

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC DÂN LẬP HẢI PHÒNG

NGUYỄN QUANG DOANH

**NGHIÊN CỨU DAO ĐỘNG
ĐÀN HỒI CỦA THANH**

Chuyên ngành: Kỹ thuật Xây dựng Công trình Dân dụng & Công nghiệp

Mã số: 60.58.02.08

LUẬN VĂN THẠC SỸ KỸ THUẬT

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. ĐOÀN VĂN DUẤN

Hải Phòng, 2017

MỞ ĐẦU

Lý do lựa chọn đề tài:

Những năm gần đây, do kinh tế phát triển, ngày càng xuất hiện nhiều công trình cao tầng, công trình có khẩu độ lớn, công trình đặc biệt. Trong những công trình đó người ta thường dùng các thanh có chiều dài lớn, tấm - vỏ chịu nén và do đó điều kiện ổn định trong miền đàn hồi có tầm quan trọng đặc biệt, đòi hỏi phải nghiên cứu đầy đủ cả về mặt lý thuyết và thực nghiệm.

Bài toán dao động của kết cấu đã được giải quyết theo nhiều hướng khác nhau, phần lớn xuất phát từ nguyên lý năng lượng mà theo đó kết quả phụ thuộc rất nhiều vào cách chọn dạng của hệ ở trạng thái lệch khỏi dạng cân bằng ban đầu.

Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss do GS.TSKH. Hà Huy Cương đề xuất là phương pháp cho phép áp dụng nguyên lý cực trị Gauss - vốn được phát biểu cho hệ chất điểm - để giải các bài toán cơ học vật rắn biến dạng nói riêng và bài toán cơ học môi trường liên tục nói chung. Đặc điểm của phương pháp này là bằng một cái nhìn đơn giản luôn cho phép tìm được kết quả chính xác của các bài toán dù đó là bài toán tĩnh hay bài toán động, bài toán tuyến tính hay bài toán phi tuyến.

Đối tượng, phương pháp và phạm vi nghiên cứu của luận án

Trong luận văn này, tác giả sử dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss nói trên và phương pháp chuyển vị cưỡng bức để giải bài toán dao động đàn hồi của thanh, chịu tác dụng của tải trọng tĩnh.

Mục đích nghiên cứu của luận án

“Nghiên cứu dao động đàn hồi của hệ thanh”

Nội dung nghiên cứu của đề tài:

- Trình bày các phương pháp giải bài toán động lực học đã biết.
- Trình bày phương pháp nguyên lý cực trị Gauss.
- Sử dụng phương pháp cho bài toán dao động của thanh.

CHƯƠNG 1. PHÂN TÍCH ĐỘNG LỰC HỌC CÔNG TRÌNH

1.1. Khái niệm

Thuật ngữ "động" có thể được hiểu đơn giản như là biến đổi theo thời gian [19, tr.1]. Vậy tải trọng động là bất cứ tải trọng nào mà độ lớn, hướng hoặc vị trí thay đổi theo thời gian. Trong quá trình đó, các khối lượng trên công trình được truyền gia tốc nên phát sinh lực quán tính đặt tại các khối lượng. Lực quán tính tác dụng lên công trình gây ra hiện tượng dao động. Dao động đó được biểu thị dưới dạng chuyển vị của kết cấu. Việc tính toán công trình có xét đến lực quán tính xuất hiện trong quá trình dao động được gọi là giải bài toán dao động công trình [10, tr.7]. Phản ứng của kết cấu đối với tải trọng động, nghĩa là các ứng suất và độ võng xuất hiện khi đó, cũng là động (biến thiên theo thời gian). Nói chung, phản ứng của kết cấu đối với tải trọng động được biểu diễn thông qua chuyển vị của kết cấu. Các đại lượng phản ứng khác có liên quan như nội lực, ứng suất, biến dạng....đều được xác định sau khi có sự phân bố chuyển vị của hệ.

Đôi khi, việc giải quyết bài toán động lực học công trình còn được tiến hành bằng việc đưa vào các hệ số động. Khi đó, nội lực, chuyển vị và mọi tham số của hệ đều được tính toán thông qua hệ số động với các kết quả tính toán tĩnh. Tất cả các đại lượng đó đều là các giá trị cực đại ứng với một thời điểm xác định, không phải là các hàm theo biến thời gian.

1.2. Đặc trưng cơ bản của bài toán động lực học:

Tải trọng thay đổi theo thời gian nên trạng thái ứng suất - biến dạng của hệ cũng thay đổi theo thời gian. Do đó, bài toán động sẽ không có nghiệm chung duy nhất như bài toán tĩnh. Vì vậy, bài toán động phức tạp và khó khăn hơn nhiều so với bài toán tĩnh. Sự cần thiết phải kể đến lực quán tính là điểm khác biệt cơ bản nhất của bài toán động lực học so với bài toán tĩnh. Ngoài ra, việc xét đến ảnh hưởng của lực cản cũng là một đặc trưng cơ bản phân biệt hai bài toán trên.

1.2.1. Lực cản:

Trong tính toán, đôi khi không xét đến ảnh hưởng của lực cản nhưng lực cản luôn luôn có mặt và tham gia vào quá trình chuyển động của hệ. Lực cản xuất hiện do nhiều nguyên nhân khác nhau và ảnh hưởng của chúng đến quá trình dao động là rất phức tạp. Trong tính toán, đưa ra các giả thiết khác nhau về lực cản, phù hợp với điều kiện thực tế nhất định.

Trong đa số các bài toán dao động công trình, ta thường sử dụng mô hình vật liệu biến dạng đàn nhớt (ma sát nhớt) do nhà cơ học người Đức W.Voigt kiến nghị: xem lực cản tỷ lệ bậc nhất với vận tốc dao động. Công thức của lực cản: $P_c = C\dot{y}$ với C là hệ số tắt dần.

Ngoài ra còn đưa ra một số giả thiết cơ bản sau:

- **Lực cản theo giả thiết Xôrôkin:** là giả thiết về lực cản trong phi đàn hồi. Lực cản trong phi đàn hồi là lực cản tính đến sự tiêu hao năng lượng trong hệ, được biểu thị trong việc làm tổn thất trữ năng lượng biến dạng trong quá trình dao động. Nó không phụ thuộc vào tốc độ biến dạng mà phụ thuộc vào giá trị biến dạng. Trong đó, quan hệ giữa các biến dạng chung (độ võng, góc xoay) với tải trọng ngoài là quan hệ phi tuyến.

Công thức của lực cản: $P_c = i \frac{\Psi}{2\pi} P_{đ}$

trong đó $P_{đ}$ là lực đàn hồi; ψ là hệ số tiêu hao năng lượng.

[Lực đàn hồi (hay lực phục hồi) xuất hiện khi tách hệ khỏi vị trí cân bằng và có xu hướng đưa hệ về vị trí cân bằng ban đầu, tương ứng và phụ thuộc vào chuyển vị động của hệ: $P_{đ} = P(y)$. Ở các hệ đàn hồi tuyến tính: $P_{đ} = ky$ với k là hệ số cứng (lực gây chuyển vị bằng 1 đơn vị)].

- **Lực cản ma sát khô của Coulomb (F_{ms}):** tỷ lệ với áp lực vuông góc N và có phương ngược với chiều chuyển động.

Công thức của lực cản: $F_{ms} = \mu \cdot N$ (với μ là hệ số ma sát).

Lực cản sẽ làm cho chu kỳ dao động dài hơn. Trong thực tế, có những công trình bị cộng hưởng nhưng chưa bị phá hoại ngay vì có hệ số cản khác không. Do còn ảnh hưởng của lực cản nên khi cộng hưởng, các nội lực, chuyển vị động của hệ không phải bằng ∞ mà có trị số lớn hữu hạn.

1.2.2. Đặc trưng động của hệ dao động tuyến tính:

Dao động tuyến tính là dao động mà phương trình vi phân mô tả dao động là phương trình vi phân tuyến tính. Đặc trưng động của hệ dao động tuyến tính bao gồm: khối lượng của hệ, tính chất đàn hồi của hệ (độ cứng, độ mềm), nguồn kích động, tần số dao động (tần số dao động riêng, dạng dao động riêng), hệ số tắt dần...

Bậc tự do của hệ đàn hồi là số thông số hình học độc lập cần thiết để xác định vị trí của hệ tại một thời điểm bất kỳ khi có chuyển động bất kỳ.

Vấn đề xác định các tần số dao động riêng và các dạng dao động riêng của bài toán dao động hệ hữu hạn bậc tự do tương ứng với bài toán xác định các trị riêng và vectơ riêng của đại số tuyến tính. Thông thường, để đánh giá một công trình chịu tải trọng động, chúng ta thường đánh giá sơ bộ thông qua tần số dao động riêng thứ nhất và dạng dao động riêng thứ nhất (tần số dao động cơ bản và dạng dao động cơ bản).

1.3. Dao động tuần hoàn - Dao động điều hòa:

Hầu như bất cứ hệ kết cấu nào cũng có thể chịu một dạng tải trọng động nào đó trong suốt quá trình sống của nó (tải trọng tĩnh được xem như dạng đặc biệt của tải trọng động). Các tải trọng được phân thành: tải trọng tuần hoàn và tải trọng không tuần hoàn.

Các tải trọng không tuần hoàn có thể là các tải trọng xung ngắn hạn hoặc có thể là các tải trọng tổng quát dài hạn, các dạng đơn giản hoá có thể dùng được.

Một tải trọng tuần hoàn thể hiện sự biến thiên theo thời gian giống nhau liên tiếp đối với một số lượng lớn chu kỳ. Tải trọng tuần hoàn đơn giản nhất có dạng hình sin (hoặc cosin) và được gọi là điều hoà đơn giản. Nhờ có phân tích Fourier mà bất cứ một tải trọng tuần hoàn nào cũng có thể được biểu diễn như là

một chuỗi các thành phần điều hoà đơn giản. Tải trọng tuần hoàn gây ra dao động tuần hoàn trong kết cấu.

1.3.1. Dao động tuần hoàn:

Là dao động được lặp lại sau những khoảng thời gian τ nhất định. Nếu dao động được biểu diễn bởi hàm số của thời gian $y(t)$ thì bất kỳ dao động tuần hoàn nào cũng phải thỏa mãn: $y(t) = y(t+\tau)$. Thời gian lặp lại dao động τ được gọi là chu kỳ của dao động và nghịch đảo của nó $f = 1/\tau$ được gọi là tần số.

Dạng đơn giản nhất của dao động tuần hoàn là dao động điều hoà.

1.3.2. Dao động điều hoà:

Thường được mô tả bằng hình chiếu trên một đường thẳng của một điểm di chuyển trên một vòng tròn với vận tốc góc ω . Do đó chuyển vị y được viết: $y = A \sin \omega t$.

Bởi vì dao động lặp lại trong khoảng thời gian 2π nên có mối liên hệ:

$$\omega = 2\pi / \tau = 2\pi f$$

Vận tốc và gia tốc cũng là điều hoà với cùng tần số của dao động nhưng lệch với độ dịch chuyển lần lượt là $\pi/2$ và π :

$$y' = \omega A \sin(\omega t + \pi/2)$$

$$y'' = -\omega^2 A \sin \omega t = \omega^2 A \sin(\omega t + \pi)$$

Vậy: $y'' = -\omega^2 y \Rightarrow$ gia tốc tỷ lệ với độ dịch chuyển.

1.4. Các phương pháp để xây dựng phương trình chuyển động:

Phương trình chuyển động của hệ có thể xây dựng dựa trên cơ sở của phương pháp tĩnh hoặc các nguyên lý biến phân năng lượng. Các biểu thức toán học để xác định các chuyển vị động được gọi là phương trình chuyển động của hệ, nó có thể được biểu thị dưới dạng phương trình vi phân.

1.4.1. Phương pháp tĩnh động học:

[Nội dung nguyên lý D'Alembert đối với cơ hệ: trong chuyển động của cơ hệ, các lực thực sự tác dụng lên chất điểm của hệ gồm nội lực và ngoại lực cùng với các lực quán tính lập thành hệ lực cân bằng]

Dựa trên cơ sở những nguyên tắc cân bằng của tĩnh học có bổ sung thêm lực quán tính viết theo nguyên lý D'Alembert, điều kiện cân bằng (tĩnh động) đối với các lực tổng quát viết cho hệ n bậc tự do:

$$(Q_k + J_k^*)_{k=1..n} = 0$$

trong đó:

Q_k - lực tổng quát của các lực đã cho.

$$Q_k = - \sum_{i=1}^{theo\ so\ luc} \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right)$$

J^*k - lực tổng quát của các lực quán tính của các khối lượng, tương ứng với các chuyển vị tổng quát q_k .

$$J_k^* = - \sum_{i=1}^{theo\ so\ khối\ lượng} m_i \left(x_i'' \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + y_i'' \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + z_i'' \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right)$$

x_i, y_i, z_i - các chuyển vị của khối lượng m_i theo phương các trục tọa độ, biểu diễn thông qua các tọa độ tổng quát q_k .

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

$$y_i = y_i(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

$$z_i = z_i(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

Cũng có thể viết: $J^*k = -M_k q_k$, với M_k là khối lượng quy đổi, tương ứng với chuyển vị tổng quát q_k .

1.4.2. Phương pháp năng lượng:

Dựa trên định luật bảo toàn năng lượng, trường hợp bỏ qua các lực ngăn cản chuyển động, ta có: $K + U = \text{const}$.

trong đó:

K - động năng của hệ:

$$K = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} + \sum \int m_{(z)} dz \frac{v_{(z)}^2}{2}$$

U - thế năng của hệ, có thể được biểu thông qua công của các ngoại lực hoặc công của các nội lực (trường hợp hệ phẳng):

$$U = \frac{1}{2} \sum P_i \Delta \cos(P_i \Delta_i) + \frac{1}{2} \sum \int dP \cdot \Delta \cos(dP, \Delta)$$

Hoặc:

$$U = \frac{1}{2} \left[\sum \int \frac{M^2 ds}{EJ} + \sum \int \frac{N^2 ds}{EF} + \sum \int \mu \frac{Q^2 ds}{GF} \right]$$

1.4.3. Phương pháp ứng dụng nguyên lý công ảo:

[Nội dung của nguyên lý: điều kiện cần và đủ để một cơ hệ liên kết lý tưởng giữ và dùng được cân bằng tại một vị trí đã cho là tổng công ảo của tất cả các lực hoạt động tác dụng lên hệ đều bằng không trong di chuyển ảo bất kỳ từ vị trí đã cho][3, tr.33].

Nguyên lý được áp dụng như sau: $\delta U_i + \delta T_i = 0$ (i=1 ÷ n)

trong đó: δU_i - công khả dĩ của nội lực.

δT_i - công khả dĩ của ngoại lực (gồm lực kích thích, lực cản, lực quán tính).

Trong ba phương pháp đã giới thiệu ở trên, phương pháp tĩnh động đưa ra cách giải quyết đơn giản cho hệ một số bậc tự do. Sự cần thiết phải xem xét các lực liên kết và các biểu đồ vật thể tự do trong phương pháp này dẫn đến những khó khăn đại số đối với những hệ có bậc tự do cao hơn.

Phương pháp năng lượng khắc phục được những khó khăn của phương pháp tĩnh động. Tuy nhiên, nguyên lý năng lượng cùng các tọa độ vật lý chỉ đưa được một phương trình mà điều đó chỉ giới hạn sử dụng cho hệ một bậc tự do.

Nguyên lý công ảo khắc phục được những hạn chế của cả hai phương pháp trên và là một công cụ mạnh đối với hệ nhiều bậc tự do. Tuy nhiên, đây không phải là một thủ tục hoàn toàn có tính vô hướng, trong đó việc xem xét vectơ lực là cần thiết trong việc xác định công ảo [20, tr.215].

1.4.4. Phương trình Lagrange (phương trình Lagrange loại 2):

Phương trình Lagrange là một thủ tục hoàn toàn có tính vô hướng, xuất phát từ các đại lượng vô hướng của động năng, thế năng và công được biểu diễn thông qua các tọa độ suy rộng. Ưu điểm nổi bật của các phương trình Lagrange là dạng và số lượng của chúng không phụ thuộc vào số vật thể thuộc cơ hệ và sự chuyển động của các vật thể đó. Hơn nữa, nếu liên kết là lý tưởng

thì trong các phương trình Lagrange không có mặt các phản lực liên kết chưa biết.

Giả sử hệ có n bậc tự do và các toạ độ suy rộng của hệ là q_1, q_2, \dots, q_n .

Phương trình chuyển động Lagrange được viết như sau:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i$$

Trong đó: T và U lần lượt là động năng và thế năng của hệ.

Q_i là các lực suy rộng tương ứng với các lực không có thế. Phương trình chuyển động Lagrange được áp dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khoa học và kỹ thuật, nó được áp dụng với tất cả hệ tuyến tính và phi tuyến.

1.4.5. Phương pháp ứng dụng nguyên lý Hamilton:

[Nguyên lý Hamilton có nội dung như sau: một hệ cơ học chịu tác động của các lực đã biết sẽ có chuyển động (trong tất cả các chuyển động có thể và cùng điều kiện ở hai đầu của khoảng thời gian) sao cho biến thiên động năng, thế năng và công cơ học của các lực không bảo toàn trong khoảng thời gian đang xét bằng không].

Nội dung nguyên lý có thể được biểu thị: $\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta U - \delta R) dt = 0$

trong đó:

$\delta T, \delta U$ - biến phân động năng và thế năng của hệ.

δR - biến phân công do các lực không bảo toàn (lực kích thích, lực cản) tác dụng lên hệ.

Từ các phương trình chuyển động Lagrange sẽ xây dựng nguyên lý biến phân động học Hamilton và ngược lại. Vì vậy có thể dùng nguyên lý Hamilton để làm cơ sở cho động lực học các hệ holonom.

[Theo ngôn ngữ của G.Hertz: hệ cơ học nào chỉ có những liên kết được biểu diễn dưới dạng hữu hạn (liên kết hình học) gọi là hệ holonom; nếu hệ đó chịu những liên kết biểu diễn bằng phương trình vi phân không khả tích thì gọi là hệ không holonom].

1.5. Dao động của hệ hữu hạn bậc tự do:

1.5.1. Dao động tự do:

Khi hệ chuyển động tự do, vị trí của các khối lượng xác định dạng của hệ tại thời điểm bất kỳ. Đối với hệ n bậc tự do, các khối lượng có chuyển động phức tạp, gồm n dao động với n tần số ω_i khác nhau. Nói chung, tỉ số giữa các chuyển vị của các khối lượng riêng biệt liên tục thay đổi. Nhưng có thể chọn điều kiện ban đầu sao cho mọi khối lượng chỉ dao động với một tần số ω_i nào đó chọn từ phổ tần số. Những dạng dao động như thế gọi là dạng dao động riêng (hay dạng dao động chính).

Số dạng chính bằng số bậc tự do của hệ. Trong các dạng dao động chính, quan hệ các chuyển vị của các khối lượng là hằng số đối với thời gian. Nếu cho trước các dạng dao động chính thì ta cũng xác định được tần số.

Việc xác định các dạng dao động riêng và tần số dao động riêng đóng vai trò quan trọng trong bài toán dao động của hệ hữu hạn bậc tự do.

1.5.1.1. Các tần số riêng và các dạng dao động riêng:

Phương trình vi phân dao động tự do không cản của các khối lượng:

$$MY''(t) + KY(t) = 0 \quad (1.1)$$

với M và K là các ma trận vuông cấp n , thường là ma trận đối xứng. Nghiệm của (1.1) được tìm dưới dạng:

$$Y(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (1.2)$$

Thay (1.2) vào (1.1) nhận được:

$$[K - \omega^2 M]A = 0 \quad (1.3)$$

Để hệ (1.3) có nghiệm không tầm thường (tức là tồn tại dao động) thì:

$$|K - \omega^2 M| = 0 \quad (1.4)$$

(1.4) là phương trình đại số bậc n đối với ω^2 , được gọi là phương trình tần số (hay phương trình đặc trưng). Các nghiệm ω_i (với $i = 1 \div n$) của (1.4) là các tần số riêng. Vector bao gồm tất cả các tần số dao động riêng xếp theo thứ tự tăng dần ($\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n$) được gọi là vector tần số dao động riêng (hay phổ tần số):

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \dots \\ \omega_n \end{bmatrix}$$

Tần số dao động riêng thấp nhất ω_1 gọi là tần số cơ bản.

Phương trình (1.4) có thể được viết dưới dạng giải tích như sau:

$$\begin{vmatrix} (m_{11}\delta_{11} - u_1) & m_2\delta_{12} & \dots & m_n\delta_{1n} \\ (m_{21}\delta_{21} - u_2) & m_2\delta_{22} & \dots & m_n\delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (m_{n1}\delta_{n1} - u_n) & m_n\delta_{n2} & \dots & m_n\delta_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{với } u_i = \frac{1}{\omega_i^2}$$

Thay các ω_i vào (1.3), được hệ phương trình đại số tuyến tính thuần nhất để xác định các thành phần của vector riêng A_i .

$$[K - \omega_i^2 M]A_i = 0 \tag{1.5}$$

Vì (1.5) là hệ phương trình đại số tuyến tính thuần nhất có det các hệ số bằng 0 nên các thành phần của vector A_i được xác định sai khác một hằng số nhân, chẳng hạn có thể chọn A_{ii} tùy ý.

$$\varphi_{ki} = \frac{A_{ki}}{A_{ii}} \quad \text{và dễ thấy: } \varphi_{ii} = 1$$

Ma trận vuông Φ biểu thị tất cả các dạng dao động riêng có thể của hệ, được gọi là ma trận các dạng riêng (hay ma trận dạng chính):

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \dots \dots \dots \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \dots \dots \dots \varphi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} \dots \dots \dots \varphi_{nm} \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

Mỗi một trong các vector cột của (1.6) cho ta một dạng dao động riêng của hệ:

$$\varphi_i = \begin{bmatrix} \varphi_{1i} \\ \varphi_{2i} \\ \dots \\ \varphi_{ni} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \varphi_{2i} \\ \dots \\ \varphi_{ni} \end{bmatrix}$$

1.5.1.2. Giải bài toán riêng (eigen problem):

Khi hệ dao động tự do không cản thì bài toán dao động tự do trở thành bài toán riêng tổng quát:

$$[K - \omega^2 M]A = 0 \tag{1.7}$$

Các tần số (vòng) riêng của dao động (ứng với các tần số fi) là các nghiệm $\omega_i (i = 1 \div n)$ của phương trình đặc trưng bậc n:

$$[K - \omega^2 M] = 0 \tag{1.8}$$

Đặt $\lambda = \omega^2$ (1.8) trở thành:

$$[K - \lambda M] = 0 \tag{1.9}$$

Khi phân tích dạng dao động, ta có bài toán riêng tổng quát:

$$K\phi = \lambda M\phi$$

trong đó:

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ - các trị riêng.

$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ - các vector riêng tương ứng.

$$\phi = [\phi_1, \dots, \phi_n]$$

Có nhiều phương pháp để giải bài toán riêng [17]:

+ Nhóm 1: các phương pháp lập vector.

$$K\phi_i = \lambda_i M\phi_i$$

+ Nhóm 2: các phương pháp biến đổi.

$$\phi^T K\phi = \Lambda$$

$$\phi^T M\phi = I$$

trong đó: $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$

+ Nhóm 3: các kỹ thuật lập đa thức

$$p(\lambda_i) = 0 \text{ trong đó } p(\lambda) = \det(K - \lambda M)$$

+ Nhóm 4: sử dụng đặc tính sturm của các đa thức đặc trưng

$$\begin{cases} p(\lambda) = \det(K - \lambda M) \\ p^{(r)}(\lambda^{(r)}) = \det(K^{(r)} - \lambda^{(r)} M^{(r)}) \end{cases}$$

1.5.1.3. Tính chất trực giao của các dạng chính - Dạng chuẩn:

Tính chất trực giao của các dạng chính thể hiện ở chỗ: công của ngoại lực (hay nội lực) của một dạng chính này trên chuyển vị (hay biến dạng) của một dạng chính khác bằng 0.

Biểu thức biểu thị tính trực giao của các dạng chính có thể viết qua ma trận độ cứng hoặc ma trận khối lượng như sau:

$$\varphi_i^T M \varphi_j = 0 \text{ hoặc } \varphi_i^T M \varphi_j = 0 \text{ (với } \omega_i \neq \omega_j \text{)} \quad (1.10)$$

ở dạng giải tích, biểu thức tính trực giao viết theo ma trận khối lượng như sau:

$$\sum_{k=1}^n m_k y_{ki} y_{kj} = 0$$

hoặc có thể biểu thị dưới dạng công của các nội lực:

$$\sum \int \frac{M_i M_j}{EJ} ds + \sum \int \frac{N_i N_j}{EF} ds + \sum \int \frac{Q_i Q_j}{GF} ds = 0$$

Đây là tính chất quan trọng trong việc giải quyết các bài toán dao động cưỡng bức cũng như dao động tự do của hệ hữu hạn bậc tự do.

- **Dạng chuẩn:** là dạng dao động riêng thoả mãn biểu thức: $\varphi_i^T M \varphi_j = 1$

Ký hiệu là $\varphi_{i,ch}$

$$\varphi_{i,ch} = \frac{1}{a_i} \varphi_i \text{ với } a_i^2 = \varphi_i^T M \varphi_i \quad (1.11)$$

Việc đưa các dạng dao động riêng về dạng chuẩn gọi là chuẩn hoá các dạng dao động riêng. Khi các dạng dao động riêng đã được chuẩn hoá, ta viết được điều kiện trực chuẩn như sau:

$$\Phi_{ch}^T M \Phi_{ch} = E \text{ hoặc } \Phi_{ch}^T K \Phi_{ch} = \Omega \quad (1.12)$$

Trong đó: E là ma trận đơn vị, $\Omega = \text{diag}(\omega_i^2)$

Điều kiện trực chuẩn có ý nghĩa quan trọng trong việc rút gọn quá trình tính toán của hệ dao động.

1.5.2. Dao động cưỡng bức của hệ hữu hạn bậc tự do:

Phương trình vi phân dao động của hệ: $MY''(t) + CY'(t) + KY(t) = P(t)$.

Đây là bài toán phức tạp và hay gặp trong thực tế. Có nhiều phương pháp khác nhau để giải quyết bài toán này, trong đó phương pháp hay được sử dụng là phương pháp cộng dạng dao động (phương pháp khai triển theo các dạng riêng).

1.5.2.1. Phương pháp khai triển theo các dạng riêng:

Xét hệ hữu hạn bậc tự do chịu lực cưỡng bức và không kể đến lực cản.

- Phương pháp khai triển tải trọng theo các dạng riêng:

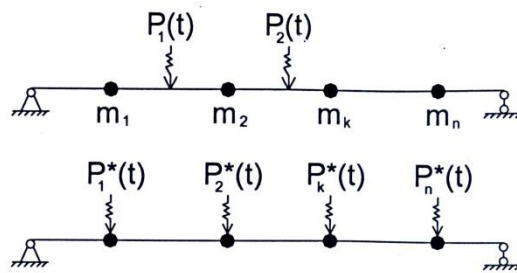
Giả sử lực $P_k(t)$ với một giá trị nào đó (bao gồm cả giá trị 0) tác dụng lên khối lượng m_k bất kỳ, lực $P_k(t)$ được khai triển theo các dạng dao động chính dưới dạng các thành phần $P_{ki}(t)$

$$P_k(t) = \sum_{k=1}^n P_{ki}(t) = \sum_{k=1}^n m_k \varphi_{ki} H_i(t) \text{ với } H_i(t) = \frac{\sum_{k=1}^n P_{ki}(t) \cdot \varphi_{ki}}{\sum_{k=1}^n m_k \varphi_{ki}^2} \quad (1.13)$$

Tải trọng khai triển theo dạng chính thứ i viết dưới dạng ma trận:

$$P_i = \frac{\varphi_i^T P}{\varphi_i^T M \varphi_i} M \varphi_i = \varphi_{i,ch}^T P M \varphi_{i,ch} \quad (1.14)$$

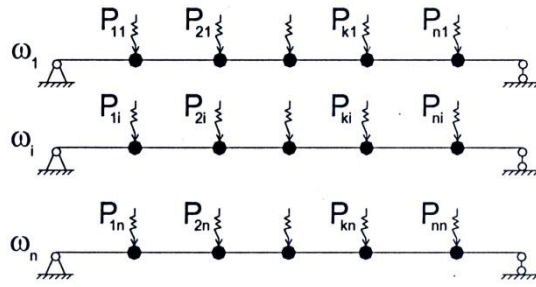
Phương pháp này tìm được n hệ lực $P_{ki}(t)$ thay cho hệ lực $P_k(t)$. Tương ứng với dạng chính có tần số ω_i , ta có các lực $P_{1i}(t), P_{2i}(t), \dots, P_{ni}(t)$ được thể hiện như hình (1.1).



Hình 1.1

Các lực này sẽ gây ra các chuyển vị tỉ lệ với các chuyển vị dạng chính thứ i . Vì vậy, hệ chịu tải trọng như thế có thể xem như hệ với một bậc tự do..

Nếu có một số lượng bất kỳ các lực $P_i(t)$ được đặt không phải lên các khối lượng thì cần phải thay thế chúng bằng các tải trọng $P_i^*(t)$ như trên hình 1.2.



Hình 1.2.

Các lực $P_i^*(t)$ tác dụng tại các khối lượng sao cho: chuyển vị tĩnh của các khối lượng do chúng gây ra giống như các chuyển vị do các lực $P_i(t)$ đã cho gây ra. Các tải trọng thay thế dựa trên cơ sở các phương trình:

$$\delta_{k1}P_1^*(t) + \delta_{k2}P_2^*(t) + \dots + \delta_{kn}P_n^*(t) = \sum_{i=1}^n \delta_{ki}P_i(t)$$

Gọi P_{kh} là ma trận bao gồm các tải trọng khai triển theo các dạng chính.

$$P_{kh} = [P_1, P_2, \dots, P_n] = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix}$$

- Phương pháp tọa độ tổng quát:

Chuyển vị của hệ có thể phân tích thành tổng của các chuyển vị thành phần ứng với từng dạng dao động chính:

$$Y(t) = \sum_{k=1}^n Y_k(t) = \sum_{k=1}^n \varphi_k Z_k(t)$$

với: $Z_i(t) = \frac{1}{M_i \omega_i} \int_0^t P_i(\tau) \sin \omega_i(t - \tau) d\tau$ (1.15)

Các đại lượng $Z_i(t)$ được gọi là tọa độ tổng quát của hệ, nó chính là các biên độ ứng với các dạng chính.

Ma trận các tọa độ tổng quát của hệ:

$$Z(t) = [Z_1(t), Z_2(t), \dots, Z_n(t)]^T$$

1.5.2.2. Trình tự tính toán hệ dao động cưỡng bức:

Theo [1, tr.150], hệ hữu hạn bậc tự do dao động cưỡng bức được tính toán theo trình tự sau:

- + Xác định tần số dao động riêng và các dạng dao động riêng.
- + Khai triển tải trọng theo các dạng dao động riêng theo (1.14), hoặc xác định các tọa độ tổng quát ứng với các dạng riêng theo (1.15).
- + Xác định chuyển vị của hệ từ kết quả nhận được ma trận tải trọng khai triển hoặc ma trận các tọa độ tổng quát.

$$Y(t) = M^{-1}P_k K_i(t) \quad (1.16)$$

trong đó: $K_i(t)$ - hệ số ảnh hưởng động học theo thời gian của dạng

$$\text{chính thứ } i; K_i(t) = \frac{1}{\omega_i} \int_0^t f(\tau) \cdot \sin \omega_i(t - \tau) d\tau \quad (1.17)$$

Hoặc: $Y(t) = \Phi \cdot Z(t) \quad (1.18)$

+ Để xác định nội lực của hệ, cần phải biết lực đàn hồi $P_d(t)$ tương ứng với quá trình dao động của hệ.

Với phương pháp khai triển theo các dạng dao động riêng:

$$P_d(t) = P_k K_i(t) \quad (1.19)$$

trong đó: $K_i(t) = \omega_i \int_0^t f(\tau) \cdot \sin \omega_i(t - \tau) d\tau \quad (1.20)$

Với phương pháp tọa độ tổng quát: $P_d(t) = KY(t)$

1.5.2.3. Dao động của hệ chịu tải trọng điều hòa

Đa số trường hợp hay gặp trong kỹ thuật, người ta thường đưa tải trọng $P(t)$ về dạng gần đúng là hàm điều hòa hoặc phân tích theo chuỗi Fourier rồi lấy một vài số hạng đầu. Do vậy, việc nghiên cứu dao động với lực kích thích có dạng $P \sin \omega t$ hay $P \cos \omega t$ là một bài toán cơ bản trong động lực học công trình.

Dao động cưỡng bức của hệ dưới dạng tổng quát bao gồm hai phần: dao động riêng, dao động với lực kích thích. Khi dao động chuyển sang giai đoạn ổn định thì phần dao động riêng của hệ không còn, hệ sẽ dao động có chu kỳ cùng với chu kỳ của lực kích thích.

Khi hệ chịu tác dụng của tải trọng điều hoà: $P(t) = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \dots \\ P_n \end{bmatrix} \sin \omega t$ thì chuyển vị của

hệ:

$$Y = GP$$

Trong đó: G - ma trận giải thức Green: $G = \Phi \text{ch} D \Phi \text{ch} T$

$$D = \text{diag} (S_i) \text{ với } S_i = \frac{1}{\omega_i^2 - r^2}$$

Khi tần số r của lực kích thích bằng một trong các trị số của tần số dao động riêng ω_i thì đều xảy ra hiện tượng cộng hưởng ($r = \omega_i$).

Có thể sử dụng phương pháp tĩnh động để xác định các lực quán tính trong hệ. Đối với hệ đối xứng, có thể phân tích tải trọng thành đối xứng và phản xứng để vận dụng cách tính theo nửa hệ hoặc chuyển vị kép.

1.6. Các phương pháp tính gần đúng trong động lực học công trình:

Các phương pháp này dựa trên cơ sở tìm tần số dao động riêng theo phương trình đường đàn hồi được giả định trước, hoặc thay hệ có số bậc tự do lớn bằng hệ số có bậc tự do ít hơn. Các phương pháp cho kết quả tương đối chính xác đối với tần số cơ bản ω_1 . Thực tế, khi tính toán các công trình, thường người ta chỉ quan tâm đến tần số cơ bản ω_1 để kiểm tra điều kiện cộng hưởng.

1.6.1. Phương pháp năng lượng (phương pháp Rayleigh):

Phương pháp này giả thiết trước các dạng dao động và dựa trên cơ sở định luật bảo toàn năng lượng để xác định tần số và dạng dao động riêng tương ứng. Khi hệ dao động tự do không kể đến lực cản, trên cơ sở quy luật bảo toàn năng lượng, có thể thiết lập được mối quan hệ: $U_{\max} = K_{\max}$.

Động năng của hệ tại thời điểm t bất kỳ:

$$K = \sum \int \frac{m_{(z)} v_z^2}{2} dz + \sum \frac{m_{(i)} v_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \left[\sum \int m_z y^2 k(z,t) dz + \sum m_i y^2 k(z,t) \right]$$

Thế năng của hệ (khi chỉ xét tới ảnh hưởng của mô men uốn):

$$U = \sum \int \frac{M^2 dz}{2EJ} = \sum \int \frac{EJ}{2} \left[-\frac{\partial^2 y_{k(t,z)}}{\partial z^2} \right]^2 dz$$

Sau khi xác định được U_{max} và K_{max} , ta rút ra được:

$$\omega^2 = \frac{\sum \int EJ \left[\frac{\partial^2 y_{k(t,z)}}{\partial z^2} \right]^2 dz}{\sum \int m_{(z)} y_{k(t,z)}^2 dz + m_i y_{k(t,z)}^2}$$

Nếu biểu thị chuyển vị của hệ khi dao động tự do dưới dạng ma trận:

$$Y(t) = L.Z(t) = L.Z_0 \sin \omega t$$

trong đó: L - vectơ dạng giả định, Z(t) - biên độ dạng giả định

$$\text{thì: } \omega^2 = \frac{L^T KL}{L^T ML}$$

1.6.2. Phương pháp Bupnop - Galoockin:

Phương pháp Bupnop - Galoockin được xây dựng dựa trên cơ sở nguyên lý Hamilton hoặc nguyên lý chuyển vị khả dĩ.

Với bài toán dao động tự do của dầm, phương trình vi phân của dạng dao động chính thứ j:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[EJ_{(z)} \frac{\partial^2 y_{j(z,t)}}{\partial z^2} \right] - \omega_j^2 m_{(z)} y_{j(z,t)} = 0 \quad (1.21)$$

Giả thiết nghiệm của (1.21) đã biết và có thể biểu diễn như sau:

$$y^{j(z)} = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(z) \quad (1.22)$$

Trong đó, ai là các hằng số chưa biết, các hàm $\varphi_i(z)$ cần phải chọn sao cho thoả mãn toàn bộ (hoặc một phần) điều kiện biên (động học và tĩnh học) của bài toán.

1.6.3. Phương pháp Lagrange - Ritz:

Phương pháp Lagrange - Ritz được xây dựng trên cơ sở nghiên cứu thế năng toàn phần của hệ

[Nội dung nguyên lý Lagrange được phát biểu như sau trong tất cả các trạng thái khả dĩ, trạng thái cân bằng dưới tác dụng của các lực có thể sẽ tương ứng với trạng thái mà theo đó, thế năng toàn phần của hệ sẽ có giá trị dừng: $\delta U = 0$

Thế năng biến dạng được biểu diễn dưới dạng công ngoại lực và công nội lực của hệ khi chuyển từ trạng thái biến dạng về trạng thái không biến dạng

$$U = \int_0^l \frac{EJ(z)}{2} \left[\frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial z^2} \right]^2 dz - \int_0^l q(z,t) y(z,t) dz - \sum P_{i(t)} y_{z_i(t)}$$

trong đó: $q(z, t)$ và $p_i(t)$ bao gồm các lực kích thích và lực quán tính do các khối lượng phân bố và tập trung gây ra khi hệ dao động. Với bài toán dao động riêng, giả thiết dạng chính của dao động:

$$y_j(z) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(z)$$

Trong đó, các hàm $\varphi_i(z)$ thoả mãn điều kiện biên động học (còn điều kiện biên tĩnh học đã tự thoả mãn trong các biểu thức thế năng).

Từ điều kiện thế năng của hệ có giá trị dừng, ta có: $\frac{\partial U}{\partial a_k} = 0$ (với $k = \overline{1..n}$)

Từ đó nhận được n phương trình chính tắc chứa a_1, a_2, \dots, a_n .

1.6.4. Phương pháp thay thế khối lượng:

Phương pháp này dựa trên cơ sở đơn giản hoá sơ đồ khối lượng: thay thế các khối lượng phân bố và tập trung trên kết cấu thành các khối lượng tập trung với số lượng ít hơn đặt tại một số điểm đặc biệt.

Có thể chia các khối lượng phân bố thành nhiều khoảng, tập trung các khối lượng phân bố trên mỗi khoảng về trọng tâm của nó hoặc phân bố các khối lượng theo nguyên tắc đòn bẩy: khối lượng phân bố trên mỗi đoạn được thay thế bằng hai khối lượng đặt ở hai đầu đoạn đó.

1.6.5. Phương pháp khối lượng tương đương:

Phương pháp này được xây dựng trên giả thiết: “Hai hệ tương đương về động năng thì cùng tương đương về tần số”. Váí phương pháp này, ta phải chọn trước đường đàn hồi $y(z)$ và chỉ tính được tần số thấp nhất của hệ thực

1.6.6. Các phương pháp số' trong động lực học công trình:

1.6.6.1. Phương pháp sai phân:

Là phương pháp giải gần đúng phương trình vi phân của dao động bằng giải hệ phương trình sai phân. Chia hộ thành n phần tử, tại mỗi điểm chia, thay đạo hàm bằng các sai phân để lập phương trình sai phân tương ứng. Kết quả thu được là hệ phương trình đại số tuyến tính với các ẩn số là giá trị nghiệm của phương trình vi phân tại điểm chia và các giá trị nghiệm tại một vài điểm chia lân cận. Phương pháp này cho phép dễ dàng giải bài toán dao động của hệ có các thông số thay đổi: tiết diện, khối lượng, tải trọng...

1.6.6.2. Phương pháp phần tử hữu hạn:

Hệ được rời rạc hoá thành các phần tử hữu hạn, sau đó xem các phần tử hữu hạn được nối lại với nhau tại một số điểm quy định (thường là đỉnh của mỗi phần tử) gọi là nút và tạo thành lưới phần tử hữu hạn. Tính liên tục về biến dạng của hệ được thể hiện qua chuyển vị, đạo hàm của chuyển vị tại các nút của lưới phần tử hữu hạn.

Số phần tử hữu hạn (hay số lượng ẩn số) là các chuyển vị tại nút của lưới phần tử hữu hạn. Lưới phần tử hữu hạn càng mau thì càng làm việc sát hệ thực và mức độ của kết quả tính càng cao.

Vectơ chuyển vị nút của lưới phần tử hữu hạn: $\{Y\} = \{y_1 y_2 \dots y_n\}$

Hệ phương trình vi phân biểu thị dao động của lưới phần tử hữu hạn có kể đến lực cản đàn nhớt tại thời điểm t bất kỳ:

$$[M]\{Y''(t)\} + [C]\{Y'(t)\} + [K]\{Y(t)\} = \{P(t)\}$$

1.6.6.3. Phương pháp tích phân trực tiếp:

Phương pháp tích phân trực tiếp không những cho phép giải các bài toán dao động tuyến tính mà còn cho phép giải các bài toán dao động phi tuyến phức tạp. Gồm có các phương pháp sau:

+ Phương pháp gia tốc tuyến tính (Phương pháp Viison): phương pháp này xem rằng: sự thay đổi của gia tốc chuyển động trong mỗi bước thời gian từ t đến $(t + \Delta t)$ là tuyến tính.

+ Phương pháp sai phân trung tâm: thực chất của phương pháp là chia bước, tích phân trực tiếp hệ phương trình vi phân trong từng khoảng chia Δt (giải bài toán tĩnh trong từng bước chia thời gian Δt nhưng có kể đến lực quán tính và lực cản, đồng thời phương trình cân bằng được giải nhiều lần đối với các điểm chia trong khoảng thời gian dao động).

Giá trị gia tốc của chuyển vị được xem là không đổi trong phạm vi hai bước chia thời gian và được xác định:

$$\{Y''(t)\} = \frac{1}{\Delta t^2} [\{Y(t - \Delta t)\} - 2\{Y(t)\} + \{Y(t + \Delta t)\}]$$

+ Phương pháp gia tốc trung bình không đổi (phương pháp Neimark):

Phương pháp này giả thiết rằng: ở mỗi bước thời gian Δt , gia tốc chuyển động bằng hằng số và được tính bằng giá trị trung bình hai giá trị đầu và cuối của khoảng Δt :

$$\{Y''(t + \tau)\} = \frac{\{Y''(t + \Delta t)\} + Y''(t)}{2} \text{ với } (0 \leq \tau \leq \Delta t)$$

1.7. Một số nhận xét:

+ Bài toán động lực học công trình nghiên cứu phản ứng của hệ kết cấu khi chịu tải trọng động (mà tải trọng tĩnh chỉ là trường hợp đặc biệt). Có nhiều phương pháp để giải bài toán dao động nhưng có thể nói, các phương pháp đều xuất phát từ nguyên lý năng lượng. Xuất phát từ điều kiện dừng của phiếm hàm của thế năng toàn phần của hệ: $\delta U = 0$, nếu lấy biến phân của phiếm hàm theo chuyển vị thì ta nhận được các phương trình cân bằng, nếu lấy biến phân của phiếm hàm theo lực thì ta được các phương trình biến dạng.

+ Việc xác định các tần số dao động riêng và các dạng dao động riêng của bài toán dao động (tương ứng với bài toán xác định các trị riêng và vecto riêng của đại số tuyến tính) là một nhiệm vụ quan trọng của bài toán dao động.

Bài toán riêng: $[K - \lambda M] A = 0$ (với $\lambda = \omega^2$) tương ứng với việc tìm trị riêng λ sao cho $[K - \lambda M] = 0$ hay $\det[K - \lambda M] = 0$. Đây là bài toán lớn (đa thức bậc n , với n là bậc tự do của hệ), có nhiều thuật toán để giải nhưng phức tạp. Việc thiết lập ma trận độ cứng K và đưa về dạng ma trận đường chéo là tương đối khó khăn đối với hệ có nhiều bậc tự do.

CHƯƠNG 2.

PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN LÝ CỰC TRỊ GAUSS ĐỐI VỚI CÁC BÀI TOÁN ĐỘNG LỰC HỌC CỦA DÀM

2.1. Nguyên lý cực trị Gauss

Nguyên lý này được nhà toán học người Đức K.F. Gauss phát biểu năm 1829 cho hệ chất điểm, nguyên văn như sau:

Tại mỗi thời điểm, chuyển động của một hệ chất điểm - liên kết tùy ý và chịu tác dụng bất kỳ - sẽ xảy ra rất gần với chuyển động mà các chất điểm đó có trong trường hợp chúng được tự do; nghĩa là chuyển động đó xảy ra với một lượng cưỡng bức ít nhất có thể nếu như ta coi độ đo của sự cưỡng bức là tổng các tích số giữa khối lượng của mỗi chất điểm với bình phương độ lệch của vị trí chất điểm đó so với vị trí mà nó chiếm được nếu như nó được tự do [12, tr.45].

Độ lệch về vị trí của chất điểm thứ i khối lượng m_i được nói đến trong

nguyên lý Gauss là:
$$\Delta_i = \left(y_i'' - \frac{F_i}{m_i} \right)$$

Trong đó: F_i - véctơ lực tác động vào chất điểm khi có liên kết.

y_i'' - véctơ gia tốc chuyển động của chất điểm khi nó được giải phóng khỏi liên kết.

Nếu hệ có n chất điểm, lượng cưỡng bức của hệ (so với chuyển động tự do) là:

$$Z = \sum_i^n m_i \Delta_i^2 = \sum_i^n m_i \left(y_i'' - \frac{F_i}{m_i} \right)^2$$

Theo nguyên lý cực trị Gauss, chuyển động thực của hệ chất điểm sẽ xảy ra ứng với lượng cưỡng bức cực tiểu, nghĩa là với điều kiện:

$$Z \rightarrow \min \text{ hay } \delta Z = 0 \tag{2.1}$$

Biến phân trong (2.1) được lấy với gia tốc, hay còn gọi là biến phân theo kiểu Gauss.

2.2. Sử dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss để giải bài toán cơ học kết cấu:

GS.TSKH. Hà Huy Cương là người đề xuất phương pháp sử dụng nguyên lý cực trị Gauss để giải bài toán cơ học vật rắn biến dạng.

2.2.1 Bài toán dầm chịu uốn thuần túy:

Xét một dầm chịu uốn thuần túy có chiều dài 1, độ cứng mặt cắt là EJ_x . Giả thiết vật liệu làm việc trong giới hạn đàn hồi và tuân theo hai giả thiết sau: + Giả thiết về mặt cắt ngang (giả thiết Becnuli): mặt cắt ngang dầm trước và sau khi biến dạng vẫn phẳng và vuông góc với trục dầm.

+ Giả thiết về các thớ dọc: trong quá trình biến dạng, các thớ dọc không ép lên nhau và không đẩy xa nhau.

Từ đó ta có phương trình vi phân gần đúng của đường đàn hồi:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M_x}{EJ_x}$$

Mômen uốn tại mặt cắt z nào đó được xác định theo công thức:

$$M_x(z) = - EJ_x \frac{d^2 y}{dz^2}$$

Liên tưởng đến định luật II Newton:

$$F = - ma$$

Vì vậy, một cách tương tự toán học, có thể xem:

+ Mômen uốn M_x tại mặt cắt đang xét là lực tác dụng.

+ Độ cứng mặt cắt EJ_x của dầm khi uốn là khối lượng.

+ $\frac{d^2 y}{dz^2}$ như là gia tốc chuyển động của dầm.

Chọn dầm so sánh (có thể chịu liên kết khác) nhưng giống dầm thực về độ cứng mặt cắt và tải trọng.

Gia tốc của dầm so sánh sẽ là $\frac{d^2 y_0}{dz^2}$ với y_0 là độ võng của dầm so sánh.

Lượng cường bức được viết như sau:

$$Z = \int_0^l EJ_x \left(\frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{d^2 y_0}{dz^2} \right)^2 dz \quad (2.2)$$

$$\text{hay } Z = \int_0^l \frac{1}{EJ_x} (M_x - M_x^0)^2 dz \quad (2.3)$$

trong đó M_x^0 là momen uốn của dầm so sánh.

Chuyển động của dầm đang xét rất gần với chuyển động tự do nếu $Z \rightarrow \min$ hay $\delta Z = 0$.

* Khi hệ so sánh không có liên kết thì $M_x^0 = 0$, công thức (2.3) được viết lại

$$\text{nư sau: } Z = \int_0^l \frac{1}{EJ_x} (M_x)^2 dz \quad (2.4)$$

$$\text{hay } Z = \int_0^l EJ_x \left(\frac{d^2 y}{dz^2} \right)^2 dz \quad (2.5)$$

+ Khi trên dầm có lực phân bố đều q trên toàn bộ chiều dài Z_1 :

$$Z = \int_0^l \left[EJ_x \left(\frac{d^2 y}{dz^2} \right)^2 - 2qy \right] dz$$

+ Khi trên dầm có lực tập trung P tại vị trí z_1 nào đó:

$$Z = \int_0^l EJ_x \left(\frac{d^2 y}{dz^2} \right)^2 dz - 2Py_{(z_1)}$$

+ Khi trên dầm có mômen tập trung M tại vị trí z_2 nào đó:

$$Z = \int_0^l EJ_x \left(\frac{d^2 y}{dz^2} \right)^2 dz - 2M\varphi_{(z_2)}$$

Trong đó $\varphi(z_2)$ là góc xoay tại tiết diện có mômen tập trung. Với giả thiết chuyển vị bé, ta có: $\varphi(z_2) = y'(z_2)$.

Bài toán dầm phẳng:

Dầm có các thành phần nội lực là M_x, Q_y, N_z . Chuyển vị trong trường hợp uốn là độ võng, độ cứng mặt cắt là EJ_x . Chuyển vị trong trường hợp cắt là sự trượt, độ cứng mặt cắt là GF . Chuyển vị trong trường hợp kéo (hoặc nén) là sự dãn dài (hoặc co ngắn), độ cứng mặt cắt là EF . Kể đến tính chất độc lập tác dụng của các đại lượng trên, ta có lượng cưỡng bức được viết như sau:

$$Z = \int_0^1 \left[\frac{1}{EJ_x} (M_x - M_x^0)^2 + \frac{1}{GF} (Q_y - Q_y^0)^2 + \frac{1}{EF} (N_z - N_z^0)^2 \right]$$

trong đó M_x^0, Q_y^0, N_z^0 là các thành phần nội lực của dầm so sánh.

* Khi hệ so sánh không có liên kết (các thành phần nội lực của hệ so sánh bằng không), công thức (2.9) trở thành:

$$Z = \int_0^1 \left[\frac{1}{EJ_x} (M_x)^2 + \frac{1}{GF} (Q_y)^2 + \frac{1}{EF} (N_z)^2 \right] dz \tag{2.10}$$

Nếu tải trọng vuông góc với trục thanh ($N_z = 0$) thì (2.10) được viết như sau:

2.3. Sử dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss để giải bài toán động lực học:

Xét một dầm chịu tải trọng động, dầm có chiều dài 1, khối lượng của dầm là $m(z)$, độ cứng mặt cắt là EJ_x .

Phương trình độ võng của dầm có dạng: $y = y(z,t)$ phải thỏa mãn điều kiện biên và điều kiện ban đầu (nếu có).

khi dầm chịu tải trọng động thì để xuất hiện thêm thành phần lực quán tính ngược chiều với gia tốc của hệ:

$$F^{qt} = -m_{(z)} \frac{\partial^2 y_{(z,t)}}{\partial t^2}$$

Coi lực quán tính cũng như ngoại lực(theo nguyên lý D' Alembert) ta có lượng cưỡng bức do lực quán tính gây ra:

$$Z^{qt} = \int_0^l -2F^{qt} y_{(z,t)} dz$$

Để thuận tiện trong công thức, ta có thể viết lại lượng cường bức do lực quán tính gây ra như sau:

$$Z_{qt} = \int_0^l 2F_{qt} y_{(z,t)} dz \quad \text{với} \quad F^{qt} = m(z) \frac{\partial^2 y_{(z,t)}}{\partial t^2}$$

Bài toán dầm chịu uốn thuần túy:

Xét dầm chịu tải trọng động, dầm có khối lượng phân bố $m(z)$. Khi bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt, ta có dầm chịu uốn thuần túy.

Chọn hệ so sánh không có liên kết, lượng cường bức được viết như sau:

$$Z = \int_0^l \left[EJ_x \left(\frac{\partial^2 y_{(z,t)}}{\partial z^2} \right)^2 + 2F^{qt} y_{(z,t)} \right] dz$$

Chuyển động của dầm đang xét sẽ rất gần với chuyển động tự do nếu như lượng cường bức đạt cực tiểu ($Z \rightarrow \min$) hay $\delta Z = 0$.

Bài toán dầm phẳng:

Xét trường hợp tải trọng tác động vuông góc với trục dầm ($N_z = 0$). Khi hệ so sánh không có liên kết, lượng cường bức được viết như sau:

$$Z = \int_0^l \left[\frac{1}{EJ} (M_x)^2 + \frac{1}{GF} (Q_y)^2 + 2F^{qt} y_{(z,t)} \right] dz \quad (2.14)$$

hay:

$$Z = \int_0^l \left[EJ_x \left\{ \frac{\partial^2 y_{(z,t)}}{\partial z^2} \right\}^2 + \frac{1}{GF} \left\{ EJ_x \frac{\partial^3 y_{(z,t)}}{\partial z^3} \right\} + 2F^{qt} y_{(z,t)} \right] dz \quad (2.15)$$

2.4. Sử dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss thiết lập phương trình vi phân dao động cho thanh thẳng:

Xét thanh thẳng có khối lượng phân bố $m(z)$, độ cứng mặt cắt là EJ_x và có liên kết bất kỳ. Hệ so sánh được chọn là một thanh không có liên kết, có khối lượng và độ cứng mặt cắt như thanh đang xét. Theo (2.13) ta có:

$$Z = \int_0^l \left[EJ_x \left(\frac{\partial^2 y_{(z,t)}}{\partial z^2} \right) + 2F^{qt} y_{(z,t)} \right] dz$$

Chuyển động thực của thanh đang xét rất gần với chuyển động tự do nếu lượng cưỡng bức cực tiểu ($Z \rightarrow \min$) hay $\delta Z = 0$ vậy:

$$\delta Z = \delta \left\{ \int_0^l \left[EJ_x \left(\frac{\partial^2 y_{(z,t)}}{\partial z^2} \right) + 2F^{qt} y_{(z,t)} \right] dz \right\} = 0$$

Hay:
$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[2EJ_x \left(\frac{\partial^2 y_{(z,t)}}{\partial z^2} \right) \right] + 2F^{qt} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[EJ_x \left(\frac{\partial^2 y_{(z,t)}}{\partial z^2} \right) \right] + m_{(z)} \frac{\partial^2 y_{(z,t)}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.16)$$

(2.16) chính là phương trình vi phân của dao động riêng khi không kể lực cản.

* Khi thanh chịu lực phân bố $q(z,t)$

$$Z = \int_0^l \left[EJ_x \left(\frac{\partial^2 y_{(z,t)}}{\partial z^2} \right) + 2F^{qt} y_{(z,t)} - 2q_{(z,t)} y_{(z,t)} \right] dx \rightarrow \min$$

Hay
$$\delta Z = \delta \left\{ \int_0^l \left[EJ_x \left(\frac{\partial^2 y_{(z,t)}}{\partial z^2} \right)^2 + 2F^{qt} y_{(z,t)} - 2q_{(z,t)} y_{(z,t)} \right] dx \right\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[2EJ_x \left(\frac{\partial^2 y_{(z,t)}}{\partial z^2} \right) \right] + 2F^{qt} - 2q_{(z,t)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[EJ_x \left(\frac{\partial^2 y_{(z,t)}}{\partial t^2} \right) \right] + m_{(z)} \frac{\partial^2 y_{(z,t)}}{\partial t^2} = q_{(z,t)} \quad (2.17)$$

(2.17) chính là phương trình vi phân của dao động cưỡng bức khi không kể lực cản.

*** Kết luận:**

Như vậy từ phương pháp sử dụng nguyên lí cực trị Gauss, ta có thể thiết lập được phương trình vi phân của hệ dao động giống như việc áp dụng các phương pháp khác.

2.5. Các bước thực hiện khi tìm tần số dao động riêng và dạng dao động riêng bằng phương pháp nguyên lí cực trị Gauss.

Trong quá trình tính toán, ta không xét đến giai đoạn chuyển tiếp sau khi bỏ lực kích thích và bỏ qua chuyển vị xoay của các khối lượng trong quá trình chúng dao động.

Bước 1: Chọn hệ so sánh:

Hệ "So sánh" là hệ hoàn toàn không có liên kết nhưng có cùng độ cứng mặt cắt và cùng tải trọng với hệ đang xét (hệ đang xét hay còn gọi là hệ cho).

Bước 2: Giả thiết đường độ võng của dầm cần tìm với biểu thức đường độ võng phải thoả mãn điều kiện biên.

Chẳng hạn, biểu thức đường độ võng có thể viết dưới dạng đa thức, chuỗi lượng giác đơn hoặc dạng số phức:

Dạng đa thức:

$$y = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \sin \omega t = (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \dots) \sin \omega t$$

Dạng chuỗi lượng giác đơn: $y = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi z}{1} \right) \sin \omega t$

Dạng số phức: $y = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi z}{1} \right) e^{i\omega t}$

Bước 3: Viết biểu thức lượng cưỡng bức của hệ theo (2-13), (2-14) hoặc (2-15).

Bước 4: Viết các điều kiện về động học thể hiện sự sai khác giữa hệ cho và hệ so sánh. Điều kiện biên chính là các ràng buộc dưới dạng đẳng thức.

Ngoài ra, ta phải đưa thêm ràng buộc, đó là điều kiện có nghiệm (tức là hệ phải có dao động).

Bước 5: Cực tiểu hoá lượng cưỡng bức.

Đối với bài toán cực trị có các điều kiện ràng buộc, ta sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange để đưa bài toán cực trị không ràng buộc.

Gọi λ_k là nhân tử Lagrange để đưa bài toán cực trị có điều kiện ràng buộc (đó là điều kiện có nghiệm, tức là có dao động) về bài toán cực trị không ràng buộc. Sau khi cực tiểu hoá lượng cưỡng bức theo các thành phần cơ bản, nhận được biểu thức λ_k có chứa tần số dao động riêng ϖ

Bước 6: Cho $\lambda_k = 0$, nhận được các giá trị tần số dao động riêng ϖ . Ứng với các giá trị ϖ , ta có các dạng dao động riêng.

CHƯƠNG 3

TÍNH TOÁN DAO ĐỘNG của THANH

Bài toán động lực học là bài toán xét khối lượng của thanh và do đó phải xét thêm lực quán tính bằng cách sử dụng nguyên lý D’Alambert. Do có lực quán tính, thanh có thể chuyển động xung quanh vị trí cân bằng tĩnh của nó. Chuyển động xung quanh vị trí cân bằng tĩnh được gọi là dao động. Trong trường hợp không có lực cản (ví dụ, lực ma sát trong thanh hoặc lực cản môi trường) thì dao động được duy trì. Khi có lực cản thì thanh dao động với biên độ giảm dần, được gọi là dao động tắt dần. Nếu như biên độ dao động tăng theo thời gian thì thanh có thể bị phá hỏng khi biên độ đạt độ lớn nào đó. Trong luận văn này, tác giả sẽ nghiên cứu bài toán dao động ngang khi có lực dọc P đặt ở đầu thanh. Trường hợp lực $P=0$ ta có bài toán dao động tự do. Vì vậy trong chương này lần lượt trình bày các vấn đề sau: dao động tự do của thanh, dao động của thanh khi có lực P là hằng đối với thời gian t , dao động của thanh khi P là hàm tuần hoàn của thời gian t ($P = P_0 + P_1 \cos(\theta t)$).

3.1. Dao động tự do của thanh

Xét thanh thẳng, có tiết diện không đổi, có khối lượng m phân bố đều trên thanh. Khi có chuyển vị ngang, thì ngoài nội lực M và Q , còn phải xét đến lực quán tính f_m . Lực quán tính f_m bằng tích của khối lượng với gia tốc của chuyển động và có phương tác dụng là phương của chuyển động (phương của độ võng) của thanh. Như vậy, lực quán tính có tác dụng giống như lực ngang, trong trường hợp này là lực ngang phân bố, đặt tại trục thanh. Nếu khối lượng m phân bố trên chiều cao của tiết diện thanh thì do tiết diện thanh bị xoay, còn có lực quán tính xoay của tiết diện thanh. Để đơn giản nghiên cứu, ta không xét lực quán tính xoay này.

Với nguyên lý D’Alambert, xem lực quán tính f_m như là ngoại lực cản tác dụng lên thanh, và vì lực quán tính là hàm của thời gian nên hàm độ võng và các hàm nội lực trong thanh đều là hàm của tọa độ và thời gian: $W = W(x, t)$ là hàm độ võng, $M = M(x, t)$ là hàm momen uốn.

Lực quán tính của thanh được tính như sau

$$f_m = m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

Xem lực quán tính f_m như là ngoại lực cân phân bố tác dụng lên thanh, viết ngay được phương trình vi phân cân bằng

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + f_m = 0 \quad (3.2a)$$

Góc xoay do momen uốn θ , biến dạng uốn χ và nội lực momen xác định theo các biểu thức sau

$$\theta = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \chi = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad M = -EJ\chi \quad (3.3)$$

Đưa các biểu thức (3.1) và (3.3) vào (3.2) nhận được

$$EJ \left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \right) + m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \quad (3.4a)$$

Nghiệm của hệ (3.4) có thể viết dưới dạng

$$W(x, t) = y(x) \cos(\omega t) = y \cos(\omega t) \quad (3.5)$$

Khi đó hệ (3.4) có dạng

$$\left(EJ \left(\frac{d^4 y}{dx^4} \right) - m\omega^2 y \right) \cos(\omega t) = 0 \quad (3.6)$$

Vì thành phần trong ngoặc không phụ thuộc t nên hệ (3.6) được giản hóa như sau

$$EJ \left(\frac{d^4 y}{dx^4} \right) - m\omega^2 y = 0 \quad (3.7)$$

Hai hàm $y = y(x)$ là hàm của tọa độ x . Phương trình (3.7) không phụ thuộc vào biến t , là phương trình vi phân tuyến tính có hệ số không đổi, đây chính là phương trình dao động của thanh theo lý thuyết dầm Euler-Bernoulli, giải phương trình này tìm được độ võng y .

Phương pháp chung để giải (3.7) là giải phương trình đặc trưng của chúng và xây dựng nghiệm y trên cơ sở các nghiệm (trị riêng) của các phương trình đặc trưng. Tuy nhiên, ta sẽ dùng phương pháp chuyển vị cưỡng bức để giải.

Khi xây dựng bài toán theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, có thể dùng các đại lượng biến phân (chuyển vị ảo và biến dạng ảo) không phụ thuộc thời gian

$$\theta_x = \frac{\partial y}{\partial x_x}, \quad \chi_x = -\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad (3.8)$$

Kí tự x ở chân các đại lượng để chỉ rằng đại lượng chỉ phụ thuộc x .

Bài toán dao động tự do của thanh được dẫn về bài toán tìm cực tiểu của lượng cưỡng bức chuyển động tại *một thời điểm t bất kì*:

$$Z = \int_0^l M[\chi_x] dx + \int_0^l f_m[y] dx \rightarrow \min \quad (3.9)$$

Đại lượng trong ngoặc vuông của phiếm hàm (3.9) là đại lượng biến phân.

Từ điều kiện cực tiểu

$$\delta Z = \int_0^l M \delta[\chi] dx + \int_0^l f_m \delta[W] dx = 0 \quad (3.10)$$

và dùng phép tính biến phân sẽ nhận được lại hai phương trình (3.6) và vì bài toán tuyến tính theo t nên lại có hệ (3.7).

Như vậy, bài toán dao động tự do của thanh bằng cách dùng biến đổi (3.5) dẫn về giải (3.7) là hệ không chứa biến t . Nghiệm $y \neq 0$ (nghiệm không tầm thường) của (3.7) tùy thuộc vào các thông số m , EJ , ω và chiều dài thanh. Thông thường, các thông số m , EJ và chiều dài thanh đã biết nên tần số là hàm của các đại lượng này.

Sử dụng các đại lượng không chứa biến thời gian t , bài toán (3.9) có dạng

$$Z = \int_0^l M_x[\chi_x] dx + \int_0^l f_x[y] dx \rightarrow \min \quad (3.11)$$

ở đây
$$M_x = EJ \varphi_x, \quad f_x = -m \omega^2 y \quad (3.12)$$

Để giải bài toán (3.11) ta dùng phương pháp chuyển vị cưỡng bức bằng cách cho một điểm nào đó của thanh, ví dụ điểm x_1 , chuyển vị cưỡng bức y_0 .

$$g_1 = y(x_1) - y_0 = 0 \quad (3.13)$$

Bài toán cực tiểu (3.11) với ràng buộc (3.13) là bài toán tĩnh tính thanh chịu chuyển vị cưỡng bức tại điểm x_1 , có ẩn là tần số ω cho nên có thể được gọi là bài toán dao động tự do của thanh. Viết phiếm hàm Lagrange mở rộng F của (3.11) và (3.13), ta có điều kiện cực trị

$$\delta F = \int_0^l M_x \delta \left[-\frac{d^2 y}{dx^2} \right] dx + \int_0^l f_x \delta [y] dx + \delta [\lambda . g1] = 0 \quad (3.14)$$

λ trong (3.14) là thừa số Lagrange và là ẩn mới của bài toán. Từ (3.14) nhận được hai phương trình cân bằng (hai phương trình Euler) :

$$EJ \left(\frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{\alpha}{GF} \frac{d^3 Q}{dx^3} \right) - m\omega^2 y = \begin{cases} -\lambda, & x = x_1 \\ 0, & x \neq x_1 \end{cases} \quad (3.15)$$

cùng với phương trình (3.13). Hệ phương trình (3.15) có vẻ phải là λ .

Xét về cơ học, λ có thứ nguyên là lực và đó là lực giữ để chuyển vị tại điểm $x=x_1$ của thanh bằng chuyển vị cưỡng bức y_0 (phương trình (3.13)). Lực giữ do ta đưa vào nên phải bằng không. Về toán học thì phương trình dao động là phương trình không có vế phải (hệ (3.7)) cho nên λ cũng phải bằng không. Vì vậy ta có

$$\lambda = 0 \quad (3.16)$$

Nghiệm của phương trình (3.16) cũng là nghiệm của vế trái (3.15) hoặc của hệ (3.7). Như vậy, phương trình (3.16) là phương trình đa thức xác định trị riêng, khi hàm $y(x)$ thỏa mãn các điều kiện biên thì nó là phương trình đa thức xác định tần số riêng của dao động tự do của thanh. Trong trường hợp này λ là hàm của ω , $\lambda = \lambda(\omega)$.

Bài toán dao động tự do của thanh được đưa về bài toán (3.11) với ràng buộc (3.13) và sẽ được giải trực tiếp trên phiếm hàm Lagrange mở rộng để tìm được hàm $\lambda(\omega)$, giải phương trình (3.16) sẽ nhận được các tần số riêng. Chú ý, λ là thừa số Lagrange của ràng buộc (3.13).

Ta đang xét trường hợp khối lượng phân bố đều trên thanh. Bài toán có vô số bậc tự do nên có vô số tần số riêng. Chúng tạo thành *dải tần số riêng dao động* của thanh có biên dưới là tần số cơ bản và biên trên là vô cùng lớn, $\omega \rightarrow \infty$. Các thanh

có liên kết khác nhau sẽ dao động với tần số riêng khác nhau. Tần số riêng dao động tự do của thanh có các điều kiện liên kết khác nhau được tính theo phương pháp chuyển vị cưỡng bức được trình bày dưới đây.

3.2. Các ví dụ tính toán

Ví dụ 3.2.1. Thanh ngàm-tự do

Xét thanh thẳng có liên kết một đầu ngàm, đầu kia tự do, tiết diện không đổi, chiều dài l , độ cứng uốn EJ (hình 3.1).

Ta tìm hàm độ võng của thanh dưới dạng đa thức :

$$y(x,t) = y(x) \cos(\omega t) ,$$

$$y(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7 + a_8x^8 + a_9x^9$$

(a)

Các hệ số a_i ($i=1:9$), là các hệ số cần tìm. Dựa vào biểu thức (3.1) hoặc (3.11) tính lực quán tính

$$f_m = m \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} = -m\omega^2 y(x) = -EJ \frac{m\omega^2}{EJ} y(x) = -EJ \cdot k_1^2 y(x) \quad (b)$$

$$k_1^2 = \frac{m\omega^2}{EJ} \quad \omega = k_1 \sqrt{\frac{EJ}{m}} \quad (c)$$

Sau này thay cho tần số ω ta sẽ dùng k_1 để tính lực quán tính (biểu thức (b)). Biết được trị số k_1 thì tính được tần số ω theo biểu thức (c).

Biến dạng trượt, góc xoay do momen uốn, biến dạng uốn và nội lực momen uốn của thanh xác định theo các biểu thức (3.11).

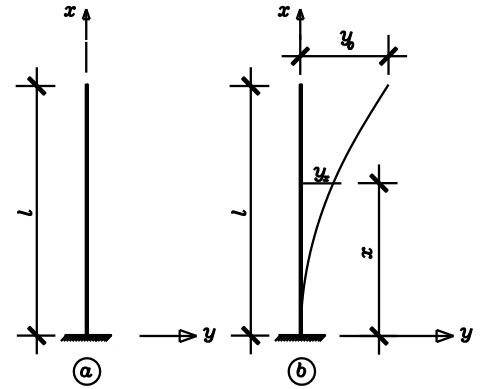
Theo biểu thức (3.12) ta xây dựng bài toán dao động tự do của thanh như sau

$$Z = \int_0^l M_x \left[-\frac{d^2 y(x)}{dx^2} \right] dx + \int_0^l f_x [y(x)] dx \rightarrow \min \quad (d)$$

Đại lượng $\cos(\omega t)$ là thừa số chung của (d) nên đã giản ước. Bài toán tìm cực trị (d) phải thỏa mãn các điều kiện sau

- Góc xoay (do momen uốn) tại ngàm ($x=0$) bằng không

$$g1 = \text{subs}(\theta, x, 0) = \text{subs}\left(\frac{dy(x)}{dx}, x, 0\right) = 0 \quad (e)$$



Hình 3.1. Thanh ngàm - Tự do

- Momen uốn (hoặc biến dạng uốn) tại đầu tự do ($x=l$) bằng không

$$g2 = \text{subs}\left(-\frac{d^2 y(x)}{dx^2}, x, l\right) = 0 \quad (f)$$

- Ta cho đầu tự do ($x=l$) có chuyển vị cưỡng bức bằng y_0

$$g3 = \text{subs}(y(x), x, l) - y_0 = 0 \quad (h)$$

(hàm $\text{subs}(\text{biểu thức}, x, x_1)$ có nghĩa là thay biến x trong *biểu thức* bằng trị x_1).

Bài toán (d) với các ràng buộc (e), (f), (g) và (h) được đưa về bài toán cực trị không ràng buộc bằng cách viết thêm hàm Lagrange mở rộng

$$F = Z + Z1 \rightarrow \min \quad (i)$$

$$Z1 = \lambda_1 \cdot g1 + \lambda_2 \cdot g2 + \lambda_3 \cdot g3 + \lambda \cdot g4$$

Các hệ số $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda$ được gọi là các thừa số Lagrange và là 4 ẩn mới của bài toán. Tổng ẩn bài toán bao gồm a_i ($i=1:9$), và 3 thừa số Lagrange sẽ là 13 ẩn được đặt trong vector ẩn $S(i)$, $i=1:13$. Bài toán (i) là bài toán tối ưu thông số và điều kiện cực trị (3.14) bây giờ được viết như sau

$$\delta F = \int_0^l M \frac{\partial}{\partial s_i} \left[-\frac{d^2 y(x)}{dx^2} \right] dx + \int_0^l f_m \frac{\partial}{\partial s_i} [y(x)] dx + \frac{\partial}{\partial s_i} [Z1] = 0 \quad (i=1:13) \quad (j)$$

Hàm $y(x)$ và $Q(x)$ trong (j) xác định theo (a) còn M theo (3.11). Thực hiện các phép tính của (j) sẽ nhận được 13 phương trình đại số bậc nhất để tìm được 13 thông số của bài toán. Thông số λ liên quan đến chuyển vị cưỡng bức y_0 có dạng sau:

$$\lambda = 12626x10^{-3}/l^3 \text{ejy}_0 (.25628 \quad x10^{75} l^{20} k_1^{10} -.21081 \quad x10^{91} -.18661 \quad x10^{70} l^{24} k_1^{12} +.38162 \quad x10^{44} l^{36} k_1^{18} -.41532x10^{87} k_1^4 l^8 +.17564x10^{90} k_1^2 l^4 +.36456x10^{64} l^{28} k_1^{14} -.12506 \quad x10^{55} l^{32} k_1^{16} +.13382x10^{84} l^{12} k_1^6 -.10616x10^{80} l^{16} k_1^8) = 0 \quad (k)$$

Biểu thức (k) chỉ lấy đến 5 số sau dấu chấm và là đa thức bậc 18 đối với k_1 . Giải phương trình (k) theo k_1 : $\lambda(k_1) = 0$

Nhận được 18 trị k_1 . ở đây đưa ra 5 trị k_1 .

$$k_1 = 3.5160/l^2; 22.0344/l^2; 61.6968/l^2; 121.1579/l^2; 201.3142/l^2$$

Biết được k_1 , dựa vào biểu thức (c) để tính tần số riêng dao động tự do của thanh.

Tương ứng với 18 nghiệm k_1 ta xác định được 18 tần số dao động riêng của hệ theo công thức $\omega = k_1 \sqrt{\frac{EJ}{m}}$, ở đây chỉ đưa ra 3 tần số dao động riêng cơ bản đầu tiên ứng với 3 nghiệm k_1 đầu tiên là:

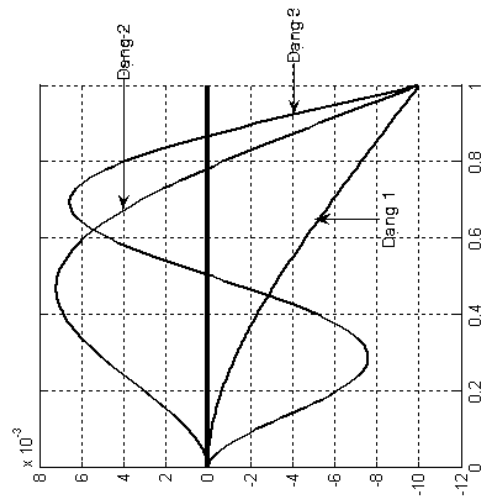
$$\omega_1 = k_{11} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 3,5160 \sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$$

$$\omega_2 = k_{12} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 22,0344 \sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$$

$$\omega_3 = k_{13} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 61,6968 \sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$$

So với lời giải không xét biến dạng trượt, 3 trị dương đầu tiên trong số 9 trị dương của k_1 có thể được xem là chính xác, trị thứ 4 và 5 có sai số nhỏ thua 1%, trị thứ sáu có sai số nhỏ thua 3%... Muốn có nhiều trị riêng chính xác hơn thì sử dụng các đa thức bậc cao hơn khi xấp xỉ các hàm y và Q hoặc chia thành nhiều đoạn tương tự như tính theo phần tử hữu hạn.

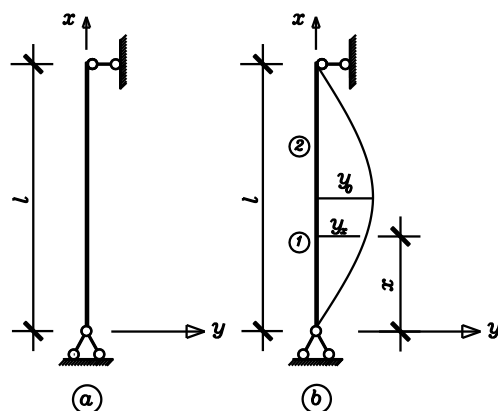
Khi giải hệ phương trình (j) ta cũng nhận được các thông số a_i ($i=1:9$) và b_j ($j=0:9$) và chúng đều là hàm của k_1 . Đưa các trị k_1 tìm được ở trên vào các thông số này và sử dụng các biểu thức (a) ta có các dạng dao động chính $y(x)$ của thanh và các dạng hàm lực cắt Q tương ứng (hình 3.2).



Hình 3.2. Ba dạng dao động riêng đầu tiên

3.2.2. Thanh hai đầu khớp

Xác định tần số và dạng dao động riêng của thanh hai đầu khớp. Thanh có khối lượng phân bố đều, tiết diện không đổi và có độ cứng uốn EJ (Hình 3.3). Nếu như tại điểm ($x=l_1$) cho lệch một đoạn y_0 nào đó thì thanh sẽ bị cong đi theo đường đàn hồi $y_1(x)$ và $y_2(x)$ như (hình 3.3b) do tác dụng của lực mômen uốn Py_1 và Py_2 .



Hình 3.3. Thanh hai đầu khớp

Gọi M_{1x} , M_{2x} là mômen uốn lần lượt trong đoạn 1 và 2 lúc này trạng thái cân bằng của thanh là trạng thái cân bằng nén uốn (hình 3.2b). Viết biểu thức đường độ võng và đường lực cắt cho các đoạn thanh dưới dạng đa thức như sau:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \sum_{i=1}^9 a_i x^i = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + a_7 x^7 + a_8 x^8 + a_9 x^9; \\ y_2 &= \sum_{i=0}^9 b_i x^i = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + b_5 x^5 + b_6 x^6 + b_7 x^7 + b_8 x^8 + b_9 x^9; \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

trong đó a_i ($i=1:9$), b_j ($j=0:9$), là các hệ số cần xác định.

Dựa vào biểu thức (3.1) tính lực quán tính trong từng đoạn thanh là

$$\left. \begin{aligned} f_{m1} &= m \frac{\partial^2 y_1(x,t)}{\partial t^2} = -m\omega^2 y_1(x) = -EJ \frac{m\omega^2}{EJ} y_1(x) = -EJk_1^2 y_1(x) \\ f_{m2} &= m \frac{\partial^2 y_2(x,t)}{\partial t^2} = -m\omega^2 y_2(x) = -EJ \frac{m\omega^2}{EJ} y_2(x) = -EJk_1^2 y_2(x) \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Trong đó:
$$k_1^2 = \frac{m\omega^2}{EJ} \quad \omega = k_1 \sqrt{\frac{EJ}{m}} \quad (c)$$

Sau này thay cho tần số ω ta sẽ dùng k_1 để tính lực quán tính (biểu thức (b)). Biết được trị số k_1 thì tính được tần số ω theo biểu thức (c).

Biến dạng uốn y , góc xoay do mômen uốn θ và nội lực mômen xác định theo các biểu thức sau

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \frac{\partial y_1}{\partial x} & \chi_{1,x} &= -\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} & M_{x1} &= -EJ\chi_1 \\ \theta_2 &= \frac{\partial y_2}{\partial x} & \chi_{2,x} &= -\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} & M_{x2} &= -EJ\chi_2 \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

Theo biểu thức (3.8) ta xây dựng bài toán dao động tự do của thanh như sau

$$Z = \int_0^{l_1} [M_{x1}](\chi_{1x})dx + \int_0^{l_2} [M_{x2}](\chi_{2x})dx + \int_0^{l_1} [EJk_1^2]y_1 dx + \int_0^{l_2} [EJk_1^2]y_2 dx \rightarrow \min \quad (e)$$

Bài toán tìm cực trị của (e) phải thoả mãn 6 điều kiện ràng buộc sau

- Mômen uốn tại đầu dưới đoạn 1(đầu khớp, tại x=0) bằng không

$$g_1 = \left(-\frac{d^2 y_1}{dx^2} \right)_{x=0} \quad (f)$$

- Chuyển vị tại cuối đoạn 1(tại x=l₁) bằng chuyển vị tại đầu đoạn 2

$$g_2 = y_1|_{x=l_1} - y_2|_{x=0} \quad (g)$$

- Góc xoay tại cuối đoạn 1(tại x=l₁) bằng góc xoay tại đầu đoạn 2

$$g_3 = \left(\frac{dy_1}{dx} \right)_{x=l_1} - \left(\frac{dy_2}{dx} \right)_{x=0}$$

(h)

- Chuyển vị tại cuối đoạn 2(tại x=l₂) bằng không

$$g_4 = y_2|_{x=l_2} = 0 \quad (i)$$

- Mômen uốn tại đầu trên đoạn 2(đầu khớp, tại x=l₂) bằng không

$$g_5 = \left(-\frac{d^2 y_2}{dx^2} \right)_{x=l_2} \quad (j)$$

- Tại điểm cuối đoạn 1(x=l₁) ta cho chuyển vị cưỡng bức bằng y₀

$$g_6 = y_1|_{x=l_1} - y_0 \quad (k)$$

Ta đưa bài toán tìm cực trị của (e) với 6 điều kiện ràng buộc (f), (g), (h), (i), (j) và (k) về bài toán cực trị không có ràng buộc bằng cách đưa thừa số Lagrange vào phiếm hàm mở rộng như sau:

$$F = Z + Z1 \rightarrow \min \quad (l)$$

$$Z1 = \sum_{k=1}^6 g_k \lambda_k$$

Các hệ số $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ được gọi là các thừa số Lagrange và là 6 ẩn mới của bài toán. Tổng ẩn bài toán bao gồm a_i ($i=1:9$), b_j ($j=0:9$), và 6 thừa số Lagrange sẽ là 25 ẩn được đặt trong vector ẩn $S(i)$, $i=1:25$. Bài toán (l) là bài toán tối ưu thông số và điều kiện cực trị (3.9) bây giờ được viết

$$\left. \begin{aligned} h_i &= \int_0^{l_1} [M_{x1}] \frac{\partial}{\partial a_i} (\chi_{x1}) dx + \int_0^{l_1} [f_{m1}] \frac{\partial}{\partial a_i} (y_1) dx + \frac{\partial}{\partial a_i} (Z1) = 0; & (i = 1:9) \\ u_i &= \int_0^{l_2} [M_{x2}] \frac{\partial}{\partial b_i} (\chi_{x2}) dx + \int_0^{l_2} [f_{m2}] \frac{\partial}{\partial b_i} (y_2) dx + \frac{\partial}{\partial b_i} (Z1) = 0; & (i = 0:9) \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_k} (g_k \lambda_k) &= 0; & k = 1:6. \end{aligned} \right\} \quad (m)$$

Từ điều kiện cực trị (m) của phiếm hàm mở rộng F ta sẽ nhận được 44 phương trình đại số tuyến tính để xác định 25 thông số của bài toán. Có thể giải bài toán trên bằng cách sử dụng phần mềm Symbolic của Matlab. Khi giải phương trình xong thấy rằng các thông số $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9, b_0, b_1, b_2, \dots, b_7$, và $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$ đều là hàm của k_1 . Lưu ý rằng λ_6 có thứ nguyên là lực và nó là lực giữ để có chuyển vị cưỡng bức y_0 tại vị trí cuối đoạn 1, đầu đoạn 2. Lực giữ phải bằng không cho nên giải phương trình $\lambda_6(k_1) = 0$ sẽ cho ta các k_1 .

Từ $k_1 = \sqrt{\frac{m\omega^2}{EJ}}$ ta sẽ tìm được các tần số dao động riêng ω_i cần tìm. Có thể nói

$\lambda_6(k_1) = 0$ cũng là đa thức đặc trưng của bài toán.

$$\begin{aligned} \lambda_6(k_1) &= .10101 \times 10^{-1} (.50560 \times 10^{91} k_1^{34} l^{68} - .43802 \times 10^{103} k_1^{32} l^{64} + .70097 \times 10^{114} k_1^{30} l^{60} - \\ &.56956 \times 10^{124} k_1^{28} l^{56} + .15514 \times 10^{134} k_1^{26} l^{52} - .16022 \times 10^{143} k_1^{24} l^{48} + .61290 \times 10^{151} k_1^{22} l^{44} - .82135 \\ &\times 10^{159} k_1^{20} l^{40} + .33561 \times 10^{167} k_1^{18} l^{36} - .33163 \times 10^{174} k_1^{16} l^{32} + .64742 \times 10^{180} l^{28} k_1^{14} - .30787 \\ &\times 10^{186} k_1^{12} l^{24} + .50809 \times 10^{191} k_1^{10} l^{20} - .30665 \times 10^{196} k_1^8 l^{16} + .65148 \times 10^{200} k_1^6 l^{12} - \\ &.41296 \times 10^{204} k_1^4 l^8 + .52715 \times 10^{207} k_1 l^4 - .47491 \times 10^{209}) = 0 \end{aligned} \quad (n)$$

Giải phương trình $\lambda_6(k_1) = 0$ theo k_1 ta nhận được 25 nghiệm k_1 và từ đó

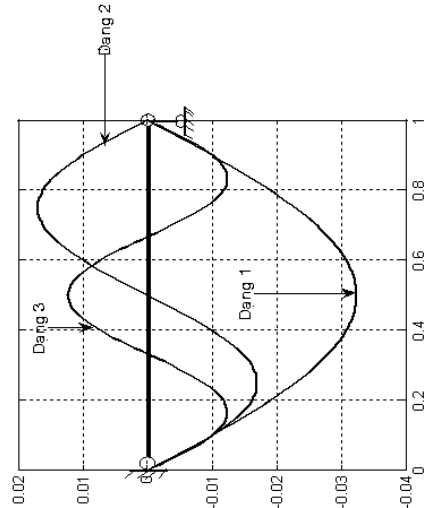
$$\omega_1 = k_{11} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 9,8695 \sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$$

xác định được 25 tần số dao động riêng của hệ, ở đây chỉ đưa ra 3 tần số dao động riêng cơ bản là:

$$\omega_2 = k_{12} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 39,4782 \sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$$

$$\omega_3 = k_{13} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 88,8300 \sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$$

Khi giải hệ phương trình (m) ta cũng nhận được các thông số a_i ($i=1:9$) và b_j ($j=0:9$) và chúng đều là hàm của k_1 . Đưa các trị k_1 tìm được ở trên vào các thông số này và sử dụng các biểu thức (a) ta có các dạng dao động chính $y(x)$ của thanh (hình 3.4).



Hình 3.4. Dạng dao động tự do của thanh hai đầu khớp

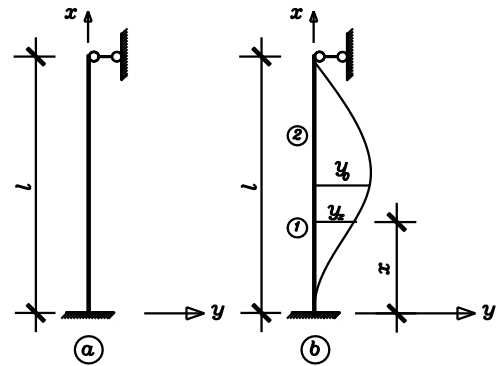
3.2.3. Thanh đầu ngàm - đầu khớp

Xác định tần số và dạng dao động riêng của thanh. Thanh có khối lượng phân bố đều, tiết diện không đổi và có độ cứng uốn EJ .

Nếu như tại điểm ($x=l_1$) cho lệch một đoạn y_0 nào đó thì thanh sẽ bị cong đi theo đường đàn hồi $y_1(x)$ và $y_2(x)$ như (hình 3.4b) do tác dụng của lực mômen uốn $P(y_1)$ và $P(y_2)$.

Gọi M_{1x} , M_{2x} là mômen uốn lần lượt trong

đoạn 1 và 2 lúc này trạng thái cân bằng của thanh là trạng thái cân bằng nén uốn (hình 3.4b). Viết biểu thức đường độ võng cho các đoạn thanh dưới dạng đa thức như sau:



Hình 3.4. Thanh ngàm - khớp

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \sum_{i=1}^9 a_i x^i = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + a_7 x^7 + a_8 x^8 + a_9 x^9; \\ y_2 &= \sum_{i=0}^9 b_i x^i = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + b_5 x^5 + b_6 x^6 + b_7 x^7 + b_8 x^8 + b_9 x^9; (0 \leq x \leq l_2) \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

trong đó a_i ($i=1:9$), b_j ($j=0:9$), là các hệ số cần xác định. Dựa vào biểu thức (3.1) tính lực quán tính trong từng đoạn thanh là

$$\left. \begin{aligned} f_{m1} &= m \frac{\partial^2 y_1(x,t)}{\partial t^2} = -m\omega^2 y_1(x) = -EJ \frac{m\omega^2}{EJ} y_1(x) = -EJk_1^2 y_1(x) \\ f_{m2} &= m \frac{\partial^2 y_2(x,t)}{\partial t^2} = -m\omega^2 y_2(x) = -EJ \frac{m\omega^2}{EJ} y_2(x) = -EJk_1^2 y_2(x) \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Trong đó:
$$k_1^2 = \frac{m\omega^2}{EJ} \quad \omega = k_1 \sqrt{\frac{EJ}{m}} \quad (c)$$

Sau này thay cho tần số ω ta sẽ dùng k_1 để tính lực quán tính (biểu thức (b)). Biết được trị số k_1 thì tính được tần số ω theo biểu thức (c).

Biên dạng trượt ó, biên dạng uốn ữ, góc xoay do momen uốn ô và nội lực momen xác định theo các biểu thức sau

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \frac{\partial y_1}{\partial x} & \chi_{1x} &= -\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} & M_{x1} &= -EJ\chi_{1x} \\ \theta_2 &= \frac{\partial y_2}{\partial x} & \chi_{2x} &= -\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} & M_{x2} &= -EJ\chi_{2x} \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

Theo biểu thức (3.8) ta xây dựng bài toán dao động tự do của thanh như sau

$$Z = \int_0^{l_1} [M_{x1}](\chi_{1x}) dx + \int_0^{l_2} [M_{x2}](\chi_{2x}) dx + \int_0^{l_1} [EJk_1^2] y_1 dx + \int_0^{l_2} [EJk_1^2] y_2 dx \rightarrow \min \quad (e)$$

Bài toán tìm cực trị của (e) phải thỏa mãn 6 điều kiện ràng buộc sau

- Góc xoay tại đầu ngàm (tại $x=0$) bằng không

$$g_1 = \left(\frac{dy_1}{dx} \right) \Big|_{x=0} \quad (f)$$

- Chuyển vị tại cuối đoạn 1 (tại $x=l_1$) bằng chuyển vị tại đầu đoạn 2

$$g_2 = y_1 \Big|_{x=l_1} - y_2 \Big|_{x=0} \quad (g)$$

- Góc xoay tại cuối đoạn 1 (tại $x=l_1$) bằng góc xoay tại đầu đoạn 2

$$g_3 = \left(\frac{dy_1}{dx} \right) \Big|_{x=l_1} - \left(\frac{dy_2}{dx} \right) \Big|_{x=0} \quad (h)$$

- Chuyển vị tại cuối đoạn 2(tại $x=l_2$) bằng không

$$g_4 = y_2 \Big|_{x=l_2} = 0 \quad (i)$$

- Mômen uốn tại đầu trên đoạn 2(đầu khớp, tại $x=l_2$) bằng không

$$g_5 = \left(-\frac{d^2 y_2}{dx^2} \right)_{x=l_2} \quad (j)$$

- Tại điểm cuối đoạn 1($x=l_1$) ta cho chuyển vị cưỡng bức bằng y_0

$$g_6 = y_1 \Big|_{x=l_1} - y_0 \quad (k)$$

Ta đưa bài toán tìm cực trị của (e) với 6 điều kiện ràng buộc (f), (g), (h), (i), (j) và (k) về bài toán cực trị không có ràng buộc bằng cách đưa thừa số Lagrange vào phiếm hàm mở rộng như sau:

$$F = Z + Z1 \rightarrow \min \quad (l)$$

$$Z1 = \sum_{k=1}^6 g_k \lambda_k$$

Các hệ số $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ được gọi là các thừa số Lagrange và là 6 ẩn mới của bài toán. Tổng ẩn bài toán bao gồm a_i ($i=1:9$), b_j ($j=0:9$), và 6 thừa số Lagrange sẽ là 25 ẩn được đặt trong vectơ ẩn $S(i)$, $i=1:25$. Bài toán (l) là bài toán tối ưu thông số và điều kiện cực trị (3.9) bây giờ được viết như sau

$$\left. \begin{aligned} h_i &= \int_0^{l_1} [M_{x1}] \frac{\partial}{\partial a_i} (\chi_{x1}) dx + \int_0^{l_1} [f_{m1}] \frac{\partial}{\partial a_i} (y_1) dx + \frac{\partial}{\partial a_i} (Z1) = 0; & (i = 1:9) \\ u_i &= \int_0^{l_2} [M_{x2}] \frac{\partial}{\partial b_i} (\chi_{x2}) dx + \int_0^{l_2} [f_{m2}] \frac{\partial}{\partial b_i} (y_2) dx + \frac{\partial}{\partial b_i} (Z1) = 0; & (i = 1:9) \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_k} (g_k \lambda_k) &= 0; & k = 1:6. \end{aligned} \right\} \quad (m)$$

Từ điều kiện cực trị (m) của phiếm hàm mở rộng F ta sẽ nhận được 25 phương trình đại số tuyến tính để xác định 25 thông số của bài toán. Có thể giải bài toán trên bằng cách sử dụng phần mềm Symbolic của Matlab. Khi giải phương trình xong thấy rằng các thông số $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9, b_0, b_1, b_2, \dots, b_7$, và $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$ đều là hàm của k_1 . Lưu ý rằng λ_6 có thứ nguyên là lực và nó là lực giữ để có chuyển vị cưỡng bức

y_0 tại cuối đoạn l_1 . Lực giữ phải bằng không cho nên giải phương trình $\lambda_6(k_1)=0$ sẽ cho ta các k_1 .

Từ $k_1 = \sqrt{\frac{m\omega^2}{EJ}}$ ta sẽ tìm được các tần số dao động riêng ω_i cần tìm. Có thể nói

$\lambda_6(k_1)=0$ cũng là đa thức đặc trưng của bài toán.

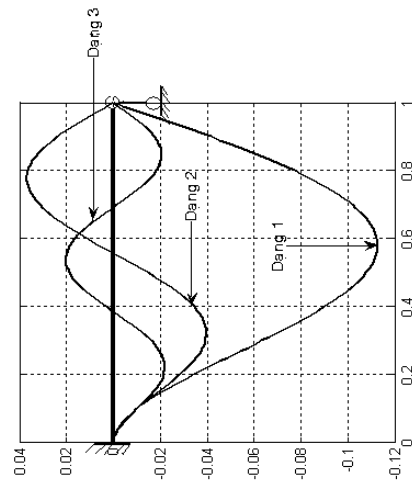
Giải phương trình $\lambda_1(k_1)=0$ theo k_1 ta nhận được 25 nghiệm k_1 và từ đó xác định được 25 tần số dao động riêng của hệ, ở đây chỉ đưa ra 3 tần số dao động riêng cơ bản là:

$$\omega_1 = k_{11} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 15,418 \sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$$

$$\omega_2 = k_{12} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 49,964 \sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$$

$$\omega_3 = k_{13} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 104,266 \sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$$

Khi giải hệ phương trình (m) ta cũng nhận được các thông số a_i ($i=1:9$) và b_j ($j=0:9$) và chúng đều là hàm của k_1 . Đưa các trị k_1 tìm được ở trên vào các thông số này và sử dụng các biểu thức (a) ta có các dạng dao động chính $y(x)$ của thanh (hình 3.5).

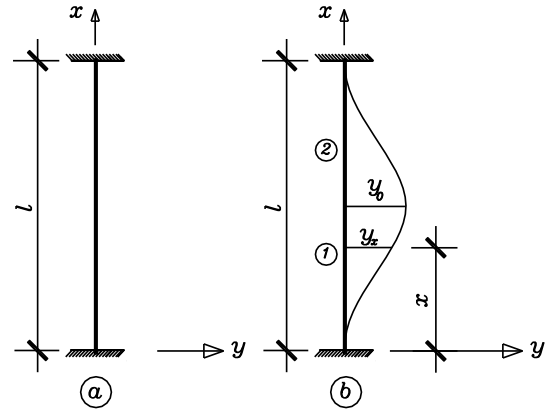


Hình 3.5. Dạng dao động tự do của thanh đầu ngàm – đầu khớp

3.2.4. Thanh hai đầu ngàm

Xác định tần số và dạng dao động riêng của thanh hai đầu ngàm. Thanh có khối lượng phân bố đều, tiết diện không đổi và có độ cứng uốn EJ.

Chia thanh thành hai đoạn, cho thanh một chuyển vị y_0 tại điểm bất kỳ trên thanh thì khi ấy độ võng tương ứng với từng đoạn là $y_1(x)$, $y_2(x)$ như (hình 3.6). Giả sử đường độ võng của từng đoạn thanh có dạng đa thức bậc 9.



Hình 3.6. Thanh ngàm – ngàm

Xây dựng bài toán tương tự như trường hợp thanh đầu ngàm - đầu khớp, với 6 điều kiện ràng buộc (*góc xoay tại ngàm dưới bằng không, chuyển vị tại cuối đoạn 1 bằng chuyển vị tại đầu đoạn 2, góc xoay tại cuối đoạn một bằng góc xoay tại đầu đoạn 2, chuyển vị tại cuối đoạn 2 bằng không, góc xoay tại cuối đoạn 2 bằng không, chuyển vị cưỡng bức tại cuối đoạn 1 bằng y_0*) và giải ra ta nhận được đa thức đặc trưng của bài toán là $\lambda_6(k_1)=0$.

Giải phương trình $\lambda_6(k_1)=0$ sẽ cho ta các k_1 .

Từ $k_1 = \sqrt{\frac{m\omega^2}{EJ}}$ ta sẽ tìm được các tần số dao động riêng ω_i cần tìm.

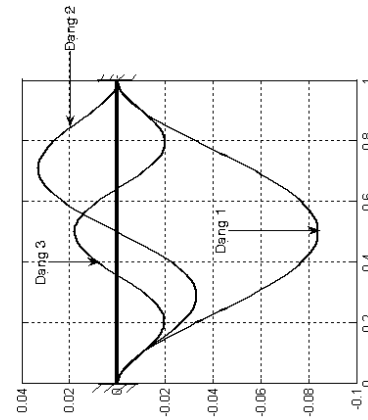
Giải phương trình $\lambda_6(k_1)=0$ theo k_1 ta nhận được 25 nghiệm k_1 và từ đó xác định được 25 tần số dao động riêng của hệ, ở đây chỉ đưa ra 3 tần số dao động riêng cơ bản là:

$$\omega_1 = k_{11} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 22,373 \sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$$

$$\omega_2 = k_{12} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 61,672 \sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$$

$$\omega_3 = k_{13} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 120,941 \sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$$

Dạng dao động riêng của đường đàn hồi (véc tơ riêng) tương ứng với 3 tần số dao động riêng cơ bản (3 trị riêng chính xác) đầu tiên như hình 3.7.



Hình 3.7. Dạng dao động tự do của thanh hai đầu ngàm

3.2.5. Thanh đầu khớp - đầu tự do

Xác định tần số và dạng dao động riêng của thanh đầu khớp đầu tự do. Thanh có khối lượng phân bố đều, tiết diện không đổi, có độ cứng uốn EJ, hình 3.8.

Để tránh biến hình ta xem thanh nằm trên nền tự do có độ cứng $k_{l_{oxo}}$. Như vậy, ngoài các lực mômen, lực cắt, lực quán tính thanh còn chịu phản lực nền lò xo

$$R = k_{l_{oxo}}y$$

Lượng cưỡng bức có dạng

$$Z = \int_l M_x \chi_x dx + \int_l F_m y dx + \int_l R y dx \rightarrow Min$$

Và các ràng buộc là các điều kiện chuyển vị tại đầu dưới của thanh (tại $x=0$) bằng không, mômen và lực cắt đều bằng không tại hai đầu mút thanh. Giải bài toán trên tìm được các thông số a_i , b_i và λ_i đều là hàm của $k_{l_{oxo}}$. Cho $k_{l_{oxo}} = 0$ và giải phương trình đa thức đặc trưng $\lambda_i = 0$ lại nhận được các trị riêng và dạng dao động của thanh có một đầu khớp - một đầu tự do.

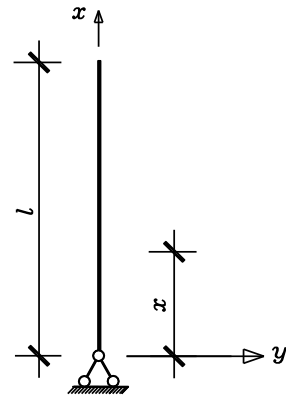
Chia thanh thành hai đoạn, đặt các lò xo phân bố đều trên toàn thanh và cho thanh một chuyển vị y_0 tại điểm bất kỳ trên thanh (tại điểm $x=l_1$) thì khi ấy độ võng tương ứng với từng đoạn là $y_1(x)$, $y_2(x)$ như (hình 3.8). Giả sử đường độ võng và đường lực cắt của thanh có dạng đa thức bậc 9 như sau.

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \sum_{i=1}^9 a_i x^i = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + a_7 x^7 + a_8 x^8 + a_9 x^9; \\ y_2 &= \sum_{i=0}^9 c_i x^i = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + c_6 x^6 + c_7 x^7 + c_8 x^8 + c_9 x^9; \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

trong đó a_i , b_j , là các hệ số cần xác định.

Gọi χ là biến dạng uốn trong dầm do mômen gây ra ta có:

$$\chi_{1x} = -\frac{d^2 y_1}{dx^2}; \quad \chi_{2x} = -\frac{d^2 y_2}{dx^2}$$



Hình 3.8. Thanh khớp – tự do

Lực quán tính trong dầm là: $f_{m1} = -m\omega^2 y_1 = -EJk_1^2 y_1$; $f_{m2} = -m\omega^2 y_2 = -EJk_1^2 y_2$

Trong đó: $k_1 = \sqrt{\frac{m\omega^2}{EJ}}$

Lực lò xo trong dầm là: $f_{lox1} = k_{lox} y_1$; $f_{lox2} = k_{lox} y_2$

Như vậy trong thanh sẽ có nội lực mômen uốn M_x bằng

$$M_{x1} = EJ\chi_{1x}; \quad M_{x2} = EJ\chi_{2x}$$

Lượng cường bức theo (3.8) được viết như sau:

$$\left. \begin{aligned} Z &= \int_0^{l_1} [M_{x1}](\chi_{1x})dx + \int_0^{l_2} [M_{x2}](\chi_{2x})dx + \int_0^{l_1} [f_{m1} + f_{lox1}]y_1 dx + \int_0^{l_2} [f_{m2} + f_{lox2}]y_2 dx \\ &= \int_0^{l_1} [M_{x1}](\chi_{1x})dx + \int_0^{l_2} [M_{x2}](\chi_{2x})dx + \int_0^{l_1} [EJk_1^2 + f_{lox1}]y_1 dx + \int_0^{l_2} [EJk_1^2 + f_{lox2}]y_2 dx \end{aligned} \right\} \rightarrow \min \quad (b)$$

với 6 điều kiện ràng buộc:

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= y_1|_{x=l_1} - y_0; \quad g_2 = \left(-\frac{d^2 y_2}{dx^2}\right)_{x=0}; \quad g_3 = \left(-\frac{d^2 y_2}{dx^2}\right)_{x=l_2}; \quad g_4 = y_1|_{x=l_1} - y_2|_{x=0} \\ g_5 &= \left(\frac{dy_1}{dx}\right)_{x=l_1} \left(\frac{dy_2}{dx}\right)_{x=0}; \quad g_6 = y_2|_{x=l_2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Ta đưa bài toán tìm cực trị của (b) có 6 điều kiện ràng buộc (c) về bài toán cực trị không có ràng buộc bằng cách đưa thừa số Lagrange vào phiếm hàm mở rộng như sau:

$$F = Z + \sum_{k=1}^6 g_k \lambda_k \rightarrow \min \quad (d)$$

Trong đó: λ_1 là thừa số Lagrange và cũng là ẩn của bài toán và đó là lực có vị trí và độ lớn tương ứng để có chuyển vị cưỡng bức y_0 . Bài toán có 45 ẩn số là $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9, b_0, b_1, b_2, \dots, b_9$, và $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$. Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss xem các biến dạng uốn là độc lập với mômen tác dụng cho nên điều kiện cực trị của phiếm hàm mở rộng F là:

$$\left. \begin{aligned} h_i &= \int_0^{l_1} [M_{x1}] \frac{\partial}{\partial a_i} (\chi_{x1}) dx + \int_0^{l_1} [EJk_1^2 + f_{lox1}] \frac{\partial}{\partial a_i} (y_1) dx + \frac{\partial}{\partial a_i} \sum_{k=1}^6 (g_k \lambda_k) = 0; a_i (i=1:9) \\ v_i &= \int_0^{l_2} [M_{x2}] \frac{\partial}{\partial c_i} (\chi_{x2}) dx + \int_0^{l_2} [EJk_1^2 + f_{lox2}] \frac{\partial}{\partial c_i} (y_1) dx + \frac{\partial}{\partial c_i} \sum_{k=1}^6 (g_k \lambda_k) = 0; c_i (i=1:9) \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_k} (g_k \lambda_k) &= 0; \quad k = 1:6. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

Từ điều kiện cực trị (e) của phiếm hàm mở rộng F ta sẽ nhận được 25 phương trình đại số tuyến tính để xác định 25 ẩn số. Có thể giải bài toán trên bằng cách sử dụng phần mềm Symbolic của Matlab. Khi giải phương trình xong thấy rằng các thông số $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9, b_0, b_1, b_2, \dots, b_9$, và $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$ đều là hàm của k_1 . Lưu ý rằng λ_1 có thứ nguyên là lực và nó là lực giữ để có chuyển vị cưỡng bức y_0 tại đầu thanh. Lực giữ phải bằng không cho nên giải phương trình $\lambda_1(k_1) = 0$ sẽ cho ta các

k_1 . Từ $k_1 = \sqrt{\frac{m\omega^2}{EJ}}$ ta sẽ tìm được các tần số dao động riêng ω_i cần tìm. Có thể nói λ_1

$(k_1) = 0$ cũng là đa thức đặc trưng của bài toán.

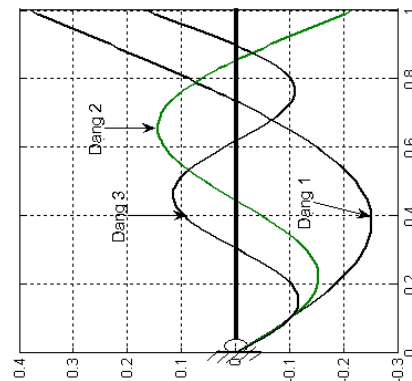
Giải phương trình $\lambda_1(k_1) = 0$ theo k_1 ta nhận được 25 nghiệm k_1 và từ đó xác định được 25 tần số dao động riêng của hệ, ở đây chỉ đưa ra 3 tần số dao động riêng cơ bản là:

$$\omega_1 = k_{11} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 15,418 \sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$$

$$\omega_2 = k_{12} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 49,964 \sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$$

$$\omega_3 = k_{13} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 104,253 \sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$$

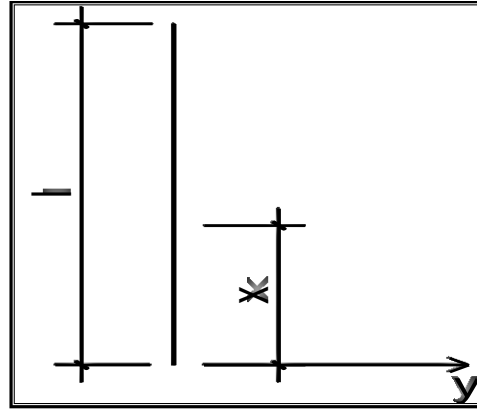
Khi giải hệ phương trình (m) ta cũng nhận được các thông số $a_i (i=1:9)$ và chúng đều là hàm của k_1 . Đưa các trị k_1 tìm được ở trên vào các thông số này và sử dụng các biểu thức (a) ta có các dạng dao động chính $y(x)$ của thanh (hình 3.9).



Hình 3.9. Dạng dao động của thanh

3.2.6. Thanh hai đầu tự do

Xác định tần số và dạng dao động riêng của thanh hai đầu tự do. Thanh có khối lượng phân bố đều, tiết diện không đổi và có độ cứng uốn EJ, hình 3.10. Xây dựng bài toán hoàn toàn tương tự như trường hợp thanh đầu khớp đầu tự do ta có. Lượng cưỡng bức theo (3.8) như sau:



Hình 3.10. Thanh hai đầu tự do

$$\left. \begin{aligned} Z &= \int_0^{l_1} [M_{x1}](\chi_{1x})dx + \int_0^{l_2} [M_{x2}](\chi_{2x})dx + \int_0^{l_1} [f_{m1} + f_{lox1}]y_1dx + \int_0^{l_2} [f_{m2} + f_{lox2}]y_2dx \\ &= \int_0^{l_1} [M_{x1}](\chi_{1x})dx + \int_0^{l_2} [M_{x2}](\chi_{2x})dx + \int_0^{l_1} [EJk_1^2 + f_{lox1}]y_1dx + \int_0^{l_2} [EJk_1^2 + f_{lox2}]y_2dx \rightarrow \min \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

với 6 điều kiện ràng buộc:

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= y_1|_{x=l_1} - y_0; g_2 = EJ \left(-\frac{d^2 y_1}{dx^2} \right)_{x=0}; g_3 = EJ \left(-\frac{d^2 y_2}{dx^2} \right)_{x=l_2}; \\ g_4 &= y_1|_{x=l_1} - y_2|_{x=0}; g_5 = \left(\frac{dy_1}{dx} \right)_{x=l_1} - \left(\frac{dy_2}{dx} \right)_{x=0}; g_6 = Q_2|_{x=l_2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Ta đưa bài toán tìm cực trị của (a) có 6 điều kiện ràng buộc (b) về bài toán cực trị không có ràng buộc bằng cách đưa thừa số Lagrange vào phiếm hàm mở rộng như sau:

$$F = Z + \sum_{k=1}^6 g_k \lambda_k \rightarrow \min \quad (d)$$

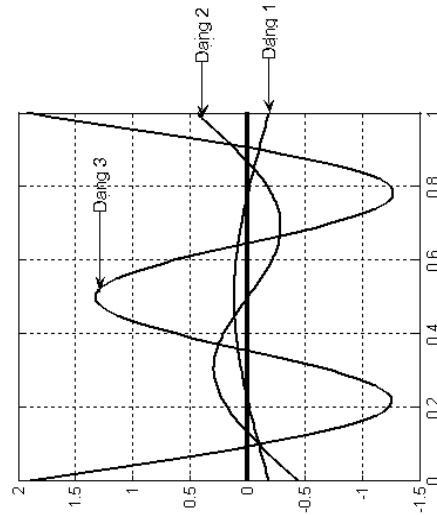
Giải tương tự như các bài toán trên ta tìm được các tần số dao động riêng của thanh hai đầu tự do, ở đây chỉ đưa ra 3 tần số dao động riêng cơ bản là:

$$\omega_1 = k_{11} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 22,373 \sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$$

$$\omega_2 = k_{12} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 61,672 \sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$$

$$\omega_3 = k_{13} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 120,942 \sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$$

Dạng dao động riêng của đường đàn hồi (véc tơ riêng), hình 3.11a. và dạng biểu đồ lực cắt tương ứng với 3 tần số dao động riêng cơ bản (3 trị riêng chính xác) đầu tiên như hình 3.11b.



Hình 3.11. Dạng dao động tự do của thanh hai đầu tự do

3.3. Dao động của thanh khi có lực dọc trục $P = \text{const}$ đặt ở đầu thanh

Giống mục trên, ta xét thanh thẳng, chiều dài l , có tiết diện không đổi, có độ cứng uốn EJ và khối lượng phân bố đều m trên chiều dài thanh, chịu lực nén P đặt ở đầu thanh. Trạng thái cân bằng ban đầu của thanh được xem là trạng thái đứng yên, không xét độ co ngắn của thanh do do lực P gây ra. Khi thanh bị lệch ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu thì lực P sẽ gây momen uốn M_p :

$$M_p = P[W(x,t) - W(l,t)] \quad (3.17)$$

$W(l,t)$ là chuyển vị ngang đầu thanh. Trường hợp đầu thanh cố định thì $W(l,t) = 0$.

Lực quán tính xác định theo (3.1), biến dạng trượt, góc xoay do momen uốn gây ra, biến dạng uốn và nội lực momen uốn tính theo (3.3). Khác với bài toán dao động tự do ở mục trên, ở đây cần xét thêm lực momen uốn do lực P gây ra tính theo biểu thức (3.17).

Tìm nghiệm theo dạng (3.5). Bài toán dao động của thanh khi có lực nén P đặt ở đầu thanh bây giờ được viết cho một thời điểm t tương tự biểu thức (3.9)

$$Z = \int_0^l (M - M_p) \left[-\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] dx + \int_0^l f_m[y] dx \rightarrow \min \quad (3.18)$$

Trong (3.18) momen M_p xác định theo (3.17) là do ngoại lực P gây ra nên có dấu trừ, ngược với dấu của nội lực M . Các đại lượng trong ngoặc vuông là các đại lượng biến phân (không phụ thuộc thời gian) cho nên từ (3.18) ta có phương trình cân bằng lực sau (hai phương trình Euler)

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}(M - M_p) + f_m = 0 \quad (3.19)$$

Thay M tính theo (3.3) và M_p tính theo (3.17) vào (3.19) ta có

$$EJ \left(\frac{\partial^4 W(x,t)}{\partial x^4} \right) + P \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.20)$$

Phương trình (3.20) là hai phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất.

Khi dùng phương pháp chuyển vị cưỡng bức ta có thể viết bài toán dao động của thanh khi có lực nén dọc trục P đặt ở đầu thanh như sau

$$Z = \int_0^l (M_x - M_{px}) [\mathcal{X}_x] dx + \int_0^l f_x [y] dx \rightarrow \min \quad (3.22)$$

Với ràng buộc $g1 = y(x_1) - y0 = 0 \quad (3.23)$

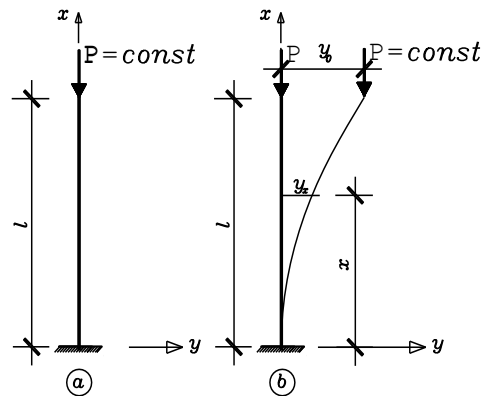
Bài toán (3.22) với ràng buộc (3.23) chỉ khác bài toán dao động tự do của thanh (3.11) và (3.13) ở chỗ xét thêm momen M_{px} do lực dọc trục gây ra. Khi dùng thừa số Lagrange λ và giải trực tiếp trên phiếm hàm mở rộng thì từ điều kiện $\lambda = 0$ tìm được các tần số dao động của thanh. Những tính toán chi tiết trình bày qua các ví dụ sau đây.

3.3.1. Thanh ngàm-tự do

Xét thanh thẳng có liên kết một đầu ngàm, đầu kia tự do, tiết diện không đổi, chiều dài l , độ cứng uốn EJ , hình 3.12.

Ta tìm hàm độ võng và hàm lực cắt của thanh dưới dạng đa thức:

$$y(x,t) = y(x) \cos(\omega t)$$



Hình 3.12. Thanh ngàm-tự do

$$y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7 + a_8x^8 + a_9x^9 \quad (a)$$

Các hệ số a_i ($i=1:9$), là các hệ số cần tìm. Dựa vào biểu thức (3.1) tính lực quán tính

$$f_m = m \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} = -m\omega^2 y(x) = -EJ \frac{m\omega^2}{EJ} y(x) = -EJ.k_1^2 y(x) \quad (b)$$

$$k_1^2 = \frac{m\omega^2}{EJ} \quad \omega = k_1 \sqrt{\frac{EJ}{m}} \quad (c)$$

Sau này thay cho tần số ω ta sẽ dùng k_1 để tính lực quán tính (biểu thức (b)). Biết được trị số k_1 thì tính được tần số ω theo biểu thức (c).

Biến dạng trượt, góc xoay do momen uốn, biến dạng uốn và nội lực momen uốn của thanh xác định theo các biểu thức (3.8), momen uốn M_p do lực P gây ra xác định theo (3.17). Theo biểu thức (3.22) ta xây dựng bài toán dao động ngang của thanh khi có lực nén P đặt ở đầu thanh như sau

$$Z = \int_0^l (M_x - M_{xp}) \left[-\frac{d^2 y}{dx^2} \right] dx + \int_0^l f_m [y] dx \rightarrow \min \quad (d)$$

Bài toán tìm cực trị (d) phải thỏa mãn các điều kiện sau

- Góc xoay (do momen uốn) tại ngàm ($x=0$) bằng không

$$g1 = \text{subs}(\theta, x, 0) = \text{subs}\left(\frac{dy(x)}{dx}, x, 0\right) = 0 \quad (e)$$

- Momen uốn (hoặc biến dạng uốn) tại đầu tự do ($x=l$) bằng không

$$g2 = \text{subs}\left(-\frac{d^2 y(x)}{dx^2}, x, l\right) = 0 \quad (f)$$

- Ta cho đầu tự do ($x=l$) có chuyển vị cưỡng bức bằng y_0

$$g3 = \text{subs}(y(x), x, l) - y_0 = 0 \quad (h)$$

Bài toán (d) với các ràng buộc (e), (f), (g) và (h) được đưa về bài toán cực trị không ràng buộc bằng cách viết phiếm hàm Lagrange mở rộng

$$F = Z + Z1 \rightarrow \min \quad (i)$$

$$Z1 = \lambda_1.g1 + \lambda_2.g2 + \lambda_3.g3$$

Các hệ số $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, được gọi là các thừa số Lagrange và là 3 ẩn mới của bài toán. Tổng ẩn bài toán bao gồm a_i ($i=1:9$), và 4 thừa số Lagrange sẽ là 13 ẩn được đặt

trong vectơ ẩn $S(i)$, $i=1:13$. Bài toán (i) là bài toán tối ưu thông số và điều kiện cực trị (3.9) bây giờ được viết như sau

$$\delta F = \int_0^l M \frac{\partial}{\partial s_i} \left[-\frac{d^2 y(x)}{dx^2} \right] dx + \int_0^l f_m \frac{\partial}{\partial s_i} [y(x)] dx + \frac{\partial}{\partial s_i} [Z1] \quad (i = 1: 23) \quad (j)$$

Hàm y trong (j) xác định theo (a) còn M theo (3.3). Thực hiện các phép tính của (j) sẽ nhận được 13 phương trình đại số bậc nhất để tìm được 13 thông số của bài toán. Thông số λ_3 liên quan đến chuyển vị cưỡng bức y_0 tùy thuộc vào trị số P (được tính theo lực tới hạn Euler) và tỉ lệ h/l .

Lực tới hạn Euler của thanh đầu ngàm, đầu tự do, từ kết quả tính ở chương 2, bằng

$$P_e = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2} \quad (k)$$

Để thanh không bị mất ổn định, lực P phải nằm trong khoảng

$$0 \leq P \leq P_e \quad (l)$$

Ta xét hai trường hợp $h/l=0.001$ và $h/l=0.333$.

$h/l=1/1000$: $P=0.P_e$ (dao động tự do), $k_1 = 3.5160/l^2$; $22.0344/l^2$; $61.6968/l^2$; $121.1579/l^2$; $201.31424/l^2$

$P=0.2P_e$, $k_1 = 3.1682/l^2$; $21.6679/l^2$; $61.3869/l^2$; $120.8658/l^2$; $201.0311/l^2$

$P=0.4P_e$, $k_1 = 2.76524/l^2$; $21.2945/l^2$; $61.0754/l^2$; $120.5729/l^2$; $200.7475/l^2$

$P=0.6P_e$, $k_1 = 2.2764/l^2$; $20.9138/l^2$; $60.7623/l^2$; $120.2793/l^2$; $200.4636/l^2$

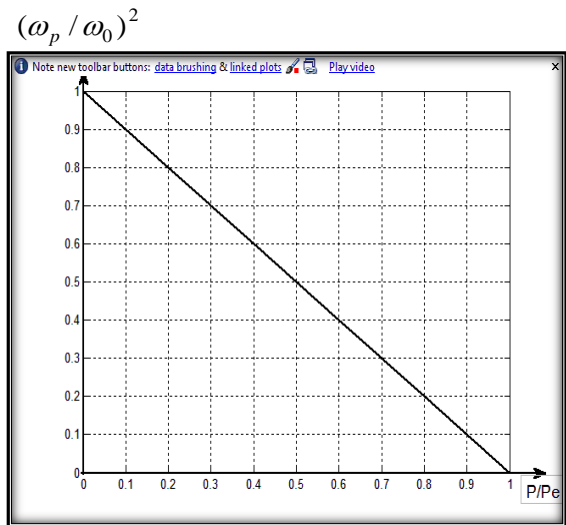
$P=0.8P_e$, $k_1 = 1.6236/l^2$; $20.5255/l^2$; $60.4476/l^2$; $119.9850/l^2$; $200.1793/l^2$

$P=P_e$, $k_1 = .43917e-6 \cdot i/l^2$; $20.1293/l^2$; $60.1312/l^2$; $119.6899/l^2$; $199.8946/l^2$

Từ những kết quả trên có thể đưa ra các nhận xét sau

Lực nén P càng lớn thì trị riêng k_1 càng giảm, nghĩa là tần số dao động của thanh càng giảm. Lấy ví dụ, sự giảm của tần số cơ bản (tần số thứ nhất) của thanh theo P được trình bày trên đồ thị, hình 3.13.

Trục tung của đồ thị là đại lượng $(\omega_p / \omega_0)^2$, ở đây ω_p là tần số (trị riêng k_1 thứ nhất) khi $P=[0 \ 0.2 \ 0.4 \ 0.6 \ 0.8 \ 1]P_e$ và ω_0 là tần số cơ bản của dao động tự do của thanh (khi $P=0$). Đồ thị không là đường thẳng mà là cung lồi. Khi $P=P_e$, Thật vậy, vì tần số dao động bằng không, thanh đứng yên. Nhưng vì P bằng lực tới hạn Euler nên thanh sẽ mất ổn định tĩnh. Ta đi đến kết luận



Hình 3.13. Thanh hai đầu khớp
ràng trạng thái đứng yên (không dao động) là trạng thái mất ổn định của hệ động lực học.

$h/l=1/3$.

$P=0$ (dao động tự do); $k_1 = 3.3463/l^2 \ 16.7909/l^2 \ 37.9463/l^2 \ 60.4789/l^2 \ 83.5571/l^2$

$P=0.2P_e$, $k_1 = 3.0277/l^2 \ 16.4852/l^2 \ 37.7356/l^2 \ 60.3081/l^2 \ 83.4174/l^2$

$P=0.4P_e$, $k_1 = 2.6540/l^2 \ 16.1720/l^2 \ 37.5235/l^2 \ 60.1366/l^2 \ 83.2774/l^2$

$P=0.6 P_e$, $k_1 = 2.1948/l^2 \ 15.8512/l^2 \ 37.3101/l^2 \ 59.9646/l^2 \ 83.1371/l^2$

$P=0.8P_e$, $k_1 = 1.5729/l^2 \ 15.5226/l^2 \ 37.0954/l^2 \ 59.7919/l^2 \ 82.9965/l^2$

$P=P_e$ $k_1 = .2625e-4/i/l^2 \ 15.1859/l^2 \ 36.8794/l^2 \ 59.6187/l^2 \ 82.8556/l^2$

Bảng 3.1. Tần số dao động riêng của thanh đầu ngàm - đầu tự do khi lực P_0 bằng một giá trị bất kỳ nào đó so với P_e tác dụng tại đầu thanh.

Khi lực tác dụng đầu thanh: $P_0= 0*P_e$				
ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$3,515\sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$	$22,027\sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$	$61,649\sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$	$120,980\sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$	$200,854\sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$

Khi lực tác dụng đầu thanh: $P_0= 0,2*P_e$				
ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$3,168\sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$	$21,661\sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$	$61,339\sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$	$120,69\sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$	$200,57\sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$

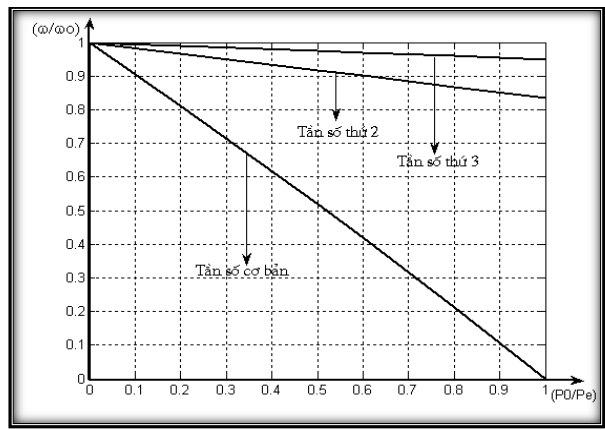
Khi lực tác dụng đầu thanh: $P_0= 0,5*P_e$				
ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$2,534\sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$	$21,098\sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$	$60,872\sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$	$120,25\sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$	$200,138\sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$

Khi lực tác dụng đầu thanh: $P_0= 0,6*P_e$				
ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$2,276\sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$	$20,907\sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$	$60,718\sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$	$120,09\sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$	$200,02\sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$

Khi lực tác dụng đầu thanh: $P_0= 0,8*P_e$				
ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$1,623\sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$	$20,519\sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$	$60,402\sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$	$119,81\sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$	$199,73\sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$

Khi lực tác dụng đầu thanh: $P_0 = 1,0 * P_e$				
ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
0	$20,129 \sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$	$60,132 \sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$	$119,69 \sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$	$199,89 \sqrt{\frac{EJ}{ml^4}}$

Các hệ số a_i, b_i , phụ thuộc vào ω . Do vậy, khi đã có các tần số dao động riêng ω_i ta thay giá trị của nó vào trong các thông số $a_i(\omega), b_i(\omega)$ ta sẽ nhận được các trị số thật của nó và dạng dao động của thanh được xác định theo (a). Dạng dao động riêng của đường đàn hồi (véc tơ riêng), 3 tần số dao động riêng cơ bản (3 trị riêng chính xác) đầu tiên như (Hình 3.14).



Hình 3.14. Ba tần số dao động đầu tiên của thanh hai đầu khớp

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

KẾT LUẬN

Qua kết quả nghiên cứu từ các chương, chương 1 đến chương 3 đối với bài toán dao động của thanh. Tác giả rút ra các kết luận sau:

- Sử dụng thành công phương pháp nguyên lý cực trị Gauss đối với bài toán dao động tự do của thanh.
- Đã xác định được kết quả của các bài toán dao động tự do của các thanh có liên kết khác nhau và cả trường hợp thanh không có liên kết. Kết quả trùng khớp với kết quả nhận được khi giải bằng các phương pháp khác.
- Xây dựng được bài toán dao động của thanh khi thanh chịu lực dọc trục thay đổi theo thời gian đặt ở đầu thanh.

kiến nghị

Qua kết quả nghiên cứu thấy rằng, với việc sử dụng phương pháp Nguyên lý cực trị Gauss có thể xây dựng bài toán dao động của thanh một cách dễ dàng. Vì vậy có thể sử dụng phương pháp này để nghiên cứu và học tập trong lĩnh vực kết cấu công trình.

Danh mục tài liệu tham khảo

I. TIẾNG VIỆT

- [1] Hà Huy Cương (2005), *Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss*, Tạp chí Khoa học và kỹ thuật, IV/ Tr. 112 ÷118.
- [2] Nguyễn Văn Liên, Nguyễn Phương Thành, Đinh Trọng Bằng (2003), *Giáo trình Sức bền vật liệu*, Nhà xuất bản xây dựng, tái bản lần thứ 3, 330 trang.
- [3] Nguyễn Phương Thành (2002), *Nghiên cứu trạng thái ứng suất – biến dạng tấm nhiều lớp chịu tải trọng động có xét lực ma sát ở các mặt tiếp xúc*, Luận án tiến sỹ kỹ thuật.
- [4] Vương Ngọc Lưu (2002), *Nghiên cứu trạng thái ứng suất – biến dạng của tấm sàn Sandwich chịu tải trọng tĩnh và động*, Luận án tiến sỹ kỹ thuật.
- [5] Trần Hữu Hà (2006), *Nghiên cứu bài toán tương tác giữa cọc và nền dưới tác dụng của tải trọng*, Luận án tiến sỹ kỹ thuật.
- [6] Phạm Văn Trung (2006), *Phương pháp mới Tính toán hệ dây và mái treo*, Luận án Tiến sỹ kỹ thuật.
- [7] Vũ Hoàng Hiệp (2007), *Nghiên cứu trạng thái ứng suất - biến dạng của dầm nhiều lớp chịu tải tĩnh và động*, Luận án tiến sỹ kỹ thuật, Hà nội.
- [8] Nguyễn Văn Đạo (2001), *Cơ học giải tích*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà nội, 337 trang.
- [9] Nguyễn Văn Đạo, Trần Kim Chi, Nguyễn Dũng (2005), *Nhập môn Động lực học phi tuyến và chuyển động hỗn độn*. Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà nội.
- [10] Lều Thọ Trình, Đỗ Văn Bình(2006), *Giáo trình ổn định công trình*, Nhà xuất bản Khoa học kỹ thuật.
- [11] Vũ Hoàng Hiệp (2008), *Tính kết cấu có xét biến dạng trượt*, Tạp chí xây dựng số 7.
- [12] Đoàn Văn Duẩn, Nguyễn Phương Thành (2007), *Phương pháp mới tính toán ổn định của thanh*, Tạp chí Xây dựng số 12 (Tr41-Tr44).

- [13] Đoàn Văn Duẩn (2008), *Phương pháp mới tính toán ổn định của khung*, Tạp chí Xây dựng số 01 (Tr35-Tr37).
- [14] Đoàn Văn Duẩn (2008), *Nghiên cứu ổn định uốn dọc của thanh có xét biến dạng trượt*, Tạp chí Xây dựng số 12 (Tr33-Tr37).
- [15] Đoàn Văn Duẩn (2009), *Phương pháp nghiên cứu ổn định tổng thể của dàn*, Tạp chí Xây dựng số 03 (Tr86-Tr89).
- [16] Đoàn Văn Duẩn (2007), *Phương pháp nguyên lý Cực trị Gauss đối với các bài toán ổn định công trình*, Luận văn thạc sỹ kỹ thuật.
- [17] Trần Thị Kim Huệ (2005), *Phương pháp nguyên lý Cực trị Gauss đối với các bài toán cơ học kết cấu*, Luận văn thạc sỹ kỹ thuật.
- [18] Nguyễn Thị Liên (2006), *Phương pháp nguyên lý Cực trị Gauss đối với các bài toán động lực học công trình*, Luận văn thạc sỹ kỹ thuật.
- [19] Vũ Thanh Thủy (2009), *Xây dựng bài toán dầm khi xét đầy đủ hai thành phần nội lực momen và lực cắt*. Tạp chí Xây dựng số 4.
- [20] Vũ Thanh Thủy (2009), *Dao động tự do của dầm khi xét ảnh hưởng của lực cắt*. Tạp chí Xây dựng, số 7.
- [21] Timoshenko C.P, Voinópki- Krige X, (1971), *Tấm và Vỏ*. Người dịch, Phạm Hồng Giang, Vũ Thành Hải, Đoàn Hữu Quang, Nxb Khoa học và kỹ thuật, Hà Nội.

II. TIẾNG PHÁP

- [22] Robert L’Hermite (1974), *Flambage et Stabilité – Le flambage élastique des pièces droites*, édition Eyrolles, Paris.

III. TIẾNG ANH

- [23] Stephen P.Timoshenko-Jame M.Gere (1961), *Theory of elastic stability*, McGraw-Hill Book Company, Inc, New york – Toronto – London, 541 Tr.
- [24] William T.Thomson (1998), *Theory of Vibration with Applications* (Tái bản lần thứ 5). Stanley Thornes (Publishers) Ltd, 546 trang.

- [25] Klaus – Jurgen Bathe (1996), *Finite Element procedures*. Part one, Prentice – Hall International, Inc, 484 trang.
- [26] Klaus – Jurgen Bathe (1996), *Finite Element procedures*. Part two, Prentice – Hall International, Inc, 553 trang.
- [27] Ray W.Clough, Joseph Penzien(1993), *Dynamics of Structures* (Tái bản lần thứ 2), McGraw-Hill Book Company, Inc, 738 trang.
- [28] O.C. Zienkiewicz-R.L. Taylor (1991), *The finite element method* (four edition) Volume 2, McGraw-Hill Book Company, Inc, 807 trang.
- [29] G.Korn-T.Korn (1961), *Mathematical Handbook for sientists and Engineers*, McGraw-Hill, New york (Bản dịch tiếng Nga, I.Bramovich chủ biên, Nhà xuất bản Nauka-Moscow, 1964).
- [30] Stephen P.Timoshenko-J. Goodier (1970), *Theory of elasticity*, McGraw-Hill, New york (Bản dịch tiếng Nga, G. Shapiro chủ biên, Nhà xuất bản Nauka-Moscow, 1979), 560 trang.
- [31] D.R.J. Owen, E.Hinton (1986), *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*, Pineridge Press Lt.
- [32] Lars Olovsson, Kjell Simonsson, Mattias Unosson (2006), *Shear locking reduction in eight-node tri-linear solid finite elements*, J. ‘Computers @ Structures’,84, trg 476-484.
- [33] C.A.Brebbia, J.C.F.Telles, L.C.Wrobel(1984), *Boundary Element Techniques. Theory and Applications in Engineering*. Nxb Springer – Verlag.(Bản dịch tiếng Nga, 1987).
- [34] Chopra Anil K (1995). *Dynamics of structures*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New – Jersey 07632.
- [35] Wilson Edward L. Professor Emeritus of structural Engineering University of California at Berkeley (2002). *Three – Dimensional Static and Dynamic Analysis of structures*, Inc. Berkeley, California, USA. Third edition, Reprint January.

- [36] Wilson, E. L., R. L. Taylor, W. P. Doherty and J. Ghaboussi (1971). “*Incompatible Displacement Models*”, Proceedings, ORN Symposium on “Numerical and Computer Method in Structural Mechanics”. University of Illinois, Urbana. September. Academic Press.
- [37] Strang, G (1972). “*Variational Crimes in the Finite Element Method*” in “The Mathematical Foundations of the Finite Element Method”. P.689 -710 (ed. A.K. Aziz). Academic Press.
- [38] Irons, B. M. and O. C. Zienkiewicz (1968). “*The isoparametric Finite Element System – A New Concept in Finite Element Analysis*”, Proc. Conf. “Recent Advances in Stress Analysis”. Royal Aeronautical Society. London.
- [39] Kolousek Vladimir, DSC Professor, Technical University, Pargue (1973). *Dynamics in engineering structures*. Butter worths London.
- [40] Felippa Carlos A (2004). *Introduction of finite element methods*. Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures University of Colorado Boulder, Colorado 80309-0429, USA, Last updated Fall.
- [41] Wang C.M, Reddy J.N, Lee K.H.(2000), *Shear deformable beams and plates – Relationships with Classical Solutions*. ELSEVIER, Amsterdam – Lausanne- New York – Oxford –Shannon – Singapore – Tokyo.
- [42] Barbero Ever J, Department of Mechanics & Aerospace Engineering, West Virginia University, USA (1999), *Introduction to Composite Materials Design*. Taylor and Francis.
- [43] Decolon C (2002). *Analysis of Composite Structures*. Hermes Penton, Ltd, UK.
- [44] Fu-le Li, ZHI-zhong Sun, Corresponding author, Department of Mathematics, Shoutheast University, Nanjing 210096, PR China (2007). *A finite difference scheme for solving the Timoshenko beam equations with boundary feedback*. Journal of Computational and applied Mathematics 200, 606 – 627, Elsevier press. Available online at www.sciencedirect.com.

[45] Khaji N., Corresponding author, Shafiei M., Civil Engineering Department Tarbiat Modares University, P. O. Box 14155-4838, Tehran, Iran ((2009)). *Closed - form solutions for crack detection problem of Timoshenko beams with various boundary conditions*. International Journal of Mechanical Sciences 51, 667-681. Contents lists available at Science Direct journal homepage: www.elsevier.com/locate/ijmecsci.

[46] Antes H. Institute of Applied Mechanics, University Carolo Wilhelmina, D-38023 Braunschweig, Germany (2003). *Fundamental solution and integralequations for Timoshenko beams*. Computers and Structures 81, 383-396. Pergamon press. Available online at www.sciencedirect.com.

[47] Nguyen Dinh Kien (2007). *Free Vibration of prestress Timoshenko beams resting on elastic foundation*. Viet nam Journal of Mechanics, VAST, Vol.29, No. 1, pp. 1-12.

[48] Grawford F (1974). *Waves*, Berkeley physics course, volume 3. McGraw – hill Book Company.

IV. TIẾNG NGA

[49] М. А. Айзерман (1980), *Классическая механика, Москва*.

[50] Киселев В. А (1969). *Строительная механика - Специальный курс. Стройиздат, Москва*.

[51] П. С. Полак (1959), *Вариационные принципы механики, Москва*.

[52] Киселев В. А (1980). *Строительная механика - Специальный курс. Стройиздат, Москва*.

[53] А. А. Чирас (1989), *Строительная механика, Стройиздат, Москва*.

[54] Г. КАУДЕРЕР (1961), *НЕЛИНЕЙНАЯ МЕХАНИКА, МОСКВА*.