

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC DÂN LẬP HẢI PHÒNG**

TRẦN MẠNH SƠN

**NGHIÊN CỨU DAO ĐỘNG TỰ DO CỦA DẦM
BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN**

Chuyên ngành: **Kỹ thuật Xây dựng Công trình Dân dụng & Công nghiệp**

Mã số: **60.58.02.08**

LUẬN VĂN THẠC SĨ KỸ THUẬT

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS. TS. TRẦN HỮU NGHỊ

Hải Phòng, 2017

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các số liệu, kết quả trong luận văn là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Tác giả luận văn

Trần Mạnh Sơn

LỜI CẢM ƠN

Tác giả luận văn xin trân trọng bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất đối với GS.TS Trần Hữu Nghị vì đã tận tình giúp đỡ và cho nhiều chỉ dẫn khoa học có giá trị cũng như thường xuyên động viên, tạo mọi điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu hoàn thành luận văn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các nhà khoa học, các chuyên gia trong và ngoài trường Đại học Dân lập Hải phòng đã tạo điều kiện giúp đỡ, quan tâm góp ý cho bản luận văn được hoàn thiện hơn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn các cán bộ, giáo viên của Khoa xây dựng, Phòng đào tạo Đại học và Sau đại học- trường Đại học Dân lập Hải phòng, và các đồng nghiệp đã tạo điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tác giả trong quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tác giả luận văn

Trần Mạnh Sơn

MỤC LỤC

LỜI CAM ĐOAN	i
LỜI CẢM ƠN	iii
MỤC LỤC	iv
MỞ ĐẦU	1
CHƯƠNG 1. PHÂN TÍCH ĐỘNG LỰC HỌC CÔNG TRÌNH.....	2
1.1. Khái niệm	2
1.2. Đặc trưng cơ bản của bài toán động lực học.....	3
1.2.1. Lực cản	3
1.2.2. Đặc trưng động của hệ dao động tuyến tính	4
1.3. Dao động tuần hoàn - Dao động điều hòa.....	5
1.3.1. Dao động tuần hoàn	5
1.3.2. Dao động điều hòa	6
1.4. Các phương pháp để xây dựng phương trình chuyển động	6
1.4.1. Phương pháp tĩnh động học	6
1.4.2. Phương pháp năng lượng	7
1.4.3. Phương pháp ứng dụng nguyên lý công ảo.....	8
1.4.4. Phương trình Lagrange (phương trình Lagrange loại 2).....	8
1.4.5. Phương pháp ứng dụng nguyên lý Hamilton	9
1.5. Dao động của hệ hữu hạn bậc tự do.....	10
1.5.1. Dao động tự do.....	10
1.5.1.1. Các tần số riêng và các dạng dao động riêng.....	10
1.5.1.2. Giải bài toán riêng (eigen problem)	12
1.5.1.3. Tính chất trực giao của các dạng chính - Dạng chuẩn.....	13
1.5.2. Dao động cưỡng bức của hệ hữu hạn bậc tự do.....	14
1.5.2.1. Phương pháp khai triển theo các dạng riêng.....	14

1.5.2.2. Trình tự tính toán hệ dao động cưỡng bức.....	16
1.5.2.3. Dao động của hệ chịu tải trọng điều hòa.....	17
1.6. Các phương pháp tính gần đúng trong động lực học công trình	18
1.6.1. Phương pháp năng lượng (phương pháp Rayleigh).....	18
1.6.2. Phương pháp Bupnop - Galoockin.....	19
1.6.3. Phương pháp Lagrange - Ritz	19
1.6.4. Phương pháp thay thế khối lượng	20
1.6.5. Phương pháp khối lượng tương đương	20
1.6.6. Các phương pháp số' trong động lực học công trình	21
1.6.6.1. Phương pháp sai phân	21
1.6.6.2. Phương pháp phần tử hữu hạn	21
1.6.6.3. Phương pháp tích phân trực tiếp	21
1.7. Một số nhận xét.....	22
CHƯƠNG 2 PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN.....	24
2.1. Phương pháp phần tử hữu hạn	24
2.1.1 Nội dung phương pháp phần tử hữu hạn theo mô hình chuyển vị.....	25
2.1.1.1. Rời rạc hoá miền khảo sát.....	25
2.1.1.2. Chọn hàm xấp xỉ	26
2.1.1.3. Xây dựng phương trình cân bằng trong từng phần tử, thiết lập ma trận độ cứng $[K]_e$ và vectơ tải trọng nút $\{F\}_e$ của phần tử thứ e.	27
2.1.1.4. Ghép nối các phần tử xây dựng phương trình cân bằng của toàn hệ.	30
2.1.1.5: Sử lý điều kiện biên của bài toán	39
2.1.1.6. Giải hệ phương trình cân bằng.....	45
2.1.1.7. Xác định nội lực	45
2.1.2. Cách xây dựng ma trận độ cứng của phần tử chịu uốn.....	46
2.1.3. Cách xây dựng ma trận độ cứng tổng thể của kết cấu	49

CHƯƠNG 3 TÍNH TOÁN DAO ĐỘNG CỦA THANH LÒI GIẢI BÁN GIẢI TÍCH VÀ LÒI GIẢI SỐ	53
3.1. Dao động tự do của thanh	53
3.2. Tính toán dao động tự do của thanh - lời giải bán giải tích	57
3.2.2. Thanh hai đầu khớp.....	60
3.2.3. Thanh đầu ngàm - đầu khớp.....	64
3.2.4. Thanh hai đầu ngàm.....	67
3.3. Tính toán dao động tự do của thanh - lời giải số theo phương pháp phân tử hữu hạn	68
Kết luận và kiến nghị.....	80
Danh mục tài liệu tham khảo	81

MỞ ĐẦU

Lý do lựa chọn đề tài:

Những năm gần đây, do kinh tế phát triển, ngày càng xuất hiện nhiều công trình cao tầng, công trình có khẩu độ lớn, công trình đặc biệt. Trong những công trình đó người ta thường dùng các thanh có chiều dài lớn, tấm - vỏ chịu nén và do đó điều kiện ổn định trong miền đàn hồi có tầm quan trọng đặc biệt, đòi hỏi phải nghiên cứu đầy đủ cả về mặt lý thuyết và thực nghiệm.

Bài toán dao động của kết cấu đã được giải quyết theo nhiều hướng khác nhau, phần lớn xuất phát từ nguyên lý năng lượng mà theo đó kết quả phụ thuộc rất nhiều vào cách chọn dạng của hệ ở trạng thái lệch khỏi dạng cân bằng ban đầu.

Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss do GS.TSKH. Hà Huy Cương đề xuất là phương pháp cho phép áp dụng nguyên lý cực trị Gauss - vốn được phát biểu cho hệ chất điểm - để giải các bài toán cơ học vật rắn biến dạng nói riêng và bài toán cơ học môi trường liên tục nói chung. Đặc điểm của phương pháp này là bằng một cái nhìn đơn giản luôn cho phép tìm được kết quả chính xác của các bài toán dù đó là bài toán tĩnh hay bài toán động, bài toán tuyến tính hay bài toán phi tuyến.

Đối tượng, phương pháp và phạm vi nghiên cứu của luận án

Trong luận văn này, tác giả sử dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss nói trên và phương pháp chuyển vị cưỡng bức để giải bài toán dao động đàn hồi của thanh, chịu tác dụng của tải trọng tĩnh.

Mục đích nghiên cứu của luận án

"Nghiên cứu dao động tự do của dầm bằng PP PTHH"

Nội dung nghiên cứu của đề tài:

- Trình bày các phương pháp giải bài toán động lực học đã biết.
- Trình bày phương pháp nguyên lý cực trị Gauss.
- Sử dụng phương pháp cho bài toán dao động của thanh.

CHƯƠNG 1.

PHÂN TÍCH ĐỘNG LỰC HỌC CÔNG TRÌNH

1.1. Khái niệm

Các bài toán đầu tiên về dao động trong lĩnh vực cơ học kết cấu xuất hiện từ nửa thế kỷ thứ XIX. Tuy vậy, sau thời kỳ đó các bài toán tĩnh vẫn thu hút được sự quan tâm của các nhà nghiên cứu hơn so với các bài toán động. Cho đến những năm thứ 30 của thế kỷ XX, môn Động lực học công trình mới được coi như một phân riêng biệt trong lĩnh vực cơ học kết cấu.

Quá trình phát triển của lý thuyết dao động công trình liên quan mật thiết đến quá trình phát triển của lý thuyết dao động nói chung và gắn liền với yêu cầu phát triển của nền kinh tế quốc dân. Đặc biệt là trong mấy chục năm gần đây, sự phát triển nhảy vọt của các ngành giao thông vận tải, xây dựng cơ bản, chế tạo máy, hàng không đã thể hiện rõ sự thành công rực rỡ trong lĩnh vực nghiên cứu lý luận và thực nghiệm của môn Động lực học công trình.

Bài toán đơn giản đầu tiên về động lực học công trình là nghiên cứu cách tính dao động cho sơ đồ kết cấu dầm; tiếp đó là các loại kết cấu hệ thanh phức tạp hơn như dàn, vòm, khung, dầm liên tục. Đặc biệt là trong khoảng mười năm gần đây, việc nghiên cứu dao động của tấm và vỏ đã được chú ý đến nhiều. Trong thực tế ta thường phải giải quyết các bài toán về dao động công trình khi thiết kế xây dựng các công trình như công trình nhà công nghiệp chịu tải trọng động, công trình cầu chịu tải trọng di động, công trình cầu và các công trình cao chịu tải trọng khí động, các công trình thủy công chịu tác dụng của sóng biển...

Đến nay, đã có rất nhiều công trình lớn nghiên cứu về dao động công trình; trong đó các nhà khoa học của các nước XHCN như Liên Xô [3, 26] Ba Lan, Tiệp Khắc, CHDC Đức [15, 12, 3] đã đóng góp nhiều công trình nghiên cứu xuất sắc. Bên cạnh việc nghiên cứu đề xuất ra lý luận tính toán, các tác giả

cũng đã nghiên cứu tìm biện pháp làm giảm ảnh hưởng động của tải trọng động tác dụng lên công trình.

Hiện nay, một trong những hướng mới được quan tâm nhiều, khi nghiên cứu dao động công trình là áp dụng phương pháp thống kê; phương hướng này áp dụng có hiệu quả đặc biệt đối với những loại dao động chịu các ngoại lực có tính chất ngẫu nhiên [3]. Bên cạnh đó việc xuất hiện các công cụ tính toán mới như máy tính điện tử, đã thúc đẩy rất mạnh mẽ việc nghiên cứu dao động của các công trình cũng như trong cơ học kết cấu nói chung [3].

Trong luận văn này sẽ chỉ đề cập đến những vấn đề rất cơ bản của lý thuyết dao động công trình và áp dụng nó để tính toán dao động của thanh theo lời giải bán giải tích và theo lời giải số bằng phương pháp phần tử hữu hạn.

1.2. Đặc trưng cơ bản của bài toán động lực học:

Tải trọng thay đổi theo thời gian nên trạng thái ứng suất - biến dạng của hệ cũng thay đổi theo thời gian. Do đó, bài toán động sẽ không có nghiệm chung duy nhất như bài toán tĩnh. Vì vậy, bài toán động phức tạp và khó khăn hơn nhiều so với bài toán tĩnh. Sự cần thiết phải kể đến lực quán tính là điểm khác biệt cơ bản nhất của bài toán động lực học so với bài toán tĩnh. Ngoài ra, việc xét đến ảnh hưởng của lực cản cũng là một đặc trưng cơ bản phân biệt hai bài toán trên.

1.2.1. Lực cản:

Trong tính toán, đôi khi không xét đến ảnh hưởng của lực cản nhưng lực cản luôn luôn có mặt và tham gia vào quá trình chuyển động của hệ. Lực cản xuất hiện do nhiều nguyên nhân khác nhau và ảnh hưởng của chúng đến quá trình dao động là rất phức tạp. Trong tính toán, đưa ra các giả thiết khác nhau về lực cản, phù hợp với điều kiện thực tế nhất định.

Trong đa số các bài toán dao động công trình, ta thường sử dụng mô hình vật liệu biến dạng đàn nhớt (ma sát nhớt) do nhà cơ học người Đức W.Voigt kiến

ngiht: xem lực cản tỷ lệ bậc nhất với vận tốc dao động. Công thức của lực cản: $P_c = Cy'$ với C là hệ số tắt dần.

Ngoài ra còn đưa ra một số giả thiết cơ bản sau:

- **Lực cản theo giả thiết Xôrôkin:** là giả thiết về lực cản trong phi đàn hồi. Lực cản trong phi đàn hồi là lực cản tính đến sự tiêu hao năng lượng trong hệ, được biểu thị trong việc làm tổn thất trở năng lượng biến dạng trong quá trình dao động. Nó không phụ thuộc vào tốc độ biến dạng mà phụ thuộc vào giá trị biến dạng. Trong đó, quan hệ giữa các biến dạng chung (độ võng, góc xoay) với tải trọng ngoài là quan hệ phi tuyến.

Công thức của lực cản: $P_c = i \frac{\Psi}{2\pi} Pđ$

trong đó Pđ là lực đàn hồi; ψ là hệ số tiêu hao năng lượng.

[Lực đàn hồi (hay lực phục hồi) xuất hiện khi tách hệ khỏi vị trí cân bằng và có xu hướng đưa hệ về vị trí cân bằng ban đầu, tương ứng và phụ thuộc vào chuyển vị động của hệ: $Pđ = P(y)$. Ở các hệ đàn hồi tuyến tính: $Pđ = ky$ với k là hệ số cứng (lực gây chuyển vị bằng 1 đơn vị)].

- **Lực cản ma sát khô của Coulomb (F_{ms}):** tỷ lệ với áp lực vuông góc N và có phương ngược với chiều chuyển động.

Công thức của lực cản: $F_{ms} = \mu .N$ (với μ là hệ số ma sát).

Lực cản sẽ làm cho chu kỳ dao động dài hơn. Trong thực tế, có những công trình bị cộng hưởng nhưng chưa bị phá hoại ngay vì có hệ số cản khác không. Do còn ảnh hưởng của lực cản nên khi cộng hưởng, các nội lực, chuyển vị động của hệ không phải bằng ∞ mà có trị số lớn hữu hạn.

1.2.2. Đặc trưng động của hệ dao động tuyến tính:

Dao động tuyến tính là dao động mà phương trình vi phân mô tả dao động là phương trình vi phân tuyến tính. Đặc trưng động của hệ dao động tuyến tính bao gồm: khối lượng của hệ, tính chất đàn hồi của hệ (độ cứng, độ mềm),

nguồn kích động, tần số dao động (tần số dao động riêng, dạng dao động riêng), hệ số tắt dần...

Bậc tự do của hệ đàn hồi là số thông số hình học độc lập cần thiết để xác định vị trí của hệ tại một thời điểm bất kỳ khi có chuyển động bất kỳ.

Vấn đề xác định các tần số dao động riêng và các dạng dao động riêng của bài toán dao động hệ hữu hạn bậc tự do tương ứng với bài toán xác định các trị riêng và vectơ riêng của đại số tuyến tính. Thông thường, để đánh giá một công trình chịu tải trọng động, chúng ta thường đánh giá sơ bộ thông qua tần số dao động riêng thứ nhất và dạng dao động riêng thứ nhất (tần số dao động cơ bản và dạng dao động cơ bản).

1.3. Dao động tuần hoàn - Dao động điều hòa:

Hầu như bất cứ hệ kết cấu nào cũng có thể chịu một dạng tải trọng động nào đó trong suốt quá trình sống của nó (tải trọng tĩnh được xem như dạng đặc biệt của tải trọng động). Các tải trọng được phân thành: tải trọng tuần hoàn và tải trọng không tuần hoàn.

Các tải trọng không tuần hoàn có thể là các tải trọng xung ngắn hạn hoặc có thể là các tải trọng tổng quát dài hạn, các dạng đơn giản hoá có thể dùng được.

Một tải trọng tuần hoàn thể hiện sự biến thiên theo thời gian giống nhau liên tiếp đối với một số lượng lớn chu kỳ. Tải trọng tuần hoàn đơn giản nhất có dạng hình sin (hoặc cosin) và được gọi là điều hoà đơn giản. Nhờ có phân tích Fourier mà bất cứ một tải trọng tuần hoàn nào cũng có thể được biểu diễn như là một chuỗi các thành phần điều hoà đơn giản. Tải trọng tuần hoàn gây ra dao động tuần hoàn trong kết cấu.

1.3.1. Dao động tuần hoàn:

Là dao động được lặp lại sau những khoảng thời gian τ nhất định. Nếu dao động được biểu diễn bởi hàm số của thời gian $y(t)$ thì bất kỳ dao động tuần hoàn

nào cũng phải thỏa mãn: $y(t) = y(t+\tau)$. Thời gian lặp lại dao động τ được gọi là chu kỳ của dao động và nghịch đảo của nó $f = 1/\tau$ được gọi là tần số.

Dạng đơn giản nhất của dao động tuần hoàn là dao động điều hòa.

1.3.2. Dao động điều hòa:

Thường được mô tả bằng hình chiếu trên một đường thẳng của một điểm di chuyển trên một vòng tròn với vận tốc góc ω . Do đó chuyển vị y được viết: $y = A \sin \omega t$.

Bởi vì dao động lặp lại trong khoảng thời gian 2π nên có mối liên hệ:

$$\omega = 2\pi / \tau = 2\pi f$$

Vận tốc và gia tốc cũng là điều hòa với cùng tần số của dao động nhưng lệch với độ dịch chuyển lần lượt là $\pi/2$ và π :

$$y' = \omega A \cos(\omega t) = \omega A \sin(\omega t + \pi/2)$$

$$y'' = -\omega^2 A \sin \omega t = \omega^2 A \sin(\omega t + \pi)$$

Vậy: $y'' = -\omega^2 y \Rightarrow$ gia tốc tỷ lệ với độ dịch chuyển.

1.4. Các phương pháp để xây dựng phương trình chuyển động:

Phương trình chuyển động của hệ có thể xây dựng dựa trên cơ sở của phương pháp tĩnh hoặc các nguyên lý biến phân năng lượng. Các biểu thức toán học để xác định các chuyển vị động được gọi là phương trình chuyển động của hệ, nó có thể được biểu thị dưới dạng phương trình vi phân.

1.4.1. Phương pháp tĩnh động học:

[Nội dung nguyên lý D'Alembert đối với cơ hệ: trong chuyển động của cơ hệ, các lực thực sự tác dụng lên chất điểm của hệ gồm nội lực và ngoại lực cùng với các lực quán tính lập thành hệ lực cân bằng]

Dựa trên cơ sở những nguyên tắc cân bằng của tĩnh học có bổ sung thêm lực quán tính viết theo nguyên lý D'Alembert, điều kiện cân bằng (tĩnh động) đối với các lực tổng quát viết cho hệ n bậc tự do:

$$(Q_k + J_k^*)_{k=1..n} = 0$$

trong đó:

Q_k - lực tổng quát của các lực đã cho.

$$Q_k = - \sum_{i=1}^{theo\ so\ luc} \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right)$$

J^*_k - lực tổng quát của các lực quán tính của các khối lượng, tương ứng với các chuyển vị tổng quát q_k .

$$J_k^* = - \sum_{i=1}^{theo\ so\ khối\ lượng} m_i \left(x_i'' \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + y_i'' \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + z_i'' \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right)$$

x_i, y_i, z_i - các chuyển vị của khối lượng m_i theo phương các trục tọa độ, biểu diễn thông qua các tọa độ tổng quát q_k .

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

$$y_i = y_i(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

$$z_i = z_i(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

Cũng có thể viết: $J^*_k = -M_k q_k$, với M_k là khối lượng quy đổi, tương ứng với chuyển vị tổng quát q_k .

1.4.2. Phương pháp năng lượng:

Dựa trên định luật bảo toàn năng lượng, trường hợp bỏ qua các lực ngăn cản chuyển động, ta có: $K + U = \text{const}$.

trong đó:

K - động năng của hệ:

$$K = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} + \sum \int m_{(z)} dz \frac{v_{(z)}^2}{2}$$

U - thế năng của hệ, có thể được biểu diễn thông qua công của các ngoại lực hoặc công của các nội lực (trường hợp hệ phẳng):

$$U = \frac{1}{2} \sum P_i \Delta \cos(P_i \Delta_i) + \frac{1}{2} \sum \int dP \cdot \Delta \cos(dP, \Delta)$$

Hoặc:

$$U = \frac{1}{2} \left[\sum \int \frac{M^2 ds}{EJ} + \sum \int \frac{N^2 ds}{EF} + \sum \int \mu \frac{Q^2 ds}{GF} \right]$$

1.4.3. Phương pháp ứng dụng nguyên lý công ảo:

[Nội dung của nguyên lý: điều kiện cần và đủ để một cơ hệ liên kết lý tưởng giữ và dừng được cân bằng tại một vị trí đã cho là tổng công ảo của tất cả các lực hoạt động tác dụng lên hệ đều bằng không trong di chuyển ảo bất kỳ từ vị trí đã cho][3, tr.33].

Nguyên lý được áp dụng như sau: $\delta U_i + \delta T_i = 0$ (i=1 ÷ n)

trong đó: δU_i - công khả dĩ của nội lực.

δT_i - công khả dĩ của ngoại lực (gồm lực kích thích, lực cản, lực quán tính).

Trong ba phương pháp đã giới thiệu ở trên, phương pháp tĩnh động đưa ra cách giải quyết đơn giản cho hệ một số bậc tự do. Sự cần thiết phải xem xét các lực liên kết và các biểu đồ vật thể tự do trong phương pháp này dẫn đến những khó khăn đại số đối với những hệ có bậc tự do cao hơn.

Phương pháp năng lượng khắc phục được những khó khăn của phương pháp tĩnh động. Tuy nhiên, nguyên lý năng lượng cùng các tọa độ vật lý chỉ đưa được một phương trình mà điều đó chỉ giới hạn sử dụng cho hệ một bậc tự do.

Nguyên lý công ảo khắc phục được những hạn chế của cả hai phương pháp trên và là một công cụ mạnh đối với hệ nhiều bậc tự do. Tuy nhiên, đây không phải là một thủ tục hoàn toàn có tính vô hướng, trong đó việc xem xét vectơ lực là cần thiết trong việc xác định công ảo [20, tr.215].

1.4.4. Phương trình Lagrange (phương trình Lagrange loại 2):

Phương trình Lagrange là một thủ tục hoàn toàn có tính vô hướng, xuất phát từ các đại lượng vô hướng của động năng, thế năng và công được biểu

diễn thông qua các toạ độ suy rộng. Ưu điểm nổi bật của các phương trình Lagrange là dạng và số lượng của chúng không phụ thuộc vào số vật thể thuộc cơ hệ và sự chuyển động của các vật thể đó. Hơn nữa, nếu liên kết là lý tưởng thì trong các phương trình Lagrange không có mặt các phản lực liên kết chưa biết.

Giả sử hệ có n bậc tự do và các toạ độ suy rộng của hệ là q_1, q_2, \dots, q_n .

Phương trình chuyển động Lagrange được viết như sau:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i$$

Trong đó: T và U lần lượt là động năng và thế năng của hệ.

Q_i là các lực suy rộng tương ứng với các lực không có thế. Phương trình chuyển động Lagrange được áp dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khoa học và kỹ thuật, nó được áp dụng với tất cả hệ tuyến tính và phi tuyến.

1.4.5. Phương pháp ứng dụng nguyên lý Hamilton:

[Nguyên lý Hamilton có nội dung như sau: một hệ cơ học chịu tác động của các lực đã biết sẽ có chuyển động (trong tất cả các chuyển động có thể và cùng điều kiện ở hai đầu của khoảng thời gian) sao cho biến thiên động năng, thế năng và công cơ học của các lực không bảo toàn trong khoảng thời gian đang xét bằng không].

Nội dung nguyên lý có thể được biểu thị: $\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta U - \delta R) dt = 0$

trong đó:

$\delta T, \delta U$ - biến phân động năng và thế năng của hệ.

δR - biến phân công do các lực không bảo toàn (lực kích thích, lực cản) tác dụng lên hệ.

Từ các phương trình chuyển động Lagrange sẽ xây dựng nguyên lý biến phân động học Hamilton và ngược lại. Vì vậy có thể dùng nguyên lý Hamilton để làm cơ sở cho động lực học các hệ holonom.

[Theo ngôn ngữ của G.Hertz: hệ cơ học nào chỉ có những liên kết được biểu diễn dưới dạng hữu hạn (liên kết hình học) gọi là hệ holonom; nếu hệ đó chịu những liên kết biểu diễn bằng phương trình vi phân không khả tích thì gọi là hệ không holonom].

1.5. Dao động của hệ hữu hạn bậc tự do:

1.5.1. Dao động tự do:

Khi hệ chuyển động tự do, vị trí của các khối lượng xác định dạng của hệ tại thời điểm bất kỳ. Đối với hệ n bậc tự do, các khối lượng có chuyển động phức tạp, gồm n dao động với n tần số ω_i khác nhau. Nói chung, tỉ số giữa các chuyển vị của các khối lượng riêng biệt liên tục thay đổi. Nhưng có thể chọn điều kiện ban đầu sao cho mọi khối lượng chỉ dao động với một tần số ω_i nào đó chọn từ phổ tần số. Những dạng dao động như thế gọi là dạng dao động riêng (hay dạng dao động chính).

Số dạng chính bằng số bậc tự do của hệ. Trong các dạng dao động chính, quan hệ các chuyển vị của các khối lượng là hằng số đối với thời gian. Nếu cho trước các dạng dao động chính thì ta cũng xác định được tần số.

Việc xác định các dạng dao động riêng và tần số dao động riêng đóng vai trò quan trọng trong bài toán dao động của hệ hữu hạn bậc tự do.

1.5.1.1. Các tần số riêng và các dạng dao động riêng:

Phương trình vi phân dao động tự do không cản của các khối lượng:

$$MY''(t) + KY(t) = 0 \quad (1.1)$$

với M và K là các ma trận vuông cấp n , thường là ma trận đối xứng. Nghiệm của (1.1) được tìm dưới dạng:

$$Y(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (1.2)$$

Thay (1.2) vào (1.1) nhận được:

$$[K - \omega^2 M]A = 0 \quad (1.3)$$

Để hệ (1.3) có nghiệm không tầm thường (tức là tồn tại dao động) thì:

$$|K - \omega^2 M| = 0 \quad (1.4)$$

(1.4) là phương trình đại số bậc n đối với ω^2 , được gọi là phương trình tần số (hay phương trình đặc trưng). Các nghiệm ω_i (với $i = 1 \div n$) của (1.4) là các tần số riêng. Vector bao gồm tất cả các tần số dao động riêng xếp theo thứ tự tăng dần ($\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n$) được gọi là vector tần số dao động riêng (hay phổ tần số):

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \dots \\ \omega_n \end{bmatrix}$$

Tần số dao động riêng thấp nhất ω_1 gọi là tần số cơ bản.

Phương trình (1.4) có thể được viết dưới dạng giải tích như sau:

$$\begin{vmatrix} (m_{11}\delta_{11} - u_1) & m_{12}\delta_{12} & \dots & m_{1n}\delta_{1n} \\ (m_{21}\delta_{21} - u_2) & m_{22}\delta_{22} & \dots & m_{2n}\delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (m_{n1}\delta_{n1} - u_n) & m_{n2}\delta_{n2} & \dots & m_{nn}\delta_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{với } u_i = \frac{1}{\omega_i^2}$$

Thay các ω_i vào (1.3), được hệ phương trình đại số tuyến tính thuần nhất để xác định các thành phần của vector riêng A_i .

$$[K - \omega_i^2 M]A_i = 0 \quad (1.5)$$

Vì (1.5) là hệ phương trình đại số tuyến tính thuần nhất có det các hệ số bằng 0 nên các thành phần của vector A_i được xác định sai khác một hằng số nhân, chẳng hạn có thể chọn A_{i1} tùy ý.

$$\varphi_{ki} = \frac{A_{ki}}{A_{li}} \text{ và dễ thấy: } \varphi_{li} = 1$$

Ma trận vuông Φ biểu thị tất cả các dạng dao động riêng có thể của hệ, được gọi là ma trận các dạng riêng (hay ma trận dạng chính):

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \dots & \varphi_{nm} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Mỗi một trong các vectơ cột của (1.6) cho ta một dạng dao động riêng của hệ:

$$\varphi_i = \begin{bmatrix} \varphi_{1i} \\ \varphi_{2i} \\ \dots \\ \varphi_{ni} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \varphi_{2i} \\ \dots \\ \varphi_{ni} \end{bmatrix}$$

1.5.1.2. Giải bài toán riêng (eigen problem):

Khi hệ dao động tự do không cản thì bài toán dao động tự do trở thành bài toán riêng tổng quát:

$$[K - \omega^2 M]A = 0 \quad (1.7)$$

Các tần số (vòng) riêng của dao động (ứng với các tần số fi) là các nghiệm $\omega_i (i = 1 \div n)$ của phương trình đặc trưng bậc n:

$$[K - \omega^2 M] = 0 \quad (1.8)$$

Đặt $\lambda = \omega^2$ (1.8) trở thành:

$$[K - \lambda M] = 0 \quad (1.9)$$

Khi phân tích dạng dao động, ta có bài toán riêng tổng quát:

$$K\phi = \lambda M\phi$$

trong đó:

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ - các trị riêng.

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ - các vectơ riêng tương ứng.

$$\phi = [\varphi_1, \dots, \varphi_n]$$

Có nhiều phương pháp để giải bài toán riêng [17]:

+ Nhóm 1: các phương pháp lập vectơ.

$$K \varphi_i = \lambda_i M \varphi_i$$

+ Nhóm 2: các phương pháp biến đổi.

$$\phi^T K \phi = \Lambda$$

$$\phi^T K \phi = I$$

trong đó: $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$

+ Nhóm 3: các kỹ thuật lập đa thức

$$p(\lambda_i) = 0 \text{ trong đó } p(\lambda) = \det(K - \lambda M)$$

+ Nhóm 4: sử dụng đặc tính Sturm của các đa thức đặc trưng

$$\begin{cases} p(\lambda) = \det(K - \lambda M) \\ p^{(r)}(\lambda^{(r)}) = \det(K^{(r)} - \lambda^{(r)} M^{(r)}) \end{cases}$$

1.5.1.3. Tính chất trực giao của các dạng chính - Dạng chuẩn:

Tính chất trực giao của các dạng chính thể hiện ở chỗ: công của ngoại lực (hay nội lực) của một dạng chính này trên chuyển vị (hay biến dạng) của một dạng chính khác bằng 0.

Biểu thức biểu thị tính trực giao của các dạng chính có thể viết qua ma trận độ cứng hoặc ma trận khối lượng như sau:

$$\varphi_i^T M \varphi_j = 0 \text{ hoặc } \varphi_i^T M \varphi_j = 0 \text{ (với } \omega_i \neq \omega_j \text{)} \quad (1.10)$$

ở dạng giải tích, biểu thức tính trực giao viết theo ma trận khối lượng như sau:

$$\sum_{k=1}^n m_k y_{ki} y_{kj} = 0$$

hoặc có thể biểu thị dưới dạng công của các nội lực:

$$\sum \int \frac{M_i M_j}{EJ} ds + \sum \int \frac{N_i N_j}{EF} ds + \sum \int \frac{Q_i Q_j}{GF} ds = 0$$

Đây là tính chất quan trọng trong việc giải quyết các bài toán dao động cưỡng bức cũng như dao động tự do của hệ hữu hạn bậc tự do.

- **Dạng chuẩn:** là dạng dao động riêng thoả mãn biểu thức: $\varphi_i^T M \varphi_j = 1$

Ký hiệu là $\varphi_{i,ch}$

$$\varphi_{i,ch} = \frac{1}{a_i} \varphi_i \text{ với } a_i^2 = \varphi_i^T M \varphi_i \quad (1.11)$$

Việc đưa các dạng dao động riêng về dạng chuẩn gọi là chuẩn hoá các dạng dao động riêng. Khi các dạng dao động riêng đã được chuẩn hoá, ta viết được điều kiện trực chuẩn như sau:

$$\Phi_{ch}^T M \Phi_{ch} = E \text{ hoặc } \Phi_{ch}^T K \Phi_{ch} = \Omega \quad (1.12)$$

Trong đó: E là ma trận đơn vị, $\Omega = \text{diag}(\omega_i^2)$

Điều kiện trực chuẩn có ý nghĩa quan trọng trong việc rút gọn quá trình tính toán của hệ dao động.

1.5.2. Dao động cưỡng bức của hệ hữu hạn bậc tự do:

Phương trình vi phân dao động của hệ: $MY''(t) + CY'(t) + KY(t) = P(t)$.

Đây là bài toán phức tạp và hay gặp trong thực tế. Có nhiều phương pháp khác nhau để giải quyết bài toán này, trong đó phương pháp hay được sử dụng là phương pháp cộng dạng dao động (phương pháp khai triển theo các dạng riêng).

1.5.2.1. Phương pháp khai triển theo các dạng riêng:

Xét hệ hữu hạn bậc tự do chịu lực cưỡng bức và không kể đến lực cản.

- **Phương pháp khai triển tải trọng theo các dạng riêng:**

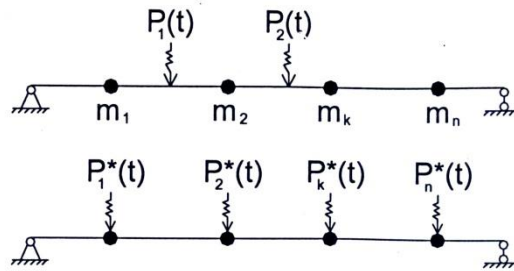
Giả sử lực $P_k(t)$ với một giá trị nào đó (bao gồm cả giá trị 0) tác dụng lên khối lượng m_k bất kỳ, lực $P_k(t)$ được khai triển theo các dạng dao động chính dưới dạng các thành phần $P_{ki}(t)$

$$P_k(t) = \sum_{k=1}^n P_{ki}(t) = \sum_{k=1}^n m_k \varphi_{ki} H_i(t) \text{ với } H_i(t) = \frac{\sum_{k=1}^n P_{ki}(t) \cdot \varphi_{ki}}{\sum_{k=1}^n m_k \varphi_{ki}^2} \quad (1.13)$$

Tải trọng khai triển theo dạng chính thứ i viết dưới dạng ma trận:

$$P_i = \frac{\varphi_i^T P}{\varphi_i^T M \varphi_i} M \varphi_i = \varphi_{i,ch}^T P M \varphi_{i,ch} \quad (1.14)$$

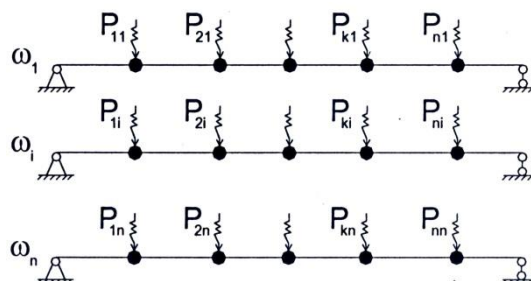
Phương pháp này tìm được n hệ lực $P_{ki}(t)$ thay cho hệ lực $P_k(t)$. Tương ứng với dạng chính có tần số ω_i , ta có các lực $P_{1i}(t)$, $P_{2i}(t)$, ..., $P_{ni}(t)$ được thể hiện như hình (1.1).



Hình 1.1

Các lực này sẽ gây ra các chuyển vị tỉ lệ với các chuyển vị dạng chính thứ i . Vì vậy, hệ chịu tải trọng như thế có thể xem như hệ với một bậc tự do..

Nếu có một số lượng bất kỳ các lực $P_i(t)$ được đặt không phải lên các khối lượng thì cần phải thay thế chúng bằng các tải trọng $P_i^*(t)$ như trên hình 1.2.



Hình 1.2.

Các lực $P_i^*(t)$ tác dụng tại các khối lượng sao cho: chuyển vị tĩnh của các khối lượng do chúng gây ra giống như các chuyển vị do các lực $P_i(t)$ đã cho gây ra. Các tải trọng thay thế dựa trên cơ sở các phương trình:

$$\delta_{k1}P_1^*(t) + \delta_{k2}P_2^*(t) + \dots + \delta_{kn}P_n^*(t) = \sum_{i=1}^n \delta_{kPi}P_i(t)$$

Gọi P_{kh} là ma trận bao gồm các tải trọng khai triển theo các dạng chính.

$$P_{kh} = [P_1, P_2, \dots, P_n] = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix}$$

- Phương pháp tọa độ tổng quát:

Chuyển vị của hệ có thể phân tích thành tổng của các chuyển vị thành phần ứng với từng dạng dao động chính:

$$Y(t) = \sum_{k=1}^n Y_k(t) = \sum_{k=1}^n \varphi_k Z_k(t)$$

với:
$$Z_k(t) = \frac{1}{M_k \omega_k} \int_0^t P_k(\tau) \sin \omega_k(t - \tau) d\tau \tag{1.15}$$

Các đại lượng $Z_k(t)$ được gọi là tọa độ tổng quát của hệ, nó chính là các biên độ ứng với các dạng chính.

Ma trận các tọa độ tổng quát của hệ:

$$Z(t) = [Z_1(t), Z_2(t), \dots, Z_n(t)]^T$$

1.5.2.2. Trình tự tính toán hệ dao động cưỡng bức:

Theo [1, tr.150], hệ hữu hạn bậc tự do dao động cưỡng bức được tính toán theo trình tự sau:

- + Xác định tần số dao động riêng và các dạng dao động riêng.
- + Khai triển tải trọng theo các dạng dao động riêng theo (1.14), hoặc xác định các tọa độ tổng quát ứng với các dạng riêng theo (1.15).

+ Xác định chuyển vị của hệ từ kết quả nhận được ma trận tải trọng khai triển hoặc ma trận các tọa độ tổng quát.

$$Y(t) = M^{-1}P_{kh}K_{ai}(t) \quad (1.16)$$

trong đó: $K_{ai}(t)$ - hệ số ảnh hưởng động học theo thời gian của dạng

$$\text{chính thứ } i; K_{ai}(t) = \frac{1}{\omega_i} \int_0^t f(\tau) \cdot \sin \omega_i(t - \tau) d\tau \quad (1.17)$$

Hoặc:
$$Y(t) = \Phi \cdot Z(t) \quad (1.18)$$

+ Để xác định nội lực của hệ, cần phải biết lực đàn hồi $P_d(t)$ tương ứng với quá trình dao động của hệ.

Với phương pháp khai triển theo các dạng dao động riêng:

$$P_d(t) = P_{kh}K_i(t) \quad (1.19)$$

trong đó:
$$K_i(t) = \omega_i \int_0^t f(\tau) \cdot \sin \omega_i(t - \tau) d\tau \quad (1.20)$$

Với phương pháp tọa độ tổng quát: $P_d(t) = KY(t)$

1.5.2.3. Dao động của hệ chịu tải trọng điều hòa

Đa số trường hợp hay gặp trong kỹ thuật, người ta thường đưa tải trọng $P(t)$ về dạng gần đúng là hàm điều hòa hoặc phân tích theo chuỗi Fourier rồi lấy một vài số hạng đầu. Do vậy, việc nghiên cứu dao động với lực kích thích có dạng $P \sin \omega t$ hay $P \cos \omega t$ là một bài toán cơ bản trong động lực học công trình.

Dao động cưỡng bức của hệ dưới dạng tổng quát bao gồm hai phần: dao động riêng, dao động với lực kích thích. Khi dao động chuyển sang giai đoạn ổn định thì phần dao động riêng của hệ không còn, hệ sẽ dao động có chu kỳ cùng với chu kỳ của lực kích thích.

Khi hệ chịu tác dụng của tải trọng điều hòa: $P(t) = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \dots \\ P_n \end{bmatrix} \sin \omega t$ thì chuyển vị của hệ:

$$Y = GP$$

Trong đó: G - ma trận giải thức Green: $G = \Phi \text{ch} D \Phi \text{ch} T$

$$D = \text{diag} (S_i) \text{ với } S_i = \frac{1}{\omega_i^2 - r^2}$$

Khi tần số r của lực kích thích bằng một trong các trị số của tần số dao động riêng ω_i thì đều xảy ra hiện tượng cộng hưởng ($r = \omega_i$).

Có thể sử dụng phương pháp tĩnh động để xác định các lực quán tính trong hệ. Đối với hệ đối xứng, có thể phân tích tải trọng thành đối xứng và phản xứng để vận dụng cách tính theo nửa hệ hoặc chuyển vị kép.

1.6. Các phương pháp tính gần đúng trong động lực học công trình:

Các phương pháp này dựa trên cơ sở tìm tần số dao động riêng theo phương trình đường đàn hồi được giả định trước, hoặc thay hệ có số bậc tự do lớn bằng hệ số có bậc tự do ít hơn. Các phương pháp cho kết quả tương đối chính xác đối với tần số cơ bản ω_1 . Thực tế, khi tính toán các công trình, thường người ta chỉ quan tâm đến tần số cơ bản ω_1 để kiểm tra điều kiện cộng hưởng.

1.6.1. Phương pháp năng lượng (phương pháp Rayleigh):

Phương pháp này giả thiết trước các dạng dao động và dựa trên cơ sở định luật bảo toàn năng lượng để xác định tần số và dạng dao động riêng tương ứng. Khi hệ dao động tự do không kể đến lực cản, trên cơ sở quy luật bảo toàn năng lượng, có thể thiết lập được mối quan hệ: $U_{\max} = K_{\max}$.

Động năng của hệ tại thời điểm t bất kỳ:

$$K = \sum \int \frac{m_{(z)} v_z^2}{2} dz + \sum \frac{m_{(i)} v_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \left[\sum \int m_z y^2_{k(z,t)} dz + \sum m_i y^2_{k(z,t)} \right]$$

Thế năng của hệ (khi chỉ xét tới ảnh hưởng của mô men uốn):

$$U = \sum \int \frac{M^2 dz}{2EJ} = \sum \int \frac{EJ}{2} \left[-\frac{\partial^2 y_{k(t,z)}}{\partial z^2} \right]^2 dz$$

Sau khi xác định được U_{max} và K_{max} , ta rút ra được:

$$\omega^2 = \frac{\sum \int EJ \left[\frac{\partial^2 y_{k(t,z)}}{\partial z^2} \right]^2 dz}{\sum \int m_{(z)} y_{k(t,z)}^2 dz + m_i y_{k(t,z)}^2}$$

Nếu biểu thị chuyển vị của hệ khi dao động tự do dưới dạng ma trận:

$$Y(t) = L.Z(t) = L.Z_0 \sin \omega t$$

trong đó: L - vectơ dạng giả định, $Z(t)$ - biên độ dạng giả định

$$\text{thì: } \omega^2 = \frac{L^T KL}{L^T ML}$$

1.6.2. Phương pháp Bupnop - Galoockin:

Phương pháp Bupnop - Galoockin được xây dựng dựa trên cơ sở nguyên lý Hamilton hoặc nguyên lý chuyển vị khả dĩ.

Với bài toán dao động tự do của dầm, phương trình vi phân của dạng dao động chính thứ j :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[EJ_{(z)} \frac{\partial^2 y_{j(z,t)}}{\partial z^2} \right] - \omega_j^2 m_{(z)} y_{j(z,t)} = 0 \quad (1.21)$$

Giải thiết nghiệm của (1.21) đã biết và có thể biểu diễn như sau:

$$y_{j(z)} = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(z) \quad (1.22)$$

Trong đó, a_i là các hằng số chưa biết, các hàm $\varphi_i(z)$ cần phải chọn sao cho thoả mãn toàn bộ (hoặc một phần) điều kiện biên (động học và tĩnh học) của bài toán.

1.6.3. Phương pháp Lagrange - Ritz:

Phương pháp Lagrange - Ritz được xây dựng trên cơ sở nghiên cứu thế năng toàn phần của hệ

[Nội dung nguyên lý Lagrange được phát biểu như sau trong tất cả các trạng thái khả dĩ, trạng thái cân bằng dưới tác dụng của các lực có thể sẽ tương ứng với trạng thái mà theo đó, thế năng toàn phần của hệ sẽ có giá trị dừng: $\delta U = 0$ Thế năng biến dạng được biểu diễn dưới dạng công ngoại lực và công nội lực của hệ khi chuyển từ trạng thái biến dạng về trạng thái không biến dạng

$$U = \int_0^l \frac{EJ(z)}{2} \left[\frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial z^2} \right]^2 dz - \int_0^l q(z,t) y(z,t) dz - \sum P_{i(t)} y_{z_i,t}$$

trong đó: $q(z,t)$ và $p_i(t)$ bao gồm các lực kích thích và lực quán tính do các khối lượng phân bố và tập trung gây ra khi hệ dao động. Với bài toán dao động riêng, giả thiết dạng chính của dao động:

$$y_j(z) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(z)$$

Trong đó, các hàm $\varphi_i(z)$ thoả mãn điều kiện biên động học (còn điều kiện biên tĩnh học đã tự thoả mãn trong các biểu thức thế năng).

Từ điều kiện thế năng của hệ có giá trị dừng, ta có: $\frac{\partial U}{\partial a_k} = 0$ (với $k = \overline{1..n}$)

Từ đó nhận được n phương trình chính tắc chứa a_1, a_2, \dots, a_n .

1.6.4. Phương pháp thay thế khối lượng:

Phương pháp này dựa trên cơ sở đơn giản hoá sơ đồ khối lượng: thay thế các khối lượng phân bố và tập trung trên kết cấu thành các khối lượng tập trung với số lượng ít hơn đặt tại một số điểm đặc biệt.

Có thể chia các khối lượng phân bố thành nhiều khoảng, tập trung các khối lượng phân bố trên mỗi khoảng về trọng tâm của nó hoặc phân bố các khối lượng theo nguyên tắc đòn bẩy: khối lượng phân bố trên mỗi đoạn được thay thế bằng hai khối lượng đặt ở hai đầu đoạn đó.

1.6.5. Phương pháp khối lượng tương đương:

Phương pháp này được xây dựng trên giả thiết: “Hai hệ tương đương về động năng thì cũng tương đương về tần số”. Với phương pháp này, ta phải chọn trước đường đàn hồi $y(z)$ và chỉ tính được tần số thấp nhất của hệ thực

1.6.6. Các phương pháp số' trong động lực học công trình:

1.6.6.1. Phương pháp sai phân:

Là phương pháp giải gần đúng phương trình vi phân của dao động bằng giải hệ phương trình sai phân. Chia hệ thành n phần tử, tại mỗi điểm chia, thay đạo hàm bằng các sai phân để lập phương trình sai phân tương ứng. Kết quả thu được là hệ phương trình đại số tuyến tính với các ẩn số là giá trị nghiệm của phương trình vi phân tại điểm chia và các giá trị nghiệm tại một vài điểm chia lân cận. Phương pháp này cho phép dễ dàng giải bài toán dao động của hệ có các thông số thay đổi: tiết diện, khối lượng, tải trọng...

1.6.6.2. Phương pháp phần tử hữu hạn:

Hệ được rời rạc hoá thành các phần tử hữu hạn, sau đó xem các phần tử hữu hạn được nối lại với nhau tại một số điểm quy định (thường là đỉnh của mỗi phần tử) gọi là nút và tạo thành lưới phần tử hữu hạn. Tính liên tục về biến dạng của hệ được thể hiện qua chuyển vị, đạo hàm của chuyển vị tại các nút của lưới phần tử hữu hạn.

Số phần tử hữu hạn (hay số lượng ẩn số) là các chuyển vị tại nút của lưới phần tử hữu hạn. Lưới phần tử hữu hạn càng mau thì càng làm việc sát hệ thực và mức độ của kết quả tính càng cao.

Vectơ chuyển vị nút của lưới phần tử hữu hạn: $\{Y\} = \{y_1 \ y_2 \dots \ y_n\}$

Hệ phương trình vi phân biểu thị dao động của lưới phần tử hữu hạn có kể đến lực cản đàn nhớt tại thời điểm t bất kỳ:

$$[M]\{Y''(t)\} + [C]\{Y'(t)\} + [K]\{Y(t)\} = \{P(t)\}$$

1.6.6.3. Phương pháp tích phân trực tiếp:

Phương pháp tích phân trực tiếp không những cho phép giải các bài toán dao động tuyến tính mà còn cho phép giải các bài toán dao động phi tuyến phức tạp. Gồm có các phương pháp sau:

+ Phương pháp gia tốc tuyến tính (Phương pháp Viison): phương pháp này xem rằng: sự thay đổi của gia tốc chuyển động trong mỗi bước thời gian từ t đến $(t + \Delta t)$ là tuyến tính.

+ Phương pháp sai phân trung tâm: thực chất của phương pháp là chia bước, tích phân trực tiếp hệ phương trình vi phân trong từng khoảng chia Δt (giải bài toán tĩnh trong từng bước chia thời gian Δt nhưng có kể đến lực quán tính và lực cản, đồng thời phương trình cân bằng được giải nhiều lần đối với các điểm chia trong khoảng thời gian dao động).

Giá trị gia tốc của chuyển vị được xem là không đổi trong phạm vi hai bước chia thời gian và được xác định:

$$\{Y''(t)\} = \frac{1}{\Delta t^2} [\{Y(t - \Delta t)\} - 2\{Y(t)\} + \{Y(t + \Delta t)\}]$$

+ Phương pháp gia tốc trung bình không đổi (phương pháp Neimark):

Phương pháp này giả thiết rằng: ở mỗi bước thời gian Δt , gia tốc chuyển động bằng hằng số và được tính bằng giá trị trung bình hai giá trị đầu và cuối của khoảng Δt :

$$\{Y''(t + \tau)\} = \frac{\{Y''(t + \Delta t)\} + Y''(t)}{2} \text{ với } (0 \leq \tau \leq \Delta t)$$

1.7. Một số nhận xét:

+ Bài toán động lực học công trình nghiên cứu phản ứng của hệ kết cấu khi chịu tải trọng động (mà tải trọng tĩnh chỉ là trường hợp đặc biệt). Có nhiều phương pháp để giải bài toán dao động nhưng có thể nói, các phương pháp đều xuất phát từ nguyên lý năng lượng. Xuất phát từ điều kiện dừng của phiếm hàm của thế năng toàn phần của hệ: $\delta U = 0$, nếu lấy biến phân của phiếm hàm theo

chuyển vị thì ta nhận được các phương trình cân bằng, nếu lấy biến phân của phiếm hàm theo lực thì ta được các phương trình biến dạng.

+ Việc xác định các tần số dao động riêng và các dạng dao động riêng của bài toán dao động (tương ứng với bài toán xác định các trị riêng và vecto riêng của đại số tuyến tính) là một nhiệm vụ quan trọng của bài toán dao động.

Bài toán riêng: $[K - \lambda M] A = 0$ (với $\lambda = \omega^2$) tương ứng với việc tìm trị riêng λ sao cho $[K - \lambda M] = 0$ hay $\det[K - \lambda M] = 0$. Đây là bài toán lớn (đa thức bậc n , với n là bậc tự do của hệ), có nhiều thuật toán để giải nhưng phức tạp. Việc thiết lập ma trận độ cứng K và đưa về dạng ma trận đường chéo là tương đối khó khăn đối với hệ có nhiều bậc tự do.

CHƯƠNG 2

PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Trong chương trình bày một số khái niệm cơ bản của phương pháp phần tử hữu hạn, và sử dụng nó để xây dựng và giải bài toán dao động tự do của dầm, được trình bày trong chương 3.

2.1. Phương pháp phần tử hữu hạn

Phương pháp phần tử hữu hạn là một phương pháp số đặc biệt có hiệu quả để tìm dạng gần đúng của một hàm chưa biết trong miền xác định V của nó. Tuy nhiên phương pháp phần tử hữu hạn không tìm dạng xấp xỉ của hàm cần tìm trên toàn miền V mà chỉ trong từng miền con V_e (phần tử) thuộc miền xác định V . Do đó phương pháp này rất thích hợp với hàng loạt bài toán vật lý và kỹ thuật trong đó hàm cần tìm được xác định trên các miền phức tạp gồm nhiều vùng nhỏ có đặc tính hình học, vật lý khác nhau, chịu những điều kiện biên khác nhau. Phương pháp ra đời từ trực quan phân tích kết cấu, rồi được phát biểu một cách chặt chẽ và tổng quát như một phương pháp biến phân hay phương pháp dư có trọng nhưng được xấp xỉ trên mỗi phần tử.

Trong phương pháp phần tử hữu hạn chia kết cấu công trình thành một số hữu hạn các phần tử. Các phần tử này được nối với nhau tại các điểm định trước thường tại đỉnh phần tử (thậm trí tại các điểm trên biên phần tử) gọi là nút. Như vậy việc tính toán kết cấu công trình được đưa về tính toán trên các phần tử của kết cấu sau đó kết nối các phần tử này lại với nhau ta được lời giải của một kết cấu công trình hoàn chỉnh. Tương tự như phương pháp sai phân hữu hạn cũng chia công trình thành các đoạn nhỏ (phần tử) và các trạng thái chuyển vị (trường chuyển vị) v.v... được xác định tại các điểm nút sai phân. Sự khác biệt của hai phương pháp là Phương pháp sai phân hữu hạn sau khi tìm được các chuyển vị tại các nút của sai phân còn các điểm nằm giữa hai nút được xác định bằng nội

suy tuyến tính, còn phương pháp phân tử hữu hạn sau khi xác định được chuyển vị tại các nút của phân tử thì các điểm bên trong được xác định bằng hàm nội suy (hàm dạng).

Với bài toán cơ học vật rắn biến dạng, tùy theo ý nghĩa vật lí của hàm nội suy có thể phân tích bài toán theo 3 loại mô hình sau:

- Mô hình chuyển vị: Xem chuyển vị là đại lượng cần tìm và hàm nội suy biểu diễn gần đúng dạng phân bố của chuyển vị trong phân tử.

- Mô hình cân bằng: Hàm nội suy biểu diễn gần đúng dạng phân bố của ứng suất hay nội lực trong phân tử.

- Mô hình hỗn hợp: Coi các đại lượng chuyển vị và ứng suất là 2 yếu tố độc lập riêng biệt. Các hàm nội suy biểu diễn gần đúng dạng phân bố của cả chuyển vị lẫn ứng suất trong phân tử.

Hiện nay, khi áp dụng phương pháp phân tử hữu hạn để giải các bài toán cơ học thường sử dụng phương pháp phân tử hữu hạn theo mô hình chuyển vị. Sau đây luận văn trình bày nội dung phương pháp phân tử hữu hạn theo mô hình chuyển vị.

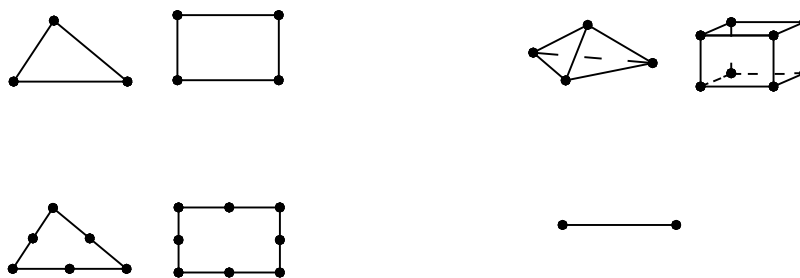
2.1.1 Nội dung phương pháp phân tử hữu hạn theo mô hình chuyển vị

Trong phương pháp phân tử hữu hạn - mô hình chuyển vị, thành phần chuyển vị được xem là đại lượng cần tìm. Chuyển vị được lấy xấp xỉ trong dạng một hàm đơn giản gọi là hàm nội suy (hay còn gọi là hàm chuyển vị). Trình tự phân tích bài toán theo phương pháp phân tử hữu hạn - mô hình chuyển vị có nội dung như sau:

2.1.1.1. Rời rạc hoá miền khảo sát

Miền khảo sát (đối tượng nghiên cứu) được chia thành các miền con hay còn gọi là các phần tử có hình dạng hình học thích hợp. Các phần tử này được coi là liên kết với nhau tại các nút nằm tại đỉnh hay biên của phần tử. Số nút của phần tử không lấy tùy tiện mà phụ thuộc vào hàm chuyển vị định chọn.

Các phần tử thường có dạng hình học đơn giản (hình 2.1)



Hình 2.1 Dạng hình học đơn giản của phần tử

2.1.1.2. Chọn hàm xấp xỉ

Một trong những tư tưởng của phương pháp phần tử hữu hạn là xấp xỉ hoá đại lượng cần tìm trong mỗi miền con. Điều này cho phép ta khả năng thay thế việc tìm nghiệm vốn phức tạp trong toàn miền V bằng việc tìm nghiệm tại các nút của phần tử, còn nghiệm trong các phần tử được tìm bằng việc dựa vào hàm xấp xỉ đơn giản.

Giả thiết hàm xấp xỉ (hàm chuyển vị) sao cho đơn giản đối với việc tính toán nhưng phải thoả mãn điều kiện hội tụ. Thường chọn dưới dạng hàm đa thức. Biểu diễn hàm xấp xỉ theo tập hợp giá trị các thành phần chuyển vị và có thể cả đạo hàm của nó tại các nút của phần tử. Hàm xấp xỉ này thường được chọn là hàm đa thức vì các lý do sau:

- Đa thức khi được xem như một tổ hợp tuyến tính của các đơn thức thì tập hợp các đơn thức thoả mãn yêu cầu độc lập tuyến tính như yêu cầu của Ritz, Galerkin.

- Hàm xấp xỉ dạng đa thức thường dễ tính toán, dễ thiết lập công thức khi xây dựng các phương trình của phần tử hữu hạn và tính toán bằng máy tính. Đặc biệt là dễ tính đạo hàm, tích phân.

- Có khả năng tăng độ chính xác bằng cách tăng số bậc của đa thức xấp xỉ (về lý thuyết đa thức bậc vô cùng sẽ cho nghiệm chính xác). Tuy nhiên, khi thực hành tính toán ta thường lấy đa thức xấp xỉ bậc thấp mà thôi.

Tập hợp các hàm xấp xỉ sẽ xây dựng nên một trường chuyển vị xác định một trạng thái chuyển vị duy nhất bên trong phần tử theo các thành phần chuyển vị nút. Từ trường chuyển vị sẽ xác định một trạng thái biến dạng, trạng thái ứng suất duy nhất bên trong phần tử theo các giá trị của các thành phần chuyển vị nút của phần tử.

Khi chọn bậc của hàm đa thức xấp xỉ cần lưu ý các yêu cầu sau:

- Các đa thức xấp xỉ cần thoả mãn điều kiện hội tụ. Đây là yêu cầu quan trọng vì phương pháp phần tử hữu hạn là một phương pháp số, do đó phải đảm bảo khi kích thước phần tử giảm thì kết quả sẽ hội tụ đến nghiệm chính xác.

- Các đa thức xấp xỉ được chọn sao cho không mất tính đẳng hướng hình học.

- Số tham số của các đa thức xấp xỉ phải bằng số bậc tự do của phần tử, tức là bằng số thành phần chuyển vị nút của phần tử. Yêu cầu này cho khả năng nội suy đa thức của hàm xấp xỉ theo giá trị đại lượng cần tìm, tức là theo giá trị các thành phần chuyển vị tại các điểm nút của phần tử.

2.1.1.3. Xây dựng phương trình cân bằng trong từng phần tử, thiết lập ma trận độ cứng $[K]_e$ và vectơ tải trọng nút $\{F\}_e$ của phần tử thứ e .

Thiết lập mối quan hệ giữa ứng suất và chuyển vị nút phần tử

Cần thiết lập biểu thức tính biến dạng và ứng suất tại một điểm bất kì trong phần tử thông qua ẩn cơ bản là chuyển vị nút phần tử $\{\delta\}_e$. Sử dụng các công thức trong Lí thuyết đàn hồi, mối quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị :

$$\{\varepsilon\} = [\nabla]\{u\} \quad (2.1)$$

$$\text{Ta có: } \{u\} = [N]\{\delta\}_e \quad (2.2)$$

trong đó: $[N]$ - gọi là ma trận hàm dạng, chứa các toạ độ của các điểm nút của phần tử và các biến của điểm bất kì đang xét.

Thay (2.2) vào (2.1), ta được:

$$\{\varepsilon\} = [\nabla][N]\{\delta\}_e = [B]\{\delta\}_e \quad (2.3)$$

trong đó : $[B] = [\nabla][N]$ - ma trận chứa đạo hàm của hàm dạng.

Theo lý thuyết đàn hồi quan hệ giữa ứng suất và biến dạng :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (2.4)$$

Thay (2.3) vào (2.4), ta được :

$$\{\sigma\} = [D][B]\{\delta\}_e \quad (2.5)$$

Thế năng toàn phần Π_e của phần tử

Xét trường hợp phần tử chịu tải trọng tập trung tại nút $\{P_n\}_e$ (ứng với chuyển vị nút $\{\delta\}_e$) và chịu tải trọng phân bố trên bề mặt phần tử có cường độ

$$\text{tại điểm } M \text{ bất kì là } \{q\} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix}.$$

Thiết lập biểu thức tính thế năng toàn phần Π_e của phần tử theo công của ngoại lực W_e và thế năng biến dạng U_e của phần tử đó.

$$\Pi_e = U_e - W_e \quad (2.6)$$

Công ngoại lực W_e (không xét lực thể tích) được tính:

$$W_e = \{\delta\}_e^T \{P_n\}_e + \int_S \{u\}^T \{q\} dS$$

Từ (2.2), ta có: $\{u\} = [N]\{\delta\}_e \Rightarrow \{u\}^T = ([N]\{\delta\}_e)^T = \{\delta\}_e^T [N]^T$

Thay vào biểu thức tính công ngoại lực W_e trên, thu được:

$$W_e = \{\delta\}_e^T \{P_n\}_e + \{\delta\}_e^T \int_S [N]^T \{q\} dS \quad (2.7)$$

Thế năng biến dạng U_e của PT được tính:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV$$

Thay (2.3) và (2.5) vào biểu thức tính thế năng biến dạng U_e của phần tử, ta có:

$$U_e = \frac{1}{2} \{\delta\}_e^T \left(\int_V [B]^T [D] [B] dV \right) \{\delta\}_e \quad (2.8)$$

Thay (2.7) và (2.8) vào (2.6) thu được thế năng toàn phần của phần tử :

$$\Pi_e = U_e - W_e = \frac{1}{2} \{\delta\}_e^T \left(\int_V [B]^T [D] [B] dV \right) \{\delta\}_e - \left(\{\delta\}_e^T \{P_n\}_e + \{\delta\}_e^T \int_S [N]^T \{q\} dS \right) \quad (2.9)$$

$$\text{Đặt: } [K]_e = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (2.10)$$

$[K]_e$ - gọi là ma trận độ cứng phần tử. Vì $[D]$ là ma trận đối xứng nên tích $([B]^T [D] [B])$ cũng đối xứng và do đó $[K]_e$ là ma trận đối xứng.

$$\text{Đặt: } \{F\}_e = \{P_n\}_e + \int_S [N]^T \{q\} dS = \{P_n\}_e + \{P_q\}_e \quad (2.11)$$

$\{F\}_e$ - là vector tải trọng nút của phần tử; được xây dựng bởi ngoại lực đặt tại nút phần tử $\{P_n\}_e$ và ngoại lực đặt trong phần tử về nút $\{P_q\}_e$

$$\text{trong đó: } \{P_q\}_e = \int_S [N]^T \{q\} dS \quad (2.12)$$

Thay (2.11) và (2.12) vào (2.9), ta được :

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \{\delta\}_e^T [K]_e \{\delta\}_e - \{\delta\}_e^T \{F\}_e \quad (2.13)$$

Thiết lập phương trình cân bằng

Theo nguyên lí dừng thế năng toàn phần, điều kiện cân bằng của phần tử tại các điểm nút :

$$\partial \Pi_e = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Pi_e}{\partial \{\delta\}_e} = 0 \quad (2.14)$$

Tiến hành lấy đạo hàm riêng lần lượt với từng chuyển vị nút và cho bằng 0, thu được m phương trình (cho phần tử có m chuyển vị nút):

$$\frac{\partial \Pi_e}{\partial \{\delta\}_e} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Pi_e}{\partial \delta_1} \\ \frac{\partial \Pi_e}{\partial \delta_2} \\ \dots \\ \frac{\partial \Pi_e}{\partial \delta_m} \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.15)$$

Thay Π_e theo (2.13) vào (2.15) và áp dụng phép lấy đạo hàm riêng đối với ma trận $\left(\frac{\partial(\{\mathbf{X}\}^T [\mathbf{A}]\{\mathbf{X}\})}{\partial \{\mathbf{X}\}} = 2[\mathbf{A}]\{\mathbf{X}\}; \frac{\partial(\{\mathbf{X}\}^T \{\mathbf{B}\})}{\partial \{\mathbf{X}\}} = \{\mathbf{B}\} \right)$, thu được:

$$[\mathbf{K}]_e \{\delta\}_e - \{\mathbf{F}\}_e = 0 \quad (2.16)$$

$$\text{Suy ra : } [\mathbf{K}]_e \{\delta\}_e = \{\mathbf{F}\}_e \quad (2.17)$$

trong đó:

$\{\mathbf{F}\}_e$ - vectơ tải trọng nút của phần tử thứ e xét trong hệ tọa độ địa phương;

$\{\delta\}_e$ - vectơ chuyển vị nút của phần tử thứ e xét trong hệ tọa độ địa phương;

$[\mathbf{K}]_e$ - ma trận độ cứng của phần tử thứ e xét trong hệ tọa độ địa phương.

Phương trình (2.17) chính là phương trình cân bằng của phần tử thứ e.

2.1.1.4. Ghép nối các phần tử xây dựng phương trình cân bằng của toàn hệ.

Giả sử hệ kết cấu được rời rạc hoá thành m phần tử. Theo (2.17) ta viết được m phương trình cân bằng cho tất cả m phần tử trong hệ tọa độ riêng của từng phần tử. Sau khi chuyển về hệ tọa độ chung của toàn kết cấu, tiến tới gộp các phương trình cân bằng của từng phần tử trong cả hệ, thu được phương trình cân bằng cho toàn hệ kết cấu trong hệ tọa độ chung:

$$[\mathbf{K}']\{\delta'\} = \{\mathbf{F}'\} \quad (2.18)$$

Do thứ tự các thành phần trong vectơ chuyển vị nút $\{\delta'\}_e$ của từng phần tử khác với thứ tự trong vectơ chuyển vị nút $\{\delta'\}$ của toàn hệ kết cấu, nên cần lưu

ý xếp đúng vị trí của từng thành phần trong $[K']_e$ và $\{F'\}_e$ vào $[K']$ và $\{F'\}$. Việc sắp xếp này thường được áp dụng phương pháp số mã, hay sử dụng ma trận định vị phần tử $[H]_e$ để thiết lập các ma trận tổng thể và vector tải trọng nút tổng thể của toàn hệ kết cấu.

Áp dụng ma trận định vị phần tử $[H]_e$

Giả sử hệ kết cấu được rời rạc hoá thành m phần tử. Số bậc tự do của toàn hệ là n . Vectơ chuyển vị nút tổng thể có dạng:

$$\{\delta'\} = \{\delta'_1 \quad \delta'_2 \quad \dots \quad \delta'_n\}^T \quad (2.19)$$

Với phần tử thứ e , số bậc tự do là n_e , có vectơ chuyển vị nút trong hệ tọa độ chung là $\{\delta'\}_e$. Các thành phần của $\{\delta'\}_e$ nằm trong số các thành phần của $\{\delta'\}$. Do đó có sự biểu diễn quan hệ giữa 2 vectơ này như sau:

$$\{\delta'\}_e = [H]_e \{\delta'\} \quad (2.20)$$

$(n_e \times 1) \quad (n_e \times n) \quad (n \times 1)$

trong đó: $[H]_e$ - là ma trận định vị của phần tử e , nó cho thấy hình ảnh sắp xếp các thành phần của vectơ $\{\delta'\}_e$ trong $\{\delta'\}$.

Dựa vào (2.13) ta xác định được thế năng toàn phần cho từng phần tử. Thay (2.20) vào (2.13), sau đó cộng gộp của m phần tử, xác định được thế năng toàn phần của hệ:

$$\Pi = \sum_{e=1}^m \left[\frac{1}{2} \{\delta'\}^T [H]_e^T [K']_e [H]_e \{\delta'\} - \{\delta'\}^T [H]_e^T \{F'\}_e \right] \quad (2.21)$$

Biểu thức (2.21) biểu diễn thế năng toàn phần của hệ theo vectơ chuyển vị nút tổng thể $\{\delta'\}$. áp dụng nguyên lí thế năng dừng toàn phần sẽ có điều kiện cân bằng của toàn hệ tại điểm nút:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{\delta'\}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial \delta'_1} \\ \frac{\partial \Pi_e}{\partial \delta'_2} \\ \dots \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \delta'_n} \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.22)$$

Áp dụng phép lấy đạo hàm riêng đối với ma trận thu được:

$$\left(\sum_{e=1}^m [\mathbf{H}]_e^T [\mathbf{K}']_e [\mathbf{H}]_e \right) \{\delta'\} - \sum_{e=1}^m [\mathbf{H}]_e^T \{F'\}_e = \{0\} \quad (2.23)$$

Nhận thấy đây chính là phương trình cân bằng cho toàn hệ. So sánh với (2.18), thu được:

$$\text{Ma trận độ cứng tổng thể: } [\mathbf{K}'] = \sum_{e=1}^m [\mathbf{H}]_e^T [\mathbf{K}']_e [\mathbf{H}]_e \quad (2.24)$$

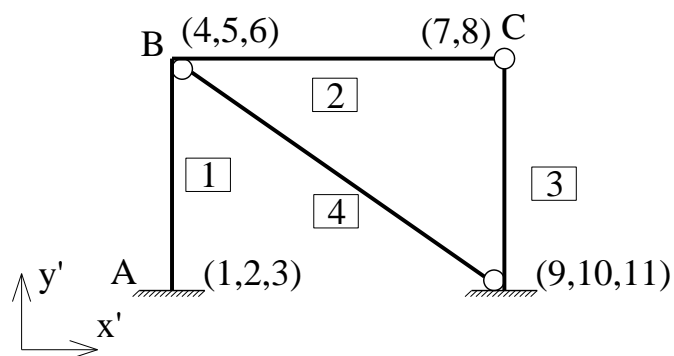
$$\text{Vectơ tải trọng nút tổng thể: } \{F'\} = \sum_{e=1}^m [\mathbf{H}]_e^T \{F'\}_e \quad (2.25)$$

Ví dụ 2.1: Xác định các ma trận định vị $[\mathbf{H}]_e$ của dầm với 4 điểm nút, có các thành phần chuyển vị nút như trên hình 2.2.

Lời giải

Vectơ chuyển vị nút tổng thể của kết cấu trong hệ tọa độ chung:

$$\{\delta'\} = \{\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3 \quad \delta_4 \quad \delta_5 \quad \delta_6 \quad \delta_7 \quad \delta_8 \quad \delta_9 \quad \delta_{10} \quad \delta_{11}\}^T$$



Hình 2.2 Hình ví dụ 2.1

Vector chuyển vị nút của từng phần tử biểu diễn theo vector chuyển vị nút tổng thể:

$$\{\delta'\}_1 = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} = [H]_1 \{\delta'\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_9 \\ \delta_{10} \\ \delta_{11} \end{Bmatrix}$$

$$\{\delta'\}_2 = \begin{Bmatrix} \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \end{Bmatrix} = [H]_2 \{\delta'\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{10} \\ \delta_{11} \end{Bmatrix}$$

$$\{\delta'\}_3 = \begin{Bmatrix} \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \\ \delta_{10} \\ \delta_{11} \end{Bmatrix} = [H]_3 \{\delta'\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{10} \\ \delta_{11} \end{Bmatrix}$$

$$\{\delta'\}_4 = \begin{Bmatrix} \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_9 \\ \delta_{10} \end{Bmatrix} = [H]_4 \{\delta'\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{11} \end{Bmatrix}$$

Ma trận độ cứng, véc tơ tải tác dụng tại nút của từng phần tử:

$$[K']_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ & & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ & & & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ & & & & a_{55} & a_{56} \\ & & & & & a_{66} \end{bmatrix} ; \{F'\}_1 = \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{Bmatrix}$$

$$[K']_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ & & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ & & & b_{44} & b_{45} \\ & & & & b_{55} \end{bmatrix} ; \{F'\}_2 = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{Bmatrix}$$

$$[K']_3 = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ & & & c_{44} & c_{45} \\ & & & & c_{55} \end{bmatrix} ; \{F'\}_3 = \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_2 \\ g_2 \\ g_2 \end{Bmatrix}$$

$$[K']_4 = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ & & d_{33} & d_{34} \\ & & & d_{44} \end{bmatrix} ; \{F'\}_4 = \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{Bmatrix}$$

Ma trận độ cứng tổng thể: $[K'] = \sum_{e=1}^4 [H]_e^T [K']_e [H]_e$

$$[K'] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ & & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ & & & a_{44} + b_{11} + d_{11} & a_{45} + b_{12} + d_{12} & a_{46} + b_{13} & b_{14} & b_{15} & d_{13} & d_{14} & 0 & 4 \\ & & & & a_{55} + b_{22} + d_{22} & a_{56} + b_{23} & b_{24} & b_{25} & 0 & 0 & 0 & 5 \\ & & & & & a_{66} + b_{33} & b_{34} & b_{35} & 0 & 0 & 0 & 6 \\ & & & & & & b_{44} + c_{11} & b_{45} + c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & 7 \\ & & & & & & & b_{55} + c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & 8 \\ & & & & & & & & c_{33} + e_{33} & c_{34} + e_{34} & c_{35} & 9 \\ & & & & & & & & & c_{44} + e_{44} & c_{45} & 10 \\ & & & & & & & & & & c_{55} & 11 \end{bmatrix}$$

Vector tải trọng nút tổng thể: $[F'] = \sum_{e=1}^4 [H]_e^T \{F'\}_e$

$$[F'] = \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 + f_1 + h_1 \\ e_5 + f_2 + h_2 \\ e_6 + f_3 \\ f_4 + g_1 \\ f_5 + g_2 \\ g_3 + h_3 \\ g_4 + h_4 \\ g_5 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{matrix}$$

Việc sử dụng ma trận định vị $[H]_e$ trong (2.24) và (2.25) để tính ma trận độ cứng $[K']$ và vector tải trọng nút $\{F'\}$ thực chất là sắp xếp các thành phần của ma trận độ cứng phần tử $[K']_e$ và vector tải trọng nút phần tử $\{F'\}_e$ vào vị trí của nó trong ma trận độ cứng tổng thể $[K']$ và vector tải trọng nút tổng thể $\{F'\}$. Tuy nhiên trong thực tế người ta hay sử dụng phương pháp số mã.

Phương pháp đánh số mã

Khi tiến hành ghép nối ma trận độ cứng của kết cấu và véc tơ tải trọng tác dụng tại nút, ta làm theo các bước sau:

- Tiến hành đánh số mã của các thành phần véc tơ chuyển vị nút tại các nút của kết cấu và đánh số mã cho phần tử.
- Lập bảng xác định mã cục bộ của các phần tử theo mã tổng thể của kết cấu.
- Tính toán xác định các ma trận độ cứng, véc tơ tải trọng tác dụng tại các nút của phần tử theo mã cục bộ và tương ứng với mã tổng thể trong hệ tọa độ chung.
- Tiến hành ghép nối ma trận độ cứng và véc tơ tải trọng tác dụng nút của các phần tử thành ma trận độ cứng và véc tơ tải trọng tác dụng nút của toàn bộ hệ kết cấu trong hệ tọa độ chung theo công thức.

$$k'_{ij} = \sum (k'_{ij})_e \quad (2.26)$$

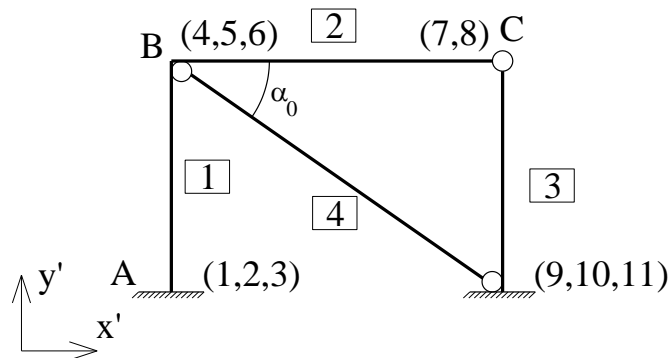
trong đó:

+ i, j : là số hiệu mã tổng thể của toàn bộ kết cấu trong hệ tọa độ chung;

+ k'_{ij} : là hệ số của trong ma trận độ cứng của toàn bộ kết cấu tương ứng với hàng có số hiệu mã tổng thể i và cột có số hiệu mã tổng thể j trong hệ tọa độ chung;

+ $(k'_{ij})_e$: là hệ số của ma ma trận độ cứng của phần tử tương ứng với hàng có số hiệu mã tổng thể i và cột có số hiệu mã tổng thể j trong hệ tọa độ chung

Ví dụ 2.2: Thiết lập ma trận độ cứng tổng thể $[K']$ và vectơ tải trọng nút $\{F'\}$ của toàn hệ kết cấu của hệ trên hình 2.3.



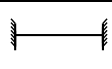
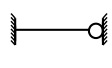
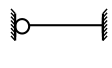
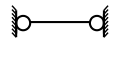
Hình 2.3 Hình ví dụ 2.2

Lời giải

- Đánh số mã của các thành phần véc tơ chuyển vị nút tại các nút của kết cấu và đánh số mã cho các phần tử như hình.

- Lập bảng xác định mã cục bộ của các phần tử theo mã tổng thể của kết cấu.

Phần tử			Mã cục bộ					
TT	Loại	α	1	2	3	4	5	6
			Số mã toàn thể					

1		90	1	2	3	4	5	6
2		0	4	5	6	7	8	
3		-90	7	8	9	10	11	
4		α_0	4	5	9	10		

- Tính toán xác định các ma trận độ cứng $[K']_e$, véc tơ tải trọng tác dụng tại các nút $\{F'\}_e$ của phần tử theo mã cục bộ và tương ứng với mã tổng thể trong hệ tọa độ chung.

$$\begin{array}{c}
 \text{CB } 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \\
 [K']_1 = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ & & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ & & & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ & (\text{đx}) & & & a_{55} & a_{56} \\ & & & & & a_{66} \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \\
 \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad \text{TT} \end{array}
 \end{array}
 \quad ; \quad \{F'\}_1 = \begin{array}{c} \left. \begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{CB } 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \\
 [K']_2 = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ & & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ & (\text{đx}) & & b_{44} & b_{45} \\ & & & & b_{55} \end{bmatrix} \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \\
 \begin{array}{c} 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad \text{TT} \end{array}
 \end{array}
 \quad ; \quad \{F'\}_2 = \begin{array}{c} \left. \begin{array}{l} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}
 \end{array}$$

$$\text{CB } 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$\begin{array}{c}
1 \\
2 \\
3 \\
4 \\
5 \\
7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad \text{TT}
\end{array}
\begin{bmatrix}
c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\
& c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\
& & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\
& (\text{đx}) & & c_{44} & c_{45} \\
& & & & c_{55}
\end{bmatrix}
\begin{array}{c}
7 \\
8 \\
9 \\
10 \\
11
\end{array}
; \{F'\}_3 = \begin{cases} g_1 \\ g_2 \\ g_2 \\ g_2 \\ g_2 \end{cases}
\begin{array}{c}
7 \\
8 \\
9 \\
10 \\
11
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\text{CB} \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\
1 \\
2 \\
3 \\
4 \\
4 \quad 5 \quad 9 \quad 10 \quad \text{TT}
\end{array}
\begin{bmatrix}
d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\
& d_{22} & d_{23} & d_{24} \\
& (\text{đx}) & d_{33} & d_{34} \\
& & & d_{44}
\end{bmatrix}
\begin{array}{c}
4 \\
5 \\
9 \\
10
\end{array}
; \{F'\}_4 = \begin{cases} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{cases}
\begin{array}{c}
4 \\
5 \\
9 \\
10
\end{array}$$

- Tiến hành ghép nối ma trận độ cứng và vectơ tải trọng tác dụng nút của các phần tử thành ma trận độ cứng $[K']$ và vectơ tải trọng tác dụng nút $\{F'\}$ của toàn bộ hệ kết cấu trong hệ tọa độ chung theo công thức.

$$[K'] = \begin{bmatrix}
a_{11} & a_{13} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
& a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
& & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
& & & a_{44} + b_{11} + d_{11} & a_{45} + b_{12} + d_{12} & a_{46} + b_{13} & b_{14} & b_{15} & d_{13} & d_{14} & 0 & 4 \\
& & & & a_{55} + b_{22} + d_{22} & a_{56} + b_{23} & b_{24} & b_{25} & 0 & 0 & 0 & 5 \\
& & & & & a_{66} + b_{33} & b_{34} & b_{35} & 0 & 0 & 0 & 6 \\
& & & & & & b_{44} + c_{11} & b_{45} + c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & 7 \\
& & & & & & & b_{55} + c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & 8 \\
& & (\text{đx}) & & & & & & c_{33} + e_{33} & c_{34} + e_{34} & c_{35} & 9 \\
& & & & & & & & & c_{44} + e_{44} & c_{45} & 10 \\
& & & & & & & & & & c_{55} & 11
\end{bmatrix}$$

$$[F'] = \begin{bmatrix} e_1 & 1 \\ e_2 & 2 \\ e_3 & 3 \\ e_4 + f_1 + h_1 & 4 \\ e_5 + f_2 + h_2 & 5 \\ e_6 + f_3 & 6 \\ f_4 + g_1 & 7 \\ f_5 + g_2 & 8 \\ g_3 + h_3 & 9 \\ g_4 + h_4 & 10 \\ g_5 & 11 \end{bmatrix}$$

2.1.1.5: Sử lý điều kiện biên của bài toán

Phương pháp phần tử hữu hạn là cuối cùng đưa về giải phương trình toán học:

$$[K']\{\delta'\} = \{F'\} \quad (2.27)$$

Để phương trình này không có nghiệm tầm thường thì điều kiện định thức của ma trận $[K']$ khác 0 ($\det [K']$ khác 0), khi đó phương trình không suy biến. Với bài toán kết cấu, điều này chỉ đạt được khi điều kiện biên được thoả mãn (kết cấu phải bất biến hình). Đó là điều kiện cho trước một số chuyển vị nút nào đó bằng 0 hay bằng một giá trị xác định hoặc một số chuyển vị nút phải liên hệ với nhau. Sau khi áp đặt điều kiện biên vào, phương trình cân bằng của toàn hệ kết cấu trong hệ tọa độ chung có dạng:

$$[K^*]\{\delta^*\} = \{F^*\} \quad (2.28)$$

Trong thực tế khi phân tích kết cấu thường gặp 2 điều kiện biên sau:

- Biên làm một hoặc nhiều thành phần chuyển vị bằng 0.
- Biên làm một hoặc nhiều thành phần chuyển vị có một giá trị xác định

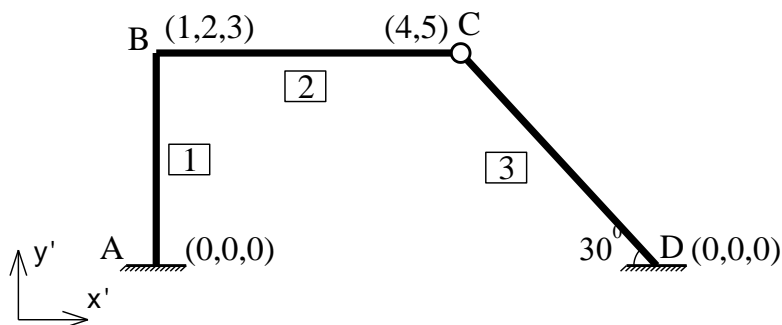
Khi biên có thành phần chuyển vị nào đó bằng 0

Thành phần chuyển vị tại một nút của phần tử bằng 0 do tương ứng với các thành phần chuyển vị này là các liên kết với đất, ta xử lí bằng cách:

- Khi đánh mã chuyển vị cho toàn bộ hệ, những thành phần chuyển vị tại nút nào đó bằng 0 thì ghi mã của chuyển vị đó là 0. Việc đánh số mã toàn thể của chuyển vị nút theo thứ tự và vector chuyển vị nút của toàn hệ chỉ bao gồm các chuyển vị nút còn lại.

- Khi lập ma trận $[K']_e$ và vector $\{F'\}_e$ của từng PT, các hàng và cột tương ứng với số mã chuyển vị nút bằng không thì không cần tính. Và khi thiết lập ma trận độ cứng tổng thể $[K']$ và vector tải trọng nút tổng thể $\{F'\}$ thì những hàng và cột nào có mã bằng 0 thì ta loại bỏ hàng, cột.

Ví dụ 2.3: Thiết lập ma trận độ cứng tổng thể $[K']$ và vector tải trọng nút $\{F'\}$ của toàn hệ kết cấu như hình 2.4 (có xét tới điều kiện biên).



Hình 2.4 Hình ví dụ 2.3

Lời giải:

Lập bảng số mã khi xét tới điều kiện biên:

Phần tử			Mã cục bộ					
TT	Loại	α	1	2	3	4	5	6
			Số mã toàn thể					

1		90	0	0	0	1	2	3
2		0	1	2	3	4	5	
3		-30	4	5	0	0	0	

Ma trận độ cứng $[K']_e$ và vector tải trọng nút $\{F'\}_e$ của từng phần tử trong hệ trục tọa độ chung:

$$[K']_1 = \begin{matrix} & \text{CB} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \text{x} & \text{x} & \text{x} & \text{x} & \text{x} & \text{x} \\ & \text{x} & \text{x} & \text{x} & \text{x} & \text{x} \\ & & \text{x} & \text{x} & \text{x} & \text{x} \\ & & & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ & & & & a_{55} & a_{56} \\ & & & & & a_{66} \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} & \text{1} & \text{2} & \text{3} & \text{TT} \end{matrix} ; \{F'\}_1 = \begin{matrix} \begin{bmatrix} \text{x} \\ \text{x} \\ \text{x} \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$[K']_2 = \begin{matrix} & \text{CB} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ & & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ & & & b_{44} & b_{45} \\ & & & & b_{55} \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \\ \text{1} & \text{2} & \text{3} & \text{0} & \text{0} & \text{TT} \end{matrix} ; \{F'\}_2 = \begin{matrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$[K']_3 = \begin{matrix} & \text{CB} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \text{x} & \text{x} & \text{x} \\ & c_{22} & \text{x} & \text{x} & \text{x} \\ & & \text{x} & \text{x} & \text{x} \\ & & & \text{x} & \text{x} \\ & & & & \text{x} \end{bmatrix} & \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \text{1} & \text{2} & \text{3} & \text{0} & \text{0} & \text{TT} \end{matrix} ; \{F'\}_3 = \begin{matrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \text{x} \\ \text{x} \\ \text{x} \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{matrix}$$

4 5 0 0 0 TT

Căn cứ vào bảng số mã, thu được ma trận độ cứng và vectơ tải trọng nút tổng thể (có xét tới điều kiện biên) như sau:

$$[K^*] = \begin{bmatrix} (a_{44} + b_{11}) & (a_{45} + b_{12}) & (a_{46} + b_{13}) & b_{14} & b_{15} & 1 \\ & (a_{55} + b_{22}) & (a_{56} + b_{23}) & b_{24} & b_{25} & 2 \\ & & (a_{66} + b_{33}) & b_{34} & b_{35} & 3 \\ & & & & & & & (dx) & & (b_{44} + c_{11}) & (b_{45} + c_{12}) & 4 \\ & & & & & & & & & & (b_{55} + c_{22}) & 5 \end{bmatrix}$$

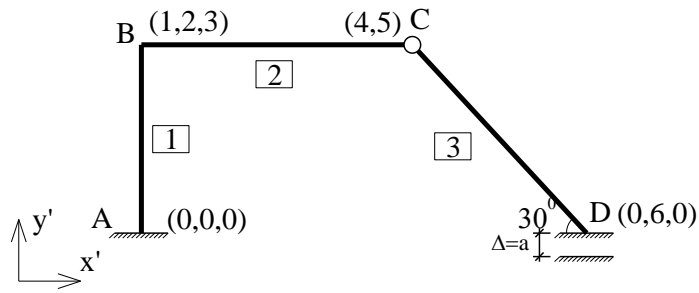
$$\{F^*\} = \{(d_4 + e_1) \quad (d_5 + e_2) \quad (d_6 + e_3) \quad (e_4 + f_1) \quad (e_5 + f_2)\}^T$$

Khi biên có thành phần chuyển vị cho trước một giá trị

Khi thành phần chuyển vị tại một nút nào đó cho trước một giá trị xác định, thí dụ $\Delta m = a$ (hay liên kết tương ứng với các thành phần chuyển vị nút δm chịu chuyển vị cưỡng bức có giá trị bằng a). Lúc này ta có thể giải quyết bài toán này theo 2 cách:

Cách 1: Khi đánh số mã của bậc tự do (các thành phần chuyển vị) tổng thể kết cấu thì thành phần chuyển vị tại nút có chuyển vị bằng a ta vẫn đánh mã bình thường chẳng hạn mã là m . Sau khi lập được ma trận độ cứng tổng thể $[K']$ và vectơ tải trọng nút tổng thể $\{F'\}$ thay thế số hạng k_{mm} trong ma trận $[K']$ bằng $(k_{mm} + A)$ và thay số hạng tại hàng m trong ma trận $\{F'\}$ là f_m bằng $(k_{mm} + A)a$.

Ví dụ 2.4: Thiết lập ma trận độ cứng tổng thể $[K']$ và vectơ tải trọng nút $\{F'\}$ của toàn hệ kết cấu như hình 2.5 (có xét tới điều kiện biên).



Hình 2.5 Hình ví dụ 2.4

Lời giải

Hệ được đánh số phần tử và số mã chuyển vị tổng thể của kết cấu như hình 2.5.

Bảng số mã khi xét tới điều kiện biên:

Phần tử			Mã cục bộ					
TT	Loại	α	1	2	3	4	5	6
			Số mã toàn thể					
1		90	0	0	0	1	2	3
2		0	1	2	3	4	5	
3		-30	4	5	0	6	0	

Ma trận độ cứng $[K']_e$ và vectơ tải trọng nút $\{F'\}_e$ của từng phần tử trong hệ trục tọa độ chung:

$$[K']_1 = \begin{matrix} & \text{CB } 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} x & x & x & x & x & x \\ & x & x & x & x & x \\ & & x & x & x & x \\ & & & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ & & & & a_{55} & a_{56} \\ & & & & & a_{66} \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \\ \text{TT} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} & \text{CB } 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix}$$

$$; \{F'\}_1 = \begin{matrix} \begin{matrix} x \\ x \\ x \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$[K']_2 = \begin{matrix} 1 & \left[\begin{array}{ccccc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ & & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ & & & b_{44} & b_{45} \\ & & & & b_{55} \end{array} \right] & 1 \\ 2 & & & & & 2 \\ 3 & & & & & 3 \\ 4 & & & & & 4 \\ 5 & & & & & 5 \end{matrix} \quad ; \{F'\}_2 = \begin{matrix} \left\{ \begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{array} \right\} & 1 \\ & 2 \\ & 3 \\ & 4 \\ & 5 \end{matrix}$$

1	2	3	0	0	TT
CB	1	2	3	4	5

$$[K']_3 = \begin{matrix} 1 & \left[\begin{array}{ccccc} c_{11} & c_{12} & x & c_{14} & x \\ & c_{22} & x & c_{25} & x \\ & & x & x & x \\ & & & c_{44} & x \\ & & & & x \end{array} \right] & 4 \\ 2 & & & & & 5 \\ 3 & & & & & 0 \\ 4 & & & & & 6 \\ 5 & & & & & 0 \end{matrix} \quad ; \{F'\}_3 = \begin{matrix} \left\{ \begin{array}{l} f_1 \\ f_2 \\ x \\ f_4 \\ x \end{array} \right\} & 4 \\ & 5 \\ & 0 \\ & 6 \\ & 0 \end{matrix}$$

4	5	0	6	0	TT
---	---	---	---	---	----

Căn cứ vào bảng số mã, thu được ma trận độ cứng và vector tải trọng nút tổng thể (có xét tới điều kiện biên) như sau:

$$[K^*] = \begin{matrix} \left[\begin{array}{cccccc} (a_{44} + b_{11}) & (a_{45} + b_{12}) & (a_{46} + b_{13}) & b_{14} & b_{15} & 0 \\ & (a_{55} + b_{22}) & (a_{56} + b_{23}) & b_{24} & b_{25} & 0 \\ & & (a_{66} + b_{33}) & b_{34} & b_{35} & 0 \\ & & & (b_{44} + c_{11}) & (b_{45} + c_{12}) & c_{14} \\ & & & & (b_{55} + c_{22}) & c_{25} \\ & & & & & (c_{44} + A) \end{array} \right] & 1 \\ & & & & & & 2 \\ & & & & & & 3 \\ & & & & & & 4 \\ & & & & & & 5 \\ & & & & & & 6 \end{matrix}$$

$$\{F^*\} = \{(d_4 + e_1) \quad (d_5 + e_2) \quad (d_6 + e_3) \quad (e_4 + f_1) \quad (e_5 + f_2) \quad (c_{44} + A)a\}^T$$

Giải hệ phương trình $[K^*]\{\delta^*\} = \{F^*\}$ thoả mãn điều kiện biên vì phương trình thứ 6 thu được:

$$K_{61}\delta_1 + K_{62}\delta_2 + K_{63}\delta_3 + K_{64}\delta_4 + K_{65}\delta_5 + (c_{44} + A)\delta_6 = (c_{44} + A)a$$

Chia cả 2 vế cho $(c_{44} + A)$, thu được: $\delta_6 = a$

Cách 2: Theo cách thứ 2 này thì khi đánh mã chuyển vị tổng thể cho kết cấu thì những thành phần nào chuyển vị bằng không hoặc có chuyển vị cưỡng bức ta đánh mã 0, còn các thành phần chuyển vị còn lại ta đánh mã theo thứ tự từ 1 đến hết. Sau đó ta lập ma trận độ cứng và vectơ tải trọng tác dụng nút cho toàn bộ hệ như bài toán không có chuyển vị cưỡng bức. Lúc này ta coi chuyển vị cưỡng bức như là một dạng tải trọng tác dụng lên kết cấu, vì vậy khi tính vectơ tải trọng tác dụng nút lên toàn bộ hệ phải kể thêm phần tải trọng tác dụng nút do chuyển vị cưỡng bức gây ra. Vectơ tải trọng nút lúc này là do chuyển vị cưỡng bức các liên kết tựa, được tổng hợp từ các vectơ tải trọng nút $\{P'_\Delta\}_e$ của mỗi phần tử có liên kết tựa chuyển vị cưỡng bức: $\{P'_\Delta\}_e = [T]_e^T \{P_\Delta\}_e$; trong đó: $\{P_\Delta\}_e$ nhận được bằng phản lực liên kết nút do chuyển vị cưỡng bức gôỉ tựa với dấu ngược lại.

2.1.1.6. Giải hệ phương trình cân bằng

Với bài toán tuyến tính, việc giải hệ phương trình đại số là không khó. Kết quả tìm được là chuyển vị của các nút:

$$\{\delta^*\} = [K^*]^{-1} \{F^*\} \quad (2.29)$$

2.1.1.7. Xác định nội lực

Từ kết quả thu được, kết hợp với các điều kiện biên xác định được vector chuyển vị nút của từng phần tử trong hệ tọa độ địa phương. Từ đó xác định được nội lực trong phần tử.

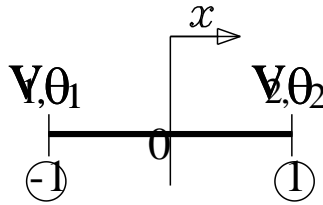
Phương pháp phần tử có ưu điểm là việc chia kết cấu ra thành các phần tử nhỏ thì dễ dàng mô tả được hình dạng phức tạp của công trình, đặc biệt vì các phần tử nhỏ nên mô tả trạng thái chuyển vị của phần tử chỉ cần các đa thức bậc thấp. Thông thường đối với phần tử dầm chịu uốn thì ta thường dùng đa thức bậc 3 để mô tả chuyển vị của phần tử:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (2.30)$$

Trong phương trình mô tả chuyển vị ta thấy có bốn thông số cần xác định. Để thuận tiện ta thay bốn thông số a_0, a_1, a_2, a_3 bằng các chuyển vị và góc xoay tại các nút của phần tử $v_1, \theta_1, v_2, \theta_2$. Vì hàm chuyển vị bậc 3 nên ta các lực tác dụng trên phần tử ta phải quy về nút của phần tử.

2.1.2. Cách xây dựng ma trận độ cứng của phần tử chịu uốn

Xét phần tử dầm có hai nút, mỗi nút có hai bậc tự do là chuyển vị và góc xoay và dầm có diện tích mặt cắt ngang là A ; mô men quán tính của mặt cắt ngang là I ; mô đun đàn hồi của vật liệu E (hình 2.6)



Hình 2.6 Phần tử hai nút

Để tính toán được tổng quát, chiều dài phần tử lấy bằng hai đơn vị, gốc tọa độ nằm ở giữa phần tử. Như vậy, nếu biết được các bậc tự do tại các nút phần tử là $v_1, \theta_1, v_2, \theta_2$ thì chuyển vị tại điểm bất kỳ trong phần tử tại tọa độ x được xác định như sau:

$$v = N_1.v_1 + N_2.\theta_1 + N_3.v_2 + N_4.\theta_2 \quad (2.31)$$

Trong đó : N_1, N_2, N_3, N_4 : là các hàm dạng và được xác định như sau:

$$N_1 = \frac{1}{4}(2 - 3x + x^3); \quad N_2 = \frac{1}{4}(1 - x - x^2 + x^3);$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(2 + 3x - x^3); \quad N_4 = \frac{1}{4}(-1 - x + x^2 + x^3).$$

Theo công thức trên ta thấy:

$$v|_{x=-1} = v_1; \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=-1} = \theta_1; \quad v|_{x=1} = v_2; \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=1} = \theta_2. \quad (2.32)$$

Như vậy, mỗi phần tử có 4 bậc tự do $X = \{v_1, \theta_1, v_2, \theta_2\}$ cần xác định. Nếu biết được X thì ta có biết được chuyển vị trong phần tử cũng như biến dạng uốn và mô men theo công thức sau:

$$\chi = -\frac{d^2v}{dx^2} = -\left[\frac{d^2N_1}{dx^2} \quad \frac{d^2N_2}{dx^2} \quad \frac{d^2N_3}{dx^2} \quad \frac{d^2N_4}{dx^2} \right] \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\}^T; \quad (2.33a)$$

$$M = EI.\chi = -EI \left[\frac{d^2N_1}{dx^2} \quad \frac{d^2N_2}{dx^2} \quad \frac{d^2N_3}{dx^2} \quad \frac{d^2N_4}{dx^2} \right] \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\}^T \quad (2.34a)$$

Công thức trên là tính toán cho phần tử có chiều dài bằng 2, nếu phần tử có chiều dài là Δx thì biến dạng uốn và mô men được tính như sau:

$$\chi = -\frac{d^2v}{dx^2} \left(\frac{2}{\Delta x} \right)^2 = -\left(\frac{2}{\Delta x} \right)^2 \left[\frac{d^2N_1}{dx^2} \quad \frac{d^2N_2}{dx^2} \quad \frac{d^2N_3}{dx^2} \quad \frac{d^2N_4}{dx^2} \right] \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\}^T \quad (2.33b)$$

$$M = EI.\chi = -EI \left(\frac{2}{\Delta x} \right)^2 \left[\frac{d^2N_1}{dx^2} \quad \frac{d^2N_2}{dx^2} \quad \frac{d^2N_3}{dx^2} \quad \frac{d^2N_4}{dx^2} \right] \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\}^T \quad (2.34b)$$

Xét phần tử có các tải trọng tập trung $F = \{P_1, P_2, M_1, M_2\}^T$ tác dụng tại các nút của phần tử. Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, lượng ràng buộc đối với bài toán tĩnh viết cho phần tử như sau:

$$Z = \frac{\Delta x}{2} \int_{-1}^1 M[\chi] dx - \sum_{i=1}^4 F_i X_i \rightarrow \min \quad (2.35)$$

Điều kiện dừng của (3.25) được viết lại như sau:

$$\delta Z = \frac{\Delta x}{2} \int_{-1}^1 M \delta[\chi] dx - \sum_{i=1}^4 F_i \delta X_i = 0 \quad (2.36)$$

hay:

$$\left(\frac{2}{\Delta x}\right)^3 \cdot EJ \cdot \begin{bmatrix} \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_4}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} dx \\ \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_4}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} dx \\ \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_4}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} dx \\ \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_4}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_4}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_4}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_4}{dx^2} \frac{d^2 N_4}{dx^2} dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$[K]\{X\} = \{F\} \quad (2.38)$$

trong đó: $[K]$: ma trận độ cứng của phần tử; $\{F\}$: véc tơ tải trọng tác dụng nút; $\{X\}$: véc tơ chuyển vị nút của phần tử.

Tính tích phân các hệ số trong $[K]$ ta có thể tính bằng phương pháp chính xác (bằng hàm $\text{int}(fx,a,b)$ có sẵn trong matlab) hoặc tính bằng phương pháp tích phân số của Gauss và kết quả độ cứng của phần tử chịu uốn ngang phẳng như sau:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{\Delta x^3} & \frac{6EI}{\Delta x^2} & -\frac{12EI}{\Delta x^3} & \frac{6EI}{\Delta x^2} \\ \frac{6EI}{\Delta x^2} & \frac{4EI}{\Delta x} & -\frac{6EI}{\Delta x^2} & \frac{2EI}{\Delta x} \\ -\frac{12EI}{\Delta x^3} & -\frac{6EI}{\Delta x^2} & \frac{12EI}{\Delta x^3} & -\frac{6EI}{\Delta x^2} \\ \frac{6EI}{\Delta x^2} & \frac{2EI}{\Delta x} & -\frac{6EI}{\Delta x^2} & \frac{4EI}{\Delta x} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Biết được ma trận độ cứng phần tử thì ta dễ dàng xây dựng được ma trận độ cứng của toàn thanh. Nếu thanh chỉ có một phần tử thì ma trận của phần tử cũng chính là ma trận độ cứng của thanh. Trong phần tử nếu bậc tự do nào không có thì trong ma trận độ cứng của phần tử đó ta bỏ đi hàng và cột tương ứng với bậc tự do đó.

2.1.3. Cách xây dựng ma trận độ cứng tổng thể của kết cấu

Để trình bày cách xây dựng ma trận độ cứng tổng thể của kết cấu trong phương pháp phần tử hữu hạn, luận văn xin được trình bày thông qua ví dụ giải bài toán dầm chịu uốn dưới tác dụng của tải trọng tĩnh cụ thể sau (còn các bài toán khác thì cách xây dựng ma trận độ cứng tổng thể cũng làm tương tự):

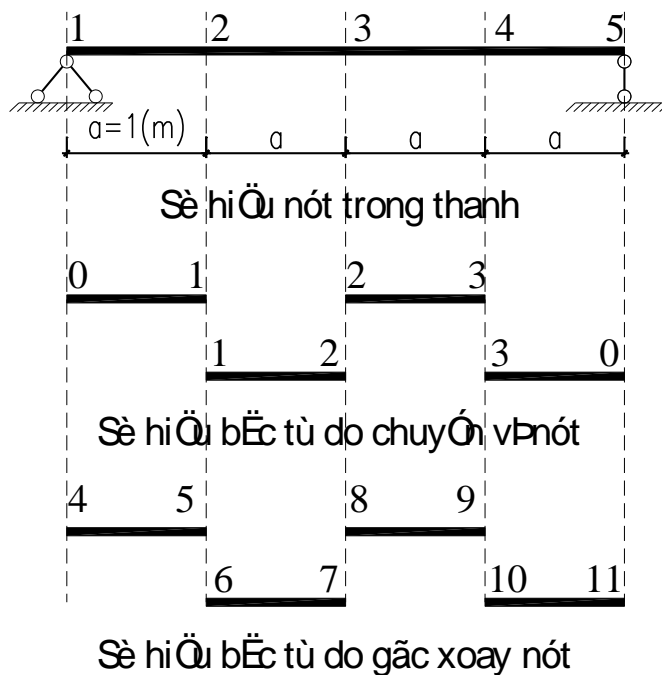
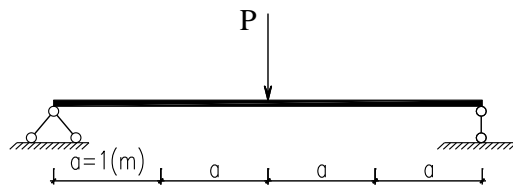
Ví dụ 2.5: Tính toán kết cấu dầm

chịu lực như (hình 2.7). Biết dầm

có độ cứng $EI = 10^8 \text{ (kN.cm}^2\text{)}$

không đổi và $P=10 \text{ (kN)}$. Xác định

chuyển vị tại giữa dầm.



Hình 2.8 Rời rạc hóa thanh thành các phần tử

Chia thanh ra thành n_{pt} phần tử. Các nút của phần tử phải trùng với vị trí đặt lực tập trung, chiều dài các phần tử có thể khác nhau. Mỗi phần tử có 4 bậc tự do, như vậy nếu n_{pt} phần tử rời rạc thì tổng cộng có $4n_{pt}$ bậc tự do. Nhưng vì cần đảm bảo liên tục giữa các chuyển vị là chuyển vị của nút cuối phần tử

thứ e bằng chuyển vị của nút đầu phần tử thứ $(e + 1)$ nên số bậc tự do của thanh sẽ nhỏ hơn $4n_{pt}$. Khi giải ta chỉ cần đảm bảo điều kiện liên tục của chuyển vị còn điều kiện liên tục về góc xoay được xét bằng cách đưa vào các điều kiện ràng buộc. Ví dụ dầm trong (ví dụ 2.5) ta chia thành 4 phần tử (hình 2.8)

Như vậy, tổng cộng số ẩn là 11 ẩn $< 4 \times 4 = 16$ ẩn. Gọi ma trận n_w là ma trận chuyển vị có kích thước $n_w(n_{pt}, 2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ẩn số là chuyển vị tại nút của các phần tử (hình 2.8)

$$n_w(1,:) = [0 \quad 1]; n_w(2,:) = [1 \quad 2]; n_w(3,:) = [2 \quad 3]; n_w(4,:) = [3 \quad 0]$$

$$n_w = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Gọi ma trận n_θ là ma trận chuyển vị có kích thước $n_\theta(n_{pt}, 2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ẩn số là góc xoay tại nút của các phần tử (hình 2.8)

$$n_\theta(1,:) = [4 \quad 5]; n_\theta(2,:) = [6 \quad 7]; n_\theta(3,:) = [8 \quad 9]; n_\theta(4,:) = [10 \quad 11]$$

$$n_\theta = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 & 10 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \end{bmatrix}^T$$

Sau khi biết ẩn số thực của các thanh ta có thể xây dựng độ cứng tổng thể của thanh (có rất nhiều cách ghép nối phần tử khác nhau, tùy vào trình độ lập trình của mỗi người nên tác giả không trình bày chi tiết cách ghép nối các phần tử lại để được ma trận độ cứng của toàn thanh và có thể xem trong code mô đun chương trình của tác giả)

Nếu bài toán có n_{cv} ẩn số chuyển vị và n_{gx} ẩn số góc xoay thì ma trận độ cứng của thanh là K có kích thước $(n \times n)$, $K(n, n)$ với $n = (n_{cv} + n_{gx})$. Như ở ví dụ 2.5, $n = 11$. Bây giờ xét điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử.

Điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử được viết như sau:

$$\left(\frac{dy_i}{dx} \Big|_{\text{nút } 2} \right) - \left(\frac{dy_{i+1}}{dx} \Big|_{\text{nút } 1} \right) = 0 \quad (2.40)$$

hay:

$$\delta\lambda_1 \left[\left(\frac{dy_1}{dx} \Big|_{\text{nút } 2} \right) - \left(\frac{dy_2}{dx} \Big|_{\text{nút } 1} \right) \right] = 0 \quad (2.41a)$$

$$\delta\lambda_2 \left[\left(\frac{dy_2}{dx} \Big|_{\text{nút } 2} \right) - \left(\frac{dy_3}{dx} \Big|_{\text{nút } 1} \right) \right] = 0 \quad (2.41b)$$

$$\delta\lambda_3 \left[\left(\frac{dy_3}{dx} \Big|_{\text{nút } 2} \right) - \left(\frac{dy_4}{dx} \Big|_{\text{nút } 1} \right) \right] = 0 \quad (2.41c)$$

Trong đó λ_i cũng là ẩn số của bài toán (có k ẩn số), do đó tổng số ẩn số của bài toán lúc là $(n+k)$ do đó ma trận độ cứng của phần tử lúc này cũng phải thêm k dòng và k cột như vậy kích thước của ma trận độ cứng là $K(n+k, n+k)$. Gọi k_1 là góc xoay tại nút 2 của phần tử trước, k_2 là góc xoay tại nút 1 của phần tử sau thì ta có các hệ số trong ma trận độ cứng K :

$$k(n+i, k_1) = \frac{2}{\Delta x}; \quad k(n+i, k_2) = -\frac{2}{\Delta x} \quad (i=1 \div k) \quad (2.42a)$$

$$k(k_1, n+i) = \frac{2}{\Delta x}; \quad k(k_2, n+i) = -\frac{2}{\Delta x} \quad (i=1 \div k) \quad (2.42b)$$

Nếu có hai phần tử thì có một điều kiện về góc xoay, có n_{pt} phần tử thì có $(2n_{pt} - 1)$ điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử. Như vậy cuối cùng ta sẽ thiết lập được phương trình:

$$[K]\{X\} = \{F\}$$

trong đó: $\{F\} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ } so – hang = n
} so – hang = k

; $\{X\} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix}$ là ẩn số của bài toán

Trong ví dụ 2.5 khi chia thanh ra thành 4 phần tử. Kết quả ma trận độ cứng của thanh:

$$[K] = 10^3 \begin{bmatrix} 2.4 & -1.2 & 0 & -1.2 & -1.2 & 1.2 & 1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.2 & 2.4 & -1.2 & 0 & 0 & -1.2 & -1.2 & 1.2 & 1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.2 & 2.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.2 & -1.2 & 1.2 & 1.2 & 0 & 0 & 0 \\ -1.2 & 0 & 0 & 1.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.2 & 0 & 0 & 0.8 & 1.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.10^{-5} & 0 & 0 \\ 1.2 & -1.2 & 0 & 0 & 0 & 1.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.10^{-5} & 0 & 0 \\ 1.2 & -1.2 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 1.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.10^{-5} & 0 \\ 0 & 1.2 & -1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & -2.10^{-5} & 0 \\ 0 & 1.2 & -1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 1.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.10^{-5} \\ 0 & 0 & 1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.6 & 0.8 & 0 & 0 & -2.10^{-5} \\ 0 & 0 & 1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 1.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.10^{-5} & -2.10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.10^{-5} & -2.10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.10^{-5} & -2.10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kết quả chuyển vị, góc xoay tại các nút:

$$\begin{bmatrix} w_2; w_3; w_4; \\ \varphi_1; \varphi_2; \varphi_3; \varphi_4; \varphi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.09166667(\text{cm}); 0.13333333(\text{cm}); 0.09166667(\text{cm}); \\ 0.05(\text{rad}); 0.0375(\text{rad}); 0; -0.0375(\text{rad}); -0.05(\text{rad}) \end{bmatrix}$$

Ta thấy kết quả trên so với kết quả giải chính xác theo phương pháp giải tích rất đúng ví dụ như chuyển vị tại nút 3 tính theo phương pháp giải tích:

$$w_3 = \frac{Pl^3}{48EI} = 0,13333333(\text{cm})$$

CHƯƠNG 3

TÍNH TOÁN DAO ĐỘNG CỦA THANH

LỜI GIẢI BÁN GIẢI TÍCH VÀ LỜI GIẢI SỐ

Bài toán động lực học là bài toán xét khối lượng của thanh và do đó phải xét thêm lực quán tính bằng cách sử dụng nguyên lý D’Alambert. Do có lực quán tính, thanh có thể chuyển động xung quanh vị trí cân bằng tĩnh của nó. Chuyển động xung quanh vị trí cân bằng tĩnh được gọi là dao động. Trong trường hợp không có lực cản (ví dụ, lực ma sát trong thanh hoặc lực cản môi trường) thì dao động được duy trì. Khi có lực cản thì thanh dao động với biên độ giảm dần, được gọi là dao động tắt dần. Nếu như biên độ dao động tăng theo thời gian thì thanh có thể bị phá hỏng khi biên độ đạt độ lớn nào đó. Trong luận văn này, tác giả sẽ nghiên cứu bài toán dao động ngang khi có lực dọc P đặt ở đầu thanh. Trường hợp lực $P=0$ ta có bài toán dao động tự do. Vì vậy trong chương này lần lượt trình bày các vấn đề sau: dao động tự do của thanh, dao động của thanh khi có lực P là hằng đối với thời gian t , dao động của thanh khi P là hàm tuần hoàn của thời gian t ($P = P_0 + P_1 \cos(\theta t)$).

3.1. Dao động tự do của thanh

Xét thanh thẳng, có tiết diện không đổi, có khối lượng m phân bố đều trên thanh. Khi có chuyển vị ngang, thì ngoài nội lực M và Q , còn phải xét đến lực quán tính f_m . Lực quán tính f_m bằng tích của khối lượng với gia tốc của chuyển động và có phương tác dụng là phương của chuyển động (phương của độ võng) của thanh. Như vậy, lực quán tính có tác dụng giống như lực ngang, trong trường hợp này là lực ngang phân bố, đặt tại trục thanh. Nếu khối lượng m phân bố trên chiều cao của tiết diện thanh thì do tiết diện thanh bị xoay, còn có lực quán tính xoay của tiết diện thanh. Để đơn giản nghiên cứu, ta không xét lực quán tính xoay này.

Với nguyên lý D'Alambert, xem lực quán tính f_m như là ngoại lực cân tác dụng lên thanh, và vì lực quán tính là hàm của thời gian nên hàm độ võng và các hàm nội lực trong thanh đều là hàm của tọa độ và thời gian: $W = W(x, t)$ là hàm độ võng, $M = M(x, t)$ là hàm momen uốn.

Lực quán tính của thanh được tính như sau

$$f_m = m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

Xem lực quán tính f_m như là ngoại lực cân phân bố tác dụng lên thanh, viết ngay được phương trình vi phân cân bằng

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + f_m = 0 \quad (3.2a)$$

Góc xoay do momen uốn ở, biến dạng uốn χ và nội lực momen xác định theo các biểu thức sau

$$\theta = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \chi = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad M = -EJ\chi \quad (3.3)$$

Đưa các biểu thức (3.1) và (3.3) vào (3.2) nhận được

$$EJ \left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \right) + m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \quad (3.4a)$$

Nghiệm của hệ (3.4) có thể viết dưới dạng

$$W(x, t) = y(x) \cos(\omega t) = y \cos(\omega t) \quad (3.5)$$

Khi đó hệ (3.4) có dạng

$$\left(EJ \left(\frac{d^4 y}{dx^4} \right) - m\omega^2 y \right) \cos(\omega t) = 0 \quad (3.6)$$

Vì thành phần trong ngoặc không phụ thuộc t nên hệ (3.6) được giản hóa như sau

$$EJ \left(\frac{d^4 y}{dx^4} \right) - m\omega^2 y = 0 \quad (3.7)$$

Hai hàm $y = y(x)$ là hàm của tọa độ x . Phương trình (3.7) không phụ thuộc vào biến t , là phương trình vi phân tuyến tính có hệ số không đổi, đây chính là phương trình dao động của thanh theo lý thuyết dầm Euler-Bernoulli, giải phương trình này tìm được độ võng y .

Phương pháp chung để giải (3.7) là giải phương trình đặc trưng của chúng và xây dựng nghiệm y trên cơ sở các nghiệm (trị riêng) của các phương trình đặc trưng. Tuy nhiên, ta sẽ dùng phương pháp chuyển vị cưỡng bức để giải.

Khi xây dựng bài toán theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, có thể dùng các đại lượng biến phân (chuyển vị ảo và biến dạng ảo) không phụ thuộc thời gian

$$\theta_x = \frac{\partial y}{\partial x_x}, \quad \chi_x = -\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad (3.8)$$

Kí tự x ở chân các đại lượng để chỉ rằng đại lượng chỉ phụ thuộc x .

Bài toán dao động tự do của thanh được dẫn về bài toán tìm cực tiểu của lượng cưỡng bức chuyển động tại *một thời điểm t bất kì*:

$$Z = \int_0^l M[\chi_x] dx + \int_0^l f_m[y] dx \rightarrow \min (3.9)$$

Đại lượng trong ngoặc vuông của phiếm hàm (3.9) là đại lượng biến phân.

Từ điều kiện cực tiểu

$$\delta Z = \int_0^l M \delta[\chi] dx + \int_0^l f_m \delta[W] dx = 0 \quad (3.10)$$

và dùng phép tính biến phân sẽ nhận được lại hai phương trình (3.6) và vì bài toán tuyến tính theo t nên lại có hệ (3.7).

Như vậy, bài toán dao động tự do của thanh bằng cách dùng biến đổi (3.5) dẫn về giải (3.7) là hệ không chứa biến t . Nghiệm $y \neq 0$ (nghiệm không tầm thường) của (3.7) tùy thuộc vào các thông số m , EJ , ω và chiều dài thanh. Thông thường, các thông số m , EJ và chiều dài thanh đã biết nên tần số là hàm của các đại lượng này.

Sử dụng các đại lượng không chứa biến thời gian t , bài toán (3.9) có dạng

$$Z = \int_0^l M_x[\chi_x] dx + \int_0^l f_x[y] dx \rightarrow \min \quad (3.11)$$

ở đây $M_x = EJ\varphi_x, f_x = -m\omega^2 y$ (3.12)

Để giải bài toán (3.11) ta dùng phương pháp chuyển vị cưỡng bức bằng cách cho một điểm nào đó của thanh, ví dụ điểm x_1 , chuyển vị cưỡng bức y_0 .

$$g_1 = y(x_1) - y_0 = 0 \quad (3.13)$$

Bài toán cực tiểu (3.11) với ràng buộc (3.13) là bài toán tĩnh tính thanh chịu chuyển vị cưỡng bức tại điểm x_1 , có ẩn là tần số ω cho nên có thể được gọi là bài toán dao động tự do của thanh. Viết phiếm hàm Lagrange mở rộng F của (3.11) và (3.13), ta có điều kiện cực trị

$$\delta F = \int_0^l M_x \delta \left[-\frac{d^2 y}{dx^2} \right] dx + \int_0^l f_x \delta [y] dx + \delta [\lambda \cdot g_1] = 0 \quad (3.14)$$

λ trong (3.14) là thừa số Lagrange và là ẩn mới của bài toán. Từ (3.14) nhận được hai phương trình cân bằng (hai phương trình Euler) :

$$EJ \left(\frac{d^4 y}{dx^4} \right) - m\omega^2 y = \begin{cases} -\lambda, & x = x_1 \\ 0, & x \neq x_1 \end{cases} \quad (3.15)$$

cùng với phương trình (3.13). Hệ phương trình (3.15) có vế phải là λ .

Xét về cơ học, λ có thứ nguyên là lực và đó là lực giữ để chuyển vị tại điểm $x=x_1$ của thanh bằng chuyển vị cưỡng bức y_0 (phương trình (3.13)). Lực giữ do ta đưa vào nên phải bằng không. Về toán học thì phương trình dao động là phương trình không có vế phải (hệ (3.7)) cho nên λ cũng phải bằng không. Vì vậy ta có

$$\lambda = 0 \quad (3.16)$$

Nghiệm của phương trình (3.16) cũng là nghiệm của vế trái (3.15) hoặc của hệ (3.7). Như vậy, phương trình (3.16) là phương trình đa thức xác định trị riêng, khi hàm $y(x)$ thỏa mãn các điều kiện biên thì nó là phương trình đa

thức xác định tần số riêng của dao động tự do của thanh. Trong trường hợp này λ là hàm của ω , $\lambda = \lambda(\omega)$.

Bài toán dao động tự do của thanh được đưa về bài toán (3.11) với ràng buộc (3.13) và sẽ được giải trực tiếp trên phiếm hàm Lagrange mở rộng để tìm được hàm $\lambda(\omega)$, giải phương trình (3.16) sẽ nhận được các tần số riêng. Chú ý, λ là thừa số Lagrange của ràng buộc (3.13).

Ta đang xét trường hợp khối lượng phân bố đều trên thanh. Bài toán có vô số bậc tự do nên có vô số tần số riêng. Chúng tạo thành *dải tần số riêng dao động* của thanh có biên dưới là tần số cơ bản và biên trên là vô cùng lớn, $\omega \rightarrow \infty$. Các thanh có liên kết khác nhau sẽ dao động với tần số riêng khác nhau. Tần số riêng dao động tự do của thanh có các điều kiện liên kết khác nhau được tính theo phương pháp chuyển vị cưỡng bức được trình bày dưới đây.

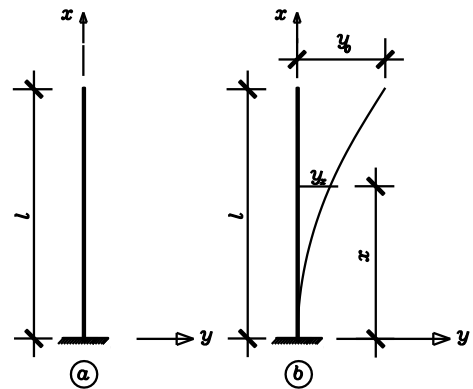
3.2. Tính toán dao động tự do của thanh - lời giải bán giải tích

Ví dụ 3.2.1. Thanh ngàm-tự do

Xét thanh thẳng có liên kết một đầu ngàm, đầu kia tự do, tiết diện không đổi, chiều dài l , độ cứng uốn EJ (hình 3.1).

Ta tìm hàm độ võng của thanh dưới dạng đa thức :

$$y(x, t) = y(x) \cos(\omega t) ,$$



Hình 3.1. Thanh ngàm - Tự do

$$y(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + a_7 x^7 + a_8 x^8 + a_9 x^9 \quad (a)$$

Các hệ số a_i ($i=1:9$), là các hệ số cần tìm. Dựa vào biểu thức (3.1) hoặc (3.11) tính lực quán tính

$$f_m = m \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial t^2} = -m\omega^2 y(x) = -EJ \frac{m\omega^2}{EJ} y(x) = -EJ \cdot k_1^2 y(x) \quad (b)$$

$$k_1^2 = \frac{m\omega^2}{EJ} \quad \omega = k_1 \sqrt{\frac{EJ}{m}} \quad (c)$$

Sau này thay cho tần số ω ta sẽ dùng k_1 để tính lực quán tính (biểu thức (b)). Biết được trị số k_1 thì tính được tần số ω theo biểu thức (c).

Biến dạng trượt, góc xoay do momen uốn, biến dạng uốn và nội lực momen uốn của thanh xác định theo các biểu thức (3.11).

Theo biểu thức (3.12) ta xây dựng bài toán dao động tự do của thanh như sau

$$Z = \int_0^l M_x \left[-\frac{d^2 y(x)}{dx^2} \right] dx + \int_0^l f_x [y(x)] dx \rightarrow \min \quad (d)$$

Đại lượng $\cos(\omega t)$ là thừa số chung của (d) nên đã giản ước. Bài toán tìm cực trị (d) phải thỏa mãn các điều kiện sau

- Góc xoay (do momen uốn) tại ngàm ($x=0$) bằng không

$$g1 = \text{subs}(\theta, x, 0) = \text{subs}\left(\frac{dy(x)}{dx}, x, 0\right) = 0 \quad (e)$$

- Momen uốn (hoặc biến dạng uốn) tại đầu tự do ($x=l$) bằng không

$$g2 = \text{subs}\left(-\frac{d^2 y(x)}{dx^2}, x, l\right) = 0 \quad (f)$$

- Ta cho đầu tự do ($x=l$) có chuyển vị cưỡng bức bằng y_0

$$g3 = \text{subs}(y(x), x, l) - y_0 = 0 \quad (h)$$

(hàm $\text{subs}(\text{biểuthức}, x, x_1)$ có nghĩa là thay biến x trong *biểu thức* bằng trị x_1).

Bài toán (d) với các ràng buộc (e),(f),(g) và (h) được đưa về bài toán cực trị không ràng buộc bằng cách viết phiếm hàm Lagrange mở rộng

$$F = Z + Z1 \rightarrow \min \quad (i)$$

$$Z1 = \lambda_1 \cdot g1 + \lambda_2 \cdot g2 + \lambda_3 \cdot g3 + \lambda \cdot g4$$

Các hệ số $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda$ được gọi là các thừa số Lagrange và là 4 ẩn mới của bài toán. Tổng ẩn bài toán bao gồm $a_i (i=1:9)$, và 3 thừa số Lagrange sẽ là 13 ẩn được đặt trong vector ẩn $S(i), i=1:13$. Bài toán (i) là bài toán tối ưu thông số và điều kiện cực trị (3.14) bây giờ được viết như sau

$$\delta F = \int_0^l M \frac{\partial}{\partial s_i} \left[-\frac{d^2 y(x)}{dx^2} \right] dx + \int_0^l f_m \frac{\partial}{\partial s_i} [y(x)] dx + \frac{\partial}{\partial s_i} [Z1] = 0 \quad (i = 1:13) \quad (j)$$

Hàm $y(x)$ và $Q(x)$ trong (j) xác định theo (a) còn M theo (3.11). Thực hiện các phép tính của (j) sẽ nhận được 13 phương trình đại số bậc nhất để tìm được 13 thông số của bài toán. Thông số λ liên quan đến chuyển vị cưỡng bức y_0 có dạng sau:

$$\lambda = 12626 \times 10^{-3} / l^3 e_j y_0 (0.25628 \times 10^{75} l^{20} k_1^{10} - 2.1081 \times 10^{91} - 1.8661 \times 10^{70} l^{24} k_1^{12} + 3.8162 \times 10^{44} l^{36} k_1^{18} - 4.1532 \times 10^{87} k_1^4 l^8 + 1.7564 \times 10^{90} k_1^2 l^4 + 3.6456 \times 10^{64} l^{28} k_1^{14} - 1.2506 \times 10^{55} l^{32} k_1^{16} + 1.3382 \times 10^{84} l^{12} k_1^6 - 1.0616 \times 10^{80} l^{16} k_1^8) = 0 \quad (k)$$

Biểu thức (k) chỉ lấy đến 5 số sau dấu chấm và là đa thức bậc 18 đối với k_1 .

Giải phương trình (k) theo k_1 : $\lambda(k_1) = 0$

Nhận được 18 trị k_1 . ở đây đưa ra 5 trị k_1 .

$$k_1 = 3.5160/l^2; 22.0344/l^2; 61.6968/l^2; 121.1579/l^2; 201.3142/l^2$$

Biết được k_1 , dựa vào biểu thức (c) để tính tần số riêng dao động tự do của thanh.

Tương ứng với 18 nghiệm k_1 ta xác định được 18 tần số dao động riêng

của hệ theo công thức $\omega = k_1 \sqrt{\frac{EJ}{m}}$, ở đây

chỉ đưa ra 3 tần số dao động riêng cơ bản đầu tiên ứng với 3 nghiệm k_1 đầu tiên là:

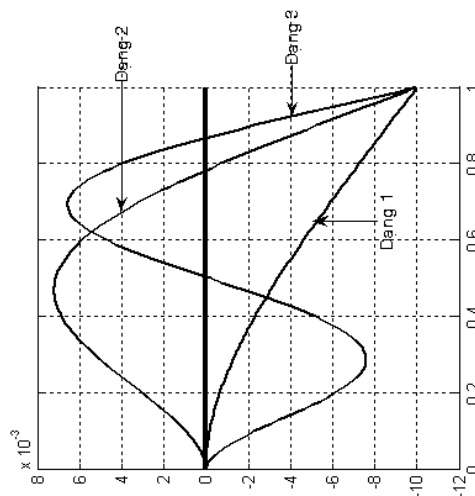
$$\omega_1 = k_{11} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 3,5160 \sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$$

$$\omega_2 = k_{12} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 22,0344 \sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$$

$$\omega_3 = k_{13} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 61,6968 \sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$$

So với lời giải không xét biên dạng trượt, 3 trị dương đầu tiên trong số 9 trị dương của k_1 có thể được xem là chính xác, trị thứ 4 và 5 có sai số nhỏ thua 1%, trị thứ sáu có sai số nhỏ thua 3%... Muốn có nhiều trị riêng chính xác hơn thì sử dụng các đa thức bậc cao hơn khi xấp xỉ các hàm y và Q hoặc chia thanh thành nhiều đoạn tương tự như tính theo phân tử hữu hạn.

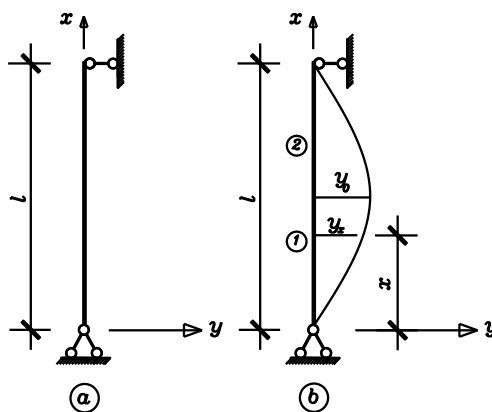
Khi giải hệ phương trình (j) ta cũng nhận được các thông số a_i ($i=1:9$) và b_j ($j=0:9$) và chúng đều là hàm của k_1 . Đưa các trị k_1 tìm được ở trên vào các thông số này và sử dụng các biểu thức (a) ta có các dạng dao động chính $y(x)$ của thanh và các dạng hàm lực cắt Q tương ứng (hình 3.2).



Hình 3.2. Ba dạng dao động riêng đầu tiên

3.2.2. Thanh hai đầu khớp

Xác định tần số và dạng dao động riêng của thanh hai đầu khớp. Thanh có khối lượng phân bố đều, tiết diện không đổi và có độ cứng uốn EJ (Hình 3.3). Nếu như tại điểm ($x=l_1$) cho lệch một đoạn y_0 nào đó thì thanh sẽ bị cong đi theo đường đàn hồi $y_1(x)$ và $y_2(x)$ như (hình 3.3b) do tác dụng của lực mômen uốn Py_1 và Py_2 .



Hình 3.3. Thanh hai đầu khớp

Gọi M_{1x} , M_{2x} là mômen uốn lần lượt trong đoạn 1 và 2 lúc này trạng thái cân bằng của thanh là trạng thái cân bằng nén uốn (hình 3.2b). Viết biểu thức đường độ võng và đường lực cắt cho các đoạn thanh dưới dạng đa thức như sau:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \sum_{i=1}^9 a_i x^i = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + a_7 x^7 + a_8 x^8 + a_9 x^9; \\ y_2 &= \sum_{i=0}^9 b_i x^i = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + b_5 x^5 + b_6 x^6 + b_7 x^7 + b_8 x^8 + b_9 x^9; \end{aligned} \right\} \text{(a)}$$

trong đó a_i ($i=1:9$), b_j ($j=0:9$), là các hệ số cần xác định.

Dựa vào biểu thức (3.1) tính lực quán tính trong từng đoạn thanh là

$$\left. \begin{aligned} f_{m1} &= m \frac{\partial^2 y_1(x,t)}{\partial t^2} = -m\omega^2 y_1(x) = -EJ \frac{m\omega^2}{EJ} y_1(x) = -EJk_1^2 y_1(x) \\ f_{m2} &= m \frac{\partial^2 y_2(x,t)}{\partial t^2} = -m\omega^2 y_2(x) = -EJ \frac{m\omega^2}{EJ} y_2(x) = -EJk_1^2 y_2(x) \end{aligned} \right\} \text{(b)}$$

Trong đó:
$$k_1^2 = \frac{m\omega^2}{EJ} \quad \omega = k_1 \sqrt{\frac{EJ}{m}} \quad \text{(c)}$$

Sau này thay cho tần số ω ta sẽ dùng k_1 để tính lực quán tính (biểu thức (b)). Biết được trị số k_1 thì tính được tần số ω theo biểu thức (c).

Biến dạng uốn ử, góc xoay do momen uốn ố và nội lực momen xác định theo các biểu thức sau

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \frac{\partial y_1}{\partial x} & \chi_{1x} &= -\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} & M_{x1} &= -EJ\chi_{1x} \\ \theta_2 &= \frac{\partial y_2}{\partial x} & \chi_{2x} &= -\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} & M_{x2} &= -EJ\chi_{2x} \end{aligned} \right\} \text{(d)}$$

Theo biểu thức (3.8) ta xây dựng bài toán dao động tự do của thanh như sau

$$Z = \int_0^{l_1} [M_{x1}](\chi_{1x}) dx + \int_0^{l_2} [M_{x2}](\chi_{2x}) dx + \int_0^{l_1} [EJk_1^2] y_1 dx + \int_0^{l_2} [EJk_1^2] y_2 dx \rightarrow \min \text{ (e)}$$

Bài toán tìm cực trị của (e) phải thoả mãn 6 điều kiện ràng buộc sau

- Mômen uốn tại đầu dưới đoạn 1 (đầu khớp, tại $x=0$) bằng không

$$g_1 = \left(-\frac{d^2 y_1}{dx^2} \right)_{x=0} \quad \text{(f)}$$

- Chuyển vị tại cuối đoạn 1 (tại $x=l_1$) bằng chuyển vị tại đầu đoạn 2

$$g_2 = y_1|_{x=l_1} - y_2|_{x=0} \quad \text{(g)}$$

- Góc xoay tại cuối đoạn 1 (tại $x=l_1$) bằng góc xoay tại đầu đoạn 2

$$g_3 = \left(\frac{dy_1}{dx} \right) \Big|_{x=l_1} - \left(\frac{dy_2}{dx} \right) \Big|_{x=0} \quad (h)$$

- Chuyển vị tại cuối đoạn 2(tại $x=l_2$) bằng không

$$g_4 = y_2 \Big|_{x=l_2} = 0 \quad (i)$$

- Mômen uốn tại đầu trên đoạn 2(đầu khớp, tại $x=l_2$) bằng không

$$g_5 = \left(- \frac{d^2 y_2}{dx^2} \right) \Big|_{x=l_2} \quad (j)$$

- Tại điểm cuối đoạn 1($x=l_1$) ta cho chuyển vị cưỡng bức bằng y_0

$$g_6 = y_1 \Big|_{x=l_1} - y_0 \quad (k)$$

Ta đưa bài toán tìm cực trị của (e) với 6 điều kiện ràng buộc (f), (g), (h), (i), (j) và (k) về bài toán cực trị không có ràng buộc bằng cách đưa thừa số Lagrange vào phiếm hàm mở rộng như sau:

$$F = Z + Z1 \rightarrow \min \quad (l)$$

$$Z1 = \sum_{k=1}^6 g_k \lambda_k$$

Các hệ số $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ được gọi là các thừa số Lagrange và là 6 ẩn mới của bài toán. Tổng ẩn bài toán bao gồm a_i ($i=1:9$), b_j ($j=0:9$), và 6 thừa số Lagrange sẽ là 25 ẩn được đặt trong vector ẩn $S(i)$, $i=1:25$. Bài toán (l) là bài toán tối ưu thông số và điều kiện cực trị (3.9) bây giờ được viết

$$\left. \begin{aligned} h_i &= \int_0^{l_1} [M_{x1}] \frac{\partial}{\partial a_i} (\chi_{x1}) dx + \int_0^{l_1} [f_{m1}] \frac{\partial}{\partial a_i} (y_1) dx + \frac{\partial}{\partial a_i} (Z1) = 0; & (i = 1 : 9) \\ u_i &= \int_0^{l_2} [M_{x2}] \frac{\partial}{\partial b_i} (\chi_{x2}) dx + \int_0^{l_2} [f_{m2}] \frac{\partial}{\partial b_i} (y_2) dx + \frac{\partial}{\partial b_i} (Z1) = 0; & (i = 0 : 9) \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_k} (g_k \lambda_k) &= 0; & k = 1 : 6. \end{aligned} \right\} \quad (m)$$

Từ điều kiện cực trị (m) của phiếm hàm mở rộng F ta sẽ nhận được 44 phương trình đại số tuyến tính để xác định 25 thông số của bài toán. Có thể giải bài toán trên bằng cách sử dụng phần mềm Symbolic của Matlab. Khi giải

phương trình xong thấy rằng các thông số $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9, b_0, b_1, b_2, \dots, b_7$, và $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$ đều là hàm của k_1 . Lưu ý rằng λ_6 có thứ nguyên là lực và nó là lực giữ để có chuyển vị cưỡng bức y_0 tại vị trí cuối đoạn 1, đầu đoạn 2. Lực giữ phải bằng không cho nên giải phương trình $\lambda_6(k_1) = 0$ sẽ cho ta các k_1 .

Từ $k_1 = \sqrt{\frac{m\omega^2}{EJ}}$ ta sẽ tìm được các tần số dao động riêng ω_i cần tìm. Có thể

nói $\lambda_6(k_1) = 0$ cũng là đa thức đặc trưng của bài toán.

$$\begin{aligned} \lambda_6(k_1) = & .10101 \times 10^{-1} (.50560 \times 10^{91} k_1^{34} 1^{68} - .43802 \times 10^{103} k_1^{32} 1^{64} + .70097 \times 10^{114} k_1^{30} 1^{60} - \\ & .56956 \times 10^{124} k_1^{28} 1^{56} + .15514 \times 10^{134} k_1^{26} 1^{52} - .16022 \times 10^{143} k_1^{24} 1^{48} + .61290 \times 10^{151} k_1^{22} 1^{44} - \\ & .82135 \times 10^{159} k_1^{20} 1^{40} + .33561 \times 10^{167} k_1^{18} 1^{36} - .33163 \times 10^{174} k_1^{16} 1^{32} + .64742 \times 10^{180} 1^{28} k_1^{14} - \\ & .30787 \times 10^{186} k_1^{12} 1^{24} + .50809 \times 10^{191} k_1^{10} 1^{20} - .30665 \times 10^{196} k_1^8 1^{16} + .65148 \times 10^{200} k_1^6 1^{12} - \\ & .41296 \times 10^{204} k_1^4 1^8 + .52715 \times 10^{207} k_1^2 1^4 - .47491 \times 10^{209}) = 0 \end{aligned} \quad (n)$$

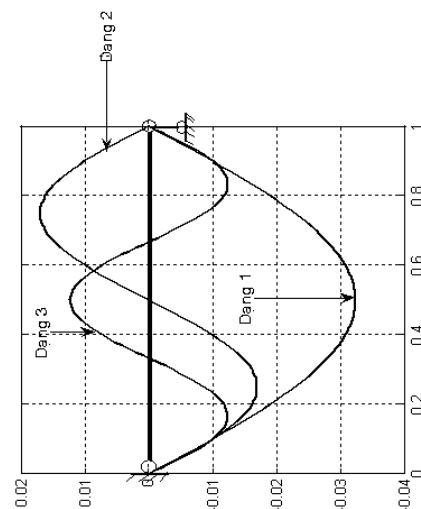
Giải phương trình $\lambda_6(k_1) = 0$ theo k_1 ta nhận được 25 nghiệm k_1 và từ đó xác định được 25 tần số dao động riêng của hệ, ở đây chỉ đưa ra 3 tần số dao động riêng cơ bản là:

$$\omega_1 = k_{11} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 9,8695 \sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$$

$$\omega_2 = k_{12} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 39,4782 \sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$$

$$\omega_3 = k_{13} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 88,8300 \sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$$

Khi giải hệ phương trình (m) ta cũng nhận được các thông số a_i ($i=1:9$) và b_j ($j=0:9$) và chúng đều là hàm của k_1 . Đưa các trị k_1 tìm được ở trên vào các thông số này và sử dụng các biểu thức (a) ta có các dạng dao động chính $y(x)$ của thanh (hình 3.4).

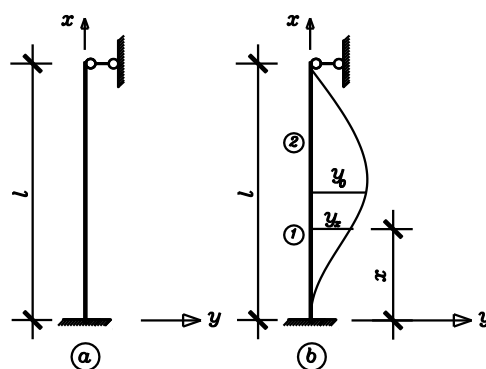


Hình 3.4. Dạng dao động tự do của thanh hai đầu khớp

3.2.3. Thanh đầu ngàm - đầu khớp

Xác định tần số và dạng dao động riêng của thanh. Thanh có khối lượng phân bố đều, tiết diện không đổi và có độ cứng uốn EJ.

Nếu như tại điểm ($x=l_1$) cho lệch một đoạn y_0 nào đó thì thanh sẽ bị cong đi theo đường đàn hồi $y_1(x)$ và $y_2(x)$ như (hình 3.4b) do tác dụng của lực mômen uốn $P(y_1)$ và $P(y_2)$. Gọi M_{1x} , M_{2x} là mômen uốn lần lượt trong



Hình 3.4. Thanh ngàm - khớp

đoạn 1 và 2 lúc này trạng thái cân bằng của thanh là trạng thái cân bằng nén uốn (hình 3.4b). Viết biểu thức đường độ võng cho các đoạn thanh dưới dạng đa thức như sau:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \sum_{i=1}^9 a_i x^i = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + a_7 x^7 + a_8 x^8 + a_9 x^9; \\ y_2 &= \sum_{i=0}^9 b_i x^i = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + b_5 x^5 + b_6 x^6 + b_7 x^7 + b_8 x^8 + b_9 x^9; (0 \leq x \leq l_2) \end{aligned} \right\} \text{(a)}$$

trong đó a_i ($i=1:9$), b_j ($j=0:9$), là các hệ số cần xác định. Dựa vào biểu thức (3.1) tính lực quán tính trong từng đoạn thanh là

$$\left. \begin{aligned} f_{m1} &= m \frac{\partial^2 y_1(x,t)}{\partial t^2} = -m\omega^2 y_1(x) = -EJ \frac{m\omega^2}{EJ} y_1(x) = -EJk_1^2 y_1(x) \\ f_{m2} &= m \frac{\partial^2 y_2(x,t)}{\partial t^2} = -m\omega^2 y_2(x) = -EJ \frac{m\omega^2}{EJ} y_2(x) = -EJk_1^2 y_2(x) \end{aligned} \right\} \text{(b)}$$

$$\text{Trong đó: } k_1^2 = \frac{m\omega^2}{EJ} \quad \omega = k_1 \sqrt{\frac{EJ}{m}} \quad \text{(c)}$$

Sau này thay cho tần số ω ta sẽ dùng k_1 để tính lực quán tính (biểu thức (b)). Biết được trị số k_1 thì tính được tần số ω theo biểu thức (c).

Biến dạng trượt ó, biến dạng uốn ỡ , góc xoay do momen uốn ố và nội lực momen xác định theo các biểu thức sau

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \frac{\partial y_1}{\partial x} & \chi_{1x} &= -\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} & M_{x1} &= -EJ\chi_{1x} \\ \theta_2 &= \frac{\partial y_2}{\partial x} & \chi_{2x} &= -\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} & M_{x2} &= -EJ\chi_{2x} \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

Theo biểu thức (3.8) ta xây dựng bài toán dao động tự do của thanh như sau

$$Z = \int_0^{l_1} [M_{x1}](\chi_{1x}) dx + \int_0^{l_2} [M_{x2}](\chi_{2x}) dx + \int_0^{l_1} [EJk_1^2] y_1 dx + \int_0^{l_2} [EJk_1^2] y_2 dx \rightarrow \min \quad (e)$$

Bài toán tìm cực trị của (e) phải thoả mãn 6 điều kiện ràng buộc sau

- Góc xoay tại đầu ngàm (tại $x=0$) bằng không

$$g_1 = \left(\frac{dy_1}{dx} \right) \Big|_{x=0} \quad (f)$$

- Chuyển vị tại cuối đoạn 1 (tại $x=l_1$) bằng chuyển vị tại đầu đoạn 2

$$g_2 = y_1 \Big|_{x=l_1} - y_2 \Big|_{x=0} \quad (g)$$

- Góc xoay tại cuối đoạn 1 (tại $x=l_1$) bằng góc xoay tại đầu đoạn 2

$$g_3 = \left(\frac{dy_1}{dx_1} \right) \Big|_{x=l_1} - \left(\frac{dy_2}{dx} \right) \Big|_{x=0} \quad (h)$$

- Chuyển vị tại cuối đoạn 2 (tại $x=l_2$) bằng không

$$g_4 = y_2 \Big|_{x=l_2} = 0 \quad (i)$$

- Mômen uốn tại đầu trên đoạn 2 (đầu khớp, tại $x=l_2$) bằng không

$$g_5 = \left(-\frac{d^2 y_2}{dx^2} \right) \Big|_{x=l_2} \quad (j)$$

- Tại điểm cuối đoạn 1 ($x=l_1$) ta cho chuyển vị cưỡng bức bằng y_0

$$g_6 = y_1 \Big|_{x=l_1} - y_0 \quad (k)$$

Ta đưa bài toán tìm cực trị của (e) với 6 điều kiện ràng buộc (f), (g), (h), (i), (j) và (k) về bài toán cực trị không có ràng buộc bằng cách đưa thừa số Lagrange vào phiếm hàm mở rộng như sau:

$$F = Z + Z1 \rightarrow \min \quad (1)$$

$$Z1 = \sum_{k=1}^6 g_k \lambda_k$$

Các hệ số $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ được gọi là các thừa số Lagrange và là 6 ẩn mới của bài toán. Tổng ẩn bài toán bao gồm a_i ($i=1:9$), b_j ($j=0:9$), và 6 thừa số Lagrange sẽ là 25 ẩn được đặt trong vector ẩn $S(i)$, $i=1:25$. Bài toán (1) là bài toán tối ưu thông số và điều kiện cực trị (3.9) bây giờ được viết như sau

$$\left. \begin{aligned} h_i &= \int_0^{l_1} [M_{x1}] \frac{\partial}{\partial a_i} (\chi_{x1}) dx + \int_0^{l_1} [f_{m1}] \frac{\partial}{\partial a_i} (y_1) dx + \frac{\partial}{\partial a_i} (Z1) = 0; & (i = 1:9) \\ u_i &= \int_0^{l_2} [M_{x2}] \frac{\partial}{\partial b_i} (\chi_{x2}) dx + \int_0^{l_2} [f_{m2}] \frac{\partial}{\partial b_i} (y_2) dx + \frac{\partial}{\partial b_i} (Z1) = 0; & (i = 1:9) \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_k} (g_k \lambda_k) &= 0; & k = 1:6. \end{aligned} \right\} \quad (m)$$

Từ điều kiện cực trị (m) của phiếm hàm mở rộng F ta sẽ nhận được 25 phương trình đại số tuyến tính để xác định 25 thông số của bài toán. Có thể giải bài toán trên bằng cách sử dụng phần mềm Symbolic của Matlab. Khi giải phương trình xong thấy rằng các thông số $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9, b_0, b_1, b_2, \dots, b_7$, và $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$ đều là hàm của k_1 . Lưu ý rằng λ_6 có thứ nguyên là lực và nó là lực giữ để có chuyển vị cưỡng bức y_0 tại cuối đoạn l_1 . Lực giữ phải bằng không cho nên giải phương trình $\lambda_6(k_1) = 0$ sẽ cho ta các k_1 .

Từ $k_1 = \sqrt{\frac{m\omega^2}{EJ}}$ ta sẽ tìm được các tần số dao động riêng ω_i cần tìm. Có thể

nói $\lambda_6(k_1) = 0$ cũng là đa thức đặc trưng của bài toán.

Giải phương trình $\lambda_1(k_1) = 0$ theo k_1 ta nhận được 25 nghiệm k_1 và từ đó xác định được 25 tần số dao động riêng của hệ, ở đây chỉ

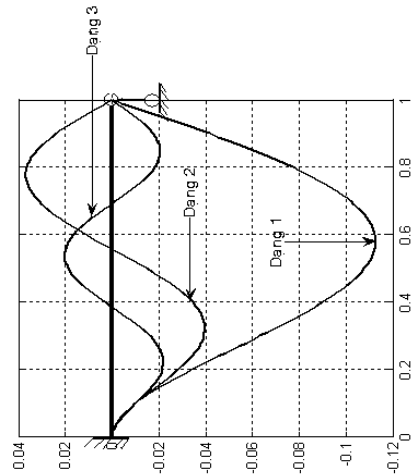
$$\omega_1 = k_{11} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 15,418 \sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$$

$$\omega_2 = k_{12} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 49,964 \sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$$

đưa ra 3 tần số dao động riêng cơ bản là:

$$\omega_3 = k_{13} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 104,266 \sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$$

Khi giải hệ phương trình (m) ta cũng nhận được các thông số a_i ($i=1:9$) và b_j ($j=0:9$) và chúng đều là hàm của k_1 . Đưa các trị k_1 tìm được ở trên vào các thông số này và sử dụng các biểu thức (a) ta có các dạng dao động chính $y(x)$ của thanh (hình 3.5).



Hình 3.5. Dạng dao động tự do của thanh đầu ngàm – đầu khớp

3.2.4. Thanh hai đầu ngàm

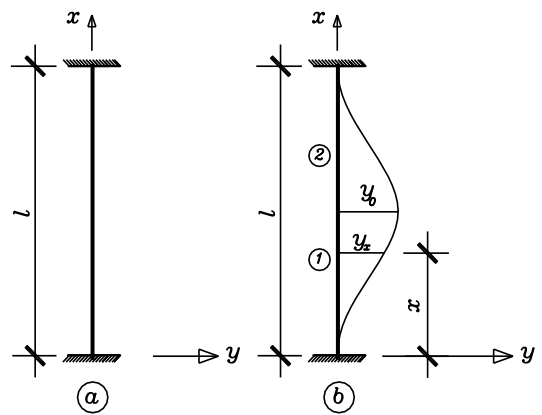
Xác định tần số và dạng dao động riêng của thanh hai đầu ngàm. Thanh có khối lượng phân bố đều, tiết diện không đổi và có độ cứng uốn EJ .

Chia thanh thành hai đoạn, cho thanh một chuyển vị y_0 tại điểm bất kỳ trên thanh thì khi ấy độ võng tương ứng với từng đoạn là $y_1(x)$, $y_2(x)$ như (hình 3.6).

Giả sử đường độ

võng của từng đoạn thanh có dạng đa thức bậc 9.

Xây dựng bài toán tương tự như trường hợp thanh đầu ngàm - đầu khớp, với 6 điều kiện ràng buộc (góc xoay tại ngàm dưới bằng không, chuyển vị tại



Hình 3.6. Thanh ngàm – ngàm

cuối đoạn 1 bằng chuyển vị tại đầu đoạn 2, góc xoay tại cuối đoạn một bằng góc xoay tại đầu đoạn 2, chuyển vị tại cuối đoạn 2 bằng không, góc xoay tại cuối đoạn 2 bằng không, chuyển vị cưỡng bức tại cuối đoạn 1 bằng y_0) và giải ra ta nhận được đa thức đặc trưng của bài toán là $\lambda_6(k_1)=0$.

Giải phương trình $\lambda_6(k_1)=0$ sẽ cho ta các k_1 .

Từ $k_1 = \sqrt{\frac{m\omega^2}{EJ}}$ ta sẽ tìm được các tần số dao động riêng ω_i cần tìm.

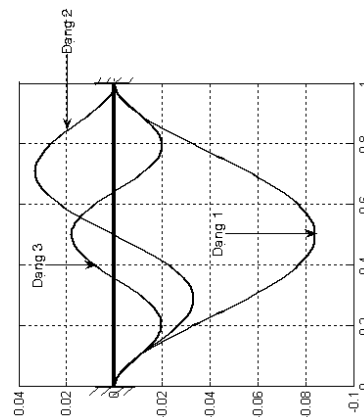
Giải phương trình $\lambda_6(k_1)=0$ theo k_1 ta nhận được 25 nghiệm k_1 và từ đó xác định được 25 tần số dao động riêng của hệ, ở đây chỉ đưa ra 3 tần số dao động riêng cơ bản là:

$$\omega_1 = k_{11} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 22,373 \sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$$

$$\omega_2 = k_{12} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 61,672 \sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$$

$$\omega_3 = k_{13} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 120,941 \sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$$

Dạng dao động riêng của đường đàn hồi (véc tơ riêng) tương ứng với 3 tần số dao động riêng cơ bản (3 trị riêng chính xác) đầu tiên như hình 3.7.



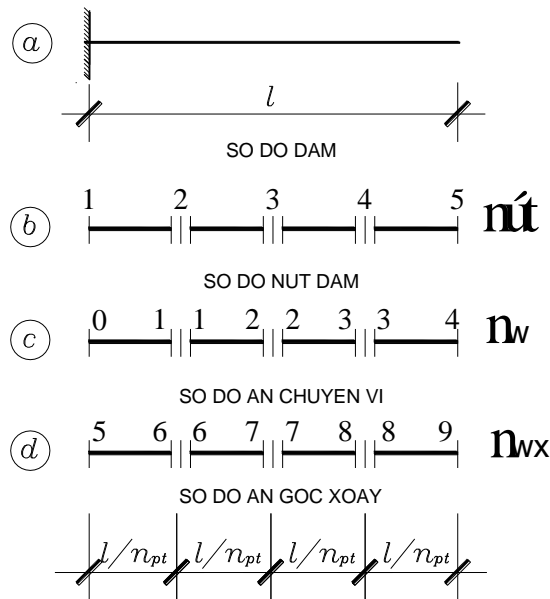
Hình 3.7. Dạng dao động tự do của thanh hai đầu ngàm

3.3. Tính toán dao động tự do của thanh - lời giải số theo phương pháp phần tử hữu hạn

Ví dụ 3.3.1: Dầm đầu ngàm đầu tự do (hình 3.8)

Xác định tần số dao động riêng của dầm chiều dài nhịp l , độ cứng uốn EJ , khối lượng phân bố đều trên toàn dầm, hình 3.8a.

Rời rạc hóa kết cấu dầm ra thành n_{pt} phần tử. Các nút của phần tử phải trùng với vị trí đặt khối lượng tập trung, hay vị trí thay đổi tiết diện, chiều dài các phần tử có thể khác nhau.



Hình 3.8. Dầm đầu ngàm - đầu tự do

Mỗi phần tử có 4 ẩn $v_1, v_2, \theta_1, \theta_2$ vậy nếu n_{pt} phần tử rời rạc thì tổng cộng có $4 \times n_{pt}$ ẩn. Nhưng vì cần đảm bảo liên tục giữa các chuyển vị là chuyển vị của nút cuối phần tử thứ e bằng chuyển vị của nút đầu phần tử thứ $(e + 1)$ nên số ẩn của thanh sẽ nhỏ hơn $4 \times n_{pt}$. Đối với bài toán không xét biến dạng trượt ngang khi giải ta cần đảm bảo điều kiện liên tục của cả chuyển vị thẳng n_w và điều kiện liên tục về góc xoay. Ví dụ dầm trong (ví dụ 3.3.1a) ta chia thành 4 phần tử (hình 3.1b).

Khi chia dầm thành 4 phần tử thì số nút dầm sẽ là 5, thứ tự từ trái sang phải là [1, 2, 3, 4, 5] (hình 3.1b), số ẩn chuyển vị $n_w=4$, thứ tự từ trái sang phải là [1, 2, 3, 4] (hình 3.1c), ở đây ẩn chuyển vị tại đầu trái ngàm của dầm bằng không, ẩn góc xoay $n_{wx}=5$, thứ tự từ trái sang phải là [5, 6, 7, 8, 9] (hình 3.1d).

Như vậy, tổng cộng số ản là 9 ản < 4x4=16 ản. Gọi ma trận nw là ma trận chuyển vị có kích thước $n_w(n_{pt}, 2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ản số là chuyển vị tại nút của các phần tử (hình 3.1).

$$nw(1,:) = [0 \quad 1]; n_w(2,:) = [1 \quad 2]; n_w(3,:) = [2 \quad 3]; n_w(4,:) = [3 \quad 4]$$

$$nw = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 4]$$

Gọi ma trận nwx là ma trận chuyển vị góc có kích thước $nwx(n_{pt}, 2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ản số là góc xoay tại nút của các phần tử (hình 3.5).

$$nwx(1,:) = [5 \quad 6]; n_{gx}(2,:) = [6 \quad 7]; n_{gx}(3,:) = [7 \quad 8]; n_{gx}(4,:) = [8 \quad 9]$$

$$nwx = [5 \quad 6 \quad 6 \quad 7 \quad 7 \quad 8 \quad 8 \quad 9]$$

Sau khi biết ản số thực của dầm ta có thể xây dựng độ cứng tổng thể của dầm (có rất nhiều cách ghép nối phần tử khác nhau, tùy vào trình độ lập trình của mỗi người nên tác giả không trình bày chi tiết cách ghép nối các phần tử lại để được ma trận độ cứng của toàn dầm và có thể xem trong code mô đun chương trình của tác giả).

Nếu bài toán có nw ản số chuyển vị và nwx ản số góc xoay thì ma trận độ cứng của dầm là K có kích thước $(n \times n)$, $K(n, n)$ với $n=(nw+nwx)$. Như ở ví dụ 3.3.1, $n=9$. Như vậy cuối cùng ta sẽ thiết lập được phương trình:

$$[K]\{\Delta\} = \{F\}$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \text{ số hàng} = n \quad \{\Delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{Bmatrix}$$

là số ản của bài toán

Trong ví dụ 3.3.1 khi chia thành ra thành 4 phần tử, ta có:

- Ma trận độ cứng phần tử $[K_e]$, như sau:

$$[K_e] = \frac{EJ}{l} \begin{bmatrix} \frac{768}{l^2} & -\frac{768}{l^2} & \frac{96}{l} & \frac{96}{l} \\ -\frac{768}{l^2} & \frac{768}{l^2} & -\frac{96}{l} & -\frac{96}{l} \\ \frac{96}{l} & -\frac{96}{l} & 16 & 8 \\ \frac{96}{l} & -\frac{96}{l} & 8 & 16 \end{bmatrix}$$

- Ma trận độ cứng toàn dầm [K]:

Ghép nối các ma trận độ cứng phần tử $[K_e]$ vào hệ tọa độ chung, ta được ma trận độ cứng tổng thể của toàn kết cấu như sau:

$$[K] = \begin{bmatrix} \left(\frac{1536}{l^3} - \frac{k_s^2 l}{4}\right) & -\frac{768}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{96}{l^2} & 0 & \frac{96}{l^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{768}{l^3} & \left(\frac{1536}{l^3} - \frac{k_s^2 l}{4}\right) & -\frac{768}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{96}{l^2} & 0 & \frac{96}{l^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{768}{l^3} & \left(\frac{1536}{l^3} - \frac{k_s^2 l}{4}\right) & -\frac{768}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{96}{l^2} & 0 & \frac{96}{l^2} & 0 & -\frac{768}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{768}{l^3} & \frac{768}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{96}{l^2} & -\frac{96}{l^2} & 0 & \frac{768}{l^3} & 1 \\ -\frac{96}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{16}{l} & \frac{8}{l} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{96}{l^2} & 0 & 0 & \frac{8}{l} & \frac{32}{l} & \frac{8}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{96}{l^2} & 0 & -\frac{96}{l^2} & 0 & 0 & \frac{8}{l} & \frac{32}{l} & \frac{8}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{96}{l^2} & 0 & -\frac{96}{l^2} & 0 & 0 & \frac{8}{l} & \frac{32}{l} & \frac{8}{l} & 0 & -\frac{96}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{96}{l^2} & -\frac{96}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{l} & \frac{16}{l} & 0 & -\frac{96}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{768}{l^3} & \frac{768}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{96}{l^2} & -\frac{96}{l^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Véc tơ lực nút {F}:

$$[F] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Giải phương trình (e) ta nhận được:

$$\{\Delta\} = [K]^{-1} \{F\}$$

Theo ngôn ngữ lập trình Matlab ta có thể viết:

$$\{\Delta\} = [K] \setminus \{F\}$$

Khi chia dầm thành 8 phần tử, kết quả nhận được lamda là hàm của k_5 như sau:

$$\begin{aligned} \text{lamda} = & -256/l^3 * e_j * (2521 * k_5^{14} * l^{28} - \\ & 905908224 * k_5^{12} * l^{24} + 106889924837376 * k_5^{10} * l^{20} - \\ & 4812625891572056064 * k_5^8 * l^{16} + 75240450024177250861056 * k_5^6 * l^{12} - \\ & 307333197125146849528774656 * k_5^4 * l^8 + 17273615680981667499871725 \\ & 1584 * k_5^2 * l^4 - 2707374865917126661204384677888) * y_0 \end{aligned}$$

Biểu thức trên là đa thức bậc 14 đối với k_5 . Giải phương trình trên theo k_5 :

$$\lambda(k_5) = 0$$

Nhận được 14 trị k_5 . ở đây đưa ra 3 trị k_5 đầu tiên như sau:

$$k_5 = 4.0168/l^2; 25.4285/l^2; 71.7831/l^2;$$

Tương ứng với 14 nghiệm k_5 ta xác định được 14 tần số dao động riêng của hệ theo công thức

$$\omega = k_5 \sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

ở đây chỉ đưa ra 3 tần số dao động riêng cơ bản đầu tiên ứng với 3 nghiệm k_5 đầu tiên là:

$$\omega_1 = k_{51} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 4,0168 \sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$$

$$\omega_2 = k_{51} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 25,4285 \sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$$

$$\omega_3 = k_{53} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 71,7831 \sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$$

BẢNG SO SÁNH KẾT QUẢ

Tần số dao động riêng	Lời giải số (PTHH, chia dầm thành 8 phần tử)	Lời giải bán giải tích (đa thức bậc 9)	Lời giải chính xác	Sai số giữa lời giải số và lời giải chính xác %
ω_1	4,0168	3,5160	3,5160	14,24
ω_2	25,4285	22,0344	22,0000	15,58
ω_3	71,7831	61,6968	61,7000	16,34

Ta nhận thấy kết quả theo lời giải bán giải tích khi sử dụng hàm xấp xỉ là đa thức bậc 9 trùng khớp với kết quả chính xác, còn kết quả theo lời giải số (PTHH) có sai số khá lớn, hơn 10% so với kết quả chính xác. Muốn tăng thêm độ chính xác của lời giải số ta chia dầm thành nhiều phần tử hơn, chẳng hạn khi chia dầm thành 32 phần tử ta nhận được kết quả như sau:

BẢNG SO SÁNH KẾT QUẢ

Tần số dao	Lời giải số	Lời giải bán giải tích	Lời giải chính xác	Sai số giữa lời giải số và
------------	-------------	------------------------	--------------------	----------------------------

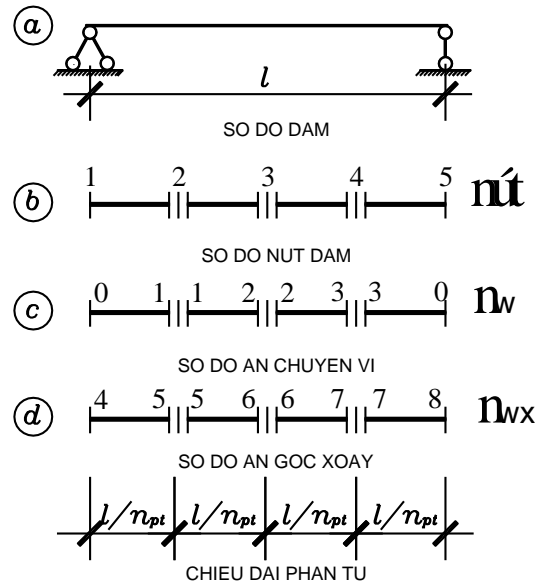
động riêng	(PTHH, chia dầm thành 32 phần tử)	(đa thức bậc 9)		lời giải chính xác %
ω_1	3,6293	3,5160	3,5160	3,22
ω_2	22,7578	22,0344	22,0000	3,44
ω_3	63,7553	61,6968	61,7000	3,33

Như vậy, sai số giữa lời giải số so với lời giải chính xác chỉ là 3,22% đối với tần số dao động cơ bản đầu tiên. Do vậy nếu ta tiếp tục tăng số phần tử lên thì lời giải số sẽ tiệm cận với lời giải chính xác.

Ví dụ 3.3.1: Dầm hai đầu khớp (hình 3.9)

Xác định tần số dao động riêng của dầm chiều dài nhịp l , độ cứng uốn EJ , khối lượng phân bố đều trên toàn dầm, hình 3.9a.

Rời rạc hóa kết cấu dầm ra thành n_{pt} phần tử. Các nút của phần tử phải trùng với vị trí đặt khối lượng tập trung, hay vị trí thay đổi tiết diện, chiều dài các phần tử có thể khác nhau.



Hình 3.9. Dầm hai đầu khớp

Mỗi phần tử có 4 ẩn $v_1, v_2, \theta_1, \theta_2$ vậy nếu n_{pt} phần tử rời rạc thì tổng cộng có $4 \times n_{pt}$ ẩn. Nhưng vì cần đảm bảo liên tục giữa các chuyển vị là chuyển vị của nút cuối phần tử thứ e bằng chuyển vị của nút đầu phần tử thứ $(e + 1)$ nên số ẩn của thanh sẽ nhỏ hơn $4 \times n_{pt}$. Đối với bài toán không xét biến dạng trượt ngang khi giải ta cần đảm bảo điều kiện liên tục của cả chuyển vị thẳng n_w và điều kiện liên tục về góc xoay. Ví dụ dầm trong (ví dụ 3.3.1a) ta chia thành 4 phần tử (hình 3.1b).

Khi chia dầm thành 4 phần tử thì số nút dầm sẽ là 5, thứ tự từ trái sang phải là [1, 2, 3, 4, 5] (hình 3.9b), số ẩn chuyển vị $n_w=3$, thứ tự từ trái sang phải là [1, 2, 3] (hình 3.9c), ở đây ẩn chuyển vị tại đầu trái ngàm và đầu khớp phải của dầm bằng không, ẩn góc xoay $n_{wx}=5$, thứ tự từ trái sang phải là [4, 5, 6, 7, 8] (hình 3.9d).

Như vậy, tổng cộng số ản là 9 ản $< 4 \times 4 = 16$ ản. Gọi ma trận nw là ma trận chuyển vị có kích thước $n_w(n_{pt}, 2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ản số là chuyển vị tại nút của các phần tử (hình 3.9c).

$$nw(1,:) = [0 \ 1]; n_w(2,:) = [1 \ 2]; n_w(3,:) = [2 \ 3]; n_w(4,:) = [3 \ 0]$$

$$nw = [0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 0]$$

Gọi ma trận nwx là ma trận chuyển vị góc có kích thước $nwx(n_{pt}, 2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ản số là góc xoay tại nút của các phần tử (hình 3.9d).

$$nwx(1,:) = [4 \ 5]; n_{gx}(2,:) = [5 \ 6]; n_{gx}(3,:) = [6 \ 7]; n_{gx}(4,:) = [7 \ 8]$$

$$nwx = [4 \ 5 \ 5 \ 6 \ 6 \ 7 \ 7 \ 8]$$

Sau khi biết ản số thực của dầm ta có thể xây dựng độ cứng tổng thể của dầm (có rất nhiều cách ghép nối phần tử khác nhau, tùy vào trình độ lập trình của mỗi người nên tác giả không trình bày chi tiết cách ghép nối các phần tử lại để được ma trận độ cứng của toàn dầm và có thể xem trong code mô đun chương trình của tác giả).

Nếu bài toán có nw ản số chuyển vị và nwx ản số góc xoay thì ma trận độ cứng của dầm là K có kích thước (nxn) , $K(n, n)$ với $n = (nw + nwx)$. Như ở ví dụ 3.3.2, $n=8$. Như vậy cuối cùng ta sẽ thiết lập được phương trình:

$$[K]\{\Delta\} = \{F\}$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \text{ số hàng} = n \quad \{\Delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{Bmatrix}$$

là số ản của bài toán

Trong ví dụ 3.3.2 khi chia thành ra thành 4 phần tử, ta có:

- Ma trận độ cứng phần tử $[K_e]$, như sau:

$$[K_e] = \frac{EJ}{l} \begin{bmatrix} \frac{768}{l^2} & -\frac{768}{l^2} & \frac{96}{l} & \frac{96}{l} \\ \frac{768}{l^2} & \frac{768}{l^2} & -\frac{96}{l} & -\frac{96}{l} \\ \frac{96}{l} & -\frac{96}{l} & 16 & 8 \\ \frac{96}{l} & -\frac{96}{l} & 8 & 16 \end{bmatrix}$$

- Ma trận độ cứng toàn dầm $[K]$:

Ghép nối các ma trận độ cứng phần tử $[K_e]$ vào hệ tọa độ chung, ta được ma trận độ cứng tổng thể của toàn kết cấu như sau:

$$[K] = \begin{bmatrix} \left(\frac{1536}{l^3} - \frac{k_5^2 l}{4}\right) & -\frac{768}{l^3} & 0 & -\frac{96}{l^2} & 0 & \frac{96}{l^2} & 0 & 0 & -\frac{96}{l^2} & 0 & 1 \\ -\frac{768}{l^3} & \left(\frac{1536}{l^3} - \frac{k_5^2 l}{4}\right) & -\frac{768}{l^3} & 0 & -\frac{96}{l^2} & 0 & \frac{96}{l^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{768}{l^3} & \left(\frac{1536}{l^3} - \frac{k_5^2 l}{4}\right) & 0 & 0 & -\frac{96}{l^2} & 0 & \frac{96}{l^2} & 0 & -\frac{96}{l^2} & 0 \\ -\frac{96}{l^2} & 0 & 0 & \frac{16}{l} & \frac{8}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{16}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{96}{l^2} & 0 & \frac{8}{l} & \frac{32}{l} & \frac{8}{l} & 0 & 0 & \frac{8}{l} & 0 & 0 \\ \frac{96}{l^2} & 0 & -\frac{96}{l^2} & 0 & \frac{8}{l} & \frac{32}{l} & \frac{8}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{96}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{l} & \frac{32}{l} & \frac{8}{l} & 0 & -\frac{8}{l} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{96}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{l} & \frac{16}{l} & 0 & -\frac{16}{l} & 0 \\ -\frac{96}{l^2} & 0 & 0 & \frac{16}{l} & \frac{8}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{96}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{l} & -\frac{16}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Véc tơ lực nút $\{F\}$:

$$[F] = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ y_0 \end{Bmatrix}$$

Giải phương trình (e) ta nhận được:

$$\{\Delta\} = [K]^{-1} \{F\}$$

Theo ngôn ngữ lập trình Matlab ta có thể viết:

$$\{\Delta\} = [K] \setminus \{F\}$$

Khi chia dần thành 4 phần tử, kết quả nhận được lamda là hàm của k_5 như sau:

lamda =

$$\frac{1}{4} * e_j * y_0 * (-7247757312 + 80216064 * k_5^2 * l^4 - 59904 * k_5^4 * l^8 + 7 * k_5^6 * l^{12}) / l^3$$

Biểu thức trên là đa thức bậc 4 đối với k_5 . Giải phương trình trên theo k_5 :

$$\lambda(k_5) = 0$$

Nhận được 4 trị k_5 . ở đây đưa ra 3 trị k_5 đầu tiên như sau:

$$k_5 = 9,8665/l^2; 39,1918/l^2; 83,2127/l^2;$$

Tương ứng với 4 nghiệm k_5 ta xác định được 4 tần số dao động riêng của hệ theo công thức

$$\omega = k_5 \sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

ở đây chỉ đưa ra 3 tần số dao động riêng cơ bản đầu tiên ứng với 3 nghiệm k_5 đầu tiên là:

$$\omega_1 = k_{51} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 9,8665 \sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$$

$$\omega_2 = k_{51} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 39,1918 \sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$$

$$\omega_3 = k_{53} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 83,2127 \sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$$

BẢNG SO SÁNH KẾT QUẢ

Tần số dao động riêng	Lời giải số (PTHH, chia dầm thành 8 phần tử)	Lời giải bán giải tích (đa thức bậc 9)	Lời giải chính xác	Sai số giữa lời giải số và lời giải chính xác %
ω_1	9,8665	9,8695	9,8721	-0,056
ω_2	39,1918	39,4782	39,4761	-0,720
ω_3	83,2127	88,8300	88,8306	-6,320

Ta nhận thấy kết quả theo lời giải bán giải tích khi sử dụng hàm xấp xỉ là đa thức bậc 9 gần trùng khớp với kết quả chính xác và kết quả theo lời giải số (PTHH) có sai số rất nhỏ, chưa đến 1% so với kết quả chính xác mặc dù ta mới chia dầm thành 4 phần tử. Như vậy, đối với bài toán dầm hai đầu khớp kết quả hội tụ về kết quả chính xác nhanh hơn rất nhiều so với bài toán dầm đầu ngàm đầu tự do, trong ví dụ 3.3.1.

Kết luận và kiến nghị

Kết luận

Qua kết quả nghiên cứu từ các chương, chương 1 đến chương 3 đối với bài toán dao động của thanh. Tác giả rút ra các kết luận sau:

- Sử dụng thành công phương pháp phân tử hữu hạn đối với bài toán dao động tự do của thanh.
- Đã xác định được kết quả của các bài toán dao động tự do của các thanh có liên kết khác nhau theo hai cách tiếp cận là lời giải bán giải tích và lời giải số theo phương pháp phân tử hữu hạn. Kết quả trùng khớp với kết quả nhận được khi giải bằng các phương pháp khác.

Kiến nghị

Qua kết quả nghiên cứu thấy rằng, với việc sử dụng phương pháp phân tử hữu hạn có thể xây dựng bài toán dao động của thanh một cách dễ dàng. Vì vậy có thể sử dụng phương pháp này để nghiên cứu và học tập trong lĩnh vực kết cấu công trình.

Danh mục tài liệu tham khảo

I. TIẾNG VIỆT

- [1] Hà Huy Cương (2005), *Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss*, Tạp chí Khoa học và kỹ thuật, IV/ Tr. 112 ÷118.
- [2] Nguyễn Văn Liên, Nguyễn Phương Thành, Đinh Trọng Bằng (2003), *Giáo trình Sức bền vật liệu*, Nhà xuất bản xây dựng, tái bản lần thứ 3, 330 trang.
- [3] Nguyễn Phương Thành(2002), *Nghiên cứu trạng thái ứng suất – biến dạng tấm nhiều lớp chịu tải trọng động có xét lực ma sát ở các mặt tiếp xúc*, Luận án tiến sỹ kỹ thuật.
- [4] Vương Ngọc Lưu(2002), *Nghiên cứu trạng thái ứng suất – biến dạng của tấm sàn Sandwich chịu tải trọng tĩnh và động*, Luận án tiến sỹ kỹ thuật.
- [5] Trần Hữu Hà(2006), *Nghiên cứu bài toán tương tác giữa cọc và nền dưới tác dụng của tải trọng*, Luận án tiến sỹ kỹ thuật.
- [6] Phạm Văn Trung (2006), *Phương pháp mới Tính toán hệ dầm và mái treo*, Luận án Tiến sỹ kỹ thuật.
- [7] Vũ Hoàng Hiệp (2007), *Nghiên cứu trạng thái ứng suất - biến dạng của dầm nhiều lớp chịu tải tĩnh và động*, Luận án tiến sỹ kỹ thuật, Hà nội.
- [8] Nguyễn Văn Đạo (2001), *Cơ học giải tích*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà nội, 337 trang.
- [9] Nguyễn Văn Đạo, Trần Kim Chi, Nguyễn Dũng (2005), *Nhập môn Động lực học phi tuyến và chuyển động hỗn độn*. Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà nội.
- [10] Lều Thọ Trình, Đỗ Văn Bình(2006), *Giáo trình ổn định công trình*, Nhà xuất bản Khoa học kỹ thuật.
- [11] Vũ Hoàng Hiệp (2008), *Tính kết cấu có xét biến dạng trượt*, Tạp chí xây dựng số7.
- [12] Đoàn Văn Duẩn, Nguyễn Phương Thành (2007), *Phương pháp mới tính toán ổn định của thanh*, Tạp chí Xây dựng số 12 (Tr41-Tr44).

- [13] Đoàn Văn Duẩn (2008), *Phương pháp mới tính toán ổn định của khung*, Tạp chí Xây dựng số 01 (Tr35-Tr37).
- [14] Đoàn Văn Duẩn (2008), *Nghiên cứu ổn định uốn dọc của thanh có xét biến dạng trượt*, Tạp chí Xây dựng số 12 (Tr33-Tr37).
- [15] Đoàn Văn Duẩn (2009), *Phương pháp nghiên cứu ổn định tổng thể của dàn*, Tạp chí Xây dựng số 03 (Tr86-Tr89).
- [16] Đoàn Văn Duẩn (2007), *Phương pháp nguyên lý Cực trị Gauss đối với các bài toán ổn định công trình*, Luận văn thạc sỹ kỹ thuật.
- [17] Trần Thị Kim Huệ (2005), *Phương pháp nguyên lý Cực trị Gauss đối với các bài toán cơ học kết cấu*, Luận văn thạc sỹ kỹ thuật.
- [18] Nguyễn Thị Liên (2006), *Phương pháp nguyên lý Cực trị Gauss đối với các bài toán động lực học công trình*, Luận văn thạc sỹ kỹ thuật.
- [19] Vũ Thanh Thủy (2009), *Xây dựng bài toán dầm khi xét đầy đủ hai thành phần nội lực momen và lực cắt*. Tạp chí Xây dựng số 4.
- [20] Vũ Thanh Thủy (2009), *Dao động tự do của dầm khi xét ảnh hưởng của lực cắt*. Tạp chí Xây dựng, số 7.
- [21] Timoshenko C.P, Voinópki- Krige X, (1971), *Tám và Vô*. Người dịch, Phạm Hồng Giang, Vũ Thành Hải, Đoàn Hữu Quang, Nxb Khoa học và kỹ thuật, Hà Nội.

II. TIẾNG PHÁP

- [22] Robert L’Hermite (1974), *Flambage et Stabilité – Le flambage élastique des pièces droites*, édition Eyrolles, Paris.

III. TIẾNG ANH

- [23] Stephen P.Timoshenko-Jame M.Gere (1961), *Theory of elastic stability*, McGraw-Hill Book Company, Inc, New york – Toronto – London, 541 Tr.
- [24] William T.Thomson (1998), *Theory of Vibration with Applications* (Tái bản lần thứ 5). Stanley Thornes (Publishers) Ltd, 546 trang.

- [25] Klaus – Jurgen Bathe (1996), *Finite Element procedures*. Part one, Prentice – Hall International, Inc, 484 trang.
- [26] Klaus – Jurgen Bathe (1996), *Finite Element procedures*. Part two, Prentice – Hall International, Inc, 553 trang.
- [27] Ray W.Clough, Joseph Penzien(1993), *Dynamics of Structures* (Tái bản lần thứ 2), McGraw-Hill Book Company, Inc, 738 trang.
- [28] O.C. Zienkiewicz-R.L. Taylor (1991), *The finite element method* (four edition) Volume 2, McGraw-Hill Book Company, Inc, 807 trang.
- [29] G.Korn-T.Korn (1961), *Mathematical Handbook for sientists and Engineers*, McGraw-Hill, New york (Bản dịch tiếng Nga, I.Bramovich chủ biên, Nhà xuất bản Nauka-Moscow, 1964).
- [30] Stephen P.Timoshenko-J. Goodier (1970), *Theory of elasticity*, McGraw-Hill, New york (Bản dịch tiếng Nga, G. Shapiro chủ biên, Nhà xuất bản Nauka-Moscow, 1979), 560 trang.
- [31] D.R.J. Owen, E.Hinton (1986), *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*,Pineridge Press Lt.
- [32] Lars Olovsson, Kjell Simonsson, Mattias Unosson (2006), *Shear locking reduction in eight-node tri-linear solid finite elements*,J. ‘Computers @ Structures’,84,trg 476-484.
- [33] C.A.Brebbia, J.C.F.Telles, L.C.Wrobel(1984), *Boundary Element Techniques. Theory and Applications in Engineering*. Nxb Springer – Verlag.(Bản dịch tiếng Nga, 1987).
- [34] Chopra Anil K (1995). *Dynamics of structures*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New – Jersey 07632.
- [35] Wilson Edward L. Professor Emeritus of structural Engineering University of California at Berkeley (2002). *Three – Dimensional Static and Dynamic*

Analysis of structures, Inc. Berkeley, California, USA. Third edition, Reprint January.

[36] Wilson, E. L., R. L. Taylor, W. P. Doherty and J. Ghaboussi (1971). “*Incompatible Displacement Models*”, Proceedings, ORN Symposium on “Numerical and Computer Method in Structural Mechanics”. University of Illinois, Urbana. September. Academic Press.

[37] Strang, G (1972). “*Variational Crimes in the Finite Element Method*” in “The Mathematical Foundations of the Finite Element Method”. P.689 -710 (ed. A.K. Aziz). Academic Press.

[38] Irons, B. M. and O. C. Zienkiewicz (1968). “*The isoparametric Finite Element System – A New Concept in Finite Element Analysis*”, Proc. Conf. “Recent Advances in Stress Analysis”. Royal Aeronautical Society. London.

[39] Kolousek Vladimir, DSC Professor, Technical University, Pargue (1973). *Dynamics in engineering structures*. Butter worths London.

[40] Felippa Carlos A (2004). *Introduction of finite element methods*. Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures University of Colorado Boulder, Colorado 80309-0429, USA, Last updated Fall.

[41] Wang C.M, Reddy J.N, Lee K.H.(2000), *Shear deformable beams and plates – Relationships with Classical Solutions*. ELSEVIER, Amsterdam – Lausanne- New York – Oxford –Shannon – Singapore – Tokyo.

[42] Barbero Ever J, Department of Mechanics & Aerospace Engineering, West Virginia University, USA (1999), *Introduction to Composite Materials Design*. Taylor and Francis.

[43] Decolon C (2002). *Analysis of Composite Structures*. Hermes Penton, Ltd, UK.

[44] Fu-le Li, ZHI-zhong Sun, Corresponding author, Department of Mathematics, Shoutheast University, Nanjing 210096, PR China (2007). *A finite difference scheme for solving the Timoshenko beam equations with boundary feedback*. Journal of Computational and applied Mathematics 200, 606 – 627, Elsevier press. Available online at www.sciencedirect.com.

[45] Khaji N., Corresponding author, Shafiei M., Civil Engineering Department Tarbiat Modares University, P. O. Box 14155-4838, Tehran, Iran ((2009)). *Closed - form solutions for crack detection problem of Timoshenko beams with various boundary conditions*. International Journal of Mechanical Sciences 51, 667-681. Contents lists available at Science Direct journal homepage: www.elsevier.com/locate/ijmecsci.

[46] Antes H. Institute of Applied Mechanics, University Carolo Wilhelmina, D-38023 Braunschweig, Germany (2003). *Fundamental solution and integralequations for Timoshenko beams*. Computers and Structures 81, 383-396. Pergamon press. Available online at www.sciencedirect.com.

[47] Nguyen Dinh Kien (2007). *Free Vibration of prestress Timoshenko beams resting on elastic foundation*. Viet nam Journal of Mechanics, VAST, Vol.29, No. 1, pp. 1-12.

[48] Grawford F (1974). *Waves*, Berkeley physics course, volume 3. McGraw – hill Book Company.

IV. TIẾNG NGA

[49] М□□А. Айзерман (1980), *КлассиЧеская механика, Москва*.

[50] Киселев В. А (1969). *Строительная механика - Специальный курс*. Стройздат, Москва.

[51] П. С. Полак (1959), *Вариационные принципы механики, Москва*.

[52] Киселев В. А (1980). *Строительная механика - Специальный курс*. Стройздат, Москва.

[53] А. А. Чирас (1989), *Строительная механика*, Стройиздат, Москва.

[54] Г. КАУДЕРЕР (1961), *НЕЛИНЕЙНАЯ МЕХАНИКА*, МОСКВА.