pt}$. Khi giải ta chỉ cần đảm bảo điều kiện liên tục của chuyển vị còn điều kiện liên tục về góc xoay được xét bằng cách đưa vào các điều kiện ràng buộc. Ví dụ dầm trong (ví dụ 3.1, hình 3.3) ta chia thành 4 phần tử (hình 3.3).

Khi chia cột thành 4 phần tử thì số nút dầm sẽ là 5, thứ tự từ trái sang phải là [1, 2, 3, 4, 5] (hình 3.3b1), số ẩn chuyển vị $n_w=4$, thứ tự từ trái sang phải là [1, 2, 3, 4] (hình 3.1c1), ở đây ẩn chuyển vị tại chân cột bằng không, ẩn góc xoay $n_{wx}=8$, thứ tự từ trái sang phải là [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12] (hình 3.3d1).

Khi chia dầm thành 4 phần tử thì số nút dầm sẽ là 5, thứ tự từ trái sang phải là [1, 2, 3, 4, 5] (hình 3.3b2), số ẩn chuyển vị $n_w=3$, thứ tự từ trái sang phải là [13, 14, 15] (hình 3.3c2), ở đây ẩn chuyển vị tại hai đầu dầm bằng không, ẩn góc xoay $n_{wx}=8$, thứ tự từ trái sang phải là [16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23] (hình 3.3d2).

Như vậy, tổng cộng số ản là 23 ản < 2x4x4=32 ản. Gọi ma trận nw là ma trận chuyển vị có kích thước nw(n_{pt}, 2) là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ản số là chuyển vị tại nút của các phần tử (hình 3.3).

Các phần tử cột:

$$nw1(1,:) = [0 \ 1]; nw1(2,:) = [1 \ 2]; nw1(3,:) = [2 \ 3]; nw1(4,:) = [3 \ 4]$$

$$nw1 = [0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 4]$$

Gọi ma trận nwx1 là ma trận chuyển vị góc xoay có kích thước nwx1(n_{pt}, 2) là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ản số là góc xoay tại nút của các phần tử (hình 3.3).

$$nwx1(1,:) = [5 \ 6]; nwx1(2,:) = [7 \ 8]; nwx1(3,:) = [9 \ 10]; nwx1(4,:) = [11 \ 12]$$

$$nwx1 = [5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12]$$

Các phần tử dầm:

$$nw2(1,:) = [0 \ 13]; nw2(2,:) = [13 \ 14]; nw2(3,:) = [14 \ 15]; nw2(4,:) = [15 \ 0]$$

$$nw2 = [0 \ 13 \ 13 \ 14 \ 14 \ 15 \ 15 \ 0]$$

Gọi ma trận nwx2 là ma trận chuyển vị góc xoay có kích thước nwx2(n_{pt}, 2) là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ản số là góc xoay tại nút của các phần tử (hình 3.3).

$$nwx2(1,:) = [16 \ 17]; nwx2(2,:) = [18 \ 19]; nwx2(3,:) = [20 \ 21]; nwx2(4,:) = [22 \ 23]$$

$$nwx2 = [16 \ 17 \ 18 \ 19 \ 20 \ 21 \ 22 \ 23]$$

Sau khi biết ản số thực của dầm và cột ta có thể xây dựng độ cứng tổng thể của khung.

Nếu bài toán có nw1, nw2 ản số chuyển vị thẳng của dầm và cột và nwx1, nwx2 ản số góc xoay của dầm và cột thì ma trận độ cứng của dầm là K có kích thước (nxn), K(n,n) với n=(nw1+nwx1+nw2+nwx2). Như ở ví dụ 3.1, n=23. Bây giờ xét điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử.

Điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử được viết như sau:

$$\left. \frac{dy_i}{dx} \right|_{nut2} - \left. \frac{dy_{i+1}}{dx} \right|_{nut1} = 0 \quad (a)$$

Đối với cột trái, ta có:

$$\left. \begin{aligned} \delta\lambda_1 \left[\frac{dy_{11}}{dx} \Big|_{nut2} - \frac{dy_{12}}{dx} \Big|_{nut1} \right] &= 0 \\ \delta\lambda_2 \left[\frac{dy_{12}}{dx} \Big|_{nut2} - \frac{dy_{13}}{dx} \Big|_{nut1} \right] &= 0 \\ \delta\lambda_3 \left[\frac{dy_{13}}{dx} \Big|_{nut2} - \frac{dy_{14}}{dx} \Big|_{nut1} \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Đối với dầm ngang, ta có:

$$\left. \begin{aligned} \delta\lambda_4 \left[\frac{dy_{21}}{dx} \Big|_{nut2} - \frac{dy_{22}}{dx} \Big|_{nut1} \right] &= 0 \\ \delta\lambda_5 \left[\frac{dy_{22}}{dx} \Big|_{nut2} - \frac{dy_{23}}{dx} \Big|_{nut1} \right] &= 0 \\ \delta\lambda_6 \left[\frac{dy_{23}}{dx} \Big|_{nut2} - \frac{dy_{24}}{dx} \Big|_{nut1} \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Gọi k_1 là góc xoay tại nút 2 của phần tử trước, k_2 là góc xoay tại nút 1 của phần tử sau thì ta có các hệ số trong ma trận độ cứng K:

$$k(n+i, k_1) = \frac{2}{\Delta x}; \quad k(n+i, k_2) = -\frac{2}{\Delta x} \quad (i=1 \div k) \quad (d)$$

$$k(k_1, n+i) = \frac{2}{\Delta x}; \quad k(k_2, n+i) = -\frac{2}{\Delta x} \quad (i=1 \div k) \quad (e)$$

Nếu có hai phần tử thì có một điều kiện về góc xoay, có n_{pt} phần tử thì có $(2n_{pt} - 1)$ điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử.

Điều kiện biên được viết như sau:

- Tại đầu ngàm chân cột có góc xoay bằng không:

$$\delta\lambda_7 \left(\frac{dy_1}{dx} \Big|_{nut1\ phantu1} \right) = 0$$

(f)

- Tại đầu ngàm bên phải dầm ngang có góc xoay bằng không:

$$\delta\lambda_8 \left(\frac{dy_2}{dx} \Big|_{nut2\ phantu\ thunpt} \right) = 0$$

(g)

Điều kiện góc xoay tại nút giao giữa cột và dầm được viết như sau:

Góc xoay tại nút cuối của phần tử đầu cột bằng góc xoay tại nút đầu của phần tử đầu tiên của dầm

$$\delta\lambda_9 \left(\frac{dy_1}{dx} \Big|_{nut2\ phantu\ npt} - \frac{d^2 y_2}{dx} \Big|_{nut1\ phantu1} \right) = 0 \quad (h)$$

Điều kiện chuyển vị ngang tại đầu cột bằng không:

$$\delta\lambda_{10} (y_1 \Big|_{nut2\ phantu\ npt}) = 0 \quad (i)$$

Trong đó $\lambda_k (k=1 \div 10)$ cũng là ẩn số của bài toán (có k ẩn số λ), do đó tổng số ẩn số của bài toán lúc đó là $(n+k)$, do đó ma trận độ cứng của phần tử lúc này cũng phải thêm k dòng và k cột như vậy kích thước của ma trận độ cứng là $K(n+k, n+k)$. Chẳng hạn trong ví dụ này, ta có $n=23, k=10$ và tổng số ẩn của bài toán là $n+k=23+10=33$ ẩn. Trong trường hợp này ta xác định được kích thước của ma trận độ cứng tổng thể là: $K[33 \times 33]$.

Như vậy cuối cùng ta sẽ thiết lập được phương trình:

$$[K]\{\Delta\} = \{F\} \quad (k)$$

$$\text{trong đó: } \{F\} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \{\Delta\} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix} \text{ là ẩn số của bài toán}$$

$\left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{array} \right\} \text{so - hang} = n \\ \left. \begin{array}{l} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\} \text{so - hang} = k \end{array} \right]$

Trong ví dụ 3.1 khi chia thành ra thành 4 phần tử, ta có:

- Ma trận độ cứng phần tử $[K_e]$, như sau:

Theo ngôn ngữ lập trình Matlab ta có thể viết:

$$\{\Delta\} = [K] \setminus \{F\}$$

Kết quả chuyển vị, góc xoay tại các nút của khung:

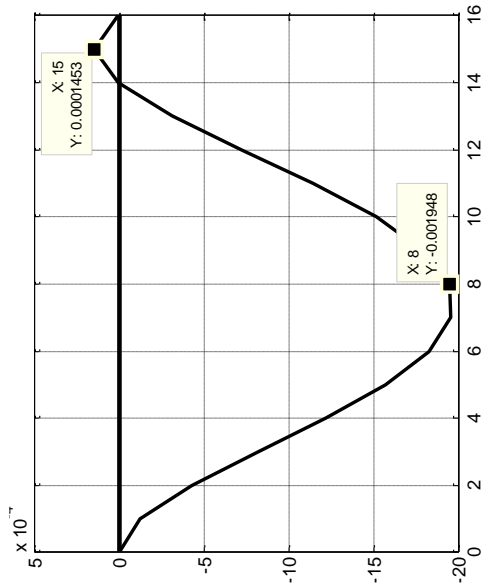
$$\{W\} = \begin{Bmatrix} W_{12} \\ W_{13} \\ W_{14} \\ W_{15} \\ W_{22} \\ W_{23} \\ W_{24} \end{Bmatrix} = x \frac{ql^4}{EJ}; \quad \{\varphi\} = \begin{Bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{12} \\ \varphi_{13} \\ \varphi_{14} \\ \varphi_{15} \\ \varphi_{21} \\ \varphi_{22} \\ \varphi_{23} \\ \varphi_{24} \\ \varphi_{25} \end{Bmatrix} = x \frac{ql^3}{EJ}$$

Mômen uốn của dầm:

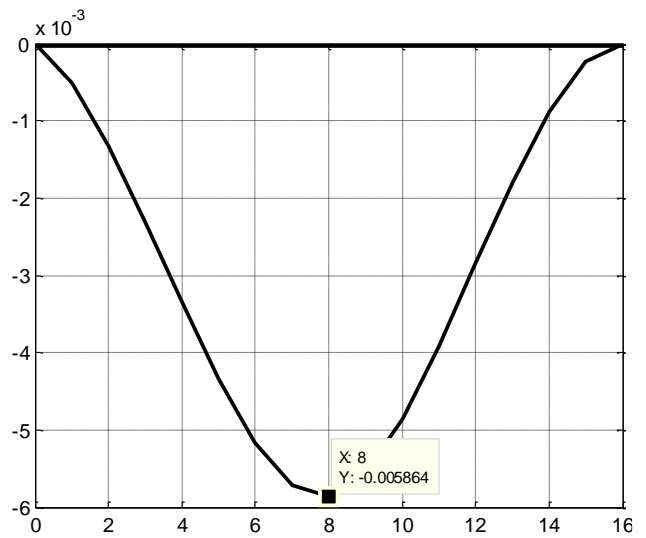
$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{12} \\ M_{13} \\ M_{14} \\ M_{15} \\ M_{21} \\ M_{22} \\ M_{23} \\ M_{24} \\ M_{25} \end{Bmatrix} = x ql^2$$

Dưới đây lần là đường độ võng và biểu đồ mômen uốn của cột và dầm

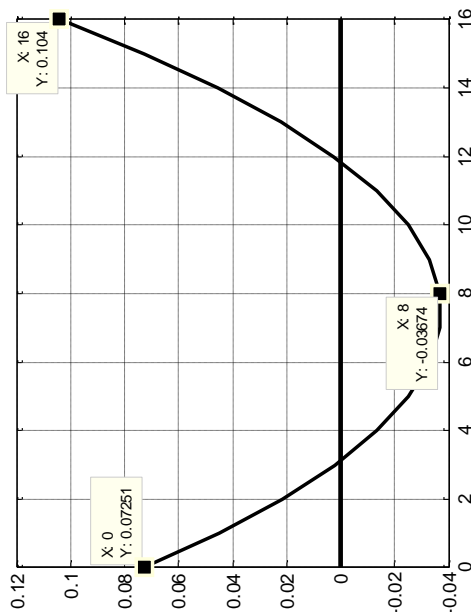
(trường hợp chia dầm thành 16 phần tử



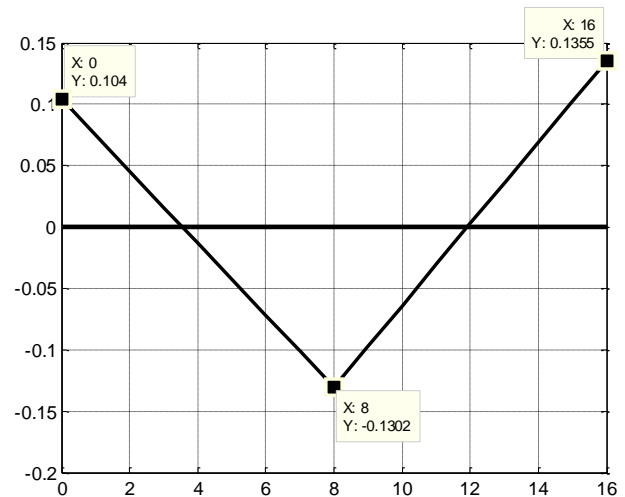
Hình 3.2a. Đường độ võng của cột



Hình 3.2a. Đường độ võng của dầm



Hình 3.2a. Biểu đồ mômen của cột



Hình 3.2a. Biểu đồ mômen của dầm

Nhận xét kết quả trên:

Khi chia cột và dầm thành 16 phần ta nhận được kết quả như trên, so sánh với kết quả theo lời giải giải tích đã có ta nhận được sai số theo bảng sau:

BẢNG SO SÁNH MÔMEN UỐN TẠI CÁC TIẾT DIỆN CỘT VÀ DẦM

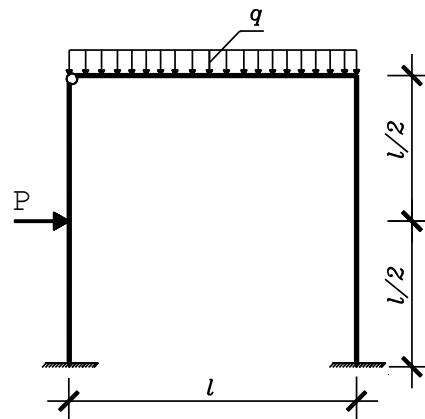
Các tiết diện của cột 1 và dầm 2	Lời giải số theo phương pháp PTHH	Lời giải giải tích	Sai số %
Chân cột	-0,0725	-0,0938	22,7
Giữa cột	0,0367	0,0443	17,15
Đầu cột	-1,0400	-1,0420	0,19
Đầu trái dầm	-0,1040	-1,0420	0,19
Giữa dầm	0,1302	0,1300	0,15
Đầu phải dầm	-0,1355	-0,1354	0,07

Ta thấy sai số tăng lên so với kết quả chính xác tại tất cả các tiết diện, sai số nhỏ nhất tại tiết diện đầu ngàm bên phải dầm (0,07%), sai số lớn nhất tại chân cột (22,7%) và giữa cột (17,5%). Muốn tăng độ chính xác ta cần rời rạc hóa dầm và cột thành nhiều phần tử hơn. Chẳng hạn trong ví dụ này ta rời rạc hóa kết cấu dầm và cột thành 32 phần tử ta đã nhận được kết quả trùng khớp với lời giải chính xác.

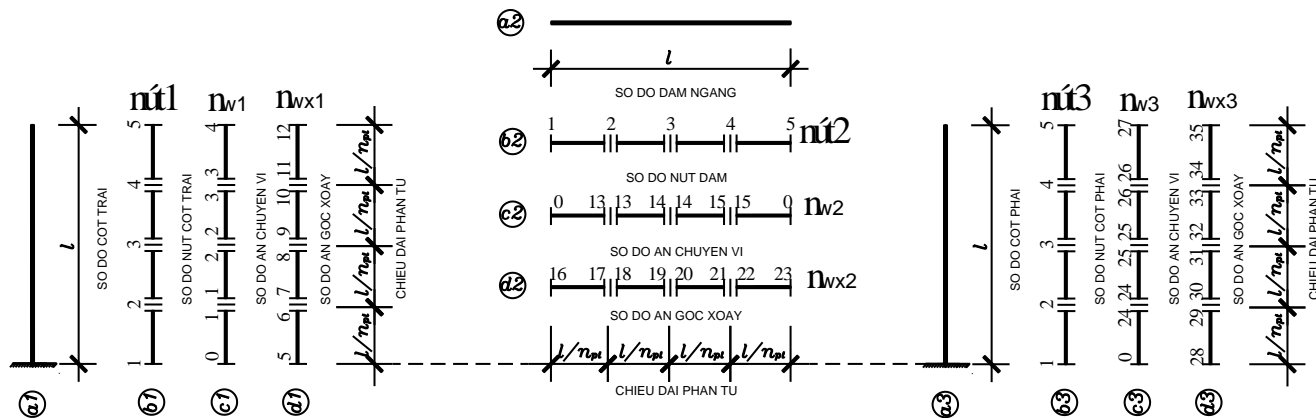
Ví dụ 3.2b: Khung siêu tĩnh bậc 2, hình 3.4.

Xác định nội lực và chuyển vị của khung chịu lực như hình 2, độ cứng uốn $EJ = \text{const}$.

Rời rạc hóa kết cấu dầm ra thành n_{pt} phần tử. Các nút của phần tử phải trùng với vị trí đặt lực tập trung, hay vị trí thay đổi tiết diện, chiều dài các phần tử có thể khác nhau.



Hình 3.4. Khung siêu tĩnh bậc 3



Hình 3.5. Sơ đồ rời rạc kết cấu

Mỗi phần tử có 4 ẩn $w_1, w_2, \theta_1, \theta_2$ vậy nếu n_{pt} phần tử rời rạc thì tổng cộng có $4xn_{pt}$ ẩn.

Nhưng vì cần đảm bảo liên tục giữa các chuyển vị là chuyển vị của nút cuối phần tử thứ e bằng chuyển vị của nút đầu phần tử thứ $(e + 1)$ nên số ẩn của thanh sẽ nhỏ hơn $4xn_{pt}$. Khi giải ta chỉ cần đảm bảo điều kiện liên tục của chuyển vị còn điều kiện liên tục về góc xoay được xét bằng cách đưa vào các điều kiện ràng buộc. Ví dụ dầm trong (ví dụ 3.1b, hình 3.4) ta chia thành 4 phần tử (hình 3.5).

Khi chia cột bên trái và cột bên phải của khung thành 4 phần tử thì:

- Số nút mỗi cột sẽ là 5, thứ tự từ dưới lên trên là [1, 2, 3, 4, 5] (hình 3.5b1, b3).
- Số ẩn chuyển vị của cột bên trái khung $n_{w1}=4$, thứ tự từ dưới lên trên là [1, 2, 3, 4] (hình 3.5c1). Số ẩn chuyển vị của dầm ngang là $n_{w2}=3$, thứ tự từ dưới lên trên là [13, 14, 15] (hình 3.5c3). Số ẩn chuyển vị của cột bên phải khung $n_{w3}=4$, thứ tự từ dưới lên trên là [24, 25, 26, 27] (hình 3.5c3).
- Ẩn chuyển vị tại chân cột trái và phải bằng không.
- Ẩn góc xoay của cột trái là $n_{wx1}=8$, thứ tự từ trái sang phải là [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12] (hình 3.5d1). Ẩn góc xoay của dầm ngang là $n_{wx2}=8$, thứ tự từ trái sang phải là [16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23] (hình 3.5d2). Ẩn góc xoay của cột phải là $n_{wx3}=8$, thứ tự từ dưới lên trên là [28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35] (hình 3.5d3).

Như vậy, tổng cộng số ản là $35 \text{ ản} < 3 \times 4 \times 4 = 48 \text{ ản}$. Gọi ma trận nw là ma trận chuyển vị có kích thước $nw(n_{pt}, 2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ản số là chuyển vị tại nút của các phần tử (hình 3.5).

Các phần tử cột bên trái:

$$nw1(1,:) = [0 \ 1]; nw1(2,:) = [1 \ 2]; nw1(3,:) = [2 \ 3]; nw1(4,:) = [3 \ 4]$$

$$nw1 = [0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 4]$$

Gọi ma trận $nwx1$ là ma trận chuyển vị góc xoay có kích thước $nwx1(n_{pt}, 2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ản số là góc xoay tại nút của các phần tử (hình 3.5c1).

$$nwx1(1,:) = [5 \ 6]; nwx1(2,:) = [7 \ 8]; nwx1(3,:) = [9 \ 10]; nwx1(4,:) = [11 \ 12]$$

$$nwx1 = [5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12]$$

Các phần tử dầm:

$$nw2(1,:) = [0 \ 13]; nw2(2,:) = [13 \ 14]; nw2(3,:) = [14 \ 15]; nw2(4,:) = [15 \ 0]$$

$$nw2 = [0 \ 13 \ 13 \ 14 \ 14 \ 15 \ 15 \ 0]$$

Gọi ma trận $nwx2$ là ma trận chuyển vị góc xoay có kích thước $nwx2(n_{pt}, 2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ản số là góc xoay tại nút của các phần tử (hình 3.5).

$$nwx2(1,:) = [16 \ 17]; nwx2(2,:) = [18 \ 19]; nwx2(3,:) = [20 \ 21]; nwx2(4,:) = [22 \ 23]$$

$$nwx2 = [16 \ 17 \ 18 \ 19 \ 20 \ 21 \ 22 \ 23]$$

Các phần tử cột bên phải:

$$nw3(1,:) = [0 \ 24]; nw3(2,:) = [24 \ 25]; nw3(3,:) = [25 \ 26]; nw3(4,:) = [26 \ 27]$$

$$nw3 = [0 \ 24 \ 24 \ 25 \ 25 \ 26 \ 26 \ 27]$$

Gọi ma trận $nwx3$ là ma trận chuyển vị góc xoay có kích thước $nwx3(n_{pt}, 2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ản số là góc xoay tại nút của các phần tử (hình 3.5c3).

$$nwx3(1,:) = [28 \ 29]; nwx3(2,:) = [30 \ 31]; nwx3(3,:) = [32 \ 33]; nwx3(4,:) = [34 \ 35]$$

$$nwx3 = [28 \ 29 \ 30 \ 31 \ 32 \ 33 \ 34 \ 35]$$

Sau khi biết ẩn số thực của dầm và cột ta có thể xây dựng độ cứng tổng thể của khung (có rất nhiều cách ghép nối phần tử khác nhau, tùy vào trình độ lập trình của mỗi người nên tác giả không trình bày chi tiết cách ghép nối các phần tử lại để được ma trận độ cứng của toàn dầm và có thể xem trong code mô đun chương trình của tác giả)

Nếu bài toán có $nw1, nw2, nw3$ ẩn số chuyển vị thẳng của dầm và cột và $nwx1, nwx2, nwx3$ ẩn số góc xoay của dầm và cột thì ma trận độ cứng của dầm là K có kích thước (nxn) , $K(n, n)$ với $n=(nw1+nwx1+nw2+nwx2+nw3+nwx3)$. Như ở ví dụ 3.2b, $n=35$. Bây giờ xét điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử.

Điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử được viết như sau:

$$\left. \frac{dy_i}{dx} \right|_{nut2} - \left. \frac{dy_{i+1}}{dx} \right|_{nut1} = 0 \quad (a)$$

Đối với cột trái, ta có:

$$\left. \begin{aligned} \delta\lambda_1 \left[\frac{dy_{11}}{dx} \right|_{nut2} - \frac{dy_{12}}{dx} \Big|_{nut1} \right] &= 0 \\ \delta\lambda_2 \left[\frac{dy_{12}}{dx} \right|_{nut2} - \frac{dy_{13}}{dx} \Big|_{nut1} \right] &= 0 \\ \delta\lambda_3 \left[\frac{dy_{13}}{dx} \right|_{nut2} - \frac{dy_{14}}{dx} \Big|_{nut1} \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Đối với dầm ngang, ta có:

$$\left. \begin{aligned} \delta\lambda_4 \left[\frac{dy_{21}}{dx} \right|_{nut2} - \frac{dy_{22}}{dx} \Big|_{nut1} \right] &= 0 \\ \delta\lambda_5 \left[\frac{dy_{22}}{dx} \right|_{nut2} - \frac{dy_{23}}{dx} \Big|_{nut1} \right] &= 0 \\ \delta\lambda_6 \left[\frac{dy_{23}}{dx} \right|_{nut2} - \frac{dy_{24}}{dx} \Big|_{nut1} \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Đối với cột phải, ta có:

$$\left. \begin{aligned} \delta\lambda_7 \left[\frac{dy_{11}}{dx} \Big|_{nut2} - \frac{dy_{12}}{dx} \Big|_{nut1} \right] &= 0 \\ \delta\lambda_8 \left[\frac{dy_{12}}{dx} \Big|_{nut2} - \frac{dy_{13}}{dx} \Big|_{nut1} \right] &= 0 \\ \delta\lambda_9 \left[\frac{dy_{13}}{dx} \Big|_{nut2} - \frac{dy_{14}}{dx} \Big|_{nut1} \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

Gọi k_1 là góc xoay tại nút 2 của phần tử trước, k_2 là góc xoay tại nút 1 của phần tử sau thì ta có các hệ số trong ma trận độ cứng K:

$$k(n+i, k_1) = \frac{2}{\Delta x}; \quad k(n+i, k_2) = -\frac{2}{\Delta x} \quad (i=1 \div k) \quad (e)$$

$$k(k_1, n+i) = \frac{2}{\Delta x}; \quad k(k_2, n+i) = -\frac{2}{\Delta x} \quad (i=1 \div k) \quad (f)$$

Nếu có hai phần tử thì có một điều kiện về góc xoay, có n_{pt} phần tử thì có $(2n_{pt} - 1)$ điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử.

Điều kiện biên được viết như sau:

- Tại đầu ngàm chân cột trái và phải có góc xoay bằng không:

$$\delta\lambda_{10} \left(\frac{dy_1}{dx} \Big|_{nut1\ phantu1} \right) = 0 \quad (f)$$

$$\delta\lambda_{11} \left(\frac{dy_3}{dx} \Big|_{nut1\ phantu1} \right) = 0 \quad (g)$$

Điều kiện hai góc xoay tại nút cứng giao giữa cột 3 và dầm 2 được viết như sau:

Góc xoay tại nút cuối của phần tử đầu cột phải bằng góc xoay tại nút cuối của phần tử cuối cùng của dầm

$$\delta\lambda_{12} \left(\frac{dy_2}{dx} \Big|_{nut2} - \frac{dy_3}{dx} \Big|_{nut2} \right) = 0 \quad (h)$$

Mômen tại nút cuối của phần tử đầu cột trái 1 và momen tại nút đầu của phần tử đầu tiên của dầm 2 bằng không

$$\delta\lambda_{13} \left(\frac{dy_1}{dx} \Big|_{nut2} - \frac{dy_2}{dx} \Big|_{nut1} \right) = 0 \quad (i)$$

Điều kiện chuyển vị ngang tại đầu cột trái và phải bằng nhau:

$$\delta\lambda_{14} (y_1|_{nut2} - y_3|_{nut2}) = 0 \quad (k)$$

Trong đó $\lambda_k (k=1 \div 14)$ cũng là ẩn số của bài toán (có k ẩn số λ), do đó tổng số ẩn số của bài toán lúc đó là $(n+k)$, do đó ma trận độ cứng của phần tử lúc này cũng phải thêm k dòng và k cột như vậy kích thước của ma trận độ cứng là $K(n+k, n+k)$. Chẳng hạn trong ví dụ này, ta có $n=35, k=14$ và tổng số ẩn của bài toán là $n+k=35+14=49$ ẩn. Trong trường hợp này ta xác định được kích thước của ma trận độ cứng tổng thể là: $K[49 \times 49]$.

Như vậy cuối cùng ta sẽ thiết lập được phương trình:

$$[K]\{\Delta\} = \{F\} \quad (e)$$

trong đó: $\{F\} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$; $\{\Delta\} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix}$ là ẩn số của bài toán

} so - hang = n
} so - hang = k

Trong ví dụ 3.4 khi chia thành ra thành 4 phần tử, ta có:

- Ma trận độ cứng phần tử $[K_e]$, như sau:

$$[K_e] = \begin{bmatrix} 768 & -768 & 96 & 96 \\ -768 & 768 & -96 & -96 \\ 96 & -96 & 16 & 8 \\ 96 & -96 & 8 & 16 \end{bmatrix}$$

- Ma trận độ cứng toàn dầm $[K]$:

Ghép nối các ma trận độ cứng phần tử $[K_e]$ vào hệ tọa độ chung, ta được ma trận độ cứng tổng thể của toàn kết cấu $[K(49 \times 49)]$, ở đây không trình bày vì kích thước ma trận quá lớn.

Giải phương trình (e) ta nhận được:

$$\{\Delta\} = [K]^{-1}\{F\}$$

Theo ngôn ngữ lập trình Matlab ta có thể viết:

$$\{\Delta\} = [K] \setminus \{F\}$$

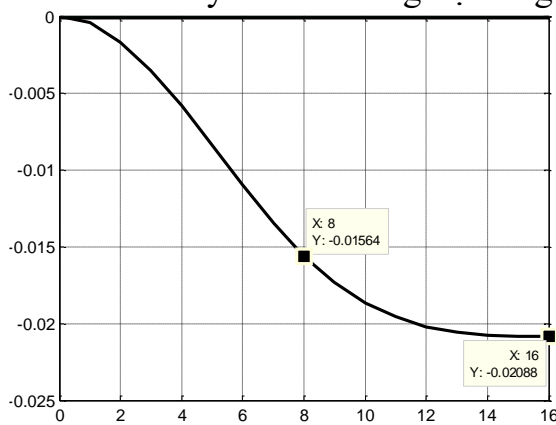
Kết quả chuyển vị, góc xoay tại các nút:

$$\{W\} = \begin{Bmatrix} W_{12} \\ W_{13} \\ W_{14} \\ W_{15} \\ W_{22} \\ W_{23} \\ W_{24} \\ W_{32} \\ W_{33} \\ W_{34} \\ W_{35} \end{Bmatrix} \times Pl^3; \quad \{\varphi\} = \begin{Bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{12} \\ \varphi_{13} \\ \varphi_{14} \\ \varphi_{15} \\ \varphi_{21} \\ \varphi_{22} \\ \varphi_{23} \\ \varphi_{24} \\ \varphi_{25} \\ \varphi_{35} \\ \varphi_{34} \\ \varphi_{33} \\ \varphi_{32} \\ \varphi_{31} \end{Bmatrix} \times Pl^2$$

Mômen uốn của dầm:

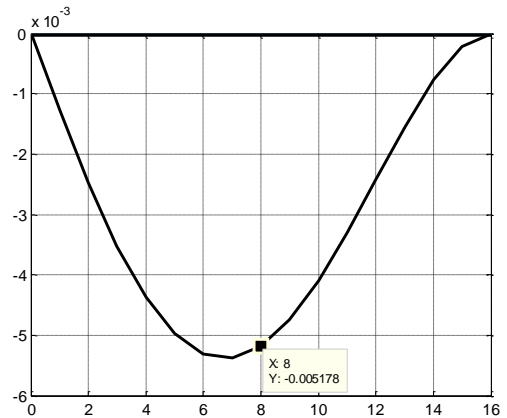
$$\{M\} = \begin{pmatrix} M_{11} \\ M_{12} \\ M_{13} \\ M_{14} \\ M_{15} \\ M_{21} \\ M_{22} \\ M_{23} \\ M_{24} \\ M_{25} \\ M_{35} \\ M_{34} \\ M_{33} \\ M_{32} \\ M_{31} \end{pmatrix} \times Pl$$

Dưới đây lần là đường độ võng và biểu đồ moomen uốn của cột và dầm

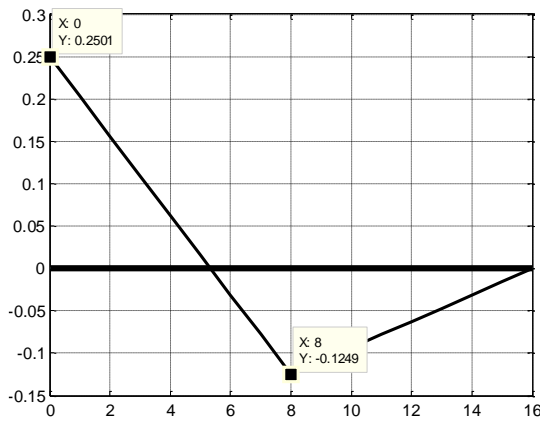


3.8a. Đường độ võng của cột trái

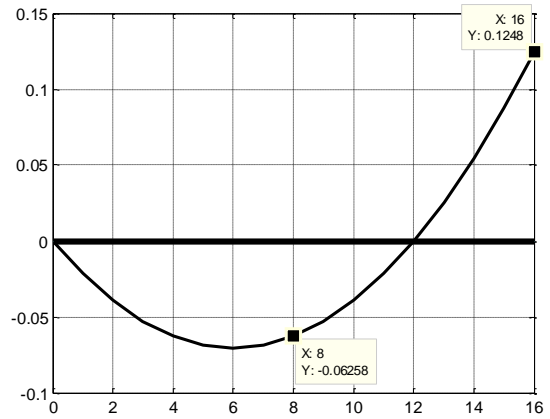
Hình



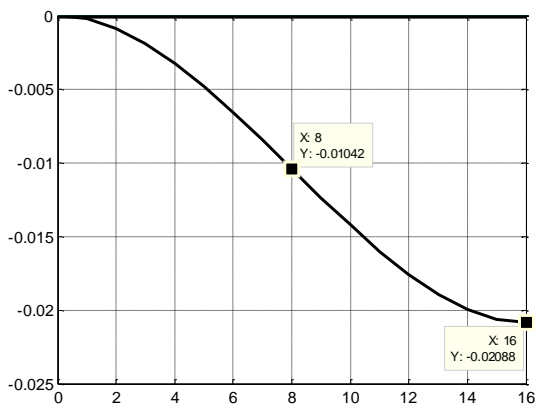
Hình 3.8b. Đường độ võng của dầm



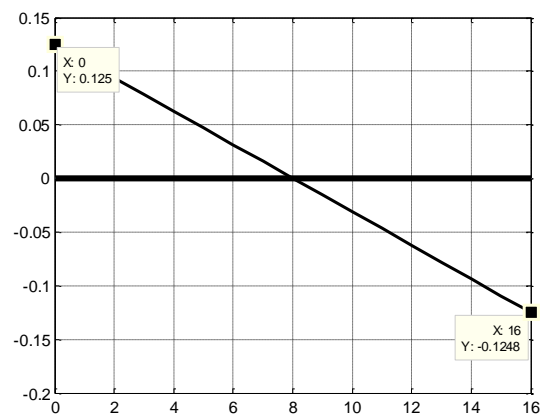
Hình 3.9a. Biểu đồ mômen của cột trái



Hình 3.9b. Biểu đồ mômen của dầm



Hình 3.6c. Đường độ võng của cột phải



Hình 3.9c. Biểu đồ mômen của cột phải

Nhận xét kết quả trên:

Khi chia cột và dầm thành 16 phần ta nhận được kết quả như trên, so sánh với kết quả chính xác theo lời giải giải tích ta nhận được sai số theo bảng sau:

BẢNG SO SÁNH MÔMEN UỐN TẠI CÁC TIẾT DIỆN CỘT VÀ DẦM

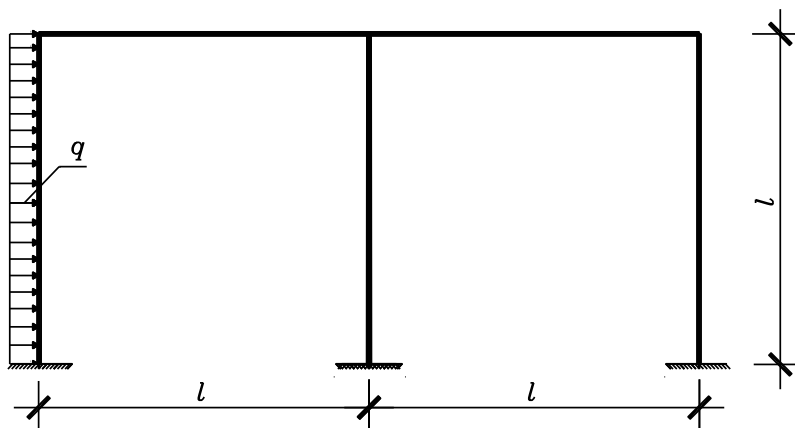
Các tiết diện của cột 1,3 và dầm 2	Lời giải số theo phương pháp PTHH	Lời giải chính xác	Sai số %
Chân cột 1	-0,2501	-0,2500	0,04
Giữa cột 1	0,1249	0,1250	0,08
Giữa dầm 2	0,0625	0,0625	0
Đầu phải dầm 2	-0,1248	-0,1250	0,16

Đầu cột 3	-0,1248	-0,1250	0,16
Chân cột 3	0,1250	0,1250	0

Ta thấy kết quả nhận được gần như trùng khớp với lời giải chính xác.

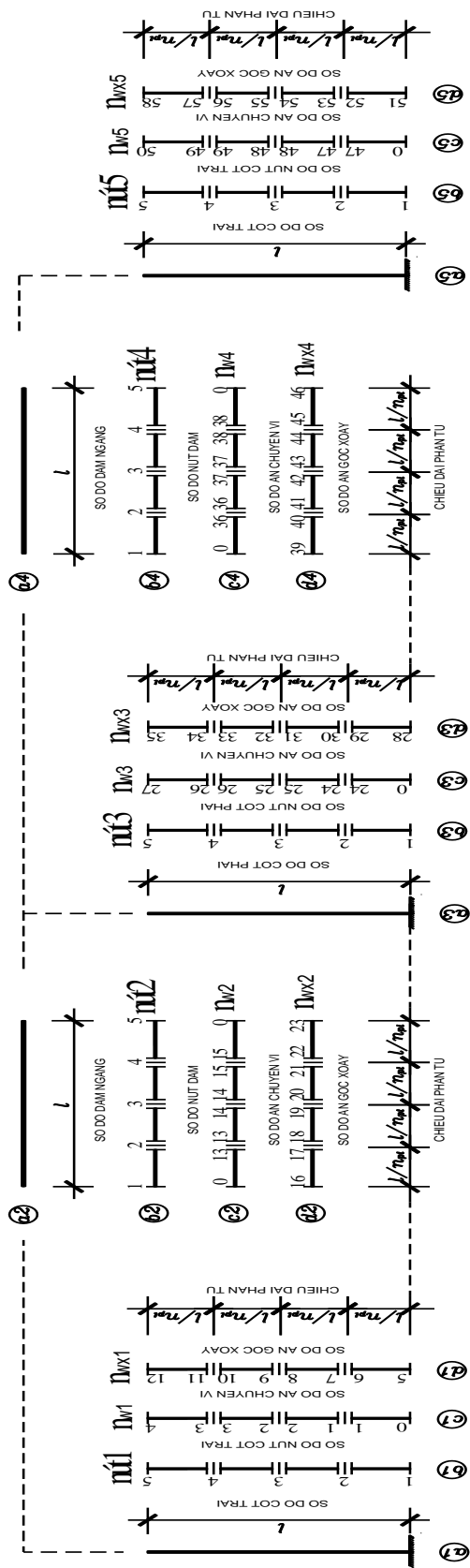
Ví dụ 3.3: Khung siêu tĩnh bậc 6, hình 3.10.

Xác định nội lực và chuyển vị của khung chịu lực như hình 3.10, độ cứng uốn $EJ = \text{const}$.



Hình 3.10. Khung siêu tĩnh bậc 6

Rời rạc hóa kết cấu dầm ra thành n_{pt} phần tử. Các nút của phần tử phải trùng với vị trí đặt lực tập trung, hay vị trí thay đổi tiết diện, chiều dài các phần tử có thể khác nhau.



Hình 3.11. Sơ đồ rời rạc kết cấu

Mỗi phần tử có 4 ẩn $w_1, w_2, \theta_1, \theta_2$ vậy nếu n_{pt} phần tử rời rạc thì tổng cộng có $4 \times n_{pt}$ ẩn.

Khi chia mỗi thanh của khung thành 4 phần tử thì: ta có các ẩn chuyển vị nw_i , góc xoay $nmxi$ như sau:

$$\begin{aligned}nw1 &= [0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 4] \\nw1x &= [5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12] \\nw2 &= [0 \quad 13 \quad 13 \quad 14 \quad 14 \quad 15 \quad 15 \quad 0] \\nw2x &= [16 \quad 17 \quad 18 \quad 19 \quad 20 \quad 21 \quad 22 \quad 23] \\nw3 &= [0 \quad 24 \quad 24 \quad 25 \quad 25 \quad 26 \quad 26 \quad 27] \\nw3x &= [28 \quad 29 \quad 30 \quad 31 \quad 32 \quad 33 \quad 34 \quad 35] \\nw4 &= [0 \quad 36 \quad 36 \quad 37 \quad 37 \quad 38 \quad 38 \quad 0] \\nw4x &= [39 \quad 40 \quad 41 \quad 42 \quad 43 \quad 44 \quad 45 \quad 46] \\nw5 &= [0 \quad 47 \quad 47 \quad 48 \quad 48 \quad 49 \quad 49 \quad 50] \\nw5x &= [51 \quad 52 \quad 53 \quad 54 \quad 55 \quad 56 \quad 57 \quad 58]\end{aligned}$$

Sau khi biết ẩn số thực của dầm và cột ta có thể xây dựng độ cứng tổng thể của khung có kích thước $K(n \times n)$, ở ví dụ này là $K(58 \times 58)$.

Bây giờ xét điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử.

Điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử được viết như sau:

$$\delta\lambda_i \left(\frac{dy}{dx} \Big|_{nut2\ phantu\ truoc} - \frac{dy}{dx} \Big|_{nut1\ phantu\ sau} \right) = 0 \quad i = 5(n_{pt} - 1) \quad (a)$$

Trong bài toán này ta chia thành thành 4 phần tử nên $i=5(4-1)=15$ điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử

Điều kiện biên được viết như sau:

- Tại đầu ngàm chân cột trái, cột giữa và cột phải phải có góc xoay bằng không:

$$\delta\lambda_{16} \left(\frac{dy_1}{dx} \Big|_{nut1\ phantu1} \right) = 0 \quad (b)$$

$$\delta\lambda_{17} \left(\frac{dy_3}{dx} \Big|_{nut1\ phantu1} \right) = 0 \quad (c)$$

$$\delta\lambda_{18} \left(\frac{dy_5}{dx} \Big|_{nut1\ phantu1} \right) = 0 \quad (d)$$

Điều kiện hai góc xoay tại nút cứng giao giữa cột 3 và dầm 2 được viết như sau:

Góc xoay tại nút cuối của phần tử đầu cột 1 phải bằng góc xoay tại nút đầu của phần tử 1 của dầm 2

$$\delta\lambda_{19} \left(\frac{dy_1}{dx} \Big|_{nut2} - \frac{dy_2}{dx} \Big|_{nut1} \right) = 0 \quad (e)$$

Góc xoay tại nút cuối của phần tử đầu cột 5 phải bằng góc xoay tại nút cuối của phần tử cuối cùng của dầm 4

$$\delta\lambda_{20} \left(\frac{dy_4}{dx} \Big|_{nut2} - \frac{dy_5}{dx} \Big|_{nut2} \right) = 0 \quad (f)$$

Góc xoay tại nút 2 của phần tử cuối cùng của dầm 2 phải bằng góc xoay tại nút 2 của phần tử đầu cột 3 và Góc xoay tại nút 2 của phần tử cuối cùng của cột 3 phải bằng góc xoay tại nút 1 của phần đầu tiên của dầm 4.

$$\delta\lambda_{21} \left(\frac{dy_2}{dx} \Big|_{nut2} - \frac{dy_3}{dx} \Big|_{nut2} \right) = 0 \quad (g)$$

$$\delta\lambda_{22} \left(\frac{dy_3}{dx} \Big|_{nut2} - \frac{dy_4}{dx} \Big|_{nut1} \right) = 0 \quad (h)$$

Điều kiện chuyển vị ngang tại đầu cột trái 1, cột giữa 2 và cột phải 3 bằng nhau:

$$\delta\lambda_{23} (y_1|_{nut2} - y_3|_{nut2}) = 0 \quad (i)$$

$$\delta\lambda_{24} (y_3|_{nut2} - y_5|_{nut2}) = 0 \quad (k)$$

Trong đó $\lambda_k (k=1 \div 24)$ cũng là ẩn số của bài toán (có k ẩn số λ), do đó tổng số ẩn số của bài toán lúc đó là $(n+k)$, do đó ma trận độ cứng của phần tử lúc này cũng phải thêm k dòng và k cột như vậy kích thước của ma trận độ cứng tổng thể là $K(n+k, n+k)$. Chẳng hạn trong ví dụ này, ta có $n=58, k=24$

và tổng số ẩn của bài toán là $n+k=58+24=82$ ẩn. Trong trường hợp này ta xác định được kích thước của ma trận độ cứng tổng thể là: $K[82 \times 82]$.

Như vậy cuối cùng ta sẽ thiết lập được phương trình:

$$[K]\{\Delta\} = \{F\} \quad (1)$$

trong đó: $\{F\} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$; $\{\Delta\} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix}$ là ẩn số của bài toán

} so – hang = n
} so – hang = k

Trong ví dụ 3.3 khi chia thành ra thành 4 phần tử, ta có:

- **Ma trận độ cứng phần tử $[K_e]$, như sau:**

$$[K_e] = \begin{bmatrix} 768 & -768 & 96 & 96 \\ -768 & 768 & -96 & -96 \\ 96 & -96 & 16 & 8 \\ 96 & -96 & 8 & 16 \end{bmatrix}$$

- **Ma trận độ cứng toàn dầm $[K]$:**

Ghép nối các ma trận độ cứng phần tử $[K_e]$ vào hệ tọa độ chung, ta được ma trận độ cứng tổng thể của toàn kết cấu $[K(82 \times 82)]$, ở đây không trình bày vì kích thước ma trận quá lớn.

- **Véc tơ lực nút $\{F\}$:** Trong ví dụ này là véc tơ 1 cột 82 dòng, như sau:

Sau khi có $[K]$ và $\{F\}$: ta thành lập được hệ phương trình cơ bản của phương pháp phần tử hữu hạn, như sau:

$$[K]\{\Delta\} = \{F\}$$

Giải phương trình (e) ta nhận được:

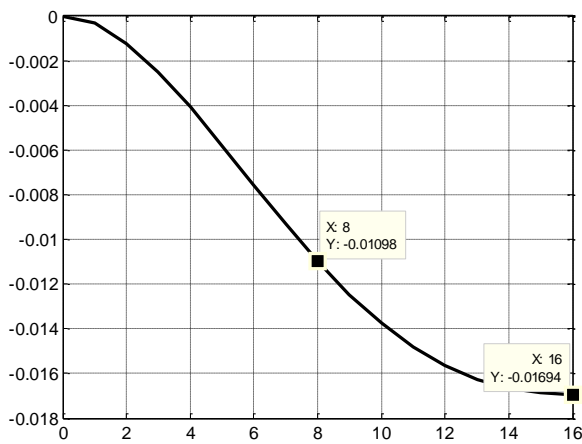
$$\{\Delta\} = [K]^{-1}\{F\}$$

Theo ngôn ngữ lập trình Matlab ta có thể viết:

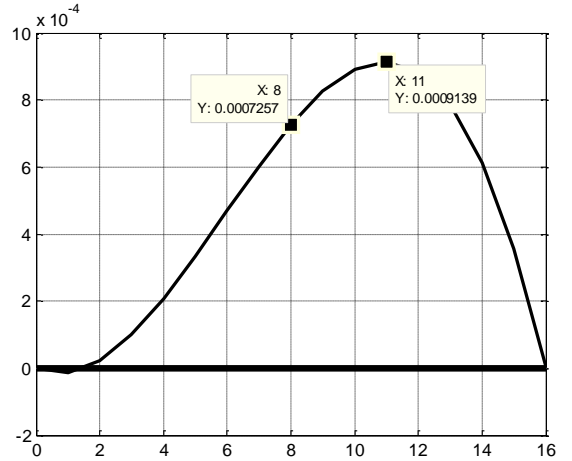
$$\{\Delta\} = [K] \setminus \{F\}$$

Kết quả chuyển vị, góc xoay tại các nút và Mômen uốn của dầm:

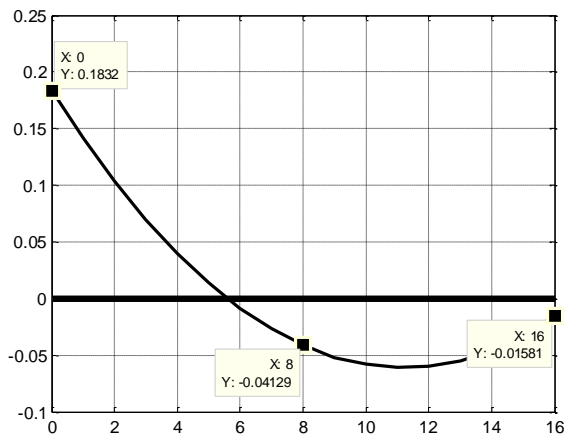
Dưới đây lần là đường độ võng và biểu đồ moomen uốn của cột và dầm



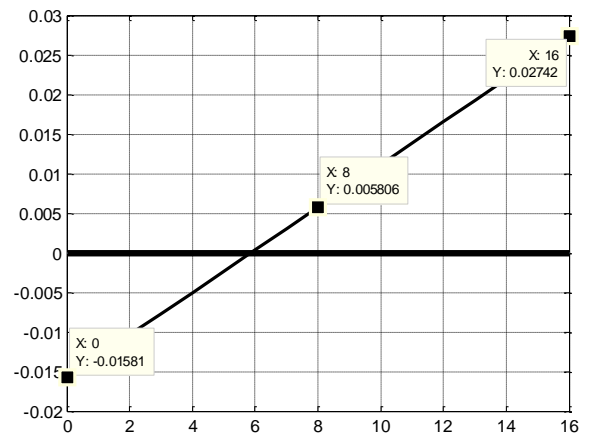
Hình 3.12a. Đường độ võng của cột trái 1



Hình 3.12b. Đường độ võng của dầm 2



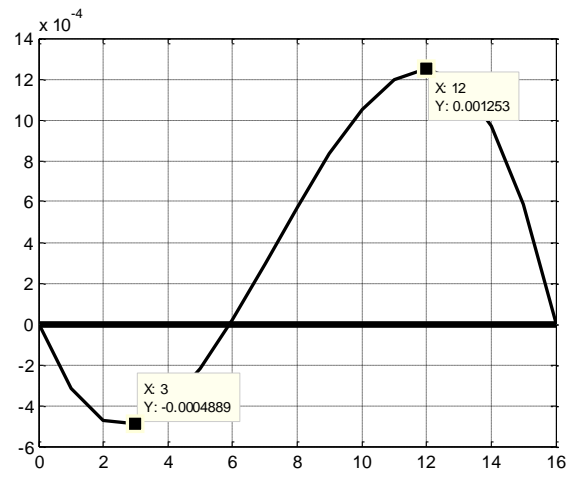
Hình 3.13a. Biểu đồ mômen của cột trái 1



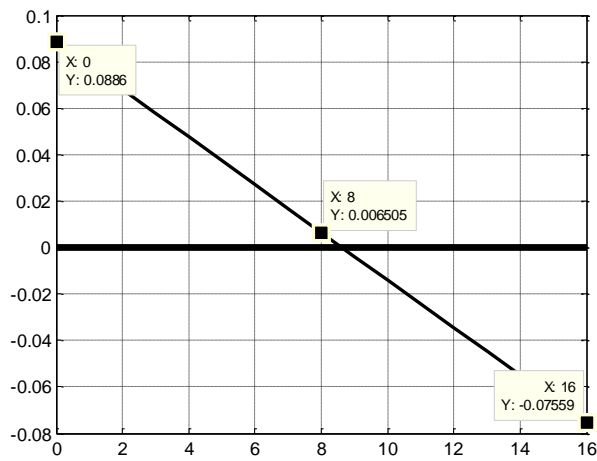
Hình 3.13b. Biểu đồ mômen của dầm 2



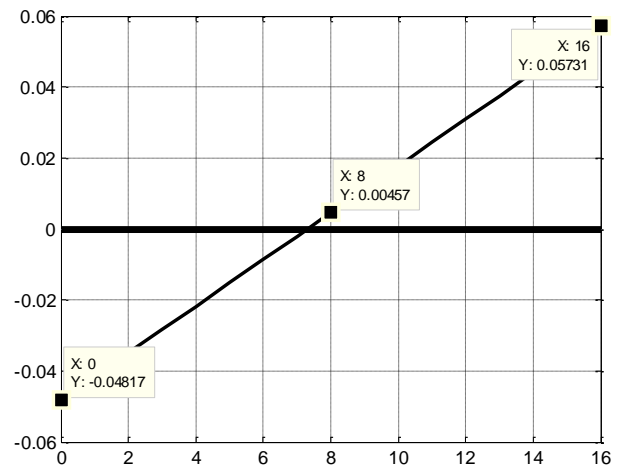
Hình 3.12c. Đường độ võng của cột giữa 3



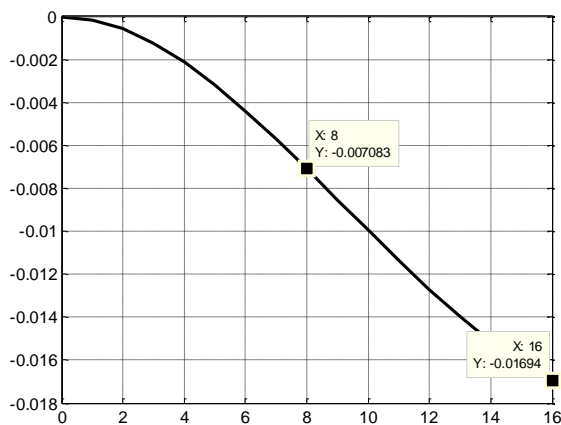
Hình 3.12d. Đường độ võng của dầm 4



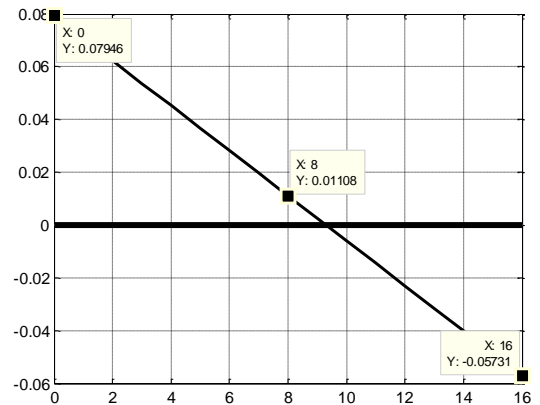
Hình 3.13c. Biểu đồ mômen của cột giữa 3



Hình 3.13d. Biểu đồ mômen của dầm 4



Hình 3.12e. Đường độ võng của cột phải 5



Hình 3.13e. Biểu đồ mômen của cột phải 5

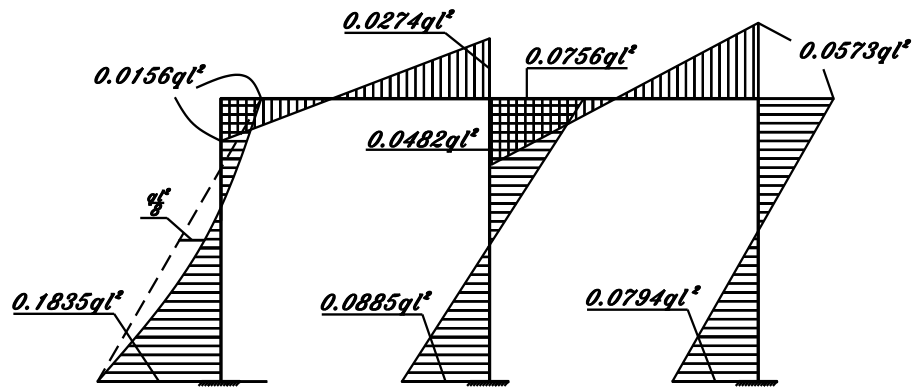
Nhận xét kết quả trên:

Khi chia cột và dầm thành 16 phần tử ta nhận được kết quả như trên, so sánh với kết quả chính xác theo lời giải giải tích ta nhận được sai số theo bảng sau:

BẢNG SO SÁNH MÔMEN UỐN TẠI CÁC TIẾT DIỆN CỘT VÀ DẦM

Các tiết diện của cột 1,3 và dầm 2	Lời giải số theo phương pháp PTHH	Lời giải chính xác	Sai số %
Chân cột 1	-0,1832	-0,1835	0,16
Đầu cột 1	0,0158	0,0156	1,28
Đầu phải dầm 2	-0,0274	-0,0274	0
Đầu cột 3	0,0756	0,0756	0
Chân cột 3	-0,0886	-0,0885	0,11
Đầu dầm 4	0,0482	0,0482	0
Đầu phải dầm 4	-0,0573	-0,0573	0
Chân cột 5	0,0795	0,0794	0,12

Ta thấy kết quả nhận được gần như trùng khớp với lời giải chính xác.



Hình 3.14. Biểu đồ M theo giải tích

KẾT LUẬN

Qua kết quả nghiên cứu từ các chương, chương 1 đến chương 3 đối với bài toán khung chịu uốn. Tác giả rút ra các kết luận sau:

Tác giả đã áp dụng được phương pháp phần tử hữu hạn đối với bài toán khung phẳng chịu uốn chịu tải trọng tĩnh. Nhận được kết quả hoàn toàn chính xác khi rời rạc hóa kết cấu đến một số lượng phần tử nhất định.

Độ chính xác của lời giải phụ thuộc vào từng bài toán, loại tải trọng, vị trí và cách đặt tải có đối xứng hay bất kỳ. Chẳng hạn trong ví dụ 3.1, bảng 3.1, ta thấy sai số tăng lên so với kết quả chính xác tại tất cả các tiết diện, sai số nhỏ nhất tại tiết diện đầu ngàm bên phải dầm (0,07%), sai số lớn nhất tại chân cột (22,7%) và giữa cột (17,5%). Muốn tăng độ chính xác ta cần rời rạc hóa dầm và cột thành nhiều phần tử hơn. Chẳng hạn trong ví dụ 3.1 ta phải rời rạc hóa kết cấu dầm và cột lên tới 32 phần tử ta mới nhận được kết quả trùng khớp với lời giải chính xác. Nhưng trong ví dụ 3.2 và 3.3 kết quả ở bảng 3.2 và 3.3 cho thấy khi chia các thanh trong khung thành 16 phần tử thì đã nhận được kết quả hoàn toàn chính xác ở đa số tiết diện, các tiết diện còn lại có sai số không đáng kể.

Qua kết quả nghiên cứu thấy rằng, với việc sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn có thể xây dựng bài toán cơ học kết cấu một cách dễ dàng.

KIẾN NGHỊ VỀ NHỮNG NGHIÊN CỨU TIẾP THEO

1. Dùng phương pháp phần tử hữu hạn làm cơ sở để xây dựng và giải các bài toán kết cấu chịu uốn khác như kết cấu tấm, vỏ.
2. Dùng các kết quả tính toán nội lực và chuyển vị, để đưa vào thiết kế các công trình.

DANH MỤC TÀI LIỆU THAM KHẢO

I. Tiếng Việt

- [1] Nguyễn Văn Liên, Nguyễn Phương Thành, Đinh Trọng Bằng (2003), *Giáo trình Sức bền vật liệu*, Nhà xuất bản xây dựng, tái bản lần thứ 3, 330 trang.
- [2] Nguyễn Văn Đạo (2001), *Cơ học giải tích*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà nội, 337 trang.
- [3] Lêu Thọ Trình, Đỗ Văn Bình(2010), *Giáo trình cơ học công trình*, Nhà xuất bản xây dựng.
- [4] Lêu Thọ Trình, Nguyễn Mạnh Yên (1998), *Cơ học kết cấu*, Nhà xuất bản khoa học kỹ thuật
- [5] Đoàn Văn Duẩn (2015), *Bài toán cơ học kết cấu dưới dạng tổng quát*, Tạp chí Xây dựng số 02 (Tr59-Tr61).
- [6] Trần Thị Kim Huế (2005), *Phương pháp nguyên lý Cực trị Gauss đối với các bài toán cơ học kết cấu*, Luận văn thạc sỹ kỹ thuật.
- [7] Timoshenko C.P, Voinópki- Krige X, (1971), *Tám và Vô*. Người dịch, Phạm Hồng Giang, Vũ Thành Hải, Đoàn Hữu Quang, Nxb Khoa học và kỹ thuật, Hà Nội.
- [8] T. Karamanxki, người dịch Nguyễn Tiến Cường (1985), *Phương pháp số trong cơ học kết cấu*, Nhà xuất bản Khoa học kỹ thuật.
- [9] Nguyễn Trâm, *Phương pháp phần tử hữu hạn* (2007), Nhà xuất bản xây dựng

II. Tiếng Anh

- [10] Klaus – Jurgen Bathe (1996), *Finite Element procedures*. Part one, Prentice – Hall International, Inc, 484 trang.

- [11] Klaus – Jurgen Bathe (1996), *Finite Element procedures*. Part two, Prentice – Hall International, Inc, 553 trang.
- [12] O.C. Zienkiewicz-R.L. Taylor (1991), *The finite element method* (four edition) Volume 2, McGraw-Hill Book Company, Inc, 807 trang.
- [13] G.Korn-T.Korn (1961), *Mathematical Handbook for sientists and Engineers*, McGraw-Hill, New york (Bản dịch tiếng Nga, I.Bramovich chủ biên, Nhà xuất bản Nauka-Moscow, 1964).
- [14] D.R.J. Owen, E.Hinton (1986), *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*, Pineridge Press Lt.
- [15] C.A.Brebbia, J.C.F.Telles, L.C.Wrobel(1984), *Boundary Element Techniques. Theory and Applications in Engineering*. Nxb Springer – Verlag.(Bản dịch tiếng Nga, 1987).
- [16] Irons, B. M. and O. C. Zienkiewicz (1968). “*The isoparametric Finite Element System – A New Concept in Finite Element Analysis*”, Proc. Conf. “Recent Advances in Stress Analysis”. Royal Aeronautical Society. London.