BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC DÂN LẬP HẢI PHÒNG

NGUYỄN ĐỒNG CHI

TÍNH TOÁN DẦM TRÊN NỀN ĐÀN HỒI

LUẬN VĂN THẠC SĨ KỸ THUẬT

CHUYÊN NGÀNH: KỸ THUẬT XÂY DỰNG CÔNG TRÌNH DÂN DỤNG & CÔNG NGHIỆP

MÃ SỐ: 60.58.02.08

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

GS. TS. TRẦN HỮU NGHỊ

Hải Phòng, 2017

MỤC LỤC

LỜI CẢM ƠN

Tác giả xin trân trọng cảm ơn GS. TS. NGƯT. Trần Hữu Nghị, đã hướng dẫn và tạo mọi điều kiện tốt nhất cho tác giả hoàn thành luận văn này.

Xin chân thành cảm ơn toàn thể quý Thầy Cô trong Khoa xây dựng của Trường Đại Học Dân lập Hải Phòng đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cũng như tạo mọi điều kiện thuận lợi nhất cho tôi trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và cho đến khi thực hiện đề tài luận văn này.

Cuối cùng, tôi xin chân thành bày tỏ lòng cảm ơn đến các anh chị và các bạn đồng nghiệp đã hỗ trợ cho tôi rất nhiều trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và cung cấp những tài liệu cũng như những góp ý quý báu để tôi có thể hoàn thành luận văn.

Xin chân thành cảm ơn!

Hải Phòng, tháng 4 năm 2017

Tác giả

Nguyễn Đổng Chi

LỜI CAM ĐOAN

Họ và tên học viên: Nguyễn Đổng Chi

Ngày sinh: 18/7/1981

Mã số: 60.58.02.08

Tôi xin cam đoan Luận văn này là công trình nghiên cứu của bản thân tôi, các số liệu nêu trong Luận văn là trung thực. Những kiến nghị đề xuất trong Luận văn là của cá nhân không sao chép của bất kỳ tác giả nào.

Nguyễn Đổng Chi

MỞ ĐẦU

Bài toán kết cấu dầm trên nền đàn hồi có tầm quan trọng đặc biệt trong lĩnh vực cơ học công trình, đòi hỏi phải nghiên cứu đầy đủ cả về mặt lý thuyết và thực nghiệm. Vấn đề nội lực và chuyển vị của kết cấu dầm trên nền đàn hồi được nhiều nhà khoa học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu theo nhiều hướng khác nhau. Tựu chung lại, phương pháp gồm: Phương trình vi phân cân bằng phân tố; Phương pháp năng lượng; Phương pháp nguyên lý công ảo và Phương pháp sử dụng trực tiếp Phương trình Lagrange.

Trong các tài liệu có trình bày cách tính dầm trên nền đàn hồi và đã giải quyết bài toán dầm vô hạn trên nền đàn hồi, dầm bán vô hạn trên nền đàn hồi, dầm hữu hạn trên nền đàn hồi với mô hình nền Winkler. Bài toán dầm dài hữu hạn được giải theo phương pháp thông số ban đầu.

Đối tượng, phương pháp và phạm vi nghiên cứu của đề tài

Trong luận văn này, dựa trên nguyên lý chuyển vị ảo và nguyên lý giải phóng liên kết tác giả đưa ra phương pháp để tính dầm hữu hạn đặt trên nền đàn hồi dựa trên kết quả của dầm vô hạn đặt trên nền đàn hồi.

Mục đích nghiên cứu của đề tài

"Xác định nội lực và chuyển vị của dầm hữu hạn trên nền đàn hồi"

Nhiệm vụ nghiên cứu của đề tài

- Tìm hiểu và giới thiệu các phương pháp chung nhất để xây dựng và giải bài toán cơ học kết cấu hiện nay.

- Trình bày các định nghĩa cơ bản của phép tính biến phân và phương trình EuLer của phép tính biến phân

- Sử dụng nguyên lý chuyển vị ảo và tư tưởng giải phóng liên kết, trình bày phương pháp tính dầm hữu hạn trên nền đàn hồi.

- Lập chương trình máy tính điện tử cho các bài toán nêu trên.

CHƯƠNG 1
PHÉP TÍNH BIẾN PHÂN - CÁC ĐỊNH NGHĨA CƠ BẢN VÀ PHƯƠNG TRÌNH EULER

Các vấn đề về phép tính biến phân rất phong phú, trong luận văn chỉ trình bày các khái niệm cơ bản ; phương trình EuLer và bài toán cực trị có ràng buộc (phương pháp thừa số lagrange). Đây là những vấn đề cần thiết dùng trong luận văn.

1.1. CÁC ĐỊNH NGHĨA CƠ BẢN [2]

- Biến phân δy của hàm y(x) của biến độc lập x là một hàm của x được xác định tại mỗi giá trị của x và bằng hiệu của một hàm mới Y(x) và hàm đã có y(x): $\delta y = Y(x) - y(x)$. δy gây ra sự thay đổi quan hệ hàm giữa y và x và không được nhầm lẫn với số gia Δy khi có số gia Δx.
- Nếu cho hàm $F[\ y_1(x), y_2(x),..y_n(x); x\ ]$ thì số gia của hàm đó khi có các biến phân δy_i của các hàm y_i được viết như sau:

$$\Delta F \equiv F\left[y_1+\delta y_1, y_2+\delta y_2,..,y_n+\delta y_n; x\right] - F\left[\ y_1, y_2,..y_n; x\ \right] \qquad (1.1)$$

- Nếu hàm y(x) và δy là khả vi thì $\delta y'$ của $y'(x)$ do δy gây ra được xác định như sau:

$$\delta y' \equiv \delta \frac{dy}{dx} \equiv \frac{d}{dx}\left(\delta y\right) \equiv Y'(x) - y'(x) \qquad (1.2)$$

- Nếu cho hàm $F[\ y_1(x), y_2(x),..y_n(x); y'_1(x), y'_2(x),..y'_n(x); x\ ]$ thì gia số của nó tương ứng với các biến phân δy_i là:

$$\begin{aligned}\Delta F \equiv\ & F\left[y_1+\delta y_1, y_2+\delta y_2,..,y_n+\delta y_n; y'_1+\delta y'_1, y'_2+\delta y'_2,..,y'_n+\delta y'_n, x\right] \\ & -F\left[\ y_1, y_2,..y_n; y'_1, y'_2,..y'_n, x\ \right]\end{aligned} \qquad (1.3)$$

- Nếu hàm F có đạo hàm riêng liên tục bậc 2 thì số gia của nó được xác định theo (1.3) có thể viết dưới dạng chuỗi Tay-lo như sau:

$$\Delta F = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial F}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial F}{\partial y'_i}\delta y'_i\right| + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_k}\delta y_i \delta y_k + \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y'_k}\delta y_i \delta y'_k + \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y_k}\delta y'_i \delta y_k\right| + R\left(\rho^2\right) \qquad (1.4)$$

$R\left(\rho^2\right)$ là đại lượng vô cùng bé bậc cao với $\rho = \sqrt{\delta y_1^2 + \delta y'^2_1 + \delta y_2^2 + \delta y'^2_2 + ... + \delta y_n^2 + \delta y'^2_n}$ (1.5)

Tổng đầu tiên trong (1.4) tương ứng với bậc một của δy_i và $\delta y'_i$ được gọi là biến phân bậc một của hàm F có ký hiệu δF, tổng thứ hai tương ứng với tích của chúng và bằng một nửa biến phân bậc hai $\delta^2 F$ của F.

1.2.CỰC TRỊ CỦA PHIẾM HÀM - PHƯƠNG TRÌNH EULER. [2,3,12,13]

Như đã nói ở trên, đối tượng của phép tính biến phân là tìm những hàm chưa biết y(x) để đảm bảo cực trị cho tích phân xác định sau:

$$I = \int_{x1}^{x2} F\left[y(x), y^{'}(x), x\right] dx \qquad (1.6a)$$

hoặc là
$$I = \int_{x1}^{x2} F\left[y_1(x), y_2(x), .., y_n(x), y_1^{'}(x), y_2^{'}(x), .., y_n^{'}(x), x\right] dx \qquad (1.6b)$$

[Phép ánh xạ đặt mỗi hàm (hệ hàm) nào đó xác định trên một tập nào đó tương ứng với một đại lượng vô hướng (scalar) được gọi là phiếm hàm].

Phiếm hàm I có cực tiểu (địa phương) đối với hàm y(x) hoặc hệ hàm $y_i(x)$ nếu như tồn tại số dương ε để số gia ΔZ.

$$\Delta Z \equiv \Delta \int_{x1}^{x2} F dx \equiv \int_{x1}^{x2} \Delta F dx > 0 \qquad (1.7)$$

Đối với tất cả các biến phân δy hoặc tất cả hệ biến phân δy_i thỏa mãn điều kiện

$$0 < \sqrt{\delta y_i^2 + \delta y'^2_i} < \varepsilon$$

hoặc $0 < \sqrt{\delta y_1^2 + \delta y'^2_1 + \delta y_2^2 + \delta y'^2_2 + ... + \delta y_n^2 + \delta y'^2_n} < \varepsilon$ khi $x_1 \le x \le x_2$.

Cực đại (địa phương) của Z khi ΔZ < 0.

Có hai phương pháp để tìm cực trị của(1.6): Giải trực tiếp trên phiếm hàm hoặc đưa phiếm hàm về phương trình vi phân.

Khi đưa phiếm hàm (1.6a) về phương trình vi phân thì từ (1.4) ta có điều kiện cần để phiếm hàm có cực trị là:

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \delta F(y, y', x) dx = 0 \qquad (a)$$

Với δI là biến phân bậc nhất xác định theo (1.4):

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx = 0 \qquad (b)$$

Tích phân từng phần biểu thức (b) ta sẽ có:

$$\delta I = \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left| \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right| \delta y dx = 0 \qquad (c)$$

Khi các điểm biên là cố định thì số hạng thứ nhất của (c) bằng không

$$\frac{\partial F}{\partial y} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} = 0$$

Và do δy tùy ý cho nên từ (c) suy ra điều kiện cần để phiếm hàm (1.6a) đạt cực trị là:

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0 \qquad (1.8)$$

Phương trình (1.8) được gọi là phương trình Euler của phiếm hàm (1.6a).

Trong một số tài liệu, phương trình Euler thường được suy ra từ bổ đề sau:

Bổ đề: *Cho phiếm hàm tuyến tính trong không gian D1 (Gồm các hàm xác định được trên đoạn [x_1,x_2] liên tục cùng với đạo hàm cấp 1 của nó).*

Nếu $$\int_{x1}^{x2}\left[a(x)\delta y(x)+b(x)\delta y'(x)\right]dx=0$$

Với mọi hàm $\delta y\in D_1$ sao cho $\delta y(x_1)=\delta y(x_2)=0$ thì b(x) vi phân được và a(x) - b'(x)=0

Như vậy, bài toán tìm cực trị của phiếm hàm(1.6a) dẫn về giải phương trình (1.8) với các điều kiện biên đã cho.

Khi phiếm hàm (1.6b) có hệ hàm y_i(i=1..n) cần tìm thì ứng với mỗi y_i sẽ có một phương trình Euler dạng (1.8).

Trong trường hợp giá trị của hàm y tại x_1 hoặc x_2 hoặc tại cả hai cận x_1 và x_2 không xác định (trường hợp các biên di động) thì ứng với mỗi trường hợp như vậy, ngoài phương trình Euler (1.8) còn phải xét thêm các điều kiện biên.

Trong trường hợp hàm F dưới dấu tích phân chứa các đạo hàm cấp cao

$$I=\int_{x1}^{x2}F\left[y_1,y_2,..,y_n,y_1',y_2',..,y_n',y_1'',y_2'',..,y_n'',..,x\right]dx \qquad (1.9)$$

thì sử dụng biến phân bậc nhất của F:

$$\delta F=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial F}{\partial y_i'}\delta y_i'+\frac{\partial F}{\partial y_i''}\delta y_i''+...\right) \qquad (1.10)$$

vào điều kiện cần (a) và bằng cách tích phân từng phần 2 lần, 3 lần … ta sẽ nhận được hệ phương trình EuLer:

$$\frac{\partial F}{\partial y_i}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i''}\right)-\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'''}\right)+....=0 \qquad (1.11)$$

Hệ phương trình (1.11) được giải với các điều kiện biên của y_i và các đạo hàm đến bậc (r_i-1) của nó (r_i là bậc đạo hàm của y_i).

Các công thức trên có thể mở rộng cho trường hợp hàm nhiều biến độc lập x_i.

Chú ý rằng các phương trình Euler (1.8) và (1.11) là điều kiện cần để các phiếm hàm (1.6)và (1.9) tương ứng với chúng đạt cực trị. Đối với các bài toán cơ các phương trình Euler chính là các phương trình cân bằng (sẽ thấy trong phần tiếp theo) nên chúng cũng là điều kiện đủ.

1.3. BÀI TOÁN CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN - PHƯƠNG PHÁP THỪA SỐ LAGRANGE

Bài toán đặt ra là: Cần tìm hệ hàm $y_1, y_2, .., y_n$ làm cực trị cho phiếm hàm

$$I = \int_{x1}^{x2} F\left(y_1, y_2, ..., y_n, y'_1, y'_2, .., y'_n, x\right) dx \qquad \text{(a)}$$

Với điều kiện ràng buộc

$$\varphi_j\left(y_1, y_2, ..., y_n, x\right) = 0 \quad \text{(Với j = 1, 2, …, m; m < n)} \qquad \text{(b)}$$

n: Số hàm cần tìm ; m: số ràng buộc

Ta có định lý sau:

Phiếm hàm (a) đạt cực trị trên hệ hàm cần tìm $y_1, y_2, .., y_n$ với điều kiện ràng buộc (b) thì hệ hàm đó cần thỏa mãn hệ phương trình Euler sau:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_i'}\right) - \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} = 0 \qquad \text{i =1,2,…n} \qquad \text{(c)}$$

Với $\Phi = F + \sum_{j=1}^{m} \lambda_i(x).\varphi_j$ được gọi là phiếm hàm Lagrange mở rộng.

Các hàm $\lambda_i(x)$ được gọi là thừa số Lagrange. Nếu bài toán có nghiệm thì (m+n) hàm $y_i\left(x\right)$, $\lambda_i(x)$ được xác định từ phương trình (c) và (b) với các điều kiện biên đã cho. (c) là điều kiện cần chứ chưa đủ. φ_j chứa cả y_i' vẫn dùng được.

I.4. PHƯƠNG PHÁP TRỰC TIẾP TRONG BÀI TOÁN BIẾN PHÂN PHƯƠNG PHÁP SAI PHÂN HỮU HẠN CỦA EULER [13]

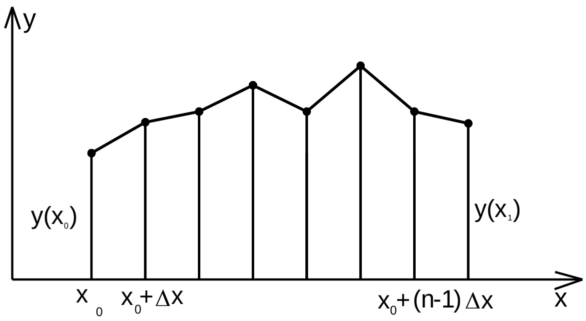
Tư tưởng của phương pháp sai phân hữu hạn là xét giá trị của phiếm hàm $I\left[y\left(x\right)\right]$

Chẳng hạn $I = \int_{x0}^{x1} F\left(y, y', x\right) dx$; $y(x_0) = a$, $y(x_1) = b$

Không phải trên các đường cong có thể nhận bất kỳ trong một bài toán biến phân cho trước, mà chỉ xét các giá trị của phiếm hàm trên các đường gãy khúc thiết lập từ n đỉnh cho trước có hoành độ là: $x_0 + \Delta x$, $x_0 + 2\Delta x$, ..., $x_0 + \left(n-1\right)\Delta x$.

Ở đây $\Delta x = \dfrac{x_1 - x_0}{n}$

Trên các đường gấp khúc này, phiếm hàm $I\left[y(x)\right]$ trở thành hàm $\varphi(y_1, y_2, ..., y_{n-1})$ của các tung độ $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$ của các đỉnh đường gấp khúc, bởi vì đường gấp khúc hoàn toàn được xác định bởi các tung độ này.



Ta sẽ chọn các tung độ $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$ để hàm $\varphi(y_1, y_2, ..., y_{n-1})$ đạt cực trị, tức là xác định $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$ từ hệ phương trình $\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = 0$, … ,$\frac{\partial \varphi}{\partial y_{n-1}} = 0$. Sau đó chuyển qua giới hạn khi n $\to \infty$.

Trong phạm vi của một số điều kiện nào đó của hàm F, ta sẽ nhận được nghiệm của bài toán biến phân. Nhưng để thuận tiện hơn nữa, giá trị của phiếm hàm I được tính gần đúng trên các đường gấp khúc nêu trên, chẳng hạn, trong bài toán đơn giản nhất, thay tích phân: $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_0+k\Delta x}^{x_0+(k+1)\Delta x} F(x, y, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}).dx$

bằng tổng tích phân $\sum_{i=1}^{n} F\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right).\Delta x$.

Với tư cách là thí dụ, ta đưa ra phương trình Euler đối với phiếm hàm

$$I = \int_{x0}^{x1} F\left(y, y', x\right)dx$$

Trong trường hợp này trên đường gấp khúc đang xét:

$$I\left[y(x)\right] \approx \varphi(y_1, y_2, ..., y_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right).\Delta x$$

Vì chỉ có hai số hạng thứ i và thứ (i-1) của tổng này phụ thuộc vào y_i:

$$F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right)\Delta x \text{ và } F\left(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}\right)\Delta x$$

nên phương trình $\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} = 0$ (i = 1,2,.., n - 1) có dạng:

$$F_y\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right)\Delta x + F_{y'}\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right).\left(-\frac{1}{\Delta x}\right)\Delta x + F_{y'}\left(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}\right)\frac{1}{\Delta x}\Delta x = 0$$

(i =1,2,..,(n-1))

Hay là: $$F_y\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right) - \frac{F_{y'}\left(x_i, y_i, \frac{y_i}{\Delta x}\right) - F_{y'}\left(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{\Delta y_{i-1}}{\Delta x}\right)}{\Delta x} = 0$$

Hay: $$F_y\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right) - \frac{\Delta F_{y'}}{\Delta x} = 0$$

Chuyển qua giới hạn khi n $\rightarrow \infty$ ta có phương trình Euler: $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$

Đó là phương trình mà ẩn hàm y(x) phải tìm cần thỏa mãn. Tương tự, có thể nhận được điều kiện cần cơ bản của cực trị trong các bài toán biến phân khác.

Nếu không thực hiện quá trình quá giới hạn thì từ hệ phương trình $\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} = 0$ có thể xác định được các tung độ cần tìm $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$, và do đó nhận được đường gấp khúc là nghiệm gần đúng của bài toán biến phân.

Chính Euler đã dùng sai phân hữu hạn nêu trên khi đưa ra phương trình mang tên ông (phương trình Euler của phép tính biến phân).

CHƯƠNG 2
CÁC PHƯƠNG PHÁP XÂY DỰNG BÀI TOÁN CƠ HỌC CÔNG TRÌNH

Trong chương này, Luận văn sẽ trình bày bốn đường lối chung để xây dựng bài toán cơ nói chung và bài toán cơ học công trình nói riêng,dùng lý thuyết dầm chịu uốn để minh họa. Cũng trong chương này, tác giả dùng nguyên lý chuyển vị ảo để giải thích điều kiện biên của tấm chữ nhật chịu uốn.

2.1. CÁC PHƯƠNG PHÁP XÂY DỰNG BÀI TOÁN CƠ HỌC CÔNG TRÌNH

2.1.1. PHƯƠNG PHÁP XÉT CÂN BẰNG PHÂN TỐ (Differential Formulation).

Phương trình vi phân cân bằng được xây dựng trực tiếp từ việc xét các điều kiện cân bằng lực phân tố được tách ra khỏi kết cấu.

Dưới đây ta xét bài toán dầm chịu uốn:

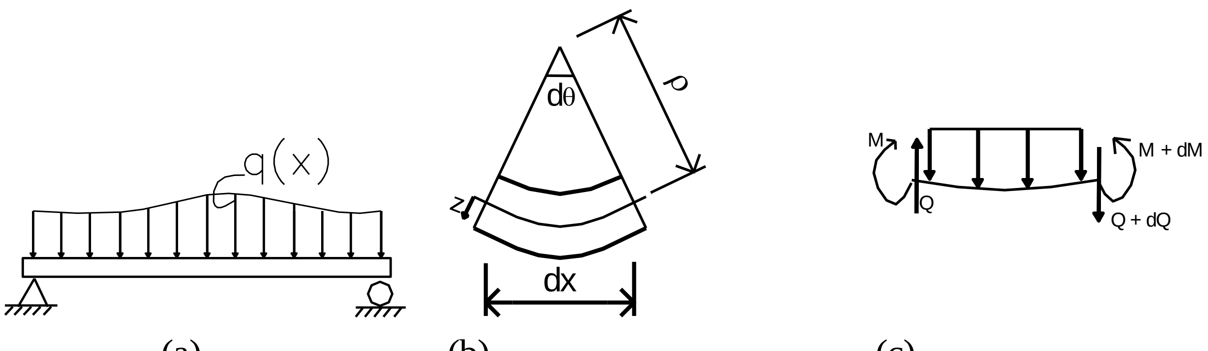
Trong sức bền vật liệu, khi nghiên cứu dầm chịu uốn ngang đã dùng các giả thiết sau:

Không xét lực nén giữa các thớ theo chiều cao dầm.

Trục dầm không bị biến dạng nên không có ứng suất.

Mặt cắt thẳng góc với trục dầm sau khi biến dạng vẫn phẳng và thẳng góc với trục dầm (giả thiết Bernoulli).

Với các giả thiết nêu trên thì trục dầm chỉ có chuyển vị thẳng đứng y(x) được gọi là độ võng hay đường đàn hồi dầm.



(a) (b) (c)

H2.1.Dầm đơn giản chịu uốn.

a. Dầm chịu tải phân bố b. Phân tố dầm chịu uốn c. Các nội lực phân tố dầm

Đặt 1/ρ là độ cong tại một điểm nào đó của đường độ võng (ρ là bán kính cong). Xem độ cong là bằng nhau theo chiều rộng dầm. Độ cong dương khi mặt lồi của đường đàn hồi hướng xuống.

Biến dạng dài của thớ dầm cách trục dầm (trục trung hoà) một đoạn z sẽ bằng:

$$\varepsilon_x = \frac{(\rho + z)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{z}{\rho} \qquad (1.5)$$

Theo hình học vi phân độ cong của đường đàn hồi được tính

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

Với giả thiết chuyển vị nhỏ nên độ cong tính gần đúng $\frac{1}{\rho} = -\frac{d^2y}{dx^2}$ (1.6)

Vật liệu đàn hồi với mô đun đàn hồi E nên ứng suất bằng

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\frac{z}{\rho} = -E.z\frac{d^2y}{dx^2}$$

Nội lực mômen tác dụng lên tiết diện dầm được xác định bằng tích phân theo chiều cao

$$M = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x.b(z).z.dz = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b(z)E.z^2\frac{d^2y}{dx^2}dz = -E\frac{d^2y}{dx^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b(z).z^2.dz$$

Hay $$M = -EJ\frac{d^2y}{dx^2} \qquad (1.7)$$

J là mômen quán tính tiết diện đối với trục dầm $J = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b(z).z^2.dz$

Với tiết diện chữ nhật ta có $J = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b.z^2.dz = \frac{bh^3}{12}$

Tích EJ gọi là độ cứng uốn (chống uốn) của dầm.

Tính toán trên cho thấy độ võng của dầm chỉ do mômen uốn gây ra cho nên coi giả thiết về dầm chịu uốn ở trên (giả thiết tiết diện thẳng góc) chỉ dùng khi tỉ lệ chiều cao h và chiều dài dầm h/L < 1/5:1/10

Căn cứ vào độ giãn của các thớ dầm và độ võng của trục dầm ta biết được trên tiết diện dầm còn có tác dụng của ứng suất tiếp phân bố theo chiều cao dầm. Tổng cộng các ứng suất tiếp sẽ cho ta lực cắt Q tác dụng lên trục dầm. Các lực tác dụng lên phân tố là các nội lực M, Q và các ngoại lực phân bố đều q (H1.1c)

Từ điều kiện tổng hình chiếu các lực lên trục Z phải bằng 0 cho ta phương trình:

$$\frac{dQ}{dx} + q = 0 \qquad (1.8)$$

Từ điều kiện tổng mômen của tất cả các lực đối với trục dầm bên trái phân tố phải bằng không, bỏ qua vô cùng bé bậc cao ta được:

$$\frac{dM}{dx} = Q \quad (1.9)$$

Đưa (1.9) vào (1.8) ta được: $$\frac{d^2M}{dx^2} = -q \quad (1.10)$$

Các phương trình (1.8), (1.9), (1.10) là các phương trình cân bằng lực phân tố.

Thay M từ (1.7) vào (1.10) ta được phương trình: $$\mathrm{EJ}\frac{d^4y}{dx^4} = q \quad (1.11)$$

Phương trình (1.11) là phương trình vi phân cân bằng của dầm viết theo chuyển vị.

Đây là phương trình vi phân cấp 4, được giải với các điều kiện biên ở hai đầu dầm

- Đầu dầm là liên kết khớp : $y_{x=0,x=l} = 0$; $M_{x=0,x=l} = 0$
- Đầu dầm là liên kết ngàm: $y_{x=0,x=l} = 0$; $y'_{x=0,x=l} = 0$
- Đầu dầm tự do : $Q_{x=0,x=l} = 0$; $M_{x=0,x=l} = 0$
- Đối với bài toán động lực học thì theo Nguyên lý D'lambert cần phải xét lực quán tính. Dầm có chuyển vị thẳng đứng y là hàm theo toạ độ x và thời gian t: y(x,t).

Lực quán tính trong trường hợp này bằng $m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, m là khối lượng trên một đơn vị chiều dài dầm. Phương trình cân bằng(1.11) sẽ là phương trình vi phân đạo hàm riêng có dạng: $$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = q \quad (1.12)$$

Để giải (1.12) cần biết thêm điều kiện ban đầu $y(x,t)_{t=0}$ và $y'(x,t)_{t=0}$

Xây dựng phương trình vi phân tấm chịu uốn theo phương pháp xét cân bằng phân tố

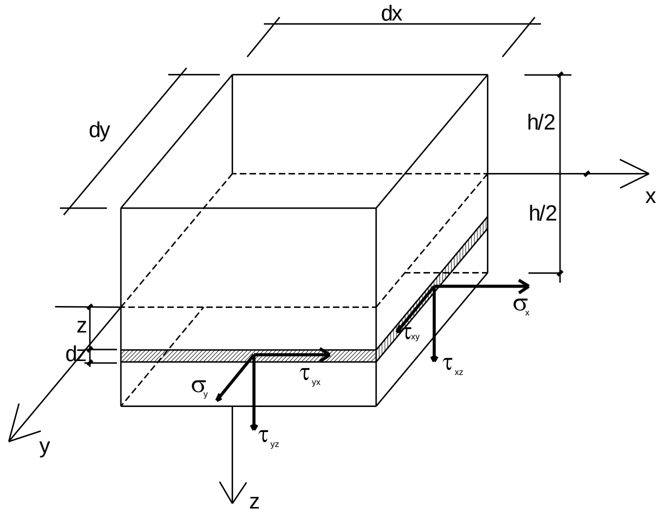
Tấm mỏng là một vật thể hình trụ có chiều cao nhỏ so với kích thước của hai mặt đáy. Chiều cao h gọi là bề dày của tấm. Mặt trung gian là mặt chia đôi bề dày của tấm.Mặt đàn hồi là mặt trung gian bị uốn cong dưới tác dụng của ngoại lực.
Trong trường hợp độ võng w của tấm nhỏ hơn chiều dày h của nó thì có thể lập được lý thuyết gần đúng thích hợp hoàn toàn với tấm chịu uốn do tải trọng ngang dựa trên những giả thiết sau:

1.Tại mặt trung hoà tấm không hề bị biến dạng khi uốn, mặt phẳng này vẫn là mặt trung hoà.

2. Những điểm của tấm trước khi chịu lực nằm trên đường vuông góc với mặt phẳng trung bình, thì trong quá trình chịu uốn vẫn nằm trên đường vuông góc với mặt trung bình (Giả thiết Kirchoff).

3. Ứng suất pháp theo phương vuông góc với mặt trung bình của tấm được phép bỏ qua.

Ta hãy xét một phân tố được cắt ra khỏi tấm bằng các mặt phẳng song song với các mặt phẳng xz và yz.



H2.2. Phân tố tấm và các thành phần ứng suất

Tại một điểm có toạ độ z trên mặt vuông góc với trục x có $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ tác dụng, trên mặt vuông góc với trục y có các ứng suất $\sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz}$ tác dụng. Nhưng do giả thiết 2 (giả thiết Kirchoff) nên ta suy ra $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$.

Theo định luật Húc và từ giả thiết thứ 3 ta có:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right);\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right);\ \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \qquad (1.13)$$

(υ là hệ số poát xông)

Ta hãy biểu diễn các ứng suất này qua chuyển vị

$$\begin{cases} \gamma_{xz} = \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{yz} = \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z} = 0 \end{cases} \qquad \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial z} = -\dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial z} = -\dfrac{\partial w}{\partial y} \end{cases}$$

Lấy tích phân theo z ta có:

$$\rightarrow \begin{cases} u = -\dfrac{\partial w}{\partial x} z + \varphi_1(x,y) \\ v = -\dfrac{\partial w}{\partial y} z + \varphi_2(x,y) \end{cases}$$ φ_1, φ_2 là các hằng số tích phân đối với z

Từ giả thiết 1, tại mặt trung bình tấm k có biến dạng nên u = v = 0 khi z = 0

Suy ra $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$

Do vậy:
$$\begin{cases} u = -\dfrac{\partial w}{\partial x} z \\ v = -\dfrac{\partial w}{\partial y} z \end{cases} \tag{1.14}$$

Từ đó ta có:
$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \nu\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) = -\dfrac{Ez}{1-\nu^2}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ \sigma_y = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial y} + \nu\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = -\dfrac{Ez}{1-\nu^2}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\ \tau_{xy} = \dfrac{E}{2(1+\nu)}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) = -\dfrac{Ez}{1+\nu}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) \end{cases} \tag{1.15}$$

Nội lực mô men uốn trên một đơn vị dài được xác định bằng tích phân theo chiều cao

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x.zdz = -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{Ez^2}{1-\nu^2}dz = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{1.16}$$

Trong đó $D = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{Ez^2}{1-\nu^2}dz = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ gọi là độ cứng trụ

Tương tự ta cũng có
$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{1.17}$$

Các ứng suất tiếp τ_{xy} và τ_{yx} sẽ gây ra các mômen xoắn trên đơn vị chiều dài

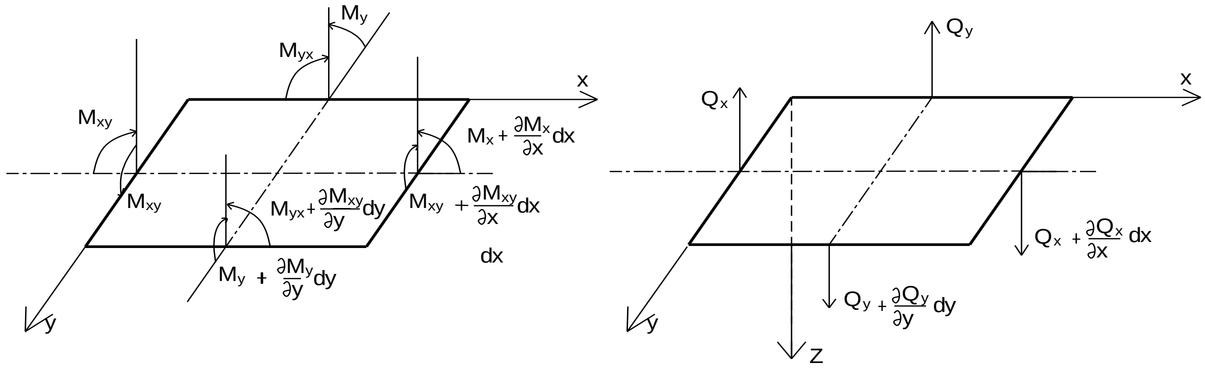
$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy}.zdz = -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{Ez^2}{1+\nu}dz = -D\left(1-\nu\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{1.18}$$

Do $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ nên $M_{xy} = M_{yx}$

Ngoài ra còn có các lực cắt thẳng đứng tác dụng lên mặt bên phân tố. Độ lớn của chúng trên một đơn vị chiều dài song song với các trục y và trục x lần lượt là:

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz}dz \quad \text{và} \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz}dz$$

Vì mômen và lực cắt là các hàm của tọa độ x và y nên khi nghiên cứu điều kiện cân bằng của $D\left(1-\nu\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ phân tố, ta phải chú ý tới sự biến thiên của các đại lượng này khi x và y thay đổi một lượng nhỏ dx, dy. Mặt trung bình của phân tố được biểu diễn như hình dưới dây. (Chiều dương của mômen lực cắt như hình vẽ).



H2.3. Mặt trung bình của phân tố và các thành phần nội lực

Chiếu tất cả các lực đặt vào phân tố lên trục Z, ta được phương trình cân bằng sau:

$$\frac{\partial Q_y}{\partial y}dydx+\frac{\partial Q_x}{\partial x}dxdy+q.dxdy=0$$

Rút ra: $$\frac{\partial Q_y}{\partial y}+\frac{\partial Q_x}{\partial x}+q=0 \qquad (1.19)$$

Lấy mô men đối với trục x của tất cả các lực tác dụng vào phân tố :

$$\frac{\partial M_y}{\partial y}dydx+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}dxdy-(Q_y+\frac{\partial Q_y}{\partial y}dy)dxdy=0$$

Bỏ đi vô cùng bé bậc cao và rút gọn ta được $\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}=Q_y$ (1.20)

Tương tự lấy mômen đối với trục y tất cả các lực tác dụng vào phân tố ta được:

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial M_x}{\partial x}=Q_x \qquad (1.21)$$

Đưa các phương trình (1.20), (1.21) vào phương trình (1.19)

Ta được phương trình sau: $\frac{\partial M_{yx}}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}+q=0$

Do $M_{xy}=M_{yx}$ nên ta thu được phương trình sau:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}=-q \qquad (1.22)$$

Các phương trình từ (1.19.. 1.22) là các phương trình cân bằng lực phân tố.

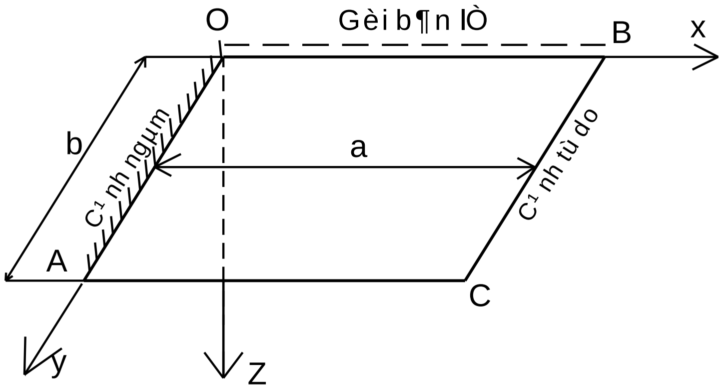
Để biểu diễn phương trình (1.22) theo chuyển vị ta đưa các phương trình (1.16), (1.17), (1.18) vào phương trình (1.22). Sau khi rút gọn ta được:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}=\frac{q(x,y)}{D} \qquad (1.23)$$

Biểu thức (1.23) là phương trình cân bằng của tấm viết theo chuyển vị. Phương trình này do Lagrange tìm ra năm 1811 khi ông nghiên cứu bản báo cáo của Xô phi - Giec manh trình bày ở Viện hàn lâm khoa học Pháp. Sau này nó được mang tên là phương trình Xôphi- Giéc manh.

- **Các điều kiện biên**

Điều kiện biên là những điều kiện trên bề mặt ngoài của tấm mà ta cần cho trước để nghiệm phương trình (1.23) tương ứng với từng bài toán cụ thể. Trong các điều kiện biên có cả tải trọng q(x,y) tác động ở mặt trên và mặt dưới của tấm. Khi đặt bài toán tổng quát của tấm đã tính đến nó và nó đã có mặt ở một số hạng tự do của phương trình (1.23). Do đó ta chỉ còn điều kiện biên trên các cạnh tấm.



H2.4. Tấm chữ nhật với các liên kết khác nhau ở chu vi

1. Cạnh tấm bị ngàm. Tại ngàm độ võng và góc xoay bằng không.

   Tại x=0 ta có w=0 và $\frac{\partial w}{\partial x}=0$

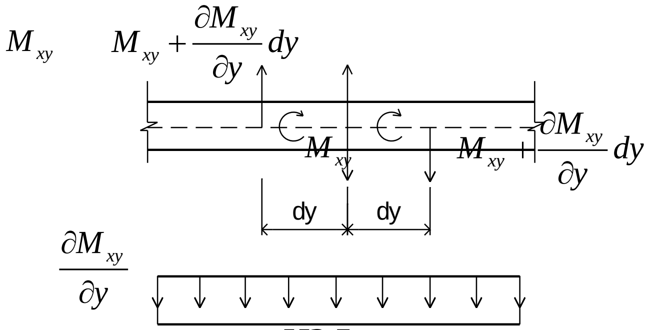
2. Cạnh của tấm liên kết khớp: Tại đó mômen uốn bằng không và độ võng bằng không. Cũng nhận thấy độ cong theo phương còn lại bằng không nên điều kiện biên viết như sau:

   Chẳng hạn tại cạnh x=a tựa khớp $\begin{cases} w\big|_{x=a}=0 \\ \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=a}=0 \end{cases}$

3. Cạnh tự do: Nếu một cạnh của tấm , chẳng hạn x = a hoàn toàn tự do thì rõ ràng là dọc theo cạnh này mômen uốn, mômen xoắn và lực cắt thẳng đứng bằng không. $(M_x)_{x=a}=0$ $\quad (M_{xy})_{x=a}=0$ $\quad (Q_x)_{x=a}=0$

Điều kiện biên của cạnh tự do dưới dạng này do Poatxông nêu ra. Sau đó Kirchhoff đã chứng minh rằng ba điều kiện biên này là thừa và chỉ cần hai điều kiện biên. Kirchhoff cũng chứng tỏ rằng hai yêu cầu của Poatxong đối với mômen xoắn M_{xy} và lực cắt ngang Q_x phải được thay bằng một điều kiện thống nhất.

Hai nhà khoa học Thomson và Tait đã giải thích ý nghĩa vật lý của vấn đề giảm số điều kiện biên đó. Các tác giả này chỉ rõ ràng sự uốn của tấm sẽ không đổi nếu trên cạnh x=a ta thay lực ngang hợp thành ngẫu lực xoắn Mxy đặt lên phân tố chiều dài dy bằng hai lực có chiều thẳng đứng với cánh tay đòn dy như hình dưới đây.



H2.5

Kết quả là sự phân bố ngẫu lực xoắn phân bố được biến đổi thành lực phân bố đều có cường độ $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$ và hai lực tập trung ở hai đầu cạnh x = a như trên hình H2.2. Lực phân bố này cùng chiều với lực cắt Q_x. Do đó trên cạnh biên tự do của tấm hai điều kiện $Q_x = 0$, $M_{xy} = 0$ được viết gộp lại thành điều kiện $Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0$.

Vậy điều kiện biên của cạnh tự do $\begin{cases} M_x = 0 \\ Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0 \end{cases}$

Giống như dầm, cơ sở của điều kiện biên tại ngàm cũng dựa trên cơ sở của cơ học chất điểm và cơ học vật rắn tuyệt đối

2.1.2. CÁC PHƯƠNG PHÁP BIẾN PHÂN NĂNG LƯỢNG

Trong mục này, luận văn sẽ trình bày cách xây dựng bài toán cơ theo phương pháp năng lượng (Energy Method)

Năng lượng của cơ hệ bao gồm động năng T và thế năng π. Động năng T được xác định theo khối lượng và vận tốc chuyển động, còn thế năng π bao gồm thế năng biến dạng và công của các lực không thế (non-potential forces) (lực có thế chẳng hạn như lực trọng trường).

Đối với hệ bảo toàn, năng lượng là không đổi T + π = const

Do đó tốc độ thay đổi năng lượng phải bằng không: $\frac{d}{dt}(T+\pi)=0$

Với bài toán tĩnh T = 0 do đó π = const

Thế năng biểu diễn qua ứng suất và nội lực ; cũng có thể biểu diễn qua biến dạng và chuyển vị. Vì vậy có hai nguyên lý năng lượng sau:

2.1.2.1.Nguyên lý thế năng biến dạng cực tiểu [5,tr60].

Khi phương trình cân bằng được biểu diễn qua ứng suất hoặc nội lực và do đó thế năng biến dạng cũng biểu thị qua ứng suất hoặc nội lực ta có nguyên lý thế năng biến dạng cực tiểu, nguyên lý Castigliano (1847-1884). Nguyên lý phát biểu như sau:

Trong tất cả các trạng thái cân bằng lực có thể thì trạng thái cân bằng thực xảy ra khi thế năng biến dạng là cực tiểu.

Trạng thái cân bằng lực có thể là trạng thái mà nội lực thỏa mãn các điều kiện liên kết. Ta viết nguyên lý dưới dạng sau:

$$\left.\begin{array}{l}\pi\ \textit{(ứng suất)} \rightarrow \textit{Min}\\ \textbf{\textit{Ràng buộc là các phương trình cân bằng viết dưới dạng lực}}\end{array}\right\}$$

Áp dụng với bài toán dầm chịu uốn

Thế năng biến dạng của dầm: $\pi=\frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2(x)}{EJ}dx$;

Phương trình cân bằng lực $\frac{d^2M}{dx^2}=-q$

Theo nguyên lý thế năng biến dạng cực tiểu, Dầm ở trạng thái cân bằng thực thì ta có

$$\left.\begin{array}{ll}\pi=\frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2(x)}{EJ}dx \rightarrow \text{Min} & \\ \text{Với ràng buộc} \quad \frac{d^2M}{dx^2}=-q & \end{array}\right\}$$

Nội lực mômen uốn là hàm phân bố theo chiều dài dầm M(x) phải thỏa mãn các điều kiện liên kết ở hai đầu thanh (được xác định ở hai đầu thanh).

Đây là bài toán biến phân Lagrange (Bài toán cực trị có điều kiện).

Theo đó nếu hàm M(x) là đường cực trị của phiếm hàm $\pi=\frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2(x)}{EJ}dx$

thì tồn tại một hàm λ(x) sao cho phiếm hàm Z= $\frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2(x)}{EJ}dx+\int_0^l \lambda(x).\left|\frac{d^2M(x)}{dx^2}+q\right|dx$

nhận M(x) là đường cực trị. Phiếm hàm Z phụ thuộc 2 hàm M(x), λ(x) cùng với các đạo hàm cấp 2. Lấy biến phân δZta có:

$$\delta Z=\int_0^l \frac{M}{EJ}\delta M\,dx+\int_0^l\left\{\lambda.\delta\left[\frac{d^2M}{dx^2}+q\right]+\left[\frac{d^2M}{dx^2}+q\right].\delta\lambda\right\}.dx$$

$$\delta Z=\int_0^l \frac{M}{EJ}\delta M\,dx+\int_0^l\left[\frac{d^2M}{dx^2}+q\right].\delta\lambda.dx+\int_0^l \lambda\frac{d^2}{dx^2}(\delta M)dx$$

$$\delta Z=\int_0^l \frac{M}{EJ}\delta M\,dx+\int_0^l\left[\frac{d^2M}{dx^2}+q\right].\delta\lambda.dx+\int_0^l \lambda d\left(\frac{d\ (\delta M)}{dx}\right)$$

Tích phân từng phần số hạng thứ 3 trong biểu thức trên ta được

$$\delta Z=\int_0^l \frac{M}{EJ}\delta M\,dx+\int_0^l\left[\frac{d^2M}{dx^2}+q\right].\delta\lambda.dx+\lambda\frac{d\ (\delta M)}{dx}-\int_0^l\left(\frac{d\ (\delta M)}{dx}\right)d\lambda$$

Tích phân từng phần lần thứ 2: $\int_0^l\left(\frac{d\ \delta M}{dx}\right)d\lambda=\delta M\left.\frac{d\lambda}{dx}\right|_0^l-\int_0^l\delta M\frac{d^2\lambda}{dx^2}$

Cuối cùng ta có $\delta Z=\int_0^l\left(\frac{M}{EJ}+\frac{d^2\lambda}{dx^2}\right)\delta M\,dx+\int_0^l\left[\frac{d^2M}{dx^2}+q\right].\delta\lambda.dx+\lambda\,\delta\left.\left(\frac{dM}{dx}\right)\right|_0^l-\delta M\left.\frac{d\lambda}{dx}\right|_0^l$

ta có điều kiện cần để Z cực tiểu là δZ = 0. Do đó ta có hệ phương trình Euler sau:

$$\begin{cases}\dfrac{M(x)}{EJ}+\dfrac{d^2\lambda(x)}{dx^2}=0\\[2mm]\dfrac{d^2M(x)}{dx^2}+q=0\end{cases}$$

Cùng với điều kiện $\lambda\delta\left.\left(\frac{dM}{dx}\right)\right|_0^l=0;\quad \delta M\left.\frac{d\lambda}{dx}\right|_0^l=0$. Điều kiện này chính là các điều kiện biên ở hai đầu dầm.Nó luôn được thỏa mãn.

λ(x) có thứ nguyên là chuyển vị cho nên phương trình thứ nhất của hệ phương trình trên biểu thị quan hệ giữa M(x) và chuyển vị. Thế vào phương trình thứ 2 ta thu được

$$EJ\frac{d^4\lambda(x)}{d^4x}=q \qquad (*)$$

λ(x) là độ võng của dầm và phương trình (*) là phương trình vi phân cân bằng của dầm viết theo chuyển vị nhận được ở chương 1.

2.1.2.2. Nguyên lý công bù cực đại [5,tr62]

Khi dùng ẩn là các chuyển vị và biến dạng thì có nguyên lý công bù cực đại. Nguyên lý phát biểu như sau:

Trong tất cả các chuyển vị động học (kinetic) có thể (khả dĩ) thì chuyển vị thực là chuyển vị có công bù cực đại.

Chuyển vị động học có thể là chuyển vị thỏa mãn các phương trình liên hệ giữa chuyển vị và biến dạng và thỏa mãn các điều kiện biên.

Công bù bằng tích của ngoại lực và chuyển vị trừ đi thế năng biến dạng

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{\textit{[Công ngoại lực - thế năng biến dạng]}} \quad \rightarrow \quad \text{Max} \\ \textbf{\textit{Ràng buộc là các phương trình liên hệ giữa chuyển vị và biến dạng}}\end{array}\right\}$$

<u>Áp dụng với dầm đã nêu:</u>

Công của ngoại lực $W = \int_0^l q(x).y(x)dx$. Thế năng biến dạng $\pi = \frac{1}{2}\int_0^l EJ.\chi^2 dx$

với χ là biến dạng uốn cũng là độ cong của đường độ võng

Theo nguyên lý trên: $\begin{cases} Z = \int_0^l q.y.dx - \frac{1}{2}\int_0^l EJ\chi^2 dx \rightarrow \text{Max} & \text{(a)} \\ \text{Ràng buộc } \chi = -\frac{d^2y}{dx^2} & \text{(b)} \end{cases}$

Thay (b) vào (a) ta có : $Z = \int_0^l q.y.dx - \frac{1}{2}\int_0^l EJ\left(-\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx \rightarrow$ Max

(c)

Thay dấu của (c) ta có $I = \frac{1}{2}\int_0^l EJ\left(-\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx - \int_0^l q.y.dx \rightarrow$ Max (d)

Lấy biến phân (d), sử dụng công thức tích phân từng phần và biến đổi ta được:

$$\delta I = \int_0^l EJ\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\delta\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)dx - \int_0^l q.\delta y.dx$$

$$\delta I = \int_0^l EJ\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)d\left(\frac{d\delta y}{dx}\right) - \int_0^l q.\delta y.dx$$

$$\delta I = EJ\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\left(\frac{d\delta y}{dx}\right) - \int_0^l EJ\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)dx - \int_0^l q.\delta y.dx$$

$$\delta I = EJ\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)\Bigg|_0^l - \int_0^l EJ\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)d\delta y - \int_0^l q.\delta y.dx$$

$$\delta I = EJ\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\delta\left(\frac{dy}{dx}\right)\Bigg|_0^l - EJ\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)\delta y\Bigg|_0^l + \int_0^l\left[EJ\frac{d^4y}{dx^4} - q\right].\delta y dx$$

$$\delta I = -EJ.M.\delta\left(\frac{dy}{dx}\right)\Bigg|_0^l - EJ.Q.\delta y\Big|_0^l + \int_0^l\left[EJ\frac{d^4y}{dx^4} - q\right].\delta y dx \qquad (e)$$

Từ (e) ta thu được phương trình cân bằng: $EJ\dfrac{d^4y}{dx^4}=q$

Và các điều kiện biên:

- Nếu đầu dầm là liên kết ngàm: + Góc xoay bằng không vì thế $\delta\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=0$

 + Không có chuyển vị thẳng nên $\delta y=0$

- Nếu đầu dầm là liên kết ngàm trượt: $\delta\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=0$; $\delta y\neq 0$ và do đó Q =0
- Nếu đầu dầm là liên kết khớp: M=0 và $\delta y=0$
- Nếu đầu dầm tự do thì: $\delta\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\neq 0$; $\delta y\neq 0$ do đó M = 0, Q = 0 .

Nguyên lý công bù cực đại dưới dạng biểu thức (d) được sử dụng rộng rãi trong tính toán công trình theo phương pháp phần tử hữu hạn và được gọi là nguyên lý năng lượng tối thiểu mặc dù khi tính công của ngoại lực không dùng hệ số 1/2

2.1.3. NGUYÊN LÝ CHUYỂN VỊ ẢO [12]

Nguyên lý chuyển vị ảo hoặc nguyên lý công ảo được sử dụng rất rộng rãi trong cơ học. Theo K.F Gauss (1777-1855) thì mọi nguyên lý trong cơ học hoặc trực tiếp hoặc gián tiếp đều rút ra từ nguyên lý vị ảo (vận tốc ảo).

Xét cơ hệ chất điểm ở trạng thái cân bằng ta có:

$$\sum X=0;\quad \sum Y=0;\quad \sum Z=0 \qquad \text{(a)}$$

$\sum X$, $\sum Y$, $\sum Z$: là tổng hình chiếu của tất cả các lực tác dụng lên 3 trục của hệ tọa độ đề các. Ta viết biểu thức: $\sum X\delta U+\sum Y\delta V+\sum Z\delta W=0$ (b)

Ở đây xem $\delta U,\delta V,\delta W$ là các thừa số bất kỳ

Từ (a) ta có (b) và ngược lai từ (b) ta sẽ nhận được (a) bởi vì $\delta U,\delta V,\delta W$ là những thừa số bất kỳ. Bây giờ ta xem $\delta U,\delta V,\delta W$ là chuyển vị ảo theo 3 chiều của hệ tọa độ vuông góc. Chuyển vị ảo là chuyển vị do nguyên nhân bất kỳ bên ngoài nào đó gây ra. Các chuyển vị ảo này phải thỏa mãn các điều kiện liên kết của hệ.

Khi có chuyển vị ảo thì vị trí của các lực tác dụng trên hệ có thể thay đổi phương chiều và độ lớn của nó vẫn giữ nguyên không thay đổi. Và từ 2 biểu thức (a) và (b) ta có nguyên lý vị ảo(nguyên lý công ảo):

Nếu như tổng cộng của các lực tác dụng của hệ thực hiện trên các chuyển vị ảo bằng không thì hệ ở trạng thái cân bằng.

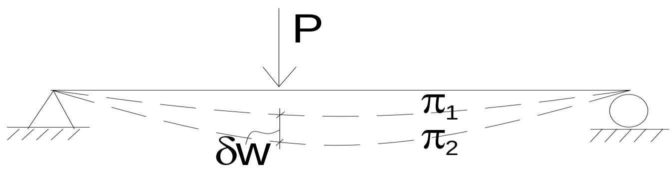
Đối với đàn hồi (hệ biến dạng) thì ngoài ngoại lực còn có nội lực. Vấn đề đặt ra ở đây là cách tính công của nội lực như thế nào?

Trước hết ta phai đưa thêm yêu cầu đối với chuyển vị ảo như sau:

Các chuyển vị ảo phải thỏa mãn các liên hệ giữa chuyển vị và biến dạng. Nếu như các chuyển vị có biến dạng $\varepsilon x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon y = \frac{\partial v}{\partial y}, \ldots$ thì các chuyển vị ảo δU, δV, δW cũng phải có các biến dạng ảo tương ứng $\delta\varepsilon x = \frac{\partial}{\partial x}\delta u, \delta\varepsilon y = \frac{\partial}{\partial y}\delta v, \ldots.$

Thông thường công của nội lực (hoặc ứng suất) được tính qua thế năng biến dạng.

Khi có các chuyển vị ảo δU, δV, δW thế năng biến dạng π sẽ thay đổi bằng đại lượng biến phân δπ.



H2.6. Sơ đồ dầm ở hai trạng thái năng lượng

Như vậy nguyên lý chuyển vị ảo đối với hệ biến dạng được viết như sau:

$$\delta\Pi - \sum X\delta U - \sum Y\delta V - \sum Z\delta W = 0 \qquad \text{(c)}$$

Các đại lượng biến phân trong (c) đều là chuyển vị cho nên nếu xem nội lực (ứng suất) trong quá trình chuyển vị ảo cũng không đổi thì dấu biến phân trong (c) có thể viết lại như sau: $\delta\left[\Pi - \sum XU - \sum YV - \sum ZW\right] = 0$ (d)

Hai biểu thức (c) và (d) dưới dạng chi tiết hơn được trình bày trong cuốn sách [Timoshenko. LTĐH. Tr.261]

Bởi vì ngoại lực trong quá trình chuyển vị ảo không thay đổi (lực bảo toàn) thì nội lực cũng không thay đổi cho nên có thể phát biểu nguyên lý chuyển vị ảo đối với hệ biến dạng một cách trực tiếp và rõ ràng như sau:

Nếu như cộng của các lực tác dụng thực hiện trên các chuyển vị ảo bằng cộng của nội lực thực hiện trên các biến dạng ảo thì hệ ở trạng thái cân bằng .

Áp dụng với bài toán dầm đang xét ta có:

Cộng của ngoại lực thực hiện trên các chuyển vị ảo là $\int_0^l q.\delta y.dx$

Cộng của nội lực thực hiện trên các biến dạng ảo là:

$\int_0^l M.\delta\chi.dx = \int_0^l EJ\frac{d^2y}{dx^2}.\delta\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right).dx$ ($\chi = -\frac{d^2y}{dx^2}$ là biến dạng uốn của dầm)

Theo nguyên lý chuyển vị ảo thì hệ cân bằng nếu thỏa mãn phương trình

$$\int_0^l EJ\frac{d^2y}{dx^2}.\delta\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right).dx-\int_0^l q.\delta y.dx=0 \qquad \text{(e)}$$

Để nhận được phương trình vi phân cân bằng của dầm ta tích phân từng phần hai lần phương trình (e): $\int_0^l EJ\frac{d^2y}{dx^2}.d\left(\delta\frac{dy}{dx}\right)-\int_0^l q.\delta y.dx=0$

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2}.\left(\delta\frac{dy}{dx}\right)\Bigg|_0^l-EJ\int_0^l\delta\left(\frac{dy}{dx}\right).\frac{d^3y}{dx^3}dx-\int_0^l q.\delta y.dx=0$$

Tích phần từng phần lần thứ hai ta có

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2}.\left(\delta\frac{dy}{dx}\right)\Bigg|_0^l-EJ\int_0^l\frac{d^3y}{dx^3}d\left(\delta y\right)-\int_0^l q.\delta y.dx=0$$

$$\leftrightarrow EJ\frac{d^2y}{dx^2}.\delta\left(\frac{dy}{dx}\right)\Bigg|_0^l-EJ\frac{d^3y}{dx^3}\delta y\Bigg|_0^l+EJ\int_0^l\frac{d^4y}{dx^4}\delta y-\int_0^l q.\delta y.dx=0$$

$$\leftrightarrow \underbrace{-M.\delta\left(\frac{dy}{dx}\right)\Bigg|_0^l}_{(1)}+\underbrace{Q.\delta y\Big|_0^l}_{(2)}+\underbrace{EJ\int_0^l\left[\frac{d^4y}{dx^4}-q\right]\delta y.dx}_{(3)}=0 \qquad \text{(f)}$$

Từ biểu thức (f) ta suy ra các phương trình sau phải được thỏa mãn:

(1) : $M.\delta\left(\frac{dy}{dx}\right)\Bigg|_0^l=0$

(2) : $Q\delta y\Big|_0^l=0$

(3) : $EJ\int_0^l\left[\frac{d^4y}{dx^4}-q\right]\delta y.dx=0$

Biểu thức (3) cho ta phương trình cân bằng của dầm:

$$\text{EJ}\frac{d^4y}{dx^4}=q$$

Còn biểu thức (1) và (2) sẽ là các điều kiện biên

- Nếu đầu dầm là liên kết ngàm :

+ Góc xoay bằng không vì thế $\delta\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$

+ Không có chuyển vị thẳng nên $\delta y=0$

- Nếu đầu dầm là liên kết ngàm trượt: $\delta\left(\frac{dy}{dx}\right)=0\rightarrow$ (1) thỏa mãn ;

$\delta y \neq 0$ nên từ (2) ta có Q =0 vậy điều kiện biên của liên kết ngàm trượt là góc xoay bằng 0 lực cắt bằng 0

- Nếu đầu dầm là liên kết khớp $\delta y = 0 \rightarrow$ (2) thỏa mãn ;

  $\delta\left(\dfrac{dy}{dx}\right) \neq 0$ nên từ (1) cho ta điều kiện biên của đầu khớp M = 0

- Nếu đầu dầm tự do thì: $\delta y \neq 0$, $\delta\left(\dfrac{dy}{dx}\right) \neq 0$

  nên từ (1), (2) ta có điều kiện biên của đầu tự do: M =0 ; Q = 0 .

2.1.4. PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE [1,12]

Phương trình Lagrange là phương trình vi phân của chuyển động được biểu thị qua các tọa độ tổng quát (các chuyển vị tổng quát) của hệ chất điểm.

Gọi T là động năng và π là thế năng của hệ, các q_i là các chuyển vị tổng quát thì phương trình Lagrange có dạng

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) + \left(\frac{\partial \pi}{\partial q_i}\right) = Q_i \quad \text{(i=1,2,3….,n)} \qquad \text{(a)}$$

Trong đó: $\dot{q}_i$ là vận tốc của chuyển động

Q_i là lực không có thế (nonpotential forces) được hiểu là các lực ngoài tác dụng lên hệ (Lực tổng quát).

Đối với bài toán dầm đang xét, phương trình chuyển động được viết như sau

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial y_i}\right) + \left(\frac{\partial \pi}{\partial y_i}\right) = q_i \qquad \text{(b)}$$

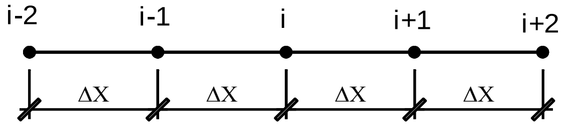
Động năng của dầm $T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m \dot{y}_i^2 dx \quad (\dot{y}_i = \frac{\partial y_i}{\partial t})$ (c)

Thế năng biến dạng của dầm chịu uốn $\Pi = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} EJ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_i^2$ (d)

Ta tính hai thành phần đầu của phương trình (b)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{y}_i}\right) = \dfrac{\partial}{\partial t} m_i \dot{y}_i = m_i \ddot{y}_i \\ \dfrac{\partial T}{\partial y_i} = 0 \end{cases} \qquad \text{(e)}$$

Để tính thế năng biến dạng có thể dùng phương pháp sai phân hữu hạn (H 2.6)



Hình H2.6

Bởi vì độ võng y_i của dầm chỉ có mặt trong ba điểm liên tiếp i-1, i và i+1 cho nên chỉ cần tính thế năng biến dạng của dầm cho ba điểm này với

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{2}EJ\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_i^2 &= \frac{1}{2}EJ\left(\frac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{\Delta x^2}\right)^2 \\
\frac{1}{2}EJ\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{i-1}^2 &= \frac{1}{2}EJ\left(\frac{y_{i-2}-2y_{i-1}+y_i}{\Delta x^2}\right)^2 \\
\frac{1}{2}EJ\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{i+1}^2 &= \frac{1}{2}EJ\left(\frac{y_i-2y_{i+1}+y_{i+2}}{\Delta x^2}\right)^2
\end{aligned}\right\} \tag{f}$$

Tổng cộng ba phương trình trên cho ta thế năng của dầm để tính y_i.

Ta tính $\dfrac{\partial \Pi}{\partial y_i}$ của phương trình (b).

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y_i} = EJ\left(\frac{-2y_{i-1}+4y_i-2y_{i+1}+y_{i-2}-2y_{i-1}+y_i+y_i-2y_{i+1}+y_{i+2}}{\Delta x^4}\right)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y_i} = EJ\left(\frac{y_{i-2}-4y_{i-1}+6y_i-4y_{i+1}+y_{i+2}}{\Delta x^4}\right) = EJ\left.\frac{\Delta_i^4}{\Delta x^4}\right|_i \tag{g}$$

Phương trình (g) biểu thị sai phân hữu hạn của $EJ\dfrac{\partial^4 y}{\partial x^4}$

Cộng (e) và (g) nhận được phương trình Lagrange đối với chuyển vị y_i

$$m\frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} + EJ\left.\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\right|_i = q \tag{h}$$

Điểm i là bất kỳ nên nhận được phương trình vi phân cân bằng dầm

$$m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = q \tag{i}$$

Với bài toán tĩnh T = 0 ta có $\qquad EJ\dfrac{\partial^4 y}{\partial x^4} = q \qquad$ (k)

Cách sử dụng phương trình Lagrange để xây dựng bài toán dầm chịu uốn nêu trên không tìm thấy trong các tài liệu cơ học. Kết quả trên cho thấy có thể sử dụng trực tiếp phương trình Lagrange để xây dựng các bài toán cơ học công trình.

Kết luận vừa nêu xoá nhoà ranh giới giữa cơ học giải tích và cơ học công trình.

2.2. DÙNG BIẾN PHÂN DỰA TRÊN NGUYÊN LÝ CHUYỂN VỊ ẢO ĐỂ ĐƯA RA ĐIỀU KIỆN BIÊN CỦA TẤM CHỮ NHẬT CHỊU UỐN

Như đã trình bày ở mục 2.1.1, Kirhhoff đã dùng phương pháp biến phân năng lượng để chỉ ra rằng chỉ cần thoả mãn 2 điều kiện biên trên mỗi cạnh tấm [10,tr98]

Ở đây tác giả dùng nguyên lý chuyển vị ảo cũng đi đến kết quả tương tự.

Theo nguyên lý chuyển vị ảo tấm ở trạng thái cân bằng khi:

$$\iint_\Omega M_x\delta\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)dxdy+\iint_\Omega M_y\delta\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)dxdy+\iint_\Omega M_{xy}\delta\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)dxdy-\iint_\Omega q.\delta w.dxdy=0 \quad \text{(a)}$$

Ta biến đổi từng số hạng của (a)

- Số hạng thứ nhất

$$\iint_\Omega M_x\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)dxdy=-\iint_\Omega M_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta\frac{\partial w}{\partial x}\right)dxdy=-\int_0^a\int_0^b M_x.d_x\left[\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right].dy$$

Áp dụng công thức tích phân từng phần ta có

$$\int_0^a\int_0^b M_x.d_x\left[\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right].dy=\int_0^b M_x\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\Bigg|_0^a dy-\iint_\Omega\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial M_x}{\partial x}dxdy$$

Tích phân từng phần lần thứ 2

$$\iint_\Omega\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial M_x}{\partial x}dxdy=\int_0^b dy\int_0^a\frac{\partial M_x}{\partial x}d_x\left(\delta w\right)=\int_0^b\left(\frac{\partial M_x}{\partial x}\delta w\right)_0^a dy-\int_0^a\int_0^b\delta w\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}dxdy$$

Cuối cùng số hạng thứ nhất trong (a) sẽ trở thành

$$\iint_\Omega M_x\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)dxdy=-\int_0^b\left[M_x\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]_0^a dy+\int_0^b\left(\frac{\partial M_x}{\partial x}\delta w\right)_0^a dy-\iint_\Omega\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}\delta w.dxdy$$

- Tiến hành tương tự ta biến đổi được số hạng thứ hai trong (a)

$$\iint_\Omega M_y\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)dxdy=-\int_0^a\left[M_y\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]_0^b dx+\int_0^a\left(\frac{\partial M_y}{\partial y}\delta w\right)_0^b dx-\iint_\Omega\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}\delta w.dxdy$$

- Với số hạng thư 3 ta biến đổi như sau

$$2\iint_\Omega M_{xy}\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)dxdy=\iint_\Omega M_{xy}\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)dxdy+\iint_\Omega M_{xy}\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)dxdy \quad \text{(b)}$$

$$\iint_\Omega M_{xy}\left[-\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\right]dxdy=-\int_0^a dx\int_0^b M_{xy}\frac{\partial}{\partial y}\left[\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]dy=-\int_0^a dx\int_0^b M_{xy}d_y\left[\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]$$

Áp dụng công thức tích phân từng phần ta có

$$\int_0^a dx\int_0^b M_{xy}d_y\left[\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]=\int_0^a\left[M_{xy}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]_0^b dx-\int_0^a dx\int_0^b \delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}dy$$

Tích phân từng phần lần thứ 2

$$\int_0^a dx\int_0^b \delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}dy=\int_0^a\int_0^b\frac{\partial(\delta w)}{\partial x}dx\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}dy=\int_0^b dy\int_0^a d_x(\delta w)\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$

$$\int_0^b dy\int_0^a d_x(\delta w)\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}=\int_0^b\left[\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\delta w\right]_0^a dy-\int_0^b\int_0^a \delta w\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y\partial x}dxdy$$

Như vậy

$$\iint_\Omega M_{xy}\left[-\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\right]dxdy=-\int_0^a\left[M_{xy}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]_0^b dx+\int_0^b\left[\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\delta w\right]_0^a dy-\int_0^b\int_0^a\delta w\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y\partial x}dxdy$$

Ta cũng có

$$\iint_\Omega M_{xy}\left[-\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\right]dxdy=-\int_0^b dy\int_0^a M_{xy}\frac{\partial}{\partial x}\left[\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]dx=-\int_0^b dy\int_0^a M_{xy}d_x\left[\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]$$

Ta biến đổi như sau(sử dụng công thức tích phân từng phần)

$$\int_0^b dy\int_0^a M_{xy}d_x\left[\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]=\int_0^b\left[M_{xy}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]_0^a dy-\int_0^b dy\int_0^a \delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}dx$$

$$\int_0^b dy\int_0^a \delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}dx=\int_0^a\int_0^b\frac{\partial(\delta w)}{\partial y}dy\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}dx=\int_0^a dx\int_0^b d_y(\delta w)\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$$

$$\int_0^b dy\int_0^a \delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}dx=\int_0^a\left[\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\delta w\right]_0^b dx-\int_0^a\int_0^b\delta w\frac{\partial M^2{}_{xy}}{\partial x\partial y}dydx$$

Ta thu được

$$\iint_\Omega M_{xy}\left[-\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\right]dxdy=-\int_0^b\left[M_{xy}.\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]_0^a dy+\int_0^a\left[\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\delta w\right]_0^b dx-\int_0^a\int_0^b\delta w\frac{\partial M^2{}_{xy}}{\partial x\partial y}dydx$$

Thay vào (b) ta có kết quả cho số hạng thứ ba trong (a) như sau

$$2\iint_\Omega M_{xy}\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)dxdy=\iint_\Omega M_{xy}\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)dxdy+\iint_\Omega M_{xy}\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)dxdy$$

$$=-\int_0^a\left[M_{xy}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]_0^b dx+\int_0^b\left[\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\delta w\right]_0^a dy-\int_0^b\int_0^a\delta w\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y\partial x}dxdy$$

$$-\int_0^b\left[M_{xy}.\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]_0^a dy+\int_0^a\left[\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\delta w\right]_0^b dx-\int_0^a\int_0^b\delta w\frac{\partial M^2{}_{xy}}{\partial x\partial y}dydx$$

Sau khi đã biến đổi các số hạng ta thay lại vào (a) thu được

$$\delta I=\iint_{\Omega} M_x\delta\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)dxdy+\iint_{\Omega} M_y\delta\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)dxdy+\iint_{\Omega} M_{xy}\delta\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)dxdy-\iint_{\Omega} q.\delta w.dxdy$$

$$=-\int_0^b\left[M_x\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]_0^a dy+\int_0^b\left(\frac{\partial w}{\partial x}\delta w\right)_0^a dy-\iint_{\Omega}\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}\delta w.dxdy$$

$$-\int_0^a\left[M_y\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]_0^b dx+\int_0^a\left(\frac{\partial w}{\partial y}\delta w\right)_0^b dx-\iint_{\Omega}\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}\delta w.dxdy$$

$$-\int_0^a\left[M_{xy}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]_0^b dx+\int_0^b\left[\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\delta w\right]_0^a dy-\int_0^b\int_0^a\delta w\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y\partial x}dxdy$$

$$-\int_0^b\left[M_{xy}.\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]_0^a dy+\int_0^a\left[\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\delta w\right]_0^b dx-\int_0^a\int_0^b\delta w\frac{\partial M^2{}_{xy}}{\partial x\partial y}dydx-\iint_{\Omega} q.\delta w.dxdy$$

Sau khi nhóm lại ta có

$$\delta I=-\int_0^b\left[M_x\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]_0^a dy+\int_0^b\left(\frac{\partial M_x}{\partial x}\delta w\right)_0^a dy-\iint_{\Omega}\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}\delta w.dxdy$$

$$-\int_0^a\left[M_y\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]_0^b dx+\int_0^a\left(\frac{\partial M_y}{\partial y}\delta w\right)_0^b dx-\iint_{\Omega}\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}\delta w.dxdy$$

$$-\int_0^a\left[M_{xy}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]_0^b dx+\int_0^b\left[\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\delta w\right]_0^a dy-\int_0^b\int_0^a\delta w\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y\partial x}dxdy-\iint_{\Omega} q.\delta w.dxdy$$

Ta nhận thấy rằng các số hạng $-\int_0^a\left[M_{xy}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]_0^b dx$ và $-\int_0^b\left[M_{xy}.\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]_0^a dy$

Lại có thể tiếp tục biến đổi để nhóm lại cùng các số hạng khác

Sử dụng công thức tích phân từng phần ta thu được

$$-\int_0^a\left[M_{xy}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]_0^b dx=M_{xy}\delta w\Big|_{x=0,y=0}^{x=a,y=0}-M_{xy}\delta w\Big|_{x=0,y=b}^{x=a,y=b}+\int_0^a\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\delta w\Big|_{y=0}^{y=b}dx$$

$$-\int_0^b\left[M_{xy}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]_0^a dy=M_{xy}\delta w\Big|_{x=0,y=0}^{x=0,y=b}-M_{xy}\delta w\Big|_{x=a,y=0}^{x=a,y=b}+\int_0^b\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\delta w\Big|_{x=0}^{x=a}dy$$

Và cuối cùng ta thu được

$$\delta I=-\int_0^b\left[M_x\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]_0^a dy-\int_0^a\left[M_y\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]_0^b dx+\int_0^b\left[\left(\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right)+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right]_0^a\delta w.dy$$

$$+\int_0^a\left[\left(\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\right)+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\right]_0^b .\delta w.dx\ +M_{xy}\delta w\Big|_{x=0,y=0}^{x=a,y=0}-M_{xy}\delta w\Big|_{x=0,y=b}^{x=a,y=b}$$

$$+M_{xy}\delta w\Big|_{x=0,y=0}^{x=0,y=b}-M_{xy}\delta w\Big|_{x=a,y=0}^{x=a,y=b}-\iint_\Omega\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}+2\frac{\partial M_{xy}}{\partial x\partial y}+q\right).\delta w.dxdy$$

Mà $\quad Q_x=\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$ và $Q_y=\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$

cho nên $\quad \delta I=-\iint_\Omega\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}+2\frac{\partial M_{xy}}{\partial x\partial y}+q\right).\delta w.dxdy$

$$-\int_0^b\left[M_x\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]_0^a dy-\int_0^a\left[M_y\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]_0^b dx+\int_0^b\left[Q_x+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right]_0^a\delta w.dy+\int_0^a\left[Q_y+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\right]_0^b .\delta w.dx$$

$$+\ M_{xy}\delta w\Big|_{x=0,y=0}^{x=a,y=0}-M_{xy}\delta w\Big|_{x=0,y=b}^{x=a,y=b}+\ M_{xy}\delta w\Big|_{x=0,y=0}^{x=0,y=b}-M_{xy}\delta w\Big|_{x=a,y=0}^{x=a,y=b}$$

δI = 0 khi các phương trình sau thỏa mãn

$$\iint_\Omega\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}+2\frac{\partial M_{xy}}{\partial x\partial y}+q\right).\delta w.dxdy=0 \qquad \text{(d)}$$

$$\int_0^b\left[M_x\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]_0^a dy=0 \qquad \text{(e)}$$

$$\int_0^a\left[M_y\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]_0^b dx=0 \qquad \text{(f)}$$

$$\int_0^b\left[Q_x+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right]_0^a\delta w.dy=0 \qquad \text{(g)}$$

$$\int_0^a\left[Q_y+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\right]_0^b .\delta w.dx\quad=0 \qquad \text{(h)}$$

$$M_{xy}\delta w\Big|_{x=0,y=0}^{x=a,y=0}\ =0 \qquad \text{(i)}$$

$$M_{xy}\delta w\Big|_{x=0,y=b}^{x=a,y=b}\ =0 \qquad \text{(k)}$$

$$M_{xy}\delta w\Big|_{x=0,y=0}^{x=0,y=b}\ =0 \qquad \text{(l)}$$

$$M_{xy}\delta w\Big|_{x=a,y=0}^{x=a,y=b}\ =0 \qquad \text{(m)}$$

Phương trình (d) chỉ thỏa mãn nếu tại mỗi điểm trên mặt tấm thỏa mãn hệ thức

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}+2\frac{\partial M_{xy}}{\partial x\partial y}+q=0$$

Đây chính là phương trình vi phân cân bằng mặt trung bình của tấm.

Các phương trình từ (e-m) là các điều kiện biên.

- Nếu như tấm bị ngàm ở cạnh thì độ võng và góc xoay bằng 0, do đó các phương trình từ (e-k) được thỏa mãn và điều kiện biên là w= 0 ; w' = 0 .
- Nếu cạnh tấm liên kết khớp chuyển vị w= 0 ; $\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right), \delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\neq 0$ do đó từ (e) hoặc (f) ta phải có M_x = 0 hoặc M_y = 0. Như vậy, điều kiện biên của cạnh tấm liên kết khớp là w = 0 và M_x = 0
- Nếu cạnh tấm tự do thì biến phân độ võng δw và góc xoay $\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)$, $\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)$ khác không và từ (e, f, g, h) ta phải có:

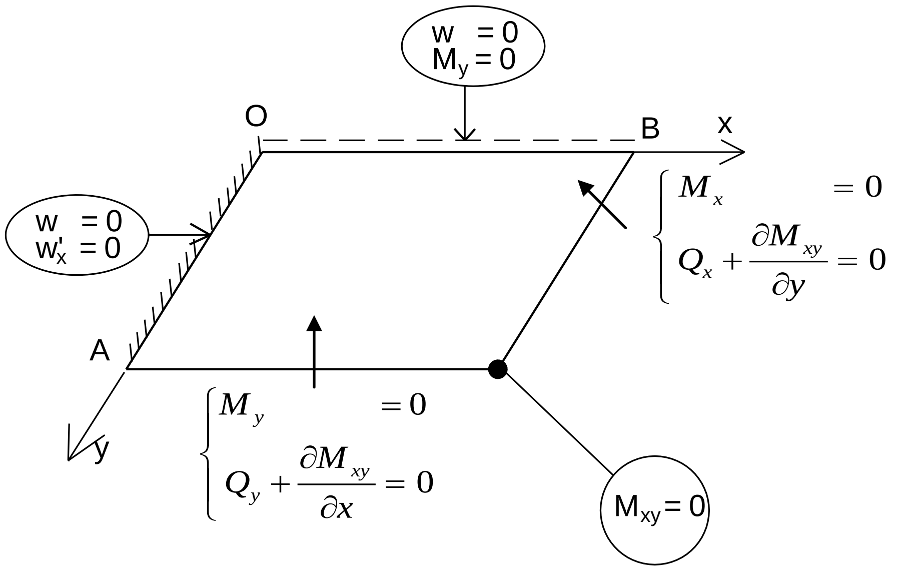
$$\begin{cases} M_x = 0 \\ Q_x+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}=0 \end{cases}$$ nếu cạnh x= a tự do

$$\begin{cases} M_y = 0 \\ Q_y+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}=0 \end{cases}$$ nếu cạnh y= b tự do

Đây chính là các điều kiện biên của cạnh tấm tự do.

- Tại góc của tấm nếu tự do thì ta có $\delta w\neq 0$ và ta có điều kiện biên $M_{xy}= 0$ từ phương trình (i-l)

Các điều kiện biên của tấm được biểu diễn tóm tắt qua hình vẽ dưới đây:



Ở đây nhận được các điêu kiện biên của tấm chữ nhật chịu uốn giống như điều kiện của Kirchhoff.

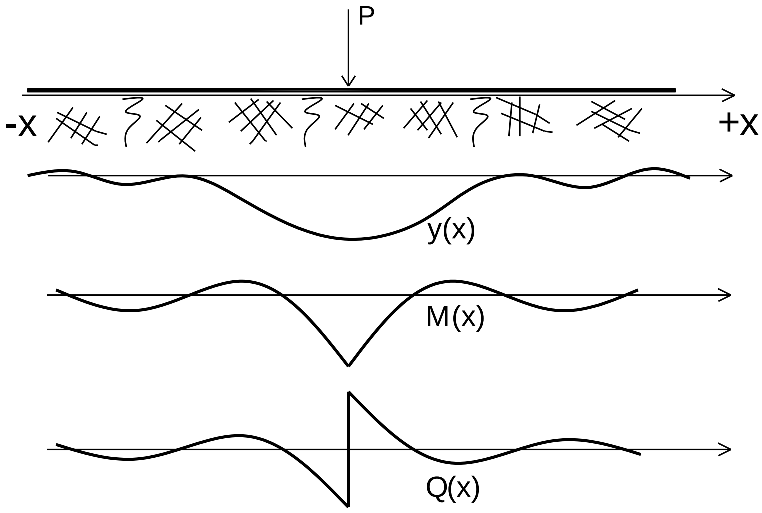
CHƯƠNG 3
PHƯƠNG PHÁP MỚI TÍNH DẦM HỮU HẠN TRÊN NỀN ĐÀN HỒI

Trong các tài liệu [6,16] có trình bày cách tính dầm trên nền đàn hồi và đã giải quyết bài toán dầm vô hạn trên nền đàn hồi, dầm bán vô hạn trên nền đàn hồi, dầm hữu hạn trên nền đàn hồi với mô hình nền Winkler. Bài toán dầm dài hữu hạn được giải theo phương pháp thông số ban đầu, cũng là một cách làm hay.

Trong chương này, tác giả tìm một phương pháp giải khác với phương pháp thông số ban đầu.

Nội dung phương pháp là dùng lời giải của dầm vô hạn tính dầm hữu hạn

3.1. GIỚI THIỆU LỜI GIẢI DẦM DÀI VÔ HẠN TRÊN NỀN ĐÀN HỒI



Xây dựng phương trình vi phân cân bằng của dầm vô hạn đặt trên nền đàn hồi theo nguyên lý chuyển vị ảo.

Khi P tác dụng lên dầm sẽ sinh ra phản lực từ nền phân bố với cường độ ky. Theo nguyên lý chuyển vị ảo ta có

$$2\int_0^\infty EJ\frac{d^2y}{dx^2}.\delta\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)dx+2\int_0^\infty ky.\delta y\,dx-P.\delta y_{x=0}=0$$

Áp dụng công thức tích phân từng phần

$$\int_0^\infty EJ\frac{d^2y}{dx^2}.\delta\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)dx=\int_0^\infty EJ\frac{d^2y}{dx^2}.d\left(\delta\frac{dy}{dx}\right)=EJ\frac{d^2y}{dx^2}.\delta\frac{dy}{dx}\Bigg|_0^\infty-\int_0^\infty EJ.\left(\delta\frac{dy}{dx}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)dx$$

Tích phân từng phần lần thứ hai ta có

$$\int_0^{+\infty} EJ.\left(\delta\frac{dy}{dx}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)dx = EJ\frac{d^3y}{dx^3}.\delta y\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} EJ.(\delta y)\frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)dx$$

$$= Q.\delta y\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} EJ.\frac{d^4y}{dx^4}\delta y.dx$$

Như vậy ta có

$$\int_0^{\infty} EJ\frac{d^2y}{dx^2}.\delta\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)dx = EJ\frac{d^2y}{dx^2}.\delta\frac{dy}{dx}\Big|_0^{\infty} - Q.\delta y\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} EJ.\frac{d^4y}{dx^4}\delta y.dx$$

$$\int_0^{\infty} EJ\frac{d^2y}{dx^2}.\delta\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)dx = EJ\frac{d^2y}{dx^2}.\delta\frac{dy}{dx}\Big|_{x=\infty} - EJ\frac{d^2y}{dx^2}.\delta\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} + Q.\delta y\Big|_{x=\infty} - Q.\delta y\Big|_0 + \int_0^{\infty} EJ.\frac{d^4y}{dx^4}\delta y.dx$$

Cuối cùng ta có

$$2\int_0^{\infty} EJ\frac{d^2y}{dx^2}.\delta\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)dx + 2\int_0^{+\infty} ky.\delta y\,dx - P.\delta y_{x=0} = 2EJ\frac{d^2y}{dx^2}.\delta\frac{dy}{dx}\Big|_{x=\infty} - 2EJ\frac{d^2y}{dx^2}.\delta\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$$

$$+2.Q.\delta y\Big|_{x=\infty} - 2.Q.\delta y\Big|_{x=0} + 2\int_0^{\infty} EJ.\frac{d^4y}{dx^4}\delta y.dx + 2\int_0^{\infty} ky.\delta y\,dx - P.\delta y_{x=0}$$

Khi x→+∞ ảnh hưởng của lực P không còn nữa và vì thế

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2}.\delta\frac{dy}{dx}\Big|_{x=\infty} = 0; \qquad Q.\delta y\Big|_{x=\infty} = 0$$

Do tính chất đối xứng nên ta cũng phải có $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = 0$, vì vậy $EJ\frac{d^2y}{dx^2}.\delta\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = 0$

Cho nên $$2\int_0^{\infty} EJ\frac{d^2y}{dx^2}.\delta\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)dx + \int_0^{\infty} ky.\delta y\,dx - P.\delta y_{x=0} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\int_0^{\infty}\left(EJ\frac{d^4y}{dx^4} + ky\right)\delta y.dx - (2Q+P).\delta y\Big|_{x=0} = 0 \qquad \text{(a)}$$

Phương trình (a) thoả mãn khi các phương trình sau đây thoả mãn

$$EJ\frac{d^4y}{dx^4} + ky = 0 \qquad \text{(b)}$$

$$2Q\Big|_{x=0} + P = 0 \qquad \text{(c)}$$

(b) là phương trình vi phân cân bằng của dầm;

(c) là điều kiện biên. Ta nhận được điều kiện biên tương tự như của Timoshenko.

Đặt $\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}$ thì phương trình (b) có nghiệm

$$y(z) = e^{\beta z}(C_1 \cos \beta z + C_2 \sin \beta z) + e^{-\beta z}(C_3 \cos \beta z + C_4 \sin \beta z)$$

Các hằng số C_1, C_2, C_3, C_4 được xác định từ các điều kiện biên.

Cuối cùng ta có phương trình trục võng và nội lực trong trường hợp dầm vô hạn chịu tải tập trung

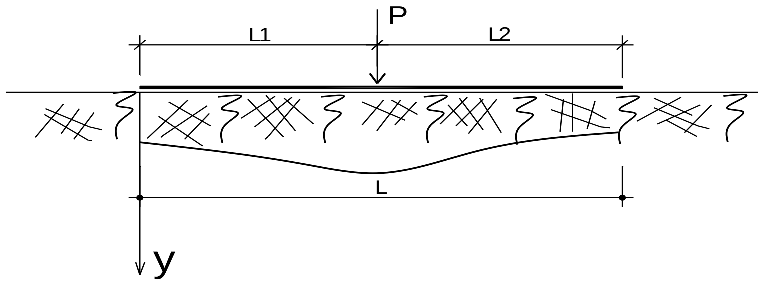
$$\begin{cases} y(z) = \dfrac{P\beta}{2k} e^{-\beta z}(\cos \beta z + \sin \beta z) \\ M(z) = \dfrac{P}{4\beta} e^{-\beta z}(\cos \beta z - \sin \beta z) \\ Q(z) = -\dfrac{P}{2} e^{-\beta z} \cos \beta z \end{cases} \qquad (3.1)$$

Theo Timoshenko [6,tr26] nếu:

- $\beta \ell < 0.6$: Được coi là dầm cứng
- $0.6 \le \beta \ell \le 5$: Dầm hữu hạn
- $\beta \ell > 6$: Dầm vô hạn

3.2. PHƯƠNG PHÁP MỚI TÍNH DẦM HỮU HẠN TRÊN NỀN ĐÀN HỒI

Bài toán đặt ra là cần tính dầm hữu hạn sau: (H3.2)



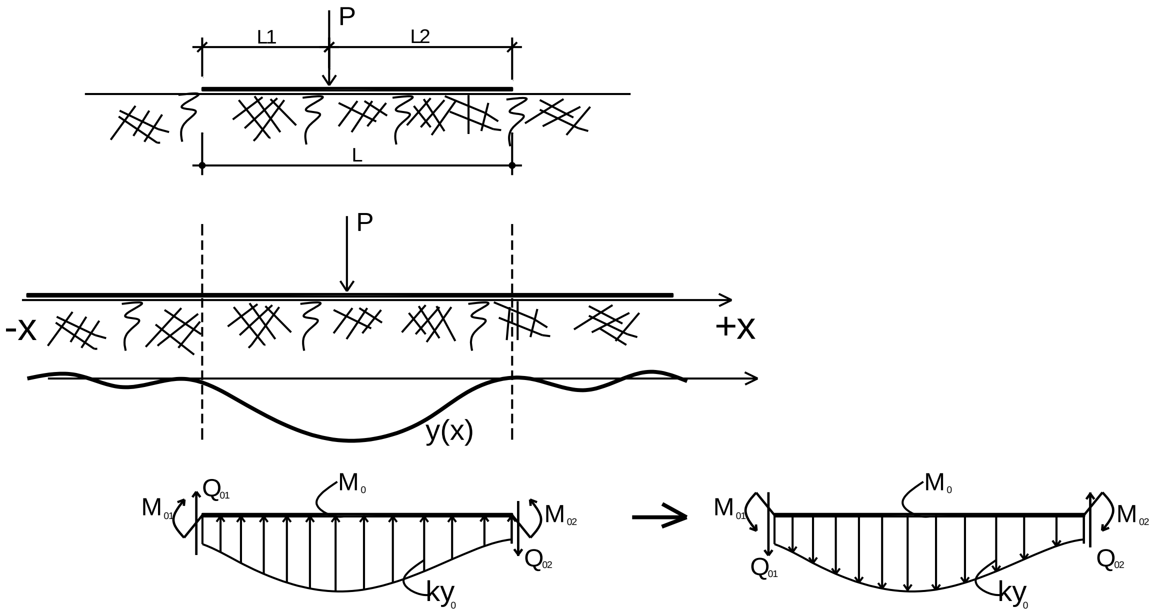
Ta có thể xây dựng bài toán trực tiếp trên dầm bằng cách sử dụng *Nguyên lý chuyển vị ảo* đã trình bày ở chương 2:

$$\delta\Pi = \int_0^l M_x \delta\left(-\frac{d^2y}{dx^2}\right)dx + \int_0^l (ky).\delta y.dx - P.\delta y_{x=L_1} = 0 \qquad (3.2\ )$$

Ta có thể giả định hàm độ võng là hàm sin, cos, hoặc dưới dạng đa thức, từ điều kiện dừng của phiếm hàm ta sẽ tìm được biểu thức đường đàn hồi.

Dưới đây sẽ trình bày một cách tính khác đối với dầm hữu hạn trên nền đàn hồi mà nội dung của nó là dùng lời giải của dầm vô hạn để tính.

Thay bằng việc cho lực P tác dụng trực tiếp lên dầm hữu hạn như hình h3.3a thì ta cho lực P tác dụng lên dầm dài vô hạn như hình h3.3b:

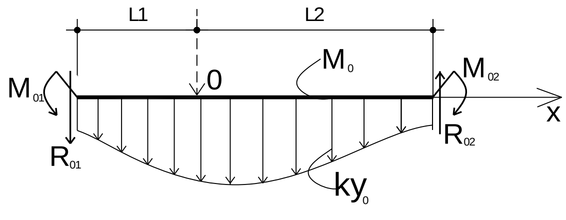


H3.3 - a) Dầm hữu hạn. b) Dầm vô hạn. c) Đoạn dầm được giải phóng liên kết

Khi tác dụng lực P lên dầm vô hạn thì dầm bị biến dạng và trong dầm xuất hiện nội lực. Chuyển vị và nội lực trong dầm được tính theo công thức (3.1).

Ta giải phóng liên kết một đoạn dầm có chiều dài bằng dầm hữu hạn từ dầm vô hạn như trên hình H3.3.c. Lực P sinh ra mô men nội lực trong dầm M_0. Các phản lực liên kết M_{01} ,Q_{01}, M_{02}, Q_{02} , phản lực nền ky_0 ; Các lực này đã tính được từ lời giải của dầm vô hạn, giả sử chúng có chiều như hình vẽ H3.3.c .

Thay cho lực P thì ta đem các lực này - M_0 , M_{01} , Q_{01}, M_{02}, Q_{02} , phản lực nền ky_0 (với chiều ngược lại như hình H3.3.d) cho tác dụng lên dầm hữu hạn cần tính.



H3.4. Các lực tác dụng lên dầm hữu hạn cần tính

Ta xây dựng bài toán theo nguyên lý công ảo như sau:

$$\int_{-l1}^{l2} M_x.\delta(-\frac{d^2y}{dx^2})\,dx - \int_{-l1}^{l2} M_{x0}.\delta(-\frac{d^2y}{dx^2})\,dx + \int_{-l1}^{l2} ky.\delta y\,dx - \int_{-l1}^{l2} ky_0.\delta y\,dx$$
$$+M_{01}.\delta y_{x=-l1} - R_{01}.\delta y_{x=-l1} - M_{02}.\delta y_{x=l2} + R_{02}.\delta y_{x=l2} = 0 \qquad (3.3)$$

Với ràng buộc là điều kiện biên tại hai đầu dầm

Hàm độ võng và nội lực M_x là ẩn số cần tìm.

Ta giả thiết đường độ võng là hai đa thức bậc 9 tương ứng với hai đoạn dầm nằm bên trái và phải lực P.

$$y_1 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7 + a_8x^8 + a_9x^9 \quad (3.5a)$$

$$y_2 = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + b_5 x^5 + b_6 x^6 + b_7 x^7 + b_8 x^8 + b_9 x^9 \quad (3.5b)$$

Đưa về bài toán cực trị không ràng buộc:

$$\delta\Pi = \int_{-l1}^{l2} M_x.\delta(-\frac{d^2y}{dx^2})\,dx - \int_{-l1}^{l2} M_{x0}.\delta(-\frac{d^2y}{dx^2})\,dx + \int_{-l1}^{l2} ky.\delta y.dx - \int_{-l1}^{l2} ky_0.\delta y.dx$$
$$+ M_{01}.\delta y_{x=-l1} - R_{01}.\delta y_{x=-l1} - M_{02}.\delta y_{x=l2} + R_{02}.\delta y_{x=l2} + \sum_1^6 \lambda_k.g_k = 0 \quad (3.6)$$

λ_k là các thừa số lagrange và cũng là các ẩn cần tìm

Có 6 ràng buộc g_k là các điều kiện biên hai đầu dầm và điều kiện liên tục về độ võng, góc xoay tại điểm đặt lực.

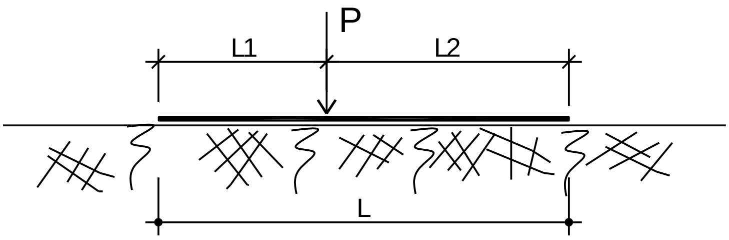
Từ điều kiện $\delta\pi = 0$ ta thu được hệ gồm 26 phương trình 26 ẩn số:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Pi}{\partial a_i} = 0 \\ \dfrac{\partial\Pi}{\partial b_i} = 0 \qquad (i = 1:10\ ;\ \lambda = 1:6) \\ \dfrac{\partial\Pi}{\partial\lambda_k} = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Ta giải hệ phương trình (3.8) bằng phần mềm Matlab 7.0 và dưới đây là lời giải cho một vài bài toán.

3.3. MỘT VÀI VÍ DỤ

<u>Ví dụ 1</u>: Bài toán dầm hai đầu tự do



Hệ số $\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}$ trong công thức (3.1) được ký hiệu là k1 trong chương trình

[k1] = [chiều dài] $^{-1}$.

Các thừa số Lagrange λ_k ký hiệu là ld k

g1, g2, g3, g4, g5, g6 là các ràng buộc

Lời giải được viết như sau:

```
syms x l k k1 ej;
syms a0 a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9;
syms b0 b1 b2 b3 b4 b5 b6 b7 b8 b9;
syms ld1 ld2 ld3 ld4 ld5 ld6 ld7;
```

```
l=3/k1;
l1=0.3*l; l2=l-l1;
y0=k1/k/2 *exp(-k1*x)*(cos(k1*x)+sin(k1*x));
m0=-1/4/k1*exp(-k1*x)*(sin(k1*x)-cos(k1*x));
%m0=1/4/k1*exp(-k1*x)*(sin(k1*x)-cos(k1*x));
q0=diff(m0,x);f0=k*y0;
rm2=subs(m0,x,l2);
rq2=subs(q0,x,l2);
y01=subs(y0,x,l1-x);
m01=subs(m0,x,l1-x);
q01=subs(q0,x,l1-x);f01=k*y01;
rm1=subs(m01,x,0);vpa(rm1)
rq1=subs(q01,x,0);vpa(rq1)
vpa(rm2)
vpa(rq2)
s1=double(subs(rm1,k1,1));
if s1>0;sigm1=1;else sigm1=-1;end;
s1=double(subs(rm2,k1,1));
if s1>0;sigm2=-1;else sigm2=1;end;
s1=double(rq1);
if s1>0;sigq1=-1;else sigq1=1;end;
s1=double(rq2);
if s1>0;sigq2=-1;else sigq2=1;end;

y1=a0+a1*x+a2*x^2+a3*x^3+a4*x^4+a5*x^5+a6*x^6+a7*x^7+a8*x^8+a9*x^9;
y2=b0+b1*x+b2*x^2+b3*x^3+b4*x^4+b5*x^5+b6*x^6+b7*x^7+b8*x^8+b9*x^9;
y11=diff(y1,x);y12=diff(y11,x);bd1=-y12;
y21=diff(y2,x);y22=diff(y21,x);bd2=-y22;
mx1=k/4/k1^4*bd1;f1=k*y1;q1=diff(mx1,x);
mx2=k/4/k1^4*bd2;f2=k*y2;q2=diff(mx2,x);

g1=subs(mx1,x,0);
g2=subs(q1,x,0);
g3=subs(mx2,x,l2);
```

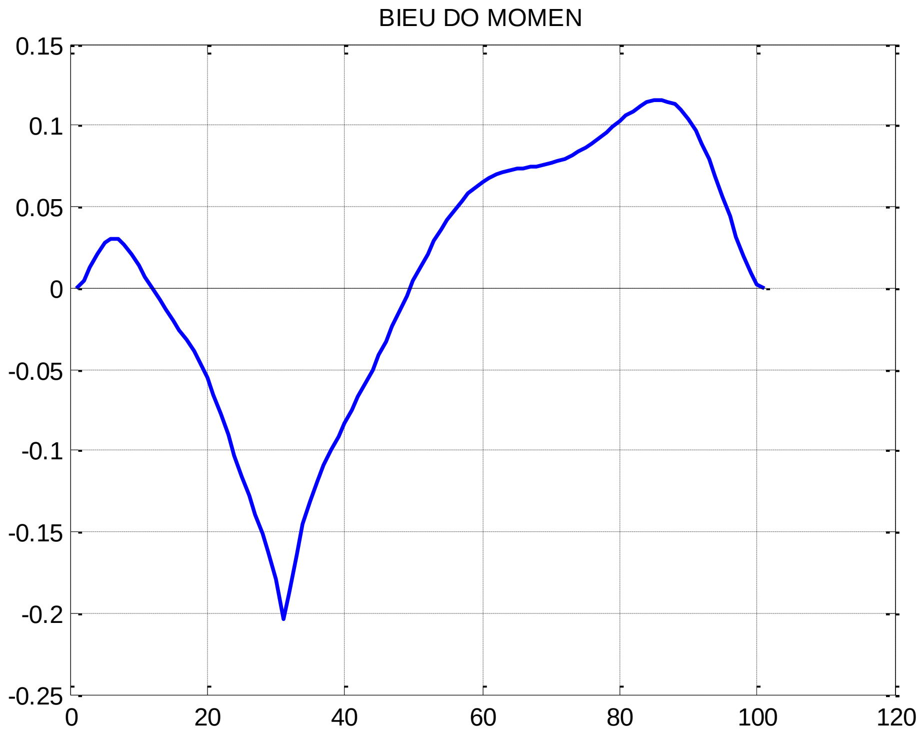
```
g4=subs(q2,x,l2);
g5=subs(y1,x,l1)-subs(y2,x,0);
g6=subs(y11,x,l1)-subs(y21,x,0);

z11=g1*ld1+g2*ld2+g3*ld3+g4*ld4+g5*ld5+g6*ld6;
z12=
sigm1*rm1*subs(y11,x,0)+sigq1*rq1*subs(y1,x,0)+sigm2*rm2*subs(y21,x,l)+sigq2*rq2*su
bs(y2,x,l2);
z1=z11+z12;

s1=diff(bd1,a0);s2=diff(y1,a0);s3=diff(z1,a0);
h1=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a1);s2=diff(y1,a1);s3=diff(z1,a1);
h2=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a2);s2=diff(y1,a2);s3=diff(z1,a2);
h3=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a3);s2=diff(y1,a3);s3=diff(z1,a3);
h4=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a4);s2=diff(y1,a4);s3=diff(z1,a4);
h5=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a5);s2=diff(y1,a5);s3=diff(z1,a5);
h6=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a6);s2=diff(y1,a6);s3=diff(z1,a6);
h7=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a7);s2=diff(y1,a7);s3=diff(z1,a7);
h8=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a8);s2=diff(y1,a8);s3=diff(z1,a8);
h9=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a9);s2=diff(y1,a9);s3=diff(z1,a9);
h10=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;

s1=diff(bd2,b0);s2=diff(y2,b0);s3=diff(z1,b0);
h21=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b1);s2=diff(y2,b1);s3=diff(z1,b1);
```

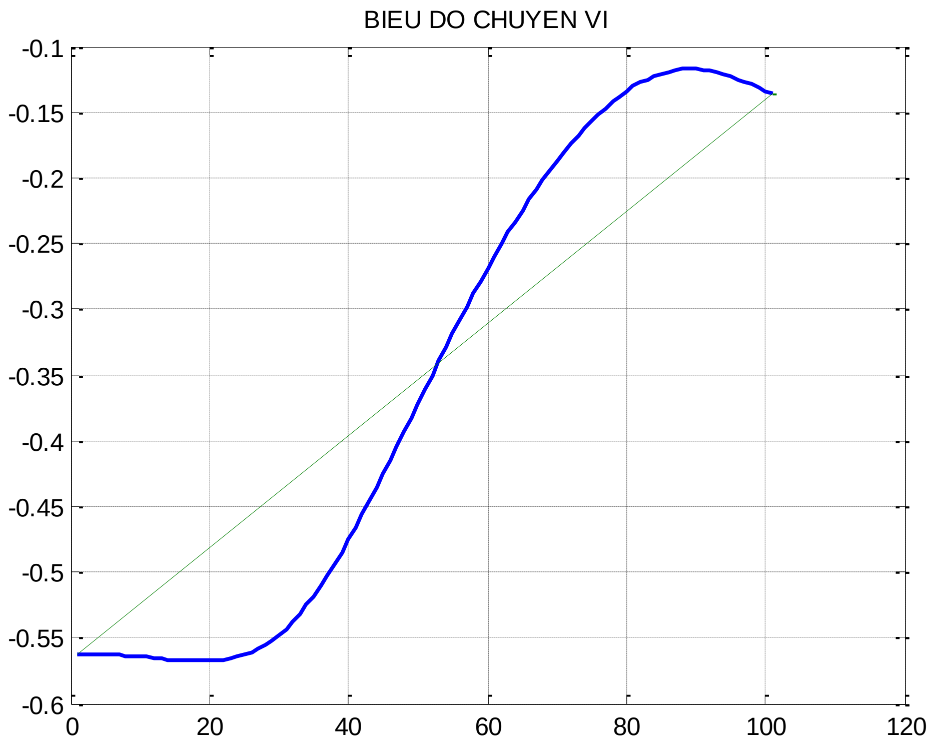
```
h22=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b2);s2=diff(y2,b2);s3=diff(z1,b2);
h23=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b3);s2=diff(y2,b3);s3=diff(z1,b3);
h24=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b4);s2=diff(y2,b4);s3=diff(z1,b4);
h25=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b5);s2=diff(y2,b5);s3=diff(z1,b5);
h26=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b6);s2=diff(y2,b6);s3=diff(z1,b6);
h27=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b7);s2=diff(y2,b7);s3=diff(z1,b7);
h28=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b8);s2=diff(y2,b8);s3=diff(z1,b8);
h29=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b9);s2=diff(y2,b9);s3=diff(z1,b9);
h30=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;

h41=diff(z1,ld1);
h42=diff(z1,ld2);
h43=diff(z1,ld3);
h44=diff(z1,ld4);
h45=diff(z1,ld5);
h46=diff(z1,ld6);
r=solve(h1,h2,h3,h4,h5,h6,h7,h8,h9,h10,...
    h21,h22,h23,h24,h25,h26,h27,h28,h29,h30,...
    h41,h42,h43,h44,h45,h46,...
    'a0','a1','a2','a3','a4','a5','a6','a7','a8','a9',...
    'b0','b1','b2','b3','b4','b5','b6','b7','b8','b9',...
    'ld1','ld2','ld3','ld4','ld5','ld6')
a0=vpa(r.a0)
a1=vpa(r.a1)
a2=vpa(r.a2)
a3=vpa(r.a3)
```

```
a4=vpa(r.a4)
a5=vpa(r.a5)
a6=vpa(r.a6)
a7=vpa(r.a7)
a8=vpa(r.a8)
a9=vpa(r.a9)
b0=vpa(r.b0)
b1=vpa(r.b1)
b2=vpa(r.b2)
b3=vpa(r.b3)
b4=vpa(r.b4)
b5=vpa(r.b5)
b6=vpa(r.b6)
b7=vpa(r.b7)
b8=vpa(r.b8)
b9=vpa(r.b9)
y1=a0+a1*x+a2*x^2+a3*x^3+a4*x^4+a5*x^5+a6*x^6+a7*x^7+a8*x^8+a9*x^9;
y2=b0+b1*x+b2*x^2+b3*x^3+b4*x^4+b5*x^5+b6*x^6+b7*x^7+b8*x^8+b9*x^9;
y11=diff(y1,x);y12=diff(y11,x);bd1=-y12;
y21=diff(y2,x);y22=diff(y21,x);bd2=-y22;
mx1=k/4/k1^4*bd1;f1=k*y1;q1=diff(mx1,x);
mx2=k/4/k1^4*bd2;f2=k*y2;q2=diff(mx2,x);
s1=subs(y1,x,0)
s2=subs(y2,x,l2)
s3=subs(y1,x,l1)
s4=subs(mx1,x,l1)
s5=subs(mx2,x,0)
k=1;k1=1;
s1=subs(s1);s2=subs(s2);
s1=double(s1);s2=double(s2);
x2=[s1 s2];t2=[1 101];

l=subs(l);l1=subs(l1);l2=subs(l2);
y1=subs(y1);y2=subs(y2);mx1=subs(mx1);mx2=subs(mx2);
```

```
w=zeros(101,1);
s1=l/100;
n1=l1/s1+1;
x1(1)=0;
for n=2:n1
    x1(n)=x1(n-1)+s1;
end
for n=1:n1
    s2=x1(n);
    s3=subs(y1,x,s2);
    w(n)=double(s3);
end
n2=l2/s1+1;x1(1)=0;
for n=2:n2
    x1(n)=x1(n-1)+s1;
    s3=subs(y2,x,x1(n));
    w(n+n1-1)=double(s3);
end
figure
t1=1:101;
plot(t1,-w,t2,-x2);grid;
figure
for n=2:n1
    x1(n)=x1(n-1)+s1;
end
for n=1:n1
    s2=x1(n);
    s3=subs(mx1,x,s2);
    w(n)=double(s3);
end
n2=l2/s1+1;x1(1)=0;
for n=2:n2
    x1(n)=x1(n-1)+s1;
    s3=subs(mx2,x,x1(n));
```

```
    w(n+n1-1)=double(s3);
end
plot(t1,w);grid;
```
Ta thu được biểu đồ mômen và chuyển vị như sau:





s1 =0.56337117440860014699684515809287*k1/k

s2 =0.13617326992492418892873080174984*k1/k

s3 =0.54361050295122443941842815148704*k1/k

s4 =0.20395045428855588931493949775000/k1

s5 =0.21822793906859620420297344922173/k1

Khảo sát trường hợp dầm cứng và dầm dài vô hạn

1.Dầm cứng

Khi (βl < 0,6) ta có dầm cứng, ta giải bài toán trong trường hợp này:

Xét trường hợp βl = 0,05 và lực tập trung đặt giữa dầm, dầm hai đầu tự do; kết quả của bài toán như sau:

S1 =19.999997656250121128405883166681/k*k1

S2 =19.999997656250121128405883166681/k*k1

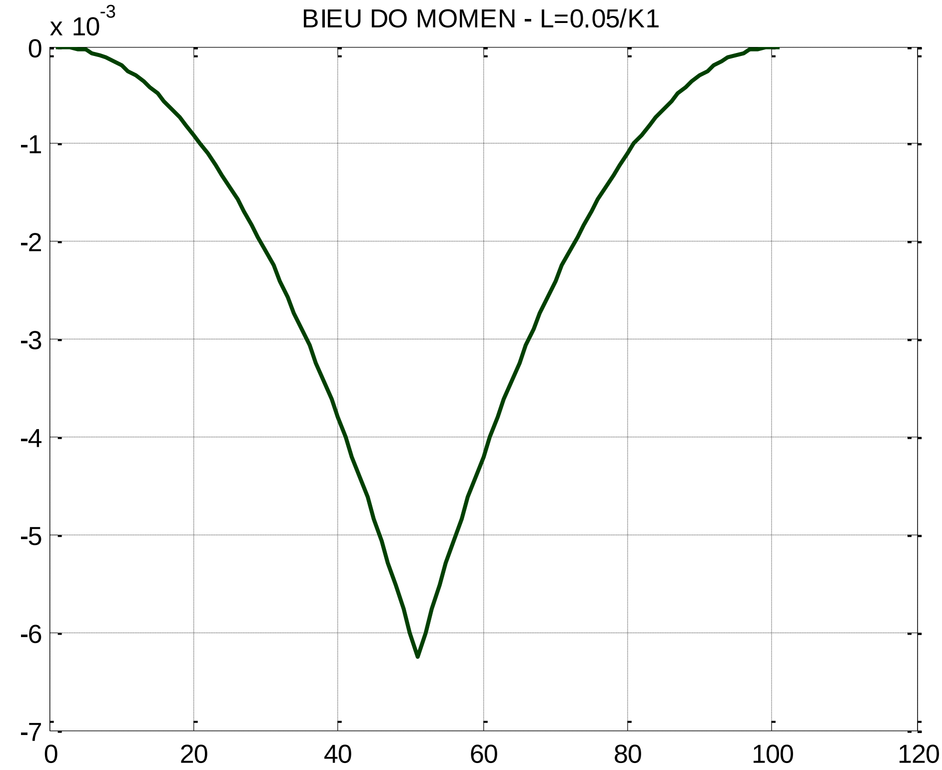
S3 =20.000001562499926154999824185280/k*k1

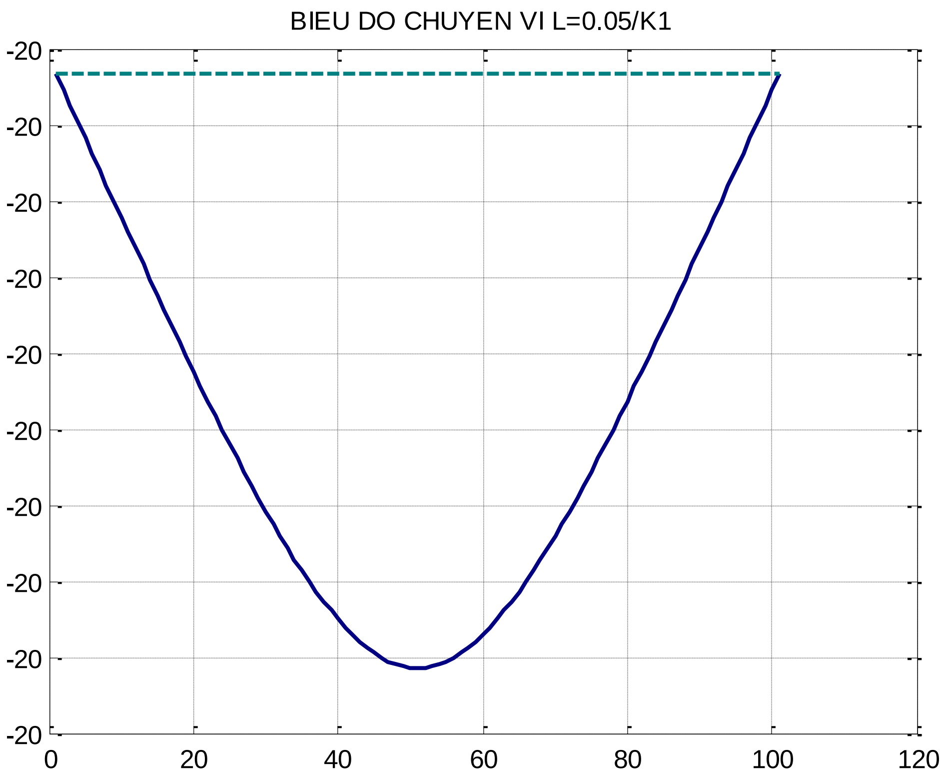
S4 =0.62499997829861218756757109725922e-2/k1

S5 =0.62499997829861218756757109725925e-2/k1

Ta thấy $S_1 = S_2 \approx S_3$: chuyển vị tại hai đầu dầm bằng nhau và xấp xỉ chuyển vị tại điểm đặt lực (giữa dầm).

Lời giải cụ thể của bài toán được đưa vào phụ lục. Dưới đây là biểu đồ mô men và chuyển vị

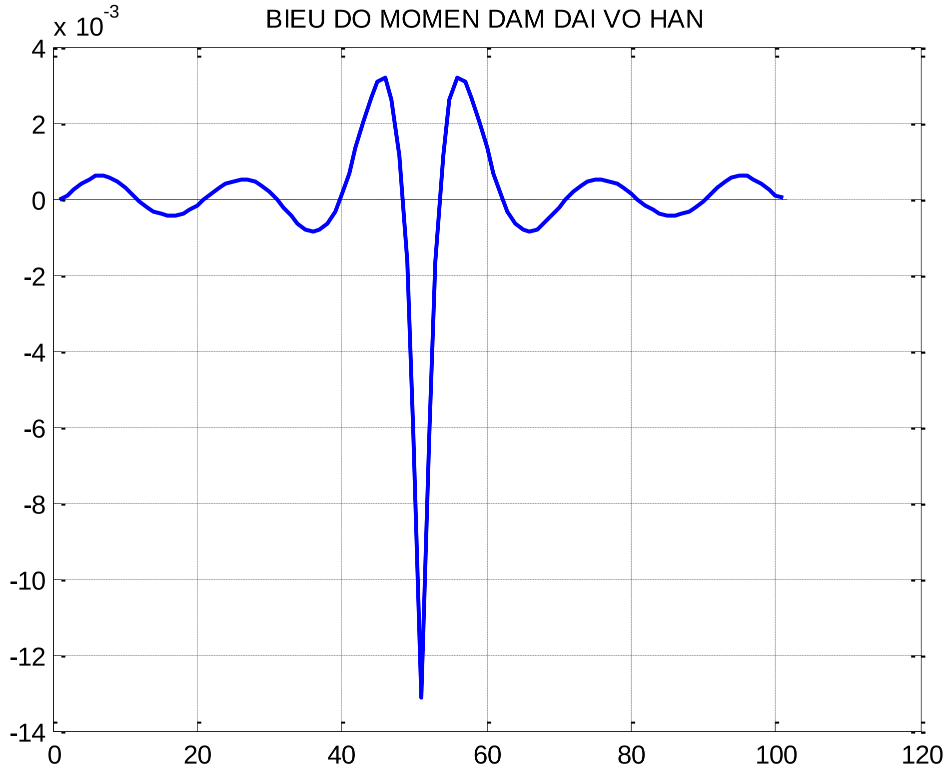

x 10-3
BIEU DO MOMEN - L=0.05/K1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
0
20
40
60
80
100
120

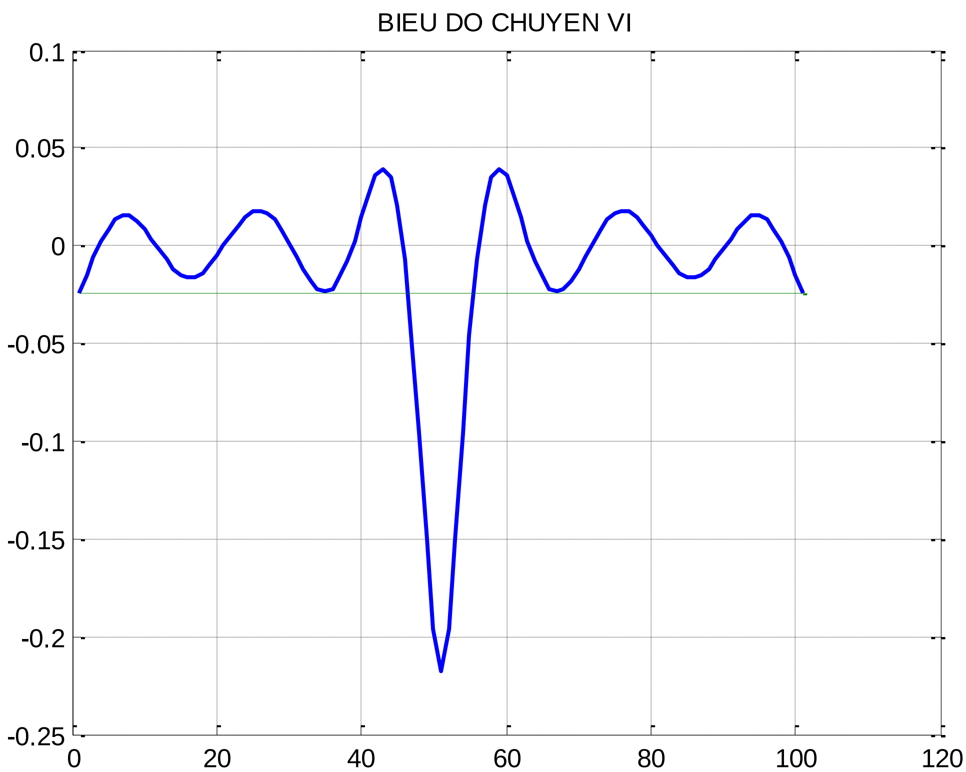

BIEU DO CHUYEN VI L=0.05/K1
-20
-20
-20
-20
-20
-20
-20
-20
-20
-20
0
20
40
60
80
100
120

1.Dầm dài vô hạn

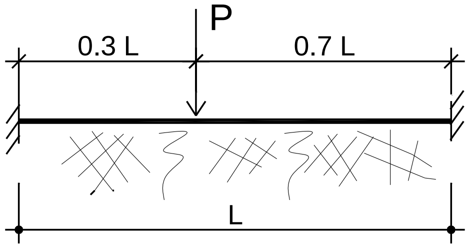
Ta giải bài toán khi βl > 6: Trường hợp dầm vô hạn

Cho βl = 100 ta có kết quả bài toán như sau (lời giải được cho vào phụ lục)





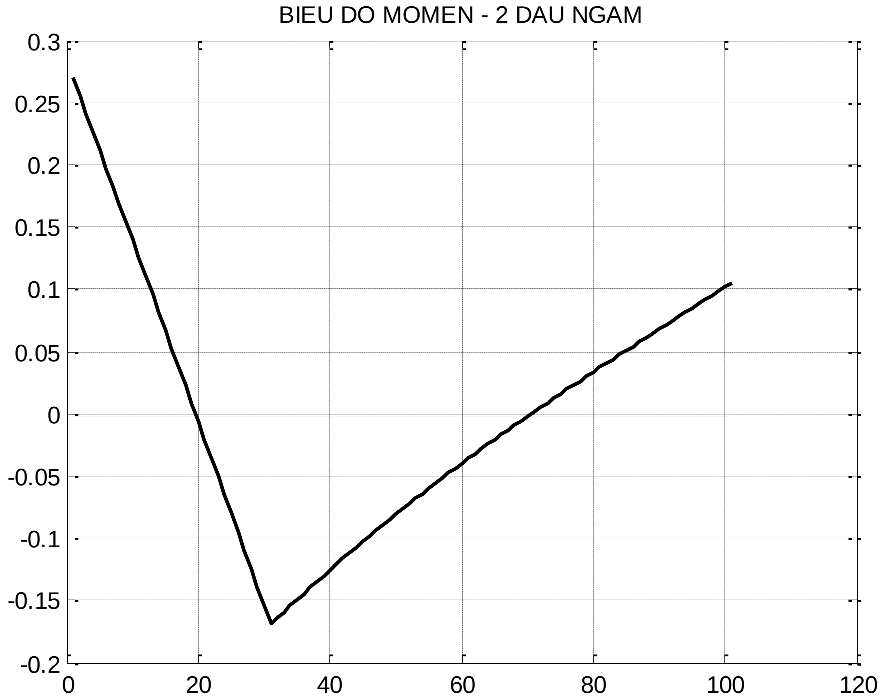
Ví dụ 2: Dầm hai đầu ngàm

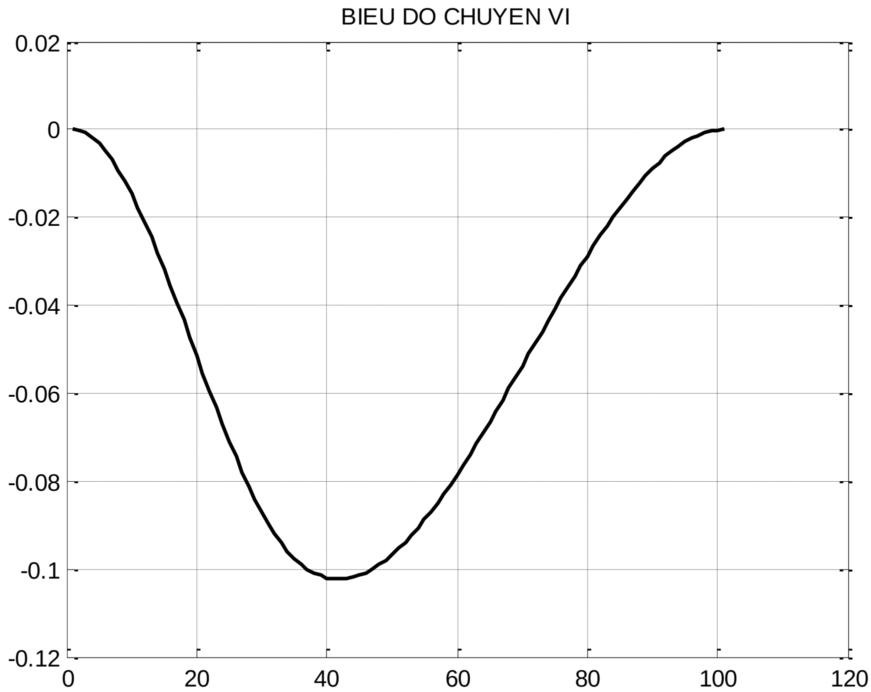


Các điều kiện biên: Độ võng và góc xoay tại hai đầu ngàm bằng không; điều kiện liên tục về chuyển vị tại điểm đặt lực P:

$y_1\big|_{x=0}=0$, $y'_1\big|_{x=0}=0$; $y_2\big|_{x=l_2}=0$, $y'_2\big|_{x=l_2}=0$; $y_1\big|_{x=l_1}=y_2\big|_{x=0}$; $y'_1\big|_{x=l_1}=y'_2\big|_{x=0}$

Lời giải được cho ở phụ lục. Dưới đây là biểu đồ mô men và chuyển vị.





s1 = 0.897553e-1*k1/k (chuyển vị tại điểm đặt lực P)

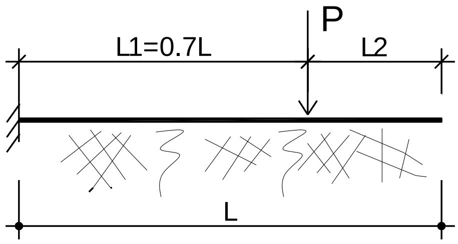
s2 =-0.2700752/k1 (Mômen đầu ngàm trái)

s3 =-0.1052732/k1 (Mômen đầu ngàm phải)

s4 = 0.1692232/k1 (Mômen tại điểm đặt lực)

s5 = 0.1692235/k1

Ví dụ 3: Bài toán dầm đầu ngàm- đầu tự do



Điều kiện biên của bài toán:

Độ võng và góc xoay tại đầu ngàm bằng không; Mô men và lực cắt ở đầu tự do bằng không. Điều kiện liên tục về chuyển vị tại điểm đặt lực P:

$$y_1\big|_{x=0} = 0,\ y'_1\big|_{x=0} = 0;\ M_2\big|_{x=l_2} = 0,\ Q_2\big|_{x=l_2} = 0;\ y_1\big|_{x=l_1} = y_2\big|_{x=0};\ y'_1\big|_{x=l_1} = y'_2\big|_{x=0}$$

Lời giải được cho ở phụ lục. Dưới đây là biểu đồ mô men và chuyển vị.

Kết quả thu được

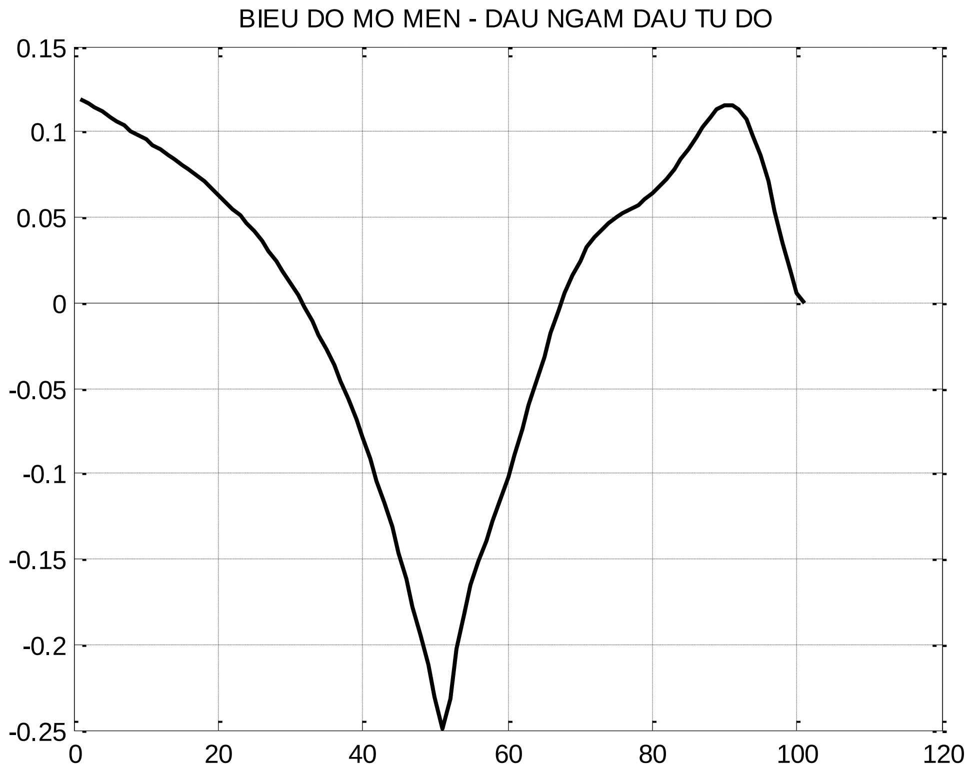
S1 =-0.119324639097627330188685/k1 (Mômen tại ngàm)

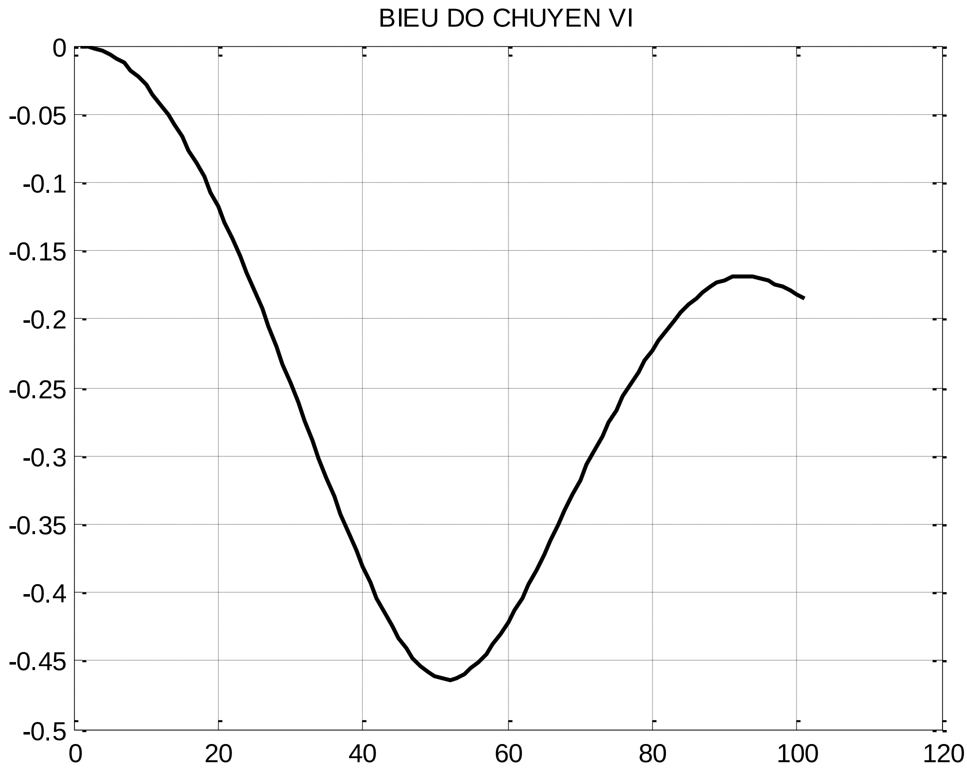
s2 =0.2495621602762602405929929/k1 (Mômen tại điểm đặt lực)

s3 =0.46340197630333900999999*k1/k (chuyển vị tại điểm đặt lực)

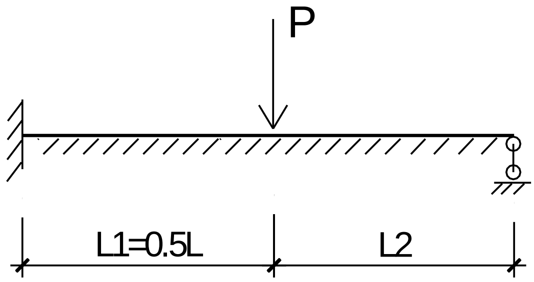
s4 =0.463401976303339009999*k1/k (chuyển vị tại điểm đặt lực)

s5 =0.184895047409585750498*k1/k (chuyển vị tại đầu tự do)


BIEU DO MO MEN - DAU NGAM DAU TU DO
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
-0.25
0
20
40
60
80
100
120


BIEU DO CHUYEN VI
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
-0.25
-0.3
-0.35
-0.4
-0.45
-0.5
0
20
40
60
80
100
120

Ví dụ 4: Dầm đầu ngàm đầu khớp



Điều kiện biên của bài toán:

Độ võng và góc xoay tại đầu ngàm bằng không; Mô men và chuyển vị ở đầu khớp bằng không. Điều kiện liên tục về chuyển vị tại điểm đặt lực P:

$$y_1\big|_{x=0} = 0,\; y'_1\big|_{x=0} = 0;\; M_2\big|_{x=l_2} = 0,\; y_2\big|_{x=l_2} = 0;\; y_1\big|_{x=l_1} = y_2\big|_{x=0};\; y'_1\big|_{x=l_1} = y'_2\big|_{x=0}$$

Lời giải được cho ở phụ lục. Dưới đây là biểu đồ mô men và chuyển vị

Kết quả thu được:

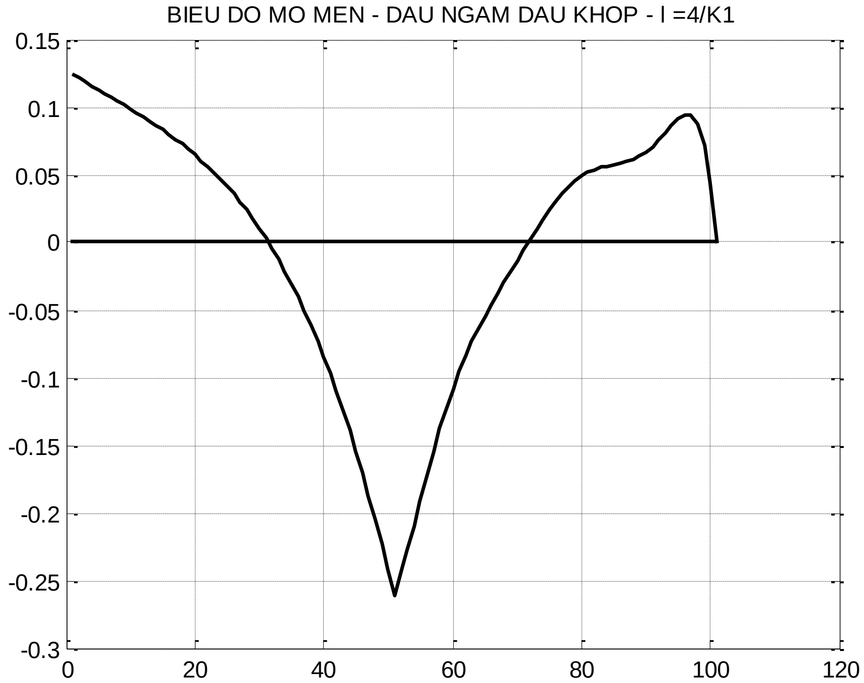
s1 = - 0.1241618/k1 (Mômen tại ngàm)

s2 =0.4731959*k1/k (Chuyển vị tại điểm đặt lực)

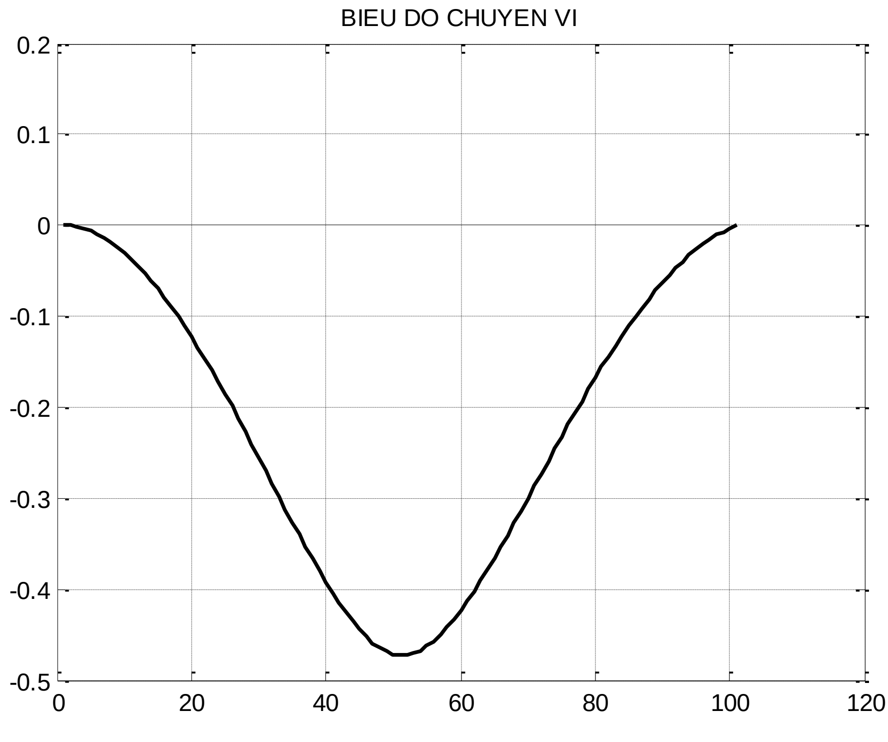
s3 =0.4731956*k1/k (Chuyển vị tại điểm đặt lực)

s4 =0.2614220/k1 (Mô men tại điểm đặt lực)

s5 =0.2502090/k1 (Mô men vị tại điểm đặt lực)



BIEU DO MO MEN - DAU NGAM DAU KHOP - l =4/K1
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
-0.25
-0.3
0
20
40
60
80
100
120



BIEU DO CHUYEN VI
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
0
20
40
60
80
100
120

KẾT QUẢ VÀ BÀN LUẬN

1. Phép tính biến phân là công cụ toán học rất hữu ích, khi dùng với các nguyên lý biến phân ta nhận được các phương trình cân bằng của cơ hệ cũng như các điều kiện biên chính xác của bài toán. Điều đó cũng có nghĩa là phép tính biến phân cho phép nhận được bài toán đúng(bài toán correct). Trong [7 ,trang 284] có nêu các điều kiện của bài toán đúng(bài toán correct) là có nghiệm duy nhất và nghiệm ổn định khi có thay đổi nhỏ của điều kiện ban đầu hoặc điều kiện biên.

2. Luận văn trình bày bốn đường lối chung xây dựng các bài toán cơ học công trình, qua đó thấy được đặc điểm sử dụng của từng phương pháp. Bằng cách sử dụng sai phân hữu hạn cho phép ta áp dụng trực tiếp phương trình Lagrange để nhận được phương trình cân bằng của dầm chịu uốn. Cách trình bày trên là mới, không có trong các tài liệu cơ học khác. Bằng cách làm tương tự từ phương trình Lagrange có thể nhận được các phương trình vi phân cân bằng của các bài toán cơ học công trình và cơ hệ môi trường liên tục. Ranh giới giữa cơ học giải tích và cơ học công trình (cơ học môi trường liên tục) dường như bị xoá nhoà.

3. Khác với nguyên lý khác, nguyên lý chuyển vị ảo xem các chuyển vị ảo(các biến dạng ảo) là độc lập đối với lực tác dụng.Theo Gauss, mọi nguyên lý khác đều trực tiếp hoặc gián tiếp có thể rút ra từ nguyên lý chuyển vị ảo. Như vậy nguyên lý chuyển vị ảo là nguyên lý chung nhất, hơn nữa nó đã biến bài toán cơ thành bài toán toán học thuần tuý như Gauss nhận xét.

4. Bằng cách sử dụng nguyên lý chuyển vị ảo và tư tưởng giải phóng liên kết, tác giả đã trình bày phương pháp mới tính dầm hữu hạn trên nền đàn hồi dựa vào lời giải đã biết của bài toán dầm vô hạn nằm trên nền đàn hồi.

TÀI LIỆU THAM KHẢO CHÍNH

[1] . William T.Thomson, Professor Emeritus.Theory of vibration with applications (fourth edition).

[2] . Mathematical handbook for scientists and engineers

[3] . Gelfand I,M.et al. Calculus of Variations. Edition Mir 2000

[4] . Klaus- Jurgen Bathe, Finite Element Procedures Prentice-Hall International, Inc 1996.

[5] . A.A. Tchiras. Structural machanics - 1989

[6] . Timoshenko. Strengts of Materials – part 2 – Advanced theory and problems

[7] . I.G. Alramovish – V.I. Levis – Các phương trình vật lý toán – mocskva 1969 (bản tiếng Nga)

[8] . M.A. Aizerman . Cơ học cổ điển.NXB NUK 1980

[9] . Timoshenko . Lý thuyết đàn hồi (bản tiếng nga)

[10] . X.P. Timôsenkô- X.Vôinôpki-Krige.Tấm và Vỏ (bản dịch tiếng việt) Nxb khoa học kỹ thuật 1971.

[11] . I.N. Bê Du khốp . Lý thuyết đàn hồi (bản tiếng việt).Nxb ĐH & THCN

[12] . Đào Huy Bích . Phép tính biến phân . Nxb Đại học quốc gia HN – 2000

[13] . Engon . Phép tính biến phân (bản dịch tiếng việt) – Nxb Khoa học KT 1974

[14] . Nguyễn Văn Đạo . Cơ học giải tích . Nxb khoa học kỹ thuật

[15] . Trần Bình. Phương pháp phần tử hữu hạn . Nxb khoa học kỹ thuật

[16] . Đại học thuỷ lợi. Sức bền vật liệu . Nxb xây dựng- 2002

PHỤ LỤC TÍNH TOÁN

Ví dụ 1: Dầm cứng và dầm vô hạn

Dầm cứng:

```
syms x l k k1 ej;
syms a0 a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9;
syms b0 b1 b2 b3 b4 b5 b6 b7 b8 b9;
syms ld1 ld2 ld3 ld4 ld5 ld6 ld7;

l=0.05/k1;

l1=0.5*l; l2=l-l1;

y0=k1/k/2 *exp(-k1*x)*(cos(k1*x)+sin(k1*x));
m0=-1/4/k1*exp(-k1*x)*(sin(k1*x)-cos(k1*x));

q0=diff(m0,x);f0=k*y0;
rm2=subs(m0,x,l2);
rq2=subs(q0,x,l2);
y01=subs(y0,x,l1-x);
m01=subs(m0,x,l1-x);
q01=subs(q0,x,l1-x);f01=k*y01;
rm1=subs(m01,x,0);vpa(rm1)
rq1=subs(q01,x,0);vpa(rq1)
vpa(rm2)
vpa(rq2)

s1=double(subs(rm1,k1,1));
if s1>0;sigm1=1;else sigm1=-1;end;
s1=double(subs(rm2,k1,1));
if s1>0;sigm2=-1;else sigm2=1;end;
s1=double(rq1);
if s1>0;sigq1=-1;else sigq1=1;end;
s1=double(rq2);
if s1>0;sigq2=-1;else sigq2=1;end;
```

```
y1=a0+a1*x+a2*x^2+a3*x^3+a4*x^4+a5*x^5+a6*x^6+a7*x^7+a8*x^8+a9*x^9;
y2=b0+b1*x+b2*x^2+b3*x^3+b4*x^4+b5*x^5+b6*x^6+b7*x^7+b8*x^8+b9*x^9;

y11=diff(y1,x);y12=diff(y11,x);bd1=-y12;
y21=diff(y2,x);y22=diff(y21,x);bd2=-y22;
mx1=k/4/k1^4*bd1;f1=k*y1;q1=diff(mx1,x);
mx2=k/4/k1^4*bd2;f2=k*y2;q2=diff(mx2,x);

g1=subs(mx1,x,0);
g2=subs(q1,x,0);
g3=subs(mx2,x,l2);
g4=subs(q2,x,l2);
g5=subs(y1,x,l1)-subs(y2,x,0);
g6=subs(y11,x,l1)-subs(y21,x,0);

z11=g1*ld1+g2*ld2+g3*ld3+g4*ld4+g5*ld5+g6*ld6;
z12=
sigm1*rm1*subs(y11,x,0)+sigq1*rq1*subs(y1,x,0)+sigm2*rm2*subs(y21,x,l2)+si
gq2*rq2*subs(y2,x,l2);
z1=z11+z12;

s1=diff(bd1,a0);s2=diff(y1,a0);s3=diff(z1,a0);
h1=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a1);s2=diff(y1,a1);s3=diff(z1,a1);
h2=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a2);s2=diff(y1,a2);s3=diff(z1,a2);
h3=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a3);s2=diff(y1,a3);s3=diff(z1,a3);
h4=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a4);s2=diff(y1,a4);s3=diff(z1,a4);
h5=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a5);s2=diff(y1,a5);s3=diff(z1,a5);
h6=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
```

```
s1=diff(bd1,a6);s2=diff(y1,a6);s3=diff(z1,a6);
h7=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a7);s2=diff(y1,a7);s3=diff(z1,a7);
h8=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a8);s2=diff(y1,a8);s3=diff(z1,a8);
h9=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a9);s2=diff(y1,a9);s3=diff(z1,a9);
h10=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;

s1=diff(bd2,b0);s2=diff(y2,b0);s3=diff(z1,b0);
h21=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b1);s2=diff(y2,b1);s3=diff(z1,b1);
h22=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b2);s2=diff(y2,b2);s3=diff(z1,b2);
h23=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b3);s2=diff(y2,b3);s3=diff(z1,b3);
h24=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b4);s2=diff(y2,b4);s3=diff(z1,b4);
h25=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b5);s2=diff(y2,b5);s3=diff(z1,b5);
h26=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b6);s2=diff(y2,b6);s3=diff(z1,b6);
h27=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b7);s2=diff(y2,b7);s3=diff(z1,b7);
h28=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b8);s2=diff(y2,b8);s3=diff(z1,b8);
h29=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b9);s2=diff(y2,b9);s3=diff(z1,b9);
h30=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;

h41=diff(z1,ld1);
h42=diff(z1,ld2);
h43=diff(z1,ld3);
h44=diff(z1,ld4);
```

```
h45=diff(z1,ld5);
h46=diff(z1,ld6);

r=solve(h1,h2,h3,h4,h5,h6,h7,h8,h9,h10,...
    h21,h22,h23,h24,h25,h26,h27,h28,h29,h30,...
    h41,h42,h43,h44,h45,h46,...
    'a0','a1','a2','a3','a4','a5','a6','a7','a8','a9',...
    'b0','b1','b2','b3','b4','b5','b6','b7','b8','b9',...
    'ld1','ld2','ld3','ld4','ld5','ld6');

%digits(7);
a0=vpa(r.a0)
a1=vpa(r.a1)
a2=vpa(r.a2)
a3=vpa(r.a3)
a4=vpa(r.a4)
a5=vpa(r.a5)
a6=vpa(r.a6)
a7=vpa(r.a7)
a8=vpa(r.a8)
a9=vpa(r.a9)

b0=vpa(r.b0)
b1=vpa(r.b1)
b2=vpa(r.b2)
b3=vpa(r.b3)
b4=vpa(r.b4)
b5=vpa(r.b5)
b6=vpa(r.b6)
b7=vpa(r.b7)
b8=vpa(r.b8)
b9=vpa(r.b9)

y1=a0+a1*x+a2*x^2+a3*x^3+a4*x^4+a5*x^5+a6*x^6+a7*x^7+a8*x^8+a9*x^9;
```

```
y2=b0+b1*x+b2*x^2+b3*x^3+b4*x^4+b5*x^5+b6*x^6+b7*x^7+b8*x^8+b9*x^9;

y11=diff(y1,x);y12=diff(y11,x);bd1=-y12;
y21=diff(y2,x);y22=diff(y21,x);bd2=-y22;
mx1=k/4/k1^4*bd1;f1=k*y1;q1=diff(mx1,x);
mx2=k/4/k1^4*bd2;f2=k*y2;q2=diff(mx2,x);

s1=subs(y1,x,0)
s2=subs(y2,x,l2)
s3=subs(y1,x,l1)
s4=subs(mx1,x,l1)
s5=subs(mx2,x,0)

k=1;k1=1;
s1=subs(s1);s2=subs(s2);
s1=double(s1);s2=double(s2);
x2=[s1 s2];t2=[1 101];

l=subs(l);l1=subs(l1);l2=subs(l2);
y1=subs(y1);y2=subs(y2);mx1=subs(mx1);mx2=subs(mx2);
w=zeros(101,1);
s1=l/100;
n1=l1/s1+1;
x1(1)=0;
for n=2:n1
    x1(n)=x1(n-1)+s1;
end
for n=1:n1
    s2=x1(n);
    s3=subs(y1,x,s2);
    w(n)=double(s3);
end
n2=l2/s1+1;x1(1)=0;
for n=2:n2
```

```
    x1(n)=x1(n-1)+s1;
    s3=subs(y2,x,x1(n));
    w(n+n1-1)=double(s3);
end
figure
t1=1:101;
plot(t1,-w,t2,-x2);grid;
figure
for n=2:n1
    x1(n)=x1(n-1)+s1;
end
for n=1:n1
    s2=x1(n);
    s3=subs(mx1,x,s2);
    w(n)=double(s3);
end
n2=l2/s1+1;x1(1)=0;
for n=2:n2
    x1(n)=x1(n-1)+s1;
    s3=subs(mx2,x,x1(n));
    w(n+n1-1)=double(s3);
end
plot(t1,w);grid;
```

Trường hợp dầm dài vô hạn

```
syms x l k k1 ej;
syms a0 a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9;
syms b0 b1 b2 b3 b4 b5 b6 b7 b8 b9;
syms ld1 ld2 ld3 ld4 ld5 ld6 ld7;

l=100/k1;
```

```
l1=0.5*l; l2=l-l1;

y0=k1/k/2 *exp(-k1*x)*(cos(k1*x)+sin(k1*x));
m0=-1/4/k1*exp(-k1*x)*(sin(k1*x)-cos(k1*x));

q0=diff(m0,x);f0=k*y0;
rm2=subs(m0,x,l2);
rq2=subs(q0,x,l2);
y01=subs(y0,x,l1-x);
m01=subs(m0,x,l1-x);
q01=subs(q0,x,l1-x);f01=k*y01;
rm1=subs(m01,x,0);vpa(rm1)
rq1=subs(q01,x,0);vpa(rq1)
vpa(rm2)
vpa(rq2)

s1=double(subs(rm1,k1,1));
if s1>0;sigm1=1;else sigm1=-1;end;
s1=double(subs(rm2,k1,1));
if s1>0;sigm2=-1;else sigm2=1;end;
s1=double(rq1);
if s1>0;sigq1=-1;else sigq1=1;end;
s1=double(rq2);
if s1>0;sigq2=-1;else sigq2=1;end;

y1=a0+a1*x+a2*x^2+a3*x^3+a4*x^4+a5*x^5+a6*x^6+a7*x^7+a8*x^8+a9*x^9;
y2=b0+b1*x+b2*x^2+b3*x^3+b4*x^4+b5*x^5+b6*x^6+b7*x^7+b8*x^8+b9*x^9;

y11=diff(y1,x);y12=diff(y11,x);bd1=-y12;
y21=diff(y2,x);y22=diff(y21,x);bd2=-y22;
mx1=k/4/k1^4*bd1;f1=k*y1;q1=diff(mx1,x);
mx2=k/4/k1^4*bd2;f2=k*y2;q2=diff(mx2,x);

g1=subs(mx1,x,0);
```

```
g2=subs(q1,x,0);
g3=subs(mx2,x,l2);
g4=subs(q2,x,l2);
g5=subs(y1,x,l1)-subs(y2,x,0);
g6=subs(y11,x,l1)-subs(y21,x,0);

z11=g1*ld1+g2*ld2+g3*ld3+g4*ld4+g5*ld5+g6*ld6;
z12=
sigm1*rm1*subs(y11,x,0)+sigq1*rq1*subs(y1,x,0)+sigm2*rm2*subs(y21,x,l2)+si
gq2*rq2*subs(y2,x,l2);
z1=z11+z12;

s1=diff(bd1,a0);s2=diff(y1,a0);s3=diff(z1,a0);
h1=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a1);s2=diff(y1,a1);s3=diff(z1,a1);
h2=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a2);s2=diff(y1,a2);s3=diff(z1,a2);
h3=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a3);s2=diff(y1,a3);s3=diff(z1,a3);
h4=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a4);s2=diff(y1,a4);s3=diff(z1,a4);
h5=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a5);s2=diff(y1,a5);s3=diff(z1,a5);
h6=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a6);s2=diff(y1,a6);s3=diff(z1,a6);
h7=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a7);s2=diff(y1,a7);s3=diff(z1,a7);
h8=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a8);s2=diff(y1,a8);s3=diff(z1,a8);
h9=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a9);s2=diff(y1,a9);s3=diff(z1,a9);
h10=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;

s1=diff(bd2,b0);s2=diff(y2,b0);s3=diff(z1,b0);
```

```
h21=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b1);s2=diff(y2,b1);s3=diff(z1,b1);
h22=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b2);s2=diff(y2,b2);s3=diff(z1,b2);
h23=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b3);s2=diff(y2,b3);s3=diff(z1,b3);
h24=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b4);s2=diff(y2,b4);s3=diff(z1,b4);
h25=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b5);s2=diff(y2,b5);s3=diff(z1,b5);
h26=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b6);s2=diff(y2,b6);s3=diff(z1,b6);
h27=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b7);s2=diff(y2,b7);s3=diff(z1,b7);
h28=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b8);s2=diff(y2,b8);s3=diff(z1,b8);
h29=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b9);s2=diff(y2,b9);s3=diff(z1,b9);
h30=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;

h41=diff(z1,ld1);
h42=diff(z1,ld2);
h43=diff(z1,ld3);
h44=diff(z1,ld4);
h45=diff(z1,ld5);
h46=diff(z1,ld6);
r=solve(h1,h2,h3,h4,h5,h6,h7,h8,h9,h10,...
    h21,h22,h23,h24,h25,h26,h27,h28,h29,h30,...
    h41,h42,h43,h44,h45,h46,...
    'a0','a1','a2','a3','a4','a5','a6','a7','a8','a9',...
    'b0','b1','b2','b3','b4','b5','b6','b7','b8','b9',...
    'ld1','ld2','ld3','ld4','ld5','ld6');

%digits(7);
```

```
a0=vpa(r.a0)
a1=vpa(r.a1)
a2=vpa(r.a2)
a3=vpa(r.a3)
a4=vpa(r.a4)
a5=vpa(r.a5)
a6=vpa(r.a6)
a7=vpa(r.a7)
a8=vpa(r.a8)
a9=vpa(r.a9)

b0=vpa(r.b0)
b1=vpa(r.b1)
b2=vpa(r.b2)
b3=vpa(r.b3)
b4=vpa(r.b4)
b5=vpa(r.b5)
b6=vpa(r.b6)
b7=vpa(r.b7)
b8=vpa(r.b8)
b9=vpa(r.b9)

y1=a0+a1*x+a2*x^2+a3*x^3+a4*x^4+a5*x^5+a6*x^6+a7*x^7+a8*x^8+a9*x^9;
y2=b0+b1*x+b2*x^2+b3*x^3+b4*x^4+b5*x^5+b6*x^6+b7*x^7+b8*x^8+b9*x^9;

y11=diff(y1,x);y12=diff(y11,x);bd1=-y12;
y21=diff(y2,x);y22=diff(y21,x);bd2=-y22;
mx1=k/4/k1^4*bd1;f1=k*y1;q1=diff(mx1,x);
mx2=k/4/k1^4*bd2;f2=k*y2;q2=diff(mx2,x);

s1=subs(y1,x,0)
s2=subs(y2,x,l2)
s3=subs(y1,x,l1)
s4=subs(mx1,x,l1)
```

```
s5=subs(mx2,x,0)

k=1;k1=1;
s1=subs(s1);s2=subs(s2);
s1=double(s1);s2=double(s2);
x2=[s1 s2];t2=[1 101];

l=subs(l);l1=subs(l1);l2=subs(l2);
y1=subs(y1);y2=subs(y2);mx1=subs(mx1);mx2=subs(mx2);
w=zeros(101,1);
s1=l/100;
n1=l1/s1+1;
x1(1)=0;
for n=2:n1
    x1(n)=x1(n-1)+s1;
end
for n=1:n1
    s2=x1(n);
    s3=subs(y1,x,s2);
    w(n)=double(s3);
end
n2=l2/s1+1;x1(1)=0;
for n=2:n2
    x1(n)=x1(n-1)+s1;
    s3=subs(y2,x,x1(n));
    w(n+n1-1)=double(s3);
end
figure
t1=1:101;
plot(t1,-w,t2,-x2);grid;
figure
for n=2:n1
    x1(n)=x1(n-1)+s1;
end
```

```
for n=1:n1
   s2=x1(n);
   s3=subs(mx1,x,s2);
   w(n)=double(s3);
end
n2=l2/s1+1;x1(1)=0;
for n=2:n2
   x1(n)=x1(n-1)+s1;
   s3=subs(mx2,x,x1(n));
   w(n+n1-1)=double(s3);
end
plot(t1,w);grid;
```

<u>Ví dụ 2 : Dầm hai đầu ngàm</u>

```
syms x l k k1 ej;
syms a0 a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9;
syms b0 b1 b2 b3 b4 b5 b6 b7 b8 b9;
syms ld1 ld2 ld3 ld4 ld5 ld6 ld7;

l=2/k1;

l1=0.3*l; l2=l-l1;

y0=k1/k/2 *exp(-k1*x)*(cos(k1*x)+sin(k1*x));
m0=-1/4/k1*exp(-k1*x)*(sin(k1*x)-cos(k1*x));
%m0=1/4/k1*exp(-k1*x)*(sin(k1*x)-cos(k1*x));
q0=diff(m0,x);f0=k*y0;
rm2=subs(m0,x,l2);
rq2=subs(q0,x,l2);
```

```
y01=subs(y0,x,l1-x);
m01=subs(m0,x,l1-x);
q01=subs(q0,x,l1-x);f01=k*y01;
rm1=subs(m01,x,0);vpa(rm1)
rq1=subs(q01,x,0);vpa(rq1)
vpa(rm2)
vpa(rq2)

s1=double(subs(rm1,k1,1));
if s1>0;sigm1=1;else sigm1=-1;end;
s1=double(subs(rm2,k1,1));
if s1>0;sigm2=-1;else sigm2=1;end;
s1=double(rq1);
if s1>0;sigq1=-1;else sigq1=1;end;
s1=double(rq2);
if s1>0;sigq2=-1;else sigq2=1;end;

y1=a2*x^2+a3*x^3+a4*x^4+a5*x^5+a6*x^6+a7*x^7+a8*x^8+a9*x^9;
y2=b0+b1*x+b2*x^2+b3*x^3+b4*x^4+b5*x^5+b6*x^6+b7*x^7+b8*x^8+b9*x^9;

y11=diff(y1,x);y12=diff(y11,x);bd1=-y12;
y21=diff(y2,x);y22=diff(y21,x);bd2=-y22;
mx1=k/4/k1^4*bd1;f1=k*y1;q1=diff(mx1,x);
mx2=k/4/k1^4*bd2;f2=k*y2;q2=diff(mx2,x);

g1=subs(y1,x,0);
g2=subs(y11,x,0);
g3=subs(y2,x,l2);
g4=subs(y21,x,l2);
g5=subs(y1,x,l1)-subs(y2,x,0);
g6=subs(y11,x,l1)-subs(y21,x,0);

z11=g3*ld3+g4*ld4+g5*ld5+g6*ld6;
z12= sigm1*rm1*subs(y11,x,0)+sigq1*rq1*subs(y1,x,0)+
```

```
sigm2*rm2*subs(y21,x,l2)+sigq2*rq2*subs(y2,x,l2);
z1=z11+z12;

s1=diff(bd1,a0);s2=diff(y1,a0);s3=diff(z1,a0);
h1=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a1);s2=diff(y1,a1);s3=diff(z1,a1);
h2=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a2);s2=diff(y1,a2);s3=diff(z1,a2);
h3=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a3);s2=diff(y1,a3);s3=diff(z1,a3);
h4=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a4);s2=diff(y1,a4);s3=diff(z1,a4);
h5=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a5);s2=diff(y1,a5);s3=diff(z1,a5);
h6=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a6);s2=diff(y1,a6);s3=diff(z1,a6);
h7=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a7);s2=diff(y1,a7);s3=diff(z1,a7);
h8=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a8);s2=diff(y1,a8);s3=diff(z1,a8);
h9=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a9);s2=diff(y1,a9);s3=diff(z1,a9);
h10=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;

s1=diff(bd2,b0);s2=diff(y2,b0);s3=diff(z1,b0);
h21=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b1);s2=diff(y2,b1);s3=diff(z1,b1);
h22=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b2);s2=diff(y2,b2);s3=diff(z1,b2);
h23=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b3);s2=diff(y2,b3);s3=diff(z1,b3);
h24=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b4);s2=diff(y2,b4);s3=diff(z1,b4);
h25=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
```

```
s1=diff(bd2,b5);s2=diff(y2,b5);s3=diff(z1,b5);
h26=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b6);s2=diff(y2,b6);s3=diff(z1,b6);
h27=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b7);s2=diff(y2,b7);s3=diff(z1,b7);
h28=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b8);s2=diff(y2,b8);s3=diff(z1,b8);
h29=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b9);s2=diff(y2,b9);s3=diff(z1,b9);
h30=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;

h41=diff(z1,ld1);
h42=diff(z1,ld2);
h43=diff(z1,ld3);
h44=diff(z1,ld4);
h45=diff(z1,ld5);
h46=diff(z1,ld6);

r=solve(h3,h4,h5,h6,h7,h8,h9,h10,...
    h21,h22,h23,h24,h25,h26,h27,h28,h29,h30,...
    h43,h44,h45,h46,...
   'a2','a3','a4','a5','a6','a7','a8','a9',...
    'b0','b1','b2','b3','b4','b5','b6','b7','b8','b9',...
    'ld3','ld4','ld5','ld6')

%digits(7);

%a1=vpa(r.a1)
a2=vpa(r.a2)
a3=vpa(r.a3)
a4=vpa(r.a4)
a5=vpa(r.a5)
a6=vpa(r.a6)
a7=vpa(r.a7)
```

```
a8=vpa(r.a8)
a9=vpa(r.a9)

b0=vpa(r.b0)
b1=vpa(r.b1)
b2=vpa(r.b2)
b3=vpa(r.b3)
b4=vpa(r.b4)
b5=vpa(r.b5)
b6=vpa(r.b6)
b7=vpa(r.b7)
b8=vpa(r.b8)
b9=vpa(r.b9)

y1=a2*x^2+a3*x^3+a4*x^4+a5*x^5+a6*x^6+a7*x^7+a8*x^8+a9*x^9;
y2=b0+b1*x+b2*x^2+b3*x^3+b4*x^4+b5*x^5+b6*x^6+b7*x^7+b8*x^8+b9*x^9;
y11=diff(y1,x);y12=diff(y11,x);bd1=-y12;
y21=diff(y2,x);y22=diff(y21,x);bd2=-y22;
mx1=k/4/k1^4*bd1;f1=k*y1;q1=diff(mx1,x);
mx2=k/4/k1^4*bd2;f2=k*y2;q2=diff(mx2,x);

s1=subs(mx1,x,0)
s2=subs(mx2,x,l2)
s3=subs(mx1,x,l1)
s4=subs(mx2,x,0)
s5=subs(y2,x,0)

k=1;k1=1;
s1=subs(s1);s2=subs(s2);
s1=double(s1);s2=double(s2);
x2=[s1 s2];t2=[1 101];

l=subs(l);l1=subs(l1);l2=subs(l2);
y1=subs(y1);y2=subs(y2);mx1=subs(mx1);mx2=subs(mx2);
```

```
w=zeros(101,1);
s1=l/100;
n1=l1/s1+1;
x1(1)=0;
for n=2:n1
    x1(n)=x1(n-1)+s1;
end
for n=1:n1
    s2=x1(n);
    s3=subs(y1,x,s2);
    w(n)=double(s3);
end
n2=l2/s1+1;x1(1)=0;
for n=2:n2
    x1(n)=x1(n-1)+s1;
    s3=subs(y2,x,x1(n));
    w(n+n1-1)=double(s3);
end
figure
t1=1:101;
plot(t1,-w,t2,-x2);grid;
figure
for n=2:n1
    x1(n)=x1(n-1)+s1;
end
for n=1:n1
    s2=x1(n);
    s3=subs(mx1,x,s2);
    w(n)=double(s3);
end
n2=l2/s1+1;x1(1)=0;
for n=2:n2
    x1(n)=x1(n-1)+s1;
    s3=subs(mx2,x,x1(n));
```

```
    w(n+n1-1)=double(s3);
end
plot(t1,w);grid;
```

Ví dụ 3: Bài toán đầu ngàm đầu tự do

```
syms x l k k1 ej;
syms a0 a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9;
syms b0 b1 b2 b3 b4 b5 b6 b7 b8 b9;
syms ld1 ld2 ld3 ld4 ld5 ld6 ld7;

l=2/k1;

l1=0.7*l; l2=l-l1;

y0=k1/k/2 *exp(-k1*x)*(cos(k1*x)+sin(k1*x));
m0=-1/4/k1*exp(-k1*x)*(sin(k1*x)-cos(k1*x));
%m0=1/4/k1*exp(-k1*x)*(sin(k1*x)-cos(k1*x));
q0=diff(m0,x);f0=k*y0;
rm2=subs(m0,x,l2);
rq2=subs(q0,x,l2);
y01=subs(y0,x,l1-x);
m01=subs(m0,x,l1-x);
q01=subs(q0,x,l1-x);f01=k*y01;
rm1=subs(m01,x,0);vpa(rm1)
rq1=subs(q01,x,0);vpa(rq1)
vpa(rm2)
vpa(rq2)

s1=double(subs(rm1,k1,1));
if s1>0;sigm1=1;else sigm1=-1;end;
s1=double(subs(rm2,k1,1));
if s1>0;sigm2=-1;else sigm2=1;end;
s1=double(rq1);
if s1>0;sigq1=-1;else sigq1=1;end;
```

```
s1=double(rq2);
if s1>0;sigq2=-1;else sigq2=1;end;

y1=a2*x^2+a3*x^3+a4*x^4+a5*x^5+a6*x^6+a7*x^7+a8*x^8+a9*x^9;
y2=b0+b1*x+b2*x^2+b3*x^3+b4*x^4+b5*x^5+b6*x^6+b7*x^7+b8*x^8+b9*x^9;

y11=diff(y1,x);y12=diff(y11,x);bd1=-y12;
y21=diff(y2,x);y22=diff(y21,x);bd2=-y22;
mx1=k/4/k1^4*bd1;f1=k*y1;q1=diff(mx1,x);
mx2=k/4/k1^4*bd2;f2=k*y2;q2=diff(mx2,x);

g1=subs(y1,x,0);
g2=subs(y11,x,0);
g3=subs(mx2,x,l2);
g4=subs(q2,x,l2);
g5=subs(y1,x,l1)-subs(y2,x,0);
g6=subs(y11,x,l1)-subs(y21,x,0);

z11=g3*ld3+g4*ld4+g5*ld5+g6*ld6;
z12= sigm1*rm1*subs(y11,x,0)+sigq1*rq1*subs(y1,x,0)+
sigm2*rm2*subs(y21,x,l2)+sigq2*rq2*subs(y2,x,l2);
z1=z11+z12;

s1=diff(bd1,a0);s2=diff(y1,a0);s3=diff(z1,a0);
h1=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a1);s2=diff(y1,a1);s3=diff(z1,a1);
h2=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a2);s2=diff(y1,a2);s3=diff(z1,a2);
h3=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a3);s2=diff(y1,a3);s3=diff(z1,a3);
h4=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a4);s2=diff(y1,a4);s3=diff(z1,a4);
h5=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a5);s2=diff(y1,a5);s3=diff(z1,a5);
```

```
h6=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a6);s2=diff(y1,a6);s3=diff(z1,a6);
h7=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a7);s2=diff(y1,a7);s3=diff(z1,a7);
h8=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a8);s2=diff(y1,a8);s3=diff(z1,a8);
h9=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a9);s2=diff(y1,a9);s3=diff(z1,a9);
h10=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;

s1=diff(bd2,b0);s2=diff(y2,b0);s3=diff(z1,b0);
h21=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b1);s2=diff(y2,b1);s3=diff(z1,b1);
h22=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b2);s2=diff(y2,b2);s3=diff(z1,b2);
h23=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b3);s2=diff(y2,b3);s3=diff(z1,b3);
h24=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b4);s2=diff(y2,b4);s3=diff(z1,b4);
h25=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b5);s2=diff(y2,b5);s3=diff(z1,b5);
h26=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b6);s2=diff(y2,b6);s3=diff(z1,b6);
h27=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b7);s2=diff(y2,b7);s3=diff(z1,b7);
h28=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b8);s2=diff(y2,b8);s3=diff(z1,b8);
h29=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b9);s2=diff(y2,b9);s3=diff(z1,b9);
h30=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;

h41=diff(z1,ld1);
h42=diff(z1,ld2);
h43=diff(z1,ld3);
```

```
h44=diff(z1,ld4);
h45=diff(z1,ld5);
h46=diff(z1,ld6);

r=solve(h3,h4,h5,h6,h7,h8,h9,h10,...
    h21,h22,h23,h24,h25,h26,h27,h28,h29,h30,...
    h43,h44,h45,h46,...
   'a2','a3','a4','a5','a6','a7','a8','a9',...
    'b0','b1','b2','b3','b4','b5','b6','b7','b8','b9',...
    'ld3','ld4','ld5','ld6')

%digits(7);

%a1=vpa(r.a1)
a2=vpa(r.a2)
a3=vpa(r.a3)
a4=vpa(r.a4)
a5=vpa(r.a5)
a6=vpa(r.a6)
a7=vpa(r.a7)
a8=vpa(r.a8)
a9=vpa(r.a9)

b0=vpa(r.b0)
b1=vpa(r.b1)
b2=vpa(r.b2)
b3=vpa(r.b3)
b4=vpa(r.b4)
b5=vpa(r.b5)
b6=vpa(r.b6)
b7=vpa(r.b7)
b8=vpa(r.b8)
b9=vpa(r.b9)
```

```
y1=a2*x^2+a3*x^3+a4*x^4+a5*x^5+a6*x^6+a7*x^7+a8*x^8+a9*x^9;
y2=b0+b1*x+b2*x^2+b3*x^3+b4*x^4+b5*x^5+b6*x^6+b7*x^7+b8*x^8+b9*x^9;

y11=diff(y1,x);y12=diff(y11,x);bd1=-y12;
y21=diff(y2,x);y22=diff(y21,x);bd2=-y22;
mx1=k/4/k1^4*bd1;f1=k*y1;q1=diff(mx1,x);
mx2=k/4/k1^4*bd2;f2=k*y2;q2=diff(mx2,x);

s1=subs(mx1,x,0)
s2=subs(mx1,x,l1)
s3=subs(y1,x,l1)
s4=subs(y2,x,0)
s5=subs(y2,x,l2)

k=1;k1=1;
s1=subs(s1);s2=subs(s2);
s1=double(s1);s2=double(s2);
x2=[s1 s2];t2=[1 101];

l=subs(l);l1=subs(l1);l2=subs(l2);
y1=subs(y1);y2=subs(y2);mx1=subs(mx1);mx2=subs(mx2);
w=zeros(101,1);
s1=l/100;
n1=l1/s1+1;
x1(1)=0;
for n=2:n1
   x1(n)=x1(n-1)+s1;
end
for n=1:n1
   s2=x1(n);
   s3=subs(y1,x,s2);
   w(n)=double(s3);
end
n2=l2/s1+1;x1(1)=0;
```

```
for n=2:n2
    x1(n)=x1(n-1)+s1;
    s3=subs(y2,x,x1(n));
    w(n+n1-1)=double(s3);
end
figure
t1=1:101;
plot(t1,-w,t2,-x2);grid;
figure
for n=2:n1
    x1(n)=x1(n-1)+s1;
end
for n=1:n1
    s2=x1(n);
    s3=subs(mx1,x,s2);
    w(n)=double(s3);
end
n2=l2/s1+1;x1(1)=0;
for n=2:n2
    x1(n)=x1(n-1)+s1;
    s3=subs(mx2,x,x1(n));
    w(n+n1-1)=double(s3);
end
plot(t1,w);grid;
```

Ví dụ 3 – Dầm đầu ngàm đầu tự do

```
syms x l k k1 ej;
syms a0 a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9;
syms b0 b1 b2 b3 b4 b5 b6 b7 b8 b9;
syms ld1 ld2 ld3 ld4 ld5 ld6 ld7;

l=4/k1;

l1=0.5*l; l2=l-l1;
```

```
y0=k1/k/2 *exp(-k1*x)*(cos(k1*x)+sin(k1*x));
m0=-1/4/k1*exp(-k1*x)*(sin(k1*x)-cos(k1*x));

q0=diff(m0,x);f0=k*y0;
rm2=subs(m0,x,l2);
rq2=subs(q0,x,l2);
y01=subs(y0,x,l1-x);
m01=subs(m0,x,l1-x);
q01=subs(q0,x,l1-x);f01=k*y01;
rm1=subs(m01,x,0);vpa(rm1)
rq1=subs(q01,x,0);vpa(rq1)
vpa(rm2)
vpa(rq2)

s1=double(subs(rm1,k1,1));
if s1>0;sigm1=1;else sigm1=-1;end;
s1=double(subs(rm2,k1,1));
if s1>0;sigm2=-1;else sigm2=1;end;
s1=double(rq1);
if s1>0;sigq1=-1;else sigq1=1;end;
s1=double(rq2);
if s1>0;sigq2=-1;else sigq2=1;end;

y1=a2*x^2+a3*x^3+a4*x^4+a5*x^5+a6*x^6+a7*x^7+a8*x^8+a9*x^9;
y2=b0+b1*x+b2*x^2+b3*x^3+b4*x^4+b5*x^5+b6*x^6+b7*x^7+b8*x^8+b9*x^
9;

y11=diff(y1,x);y12=diff(y11,x);bd1=-y12;
y21=diff(y2,x);y22=diff(y21,x);bd2=-y22;
mx1=k/4/k1^4*bd1;f1=k*y1;q1=diff(mx1,x);
mx2=k/4/k1^4*bd2;f2=k*y2;q2=diff(mx2,x);

g1=subs(y1,x,0);
```

```
g2=subs(y11,x,0);
g3=subs(mx2,x,l2);
g4=subs(q2,x,l2);
g5=subs(y1,x,l1)-subs(y2,x,0);
g6=subs(y11,x,l1)-subs(y21,x,0);

z11= g3*ld3+g4*ld4+g5*ld5+g6*ld6;
z12=
sigm1*rm1*subs(y11,x,0)+sigq1*rq1*subs(y1,x,0)+sigm2*rm2*subs(y21,x,l2)+si
gq2*rq2*subs(y2,x,l2);
z1=z11+z12;

s1=diff(bd1,a0);s2=diff(y1,a0);s3=diff(z1,a0);
h1=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a1);s2=diff(y1,a1);s3=diff(z1,a1);
h2=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a2);s2=diff(y1,a2);s3=diff(z1,a2);
h3=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a3);s2=diff(y1,a3);s3=diff(z1,a3);
h4=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a4);s2=diff(y1,a4);s3=diff(z1,a4);
h5=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a5);s2=diff(y1,a5);s3=diff(z1,a5);
h6=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a6);s2=diff(y1,a6);s3=diff(z1,a6);
h7=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a7);s2=diff(y1,a7);s3=diff(z1,a7);
h8=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a8);s2=diff(y1,a8);s3=diff(z1,a8);
h9=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a9);s2=diff(y1,a9);s3=diff(z1,a9);
h10=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;

s1=diff(bd2,b0);s2=diff(y2,b0);s3=diff(z1,b0);
```

```
h21=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b1);s2=diff(y2,b1);s3=diff(z1,b1);
h22=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b2);s2=diff(y2,b2);s3=diff(z1,b2);
h23=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b3);s2=diff(y2,b3);s3=diff(z1,b3);
h24=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b4);s2=diff(y2,b4);s3=diff(z1,b4);
h25=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b5);s2=diff(y2,b5);s3=diff(z1,b5);
h26=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b6);s2=diff(y2,b6);s3=diff(z1,b6);
h27=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b7);s2=diff(y2,b7);s3=diff(z1,b7);
h28=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b8);s2=diff(y2,b8);s3=diff(z1,b8);
h29=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b9);s2=diff(y2,b9);s3=diff(z1,b9);
h30=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;

h41=diff(z1,ld1);
h42=diff(z1,ld2);
h43=diff(z1,ld3);
h44=diff(z1,ld4);
h45=diff(z1,ld5);
h46=diff(z1,ld6);

r=solve(h3,h4,h5,h6,h7,h8,h9,h10,...
    h21,h22,h23,h24,h25,h26,h27,h28,h29,h30,...
    h43,h44,h45,h46,...
    'a2','a3','a4','a5','a6','a7','a8','a9',...
    'b0','b1','b2','b3','b4','b5','b6','b7','b8','b9',...
    'ld3','ld4','ld5','ld6');
```

```
%digits(7);
%a0=vpa(r.a0)
%a1=vpa(r.a1)
a2=vpa(r.a2)
a3=vpa(r.a3)
a4=vpa(r.a4)
a5=vpa(r.a5)
a6=vpa(r.a6)
a7=vpa(r.a7)
a8=vpa(r.a8)
a9=vpa(r.a9)

b0=vpa(r.b0)
b1=vpa(r.b1)
b2=vpa(r.b2)
b3=vpa(r.b3)
b4=vpa(r.b4)
b5=vpa(r.b5)
b6=vpa(r.b6)
b7=vpa(r.b7)
b8=vpa(r.b8)
b9=vpa(r.b9)

y1= a2*x^2+a3*x^3+a4*x^4+a5*x^5+a6*x^6+a7*x^7+a8*x^8+a9*x^9;
y2=b0+b1*x+b2*x^2+b3*x^3+b4*x^4+b5*x^5+b6*x^6+b7*x^7+b8*x^8+b9*x^9;

y11=diff(y1,x);y12=diff(y11,x);bd1=-y12;
y21=diff(y2,x);y22=diff(y21,x);bd2=-y22;
mx1=k/4/k1^4*bd1;f1=k*y1;q1=diff(mx1,x);
mx2=k/4/k1^4*bd2;f2=k*y2;q2=diff(mx2,x);

s1=subs(mx1,x,0)
s2=subs(y1,x,l1)
```

```
s3=subs(y2,x,0)
s4=subs(mx1,x,l1)
s5=subs(mx2,x,0)

k=1;k1=1;
s1=subs(s1);s2=subs(s2);
s1=double(s1);s2=double(s2);
x2=[s1 s2];t2=[1 101];

l=subs(l);l1=subs(l1);l2=subs(l2);
y1=subs(y1);y2=subs(y2);mx1=subs(mx1);mx2=subs(mx2);
w=zeros(101,1);
s1=l/100;
n1=l1/s1+1;
x1(1)=0;
for n=2:n1
   x1(n)=x1(n-1)+s1;
end
for n=1:n1
   s2=x1(n);
   s3=subs(y1,x,s2);
   w(n)=double(s3);
end
n2=l2/s1+1;x1(1)=0;
for n=2:n2
   x1(n)=x1(n-1)+s1;
   s3=subs(y2,x,x1(n));
   w(n+n1-1)=double(s3);
end
figure
t1=1:101;
plot(t1,-w,t2,-x2);grid;
%plot(t1,w,t2,x2);grid;
figure
```

```
for n=2:n1
    x1(n)=x1(n-1)+s1;
end
for n=1:n1
    s2=x1(n);
    s3=subs(mx1,x,s2);
    w(n)=double(s3);
end
n2=l2/s1+1;x1(1)=0;
for n=2:n2
    x1(n)=x1(n-1)+s1;
    s3=subs(mx2,x,x1(n));
    w(n+n1-1)=double(s3);
end
plot(t1,-w);grid;
```

Ví dụ 4 – Dầm đầu ngàm đầu khớp

```
syms x l k k1 ej;
syms a0 a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9;
syms b0 b1 b2 b3 b4 b5 b6 b7 b8 b9;
syms ld1 ld2 ld3 ld4 ld5 ld6 ld7;

l=4/k1;

l1=0.5*l; l2=l-l1;

y0=k1/k/2 *exp(-k1*x)*(cos(k1*x)+sin(k1*x));
m0=-1/4/k1*exp(-k1*x)*(sin(k1*x)-cos(k1*x));
```

```
q0=diff(m0,x);f0=k*y0;
rm2=subs(m0,x,l2);
rq2=subs(q0,x,l2);
y01=subs(y0,x,l1-x);
m01=subs(m0,x,l1-x);
q01=subs(q0,x,l1-x);f01=k*y01;
rm1=subs(m01,x,0);vpa(rm1)
rq1=subs(q01,x,0);vpa(rq1)
vpa(rm2)
vpa(rq2)

s1=double(subs(rm1,k1,1));
if s1>0;sigm1=1;else sigm1=-1;end;
s1=double(subs(rm2,k1,1));
if s1>0;sigm2=-1;else sigm2=1;end;
s1=double(rq1);
if s1>0;sigq1=-1;else sigq1=1;end;
s1=double(rq2);
if s1>0;sigq2=-1;else sigq2=1;end;

y1=a2*x^2+a3*x^3+a4*x^4+a5*x^5+a6*x^6+a7*x^7+a8*x^8+a9*x^9;
y2=b0+b1*x+b2*x^2+b3*x^3+b4*x^4+b5*x^5+b6*x^6+b7*x^7+b8*x^8+b9*x^
9;

y11=diff(y1,x);y12=diff(y11,x);bd1=-y12;
y21=diff(y2,x);y22=diff(y21,x);bd2=-y22;
mx1=k/4/k1^4*bd1;f1=k*y1;q1=diff(mx1,x);
mx2=k/4/k1^4*bd2;f2=k*y2;q2=diff(mx2,x);

g1=subs(y1,x,0);
g2=subs(y11,x,0);
g3=subs(mx2,x,l2);
g4=subs(y2,x,l2);
g5=subs(y1,x,l1)-subs(y2,x,0);
```

```
g6=subs(y11,x,l1)-subs(y21,x,0);

z11= g3*ld3+g4*ld4+g5*ld5+g6*ld6;
z12=
sigm1*rm1*subs(y11,x,0)+sigq1*rq1*subs(y1,x,0)+sigm2*rm2*subs(y21,x,l2)+si
gq2*rq2*subs(y2,x,l2);
z1=z11+z12;

s1=diff(bd1,a0);s2=diff(y1,a0);s3=diff(z1,a0);
h1=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a1);s2=diff(y1,a1);s3=diff(z1,a1);
h2=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a2);s2=diff(y1,a2);s3=diff(z1,a2);
h3=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a3);s2=diff(y1,a3);s3=diff(z1,a3);
h4=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a4);s2=diff(y1,a4);s3=diff(z1,a4);
h5=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a5);s2=diff(y1,a5);s3=diff(z1,a5);
h6=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a6);s2=diff(y1,a6);s3=diff(z1,a6);
h7=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a7);s2=diff(y1,a7);s3=diff(z1,a7);
h8=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a8);s2=diff(y1,a8);s3=diff(z1,a8);
h9=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;
s1=diff(bd1,a9);s2=diff(y1,a9);s3=diff(z1,a9);
h10=int((mx1-m01)*s1,x,0,l1)+int((f1-f01)*s2,x,0,l1)+s3;

s1=diff(bd2,b0);s2=diff(y2,b0);s3=diff(z1,b0);
h21=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b1);s2=diff(y2,b1);s3=diff(z1,b1);
h22=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b2);s2=diff(y2,b2);s3=diff(z1,b2);
```

```
h23=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b3);s2=diff(y2,b3);s3=diff(z1,b3);
h24=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b4);s2=diff(y2,b4);s3=diff(z1,b4);
h25=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b5);s2=diff(y2,b5);s3=diff(z1,b5);
h26=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b6);s2=diff(y2,b6);s3=diff(z1,b6);
h27=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b7);s2=diff(y2,b7);s3=diff(z1,b7);
h28=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b8);s2=diff(y2,b8);s3=diff(z1,b8);
h29=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;
s1=diff(bd2,b9);s2=diff(y2,b9);s3=diff(z1,b9);
h30=int((mx2-m0)*s1,x,0,l2)+int((f2-f0)*s2,x,0,l2)+s3;

h41=diff(z1,ld1);
h42=diff(z1,ld2);
h43=diff(z1,ld3);
h44=diff(z1,ld4);
h45=diff(z1,ld5);
h46=diff(z1,ld6);

r=solve(h3,h4,h5,h6,h7,h8,h9,h10,...
    h21,h22,h23,h24,h25,h26,h27,h28,h29,h30,...
    h43,h44,h45,h46,...
    'a2','a3','a4','a5','a6','a7','a8','a9',...
    'b0','b1','b2','b3','b4','b5','b6','b7','b8','b9',...
    'ld3','ld4','ld5','ld6');

%digits(7);
%a0=vpa(r.a0)
%a1=vpa(r.a1)
a2=vpa(r.a2)
```

```
a3=vpa(r.a3)
a4=vpa(r.a4)
a5=vpa(r.a5)
a6=vpa(r.a6)
a7=vpa(r.a7)
a8=vpa(r.a8)
a9=vpa(r.a9)

b0=vpa(r.b0)
b1=vpa(r.b1)
b2=vpa(r.b2)
b3=vpa(r.b3)
b4=vpa(r.b4)
b5=vpa(r.b5)
b6=vpa(r.b6)
b7=vpa(r.b7)
b8=vpa(r.b8)
b9=vpa(r.b9)

y1= a2*x^2+a3*x^3+a4*x^4+a5*x^5+a6*x^6+a7*x^7+a8*x^8+a9*x^9;
y2=b0+b1*x+b2*x^2+b3*x^3+b4*x^4+b5*x^5+b6*x^6+b7*x^7+b8*x^8+b9*x^
9;

y11=diff(y1,x);y12=diff(y11,x);bd1=-y12;
y21=diff(y2,x);y22=diff(y21,x);bd2=-y22;
mx1=k/4/k1^4*bd1;f1=k*y1;q1=diff(mx1,x);
mx2=k/4/k1^4*bd2;f2=k*y2;q2=diff(mx2,x);

s1=subs(mx1,x,0)
s2=subs(y1,x,l1)
s3=subs(y2,x,0)
s4=subs(mx1,x,l1)
s5=subs(mx2,x,0)
```

```
k=1;k1=1;
s1=subs(s1);s2=subs(s2);
s1=double(s1);s2=double(s2);
x2=[s1 s2];t2=[1 101];

l=subs(l);l1=subs(l1);l2=subs(l2);
y1=subs(y1);y2=subs(y2);mx1=subs(mx1);mx2=subs(mx2);
w=zeros(101,1);
s1=l/100;
n1=l1/s1+1;
x1(1)=0;
for n=2:n1
   x1(n)=x1(n-1)+s1;
end
for n=1:n1
   s2=x1(n);
   s3=subs(y1,x,s2);
   w(n)=double(s3);
end
n2=l2/s1+1;x1(1)=0;
for n=2:n2
   x1(n)=x1(n-1)+s1;
   s3=subs(y2,x,x1(n));
   w(n+n1-1)=double(s3);
end
figure
t1=1:101;
plot(t1,-w,t2,-x2);grid;
%plot(t1,w,t2,x2);grid;
figure
for n=2:n1
   x1(n)=x1(n-1)+s1;
end
for n=1:n1
```

```
    s2=x1(n);
    s3=subs(mx1,x,s2);
    w(n)=double(s3);
end
n2=l2/s1+1;x1(1)=0;
for n=2:n2
    x1(n)=x1(n-1)+s1;
    s3=subs(mx2,x,x1(n));
    w(n+n1-1)=double(s3);
end
plot(t1,-w);grid;
```