

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC DÂN LẬP HẢI PHÒNG**

BÙI VĂN DŨNG

**NGHIÊN CỨU ỔN ĐỊNH ĐÀN HỒI CỦA HỆ THANH
CÓ TIẾT DIỆN NGANG THAY ĐỔI**

LUẬN VĂN THẠC SĨ KỸ THUẬT

**CHUYÊN NGÀNH: KỸ THUẬT XÂY DỰNG CÔNG TRÌNH
DÂN DỤNG & CÔNG NGHIỆP**

MÃ SỐ: 60.58.02.08

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

GS. TS. NGŨT. TRẦN HỮU NGHỊ

LÊI CẢM ƠN

Trong quá trình học tập nghiên cứu và thực hiện Luận văn Thạc sĩ, tôi đã nhận được sự giúp đỡ, tạo điều kiện nhiệt tình và quý báu của nhiều cá nhân và tập thể.

Trước tiên, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất tới thầy giáo GS. TS. NGUYỄN Trần Hữu Nghị đã tận tình hướng dẫn trong suốt thời gian nghiên cứu hoàn thành luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo trong khoa đào tạo Sau đại học đã tận tình giảng dạy, hướng dẫn, truyền đạt kiến thức trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Tôi cũng xin chân thành cảm ơn bạn bè, đồng nghiệp thuộc lớp cao học MC 01 đã giúp tôi tìm kiếm tài liệu, tìm kiếm nguồn tham khảo để hoàn thành Luận văn này.

Mặc dù tôi rất cố gắng hoàn thành luận văn bằng tất cả sự nhiệt tình và năng lực của mình, tuy nhiên không thể tránh khỏi những thiếu sót hoặc có những phần nghiên cứu chưa sâu. Rất mong nhận được sự chỉ bảo và thông cảm của các thầy cô.

Tôi xin trân trọng cảm ơn !

Hải Phòng, ngày 20 tháng 11 năm 2015

Tác giả luận văn

Bùi Văn Dũng

LỜI CAM ƠAN

Tôi xin cam đoan luận văn tốt nghiệp cao học ngành kỹ thuật xây dựng công trình dân dụng và công nghiệp với đề tài : “ Nghiên cứu ổn định đàn hồi của hệ thanh có tiết diện ngang thay đổi “ là luận văn do cá nhân tôi thực hiện. Các kết quả tính toán, các mô hình tuân thủ theo tiêu chuẩn xây dựng hiện hành. Kết quả tính toán này không sao chép bất kỳ tài liệu nào khác.

Hải Phòng, ngày 20 tháng 11 năm 2015

Tác giả luận văn

Bùi Văn Dũng

Mở đầu :.....4

CHƯƠNG 1: Tổng quan về quá trình nghiên cứu sự ổn định của thanh có tiết diện thay đổi	
1.1 Ý nghĩa thực tế của bài toán ổn định thanh có tiết diện thay đổi.....	7
1.2 Tổng quan về các phương pháp tính	7
1.2.1 Phương pháp chính xác	9
1.2.2 Phương pháp gần đúng	10
1.3 Một số kết quả nghiên cứu về ổn định của thanh có tiết diện thay đổi.....	12
1.4. Giải bài toán ổn định trong chương trình phân tích kết cấu SAP2000	14
1.5. Nội dung chính của luận văn và hướng giải quyết	14
CHƯƠNG 2: Ổn định của thanh có tiết diện thay đổi	17
2.1 Thiết lập và tìm nghiệm của phương trình vi phân	17
2.1.1 Tìm nghiệm y_1 và y_2 của phương trình vi phân không có vế phải..	18
2.1.2 Tìm nghiệm $x?$ của phương trình vi phân có vế phải.....	20
2.1.3. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân	21
2.2 Thuật toán giải bài toán ổn định của thanh có tiết diện thay đổi.....	21
2.3 Kiểm tra ổn định theo phương pháp chuyển vị	
2.3.1 Nội dung phương pháp chuyển vị.....	23
2.3.2 Các vấn đề cần chuẩn bị.....	23
2.4 Thiết lập các cấu kiện mẫu trong phương pháp chuyển vị.....	24
2.4.1 Thanh có một đầu ngàm, một đầu khớp	28
2.4.2 Thanh có một đầu ngàm, một đầu là ngàm trượt	31
2.4.3 Thanh có hai đầu khớp	32
2.4.4 Thanh có một đầu ngàm, một đầu tự do.....	33
2.4 Sơ đồ thuật toán tìm lực tới hạn trong hệ thanh có tiết diện thay đổi và chương trình tính TN01	34

Sơ đồ thuật toán tìm lực tới hạn trong hệ thanh có tiết diện thay đổi	
Chương trình tính TN01	37
CHƯƠNG 3: Ổn định của khung phẳng với các cấu kiện có tiết diện thay đổi	
3.1 Các ví dụ áp dụng	43
3.1.1 Ví dụ về thanh có tiết diện thay đổi.....	43
3.1.2 Ví dụ về khung với các thanh có tiết diện thay đổi	42
Ví dụ 3.1	42
Ví dụ 3.2.....	46
Ví dụ 3.3	48
Ví dụ 3.4	48
Ví dụ 3.5.....	49
Ví dụ 3.6	50
CHƯƠNG 4: Kết luận.....	53
TÀI LIỆU THAM KHẢO	55

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Trong những năm gần đây, do kinh tế phát triển, ngày càng xuất hiện nhiều công trình cao tầng, công trình công nghiệp, công trình đặc biệt. Trong những công trình đó, nhất là công trình công nghiệp người ta thường dùng các thanh có tiết diện ngang thay đổi có chiều dài lớn, tầm, vỏ chịu nén và do đó điều kiện ổn định trong miền đàn hồi có tầm quan trọng đặc biệt, đòi hỏi phải nghiên cứu đầy đủ cả về mặt lý thuyết và thực nghiệm.

Vấn đề nghiên cứu ổn định của kết cấu thanh thẳng có tiết diện ngang không đổi đã có nhiều tác giả nghiên cứu, nội dung nghiên cứu tương đối đầy đủ. Tuy nhiên, bài toán ổn định của thanh có tiết diện ngang thay đổi ít được đề cập đến, mặc dù kết cấu thanh có tiết diện ngang thay đổi được áp dụng rộng rãi trong xây dựng công trình vì có nhiều ưu điểm về mặt kinh tế và kỹ thuật. Trong nhiều trường hợp, hợp lý hơn cả là sử dụng hệ thanh trong đó các cấu kiện có tiết diện thay đổi. Đặc biệt trong kết cấu thép, kết cấu được xếp vào loại thanh mảnh thì vấn đề ổn định là một trong những nội dung cần được quan tâm.

2. Đối tượng, phương pháp và phạm vi nghiên cứu của luận văn.

Nghiên cứu ổn định của thanh và hệ thanh thẳng có tiết diện ngang thay đổi, chịu tác dụng của tải trọng tĩnh theo phương pháp sử dụng chuỗi nguyên. Kiểm tra ổn định của khung phẳng theo phương pháp chuyển vị.

3. Mục đích nghiên cứu luận văn.

Nghiên cứu ổn định đàn hồi của hệ thanh có tiết diện ngang thay đổi.

4. Nhiệm vụ nghiên cứu của luận văn.

- Sử dụng chuỗi nguyên để giải bài toán thanh thẳng đàn hồi có tiết diện ngang thay đổi chịu nén - uốn, do tác dụng của tải trọng tĩnh gây ra.

- Áp dụng phương pháp chuyển vị kiểm tra ổn định của khung phẳng với các phần tử thanh có tiết diện thay đổi, có các điều kiện biên khác nhau, chịu chuyển vị cưỡng bức gối tựa và lực nén dọc trục.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài nghiên cứu.

Vấn đề ổn định đàn hồi của hệ thanh đã được nhiều tác giả trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu, kể cả bài toán có xét đến lực trượt ngang Q . Tuy nhiên, ý nghĩa khoa học của luận văn này nằm ở chỗ nghiên cứu ổn định của thanh và khung có tiết diện thay đổi.

CHƯƠNG 1:

TỔNG QUAN VỀ QUÁ TRÌNH NGHIÊN CỨU

SỰ ỔN ĐỊNH CỦA THANH CÓ TIẾT DIỆN THAY ĐỔI

1.1 Ý NGHĨA THỰC TẾ CỦA BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH THANH CÓ TIẾT DIỆN THAY ĐỔI

Vấn đề ổn định của các thanh có mặt cắt không đổi đã được nghiên cứu đầy đủ. Tuy nhiên, trên thực tế công trình, thanh có mặt cắt không đổi chưa phải là cấu kiện chịu uốn - nén kinh tế nhất. Trong nhiều trường hợp, hợp lý hơn cả là sử dụng hệ thanh trong đó các cấu kiện có tiết diện thay đổi. Đặc biệt trong kết cấu thép, kết cấu được xếp vào loại thanh mảnh thì vấn đề ổn định là một trong những nội dung cần được quan tâm. Trong kết cấu thép, các cột có tiết diện thay đổi được sử dụng rất phổ biến: cột rỗng được ghép từ các thép cơ bản bởi các thanh xiên, bản giằng; cột hình chóp cụt, nón cụt; cột làm từ các thép tổ hợp... Ngay cả trong kết cấu bê tông và bê tông cốt thép, thanh có tiết diện thay đổi cũng được sử dụng nhiều như ở kết cấu cột điện, tháp... Khi nghiên cứu các loại thanh này thì bài toán ổn định trở nên phức tạp hơn nhiều so với thanh có tiết diện không thay đổi. Nguyên nhân là ở quá trình tích phân các phương trình vi phân, các hệ số của các phương trình này là những đại lượng thay đổi.

Để giải dạng bài toán này, đã có nhiều phương pháp nghiên cứu, gồm các phương pháp chính xác và các phương pháp gần đúng.

Luận văn đề cập đến một phương pháp nghiên cứu ổn định của hệ thanh trong đó tiết diện các cấu kiện thanh thay đổi, nhằm tìm ra lực tới hạn của công trình. Hướng cụ thể: nghiên cứu các cấu kiện cơ bản có tiết diện thay đổi và vận dụng phương pháp chuyển vị để kiểm tra ổn định của hệ thanh.

1.2 TỔNG QUAN VỀ CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH

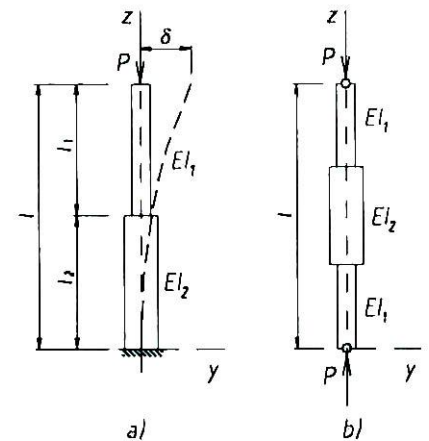
1.2.1 Phương pháp chính xác

Các phương pháp áp dụng cho một số trường hợp thanh có tiết

diện thay đổi theo những quy luật tương đối phổ biến trong thực tế:

1.2.1.1 Thanh có tiết diện thay đổi theo hình bậc thang {3}{5}

Thanh gồm nhiều đoạn, trong mỗi đoạn, độ cứng của thanh là không đổi, mặt cắt ngang của thanh biến đổi theo từng nấc. Loại thanh này thường gặp ở cột bậc (hình 1.1a) trong kết cấu kim loại, có thể gặp những thanh có liên kết khớp ở hai đầu chịu nén dọc trục, thanh sẽ chịu ổn định tốt hơn khi tiết diện thay đổi như trên hình 1.1b.



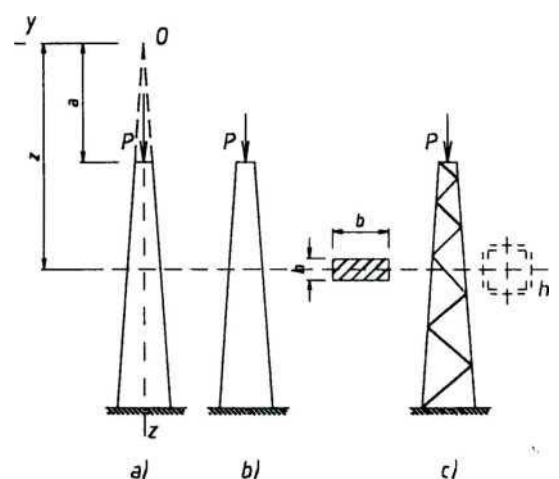
Hình 1.1

Để tìm lực nén tới hạn, cần lập phương trình vi phân cho từng đoạn và tìm nghiệm của các phương trình này. Thiết lập các điều kiện chập giữa các đoạn và sử dụng các điều kiện biên. Ta sẽ được phương trình ổn định để xác định lực tới hạn theo điều kiện tồn tại nghiệm ở trạng thái lệch khỏi dạng ban đầu.

1.2.1.2 Thanh có mặt cắt biến đổi liên tục {3}{5}

Ole đã lập ra phương trình vi phân của trục võng cho các thanh có mặt cắt biến đổi liên tục với nhiều loại hình dáng khác nhau. Thanh có độ cứng thay đổi theo luật lũy thừa thường được sử dụng rộng rãi trong thực tế.

A.N.Dinnik là người đầu tiên nghiên cứu sự ổn định của những loại thanh có mômen quán tính của tiết diện thay đổi tỷ lệ với khoảng cách tính từ điểm o nào đó (hình 1.2a) theo luật lũy thừa:



Hình 1.2

$$J(z) = J_1 \left(\frac{z}{a}\right)^n \quad (1.1)$$

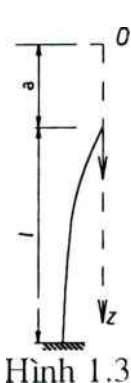
trong đó, J_1 là mômen quán tính của tiết diện ở đầu trên của thanh, số

mũ n phụ thuộc hình dạng cụ thể của thanh.

* Khi $n=1$, tiết diện thanh có bề cao h không đổi còn bề rộng b thay đổi bậc nhất dọc theo chiều dài thanh, khi mất ổn định thanh bị uốn quanh trục y (hình 1.2 b)

* Khi $n=2$, tiết diện thanh gồm 4 thanh thép góc ghép với nhau bởi các thanh xiên (hình 1.2c).

* Khi $n=4$, thanh có tiết diện đặc thay đổi theo hình chóp cụt hay hình nón cụt.



Hình 1.3

Chọn trục tọa độ như trên hình 1.3, và lập phương trình vi phân đường đàn hồi. Phương trình này có các hệ số thay đổi.

Ta có thể tìm nghiệm dưới dạng chuỗi vô hạn hay dưới dạng hàm số Bessel. Khi $n=2$ và $n=4$, các nghiệm này có thể viết dưới dạng các hàm số sơ cấp. Sử dụng các điều kiện biên và

thiết lập các điều kiện tồn tại các hằng số tích phân ta sẽ được phương trình ổn định để suy ra lực tới hạn.

1.2.2 Phương pháp gần đúng

1.2.2.1 Phương pháp sai phân [3]

Trong phương pháp này, việc giải phương trình vi phân được thay thế bằng việc giải hệ phương trình đại số thiết lập dưới dạng sai phân.

Thứ tự thực hiện:

- Thay phương trình vi phân cân bằng ở trạng thái lệch bằng các phương trình sai phân.

- Tại một số điểm chia của hệ ở trạng thái lệch, lập các phương trình sai phân. Vận dụng các điều kiện biên sẽ thiết lập được hệ phương trình đại số với các ẩn số là chuyển vị. Do tính chất phân nhánh của bài toán, hệ phương trình là thuần nhất.

- Thiết lập phương trình ổn định bằng cách cho định thức các hệ số của hệ phương trình đại số bằng không.

- Giải phương trình ổn định để tìm lực tới hạn.

Áp dụng phương pháp này có hiệu quả với những hệ có tiết diện

thay đổi theo quy luật phức tạp.

1.2.2.2. Phương pháp dây xích [3]

Đây là một hình thức khác của phương pháp sai phân, do H.Henki đề xuất. Chia thanh thành n đoạn bằng nhau và bằng Az , coi hệ như một dây xích có n đốt liên kết với nhau bằng khớp đàn hồi. Viết phương trình vi phân tại mắt i dưới dạng số gia và tìm được các phương trình liên hệ giữa các độ võng tại các mắt xích. Sử dụng các điều kiện biên, ta sẽ lập được phương trình để xác định lực tới hạn.

Phương pháp này được áp dụng cho các thanh có tiết diện thay đổi mà không cần khai triển định thức.

1.2.2.3 Phương pháp Bupnốp - Galoockin [31]

Phương pháp được xây dựng trên cơ sở tìm nghiệm gần đúng của phương trình vi phân thông qua hệ phương trình đại số tuyến tính.

Thứ tự:

- Thiết lập phương trình vi phân của đường biến dạng của hệ ở trạng thái lệch khỏi trạng thái ban đầu và biểu thị theo dạng:

$$L(z,y,y',y''....)=0$$

- Giả thiết dạng gần đúng nghiệm của phương trình dưới dạng chuỗi gồm p số hạng với p là số nguyên bất kỳ:

$$y = a_1 g_1(z) + a_2 g_2(z) = \sum_{i=1}^p a_i g_i(z) \quad (1.2)$$

trong đó: a_i : các hệ số chưa biết;

$g_i(z)$: các hàm độc lập thoả mãn điều kiện biên. Sau đó thiết lập các phương trình xác định các hệ số trong chuỗi có dạng:

$$\int L \left\langle z, \sum_{i=1}^p a_i, g_i'(z) \sum_{i=1}^p a_i g_i''(z) \dots \right\rangle g_k(z) dz = 0 \quad (1.3)$$

với $k= 1, 2, \dots, p$

- Phương trình ổn định của hệ là định thức các hệ số của các phương trình trên bằng không.

- Giải phương trình ổn định, có được lực tới hạn.

1.2.2.4 Phương pháp giải theo từng điểm [3]

Đây là một hình thức trung gian giữa phương pháp sai phân và phương pháp Bupnôp - Galoockin.

Giả sử chọn nghiệm phương trình vi phân dạng chuỗi:

$$y = \sum_{i=1}^p a_i g_i(z) \quad (1.4)$$

trong đó: $g_i(z)$ là các hàm độc lập thoả mãn điều kiện biên.

Các thông số a_i được xác định sao cho sau khi thay (1.4) vào phương trình vi phân cơ bản của bài toán thì phương trình vi phân phải được thoả mãn với p giá trị của biến số độc lập tức là với p điểm trên hệ. Áp dụng phương trình vi phân tại n điểm, được n phương trình đại số thuần nhất với ẩn a_i . Từ điều kiện định thức các hệ số của hệ phương trình thuần nhất bằng không (các điều kiện a_i khác không), suy ra lực tới hạn.

1.2.2.5. Phương pháp đúng dần [3]

Nội dung phương pháp là giải phương trình vi phân hay các phương trình đại số theo cách giải gần đúng tiệm cận dần tới kết quả chính xác.

Trước tiên, giả thiết dạng gần đúng của phương trình biến dạng căn cứ vào đường biến dạng này và các phương trình vi phân của hệ xác định đường biến dạng thứ hai và tải trọng tới hạn tương ứng. Lại căn cứ vào đường biến dạng, thứ hai để tìm tải trọng tới hạn và đường biến dạng thứ ba... Tiếp tục cho đến khi các đường biến dạng và tải trọng tới hạn của các lần liên tiếp trùng nhau hoặc xấp xỉ thì ngừng. Giá trị tới hạn trong lần cuối là kết quả cần tìm.

1.2.2.6. Phương pháp Ritz [3]

Cơ sở của phương pháp là nghiên cứu thế năng toàn phần của hệ ở trạng thái lệch. Tải trọng tới hạn được xác định từ điều kiện cân bằng dưới dạng thế năng (thế năng cực trị) và điều kiện tồn tại dạng cân bằng lệch đó.

Thứ tự thực hiện:

- Cho trước đường biến dạng y của hệ dưới dạng chuỗi:

$$y = \sum_{i=1}^p a_i g_i(z) \quad (1.5)$$

- Xác định các đạo hàm y và y'' rồi thiết lập biểu thức của thế năng u .

- Thiết lập các phương trình của điều kiện cân bằng dưới dạng thế năng cực trị. Ta được một hệ phương trình đại số tuyến tính thuần nhất.

- Cho định thức các hệ số của hệ phương trình thuần nhất bằng không, ta được lực tới hạn cần tìm.

1.2.2.7. Phương pháp Timôsenkô [3]

Theo phương pháp này, ta cần chọn đường biến dạng giả thiết theo một số thông số có khả năng làm thay đổi đường biến dạng khi các thông số đó thay đổi, đồng thời chọn những thông số này sao cho lực tới hạn xác định theo phương pháp năng lượng có giá trị cực tiểu. Phương pháp sẽ cho lực tới hạn nhỏ nhất cần tìm.

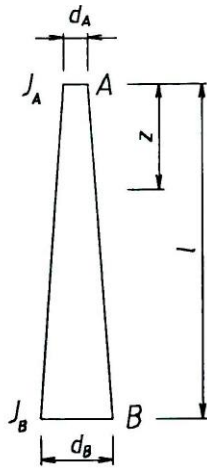
1.2.2.8 Phương pháp phần tử hữu hạn [2], [3]

Phương pháp giải bài toán ổn định theo mô hình chuyển vị. Tài liệu [21] trình bày một phương pháp kiểm tra độ ổn định của một công trình làm việc theo quy luật tuyến tính hoặc phi tuyến, từ đó xác định thông số tới hạn của hệ. Phương pháp cho phép giải bài toán ổn định của những hệ tương đối phức tạp.

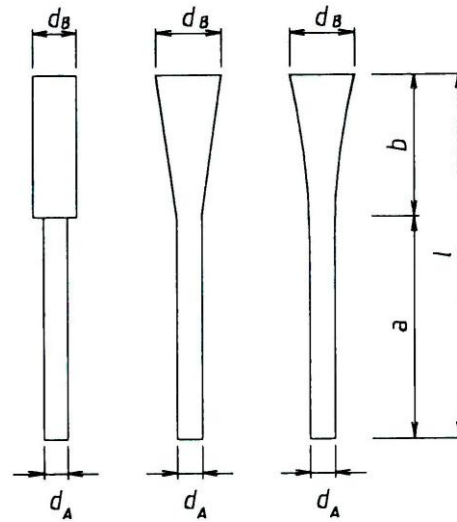
1.3 MỘT SỐ KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU VỀ ỔN ĐỊNH CỦA THANH CÓ TIẾT DIỆN THAY ĐỔI

Trong tài liệu [7], [8], đã giải quyết được bài toán ổn định cho nhiều loại thanh có các liên kết hai đầu khác nhau, tiết diện biến đổi dạng hình côn, chịu lực nén dọc trục. Dạng thanh điển hình như trên hình

(1.4).



Hình 1.4



Hình 1.5

Mômen quán tính của tiết diện

$$J(z) = J_A \left[1 + (\delta - 1) \frac{z}{l} \right]^n \quad (1.6)$$

trong đó: $\delta = \frac{d_A}{d_B}$

A.F.Smirnov {8} đã giải bài toán ổn định khi:

$$n = \frac{4}{3}; \frac{8}{5}; \frac{12}{7}; \frac{16}{9}; \frac{20}{11}; 2; \frac{20}{9}; \frac{16}{7}; \frac{12}{5}; \frac{8}{3}; 4$$

Trong tài liệu {7}, Petersen cũng đã cung cấp kết quả cho các trường hợp cụ thể khi n nhận các giá trị: 1; 2; 2,1 ÷ 2,6; 2,8; 3; 3,2; 3,6; 3,8; 4

Trong các tài liệu {9}. {10}, S.P. Leites đã giải bài toán ổn định của thanh có liên kết khác nhau ở hai đầu, tiết diện thay đổi theo luật:

$$J(z) = I_0 \left(\frac{z}{l} \right)^n \quad (1.7)$$

$$\text{với } n = \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 2; \frac{5}{2}; 3; \frac{7}{2}; 4$$

Đối với thanh có tiết diện thay đổi không theo riêng một quy luật trên mà biến đổi trên từng đoạn (hình 1.5), trong [7] cũng đã cung cấp các kết quả cho từng loại thanh có liên kết khác nhau ở hai đầu.

Trong tính toán thực hành, người ta thường sử dụng khái niệm chiều

dài tính toán hay chiều dài quy đổi của thanh khi kiểm tra ổn định. Trong tiêu chuẩn Mỹ AISC đã đưa ra cách tính chiều dài của cột vát - cột có tiết diện thay đổi Lee, Moerrell và Ketter (1972) đã xác định chiều dài tính toán của cột vát dựa trên ý tưởng cơ bản là lực nén tới hạn F_{ax} của cột vát chịu nén dọc trục theo lực nén tới hạn của cột thẳng có cùng tiết diện với đầu nhỏ của cột vát nhưng với chiều dài quy đổi tương đương. Từ đó tính được hệ số chiều dài tính toán K_y tương đương cho cột vát chịu nén dọc trục. Tuy nhiên phương pháp này chỉ áp dụng với khung có dầm tiết diện không đổi.

1.4. GIẢI BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH TRONG CHƯƠNG TRÌNH PHÂN TÍCH KẾT CẤU SAP 2000

Để giải bài toán ổn định, ta có thể vận dụng một số chương trình phân tích kết cấu hiện có như: p - FRAME, STRAND 6. Tuy nhiên các chương trình này chỉ làm việc với các cấu kiện có tiết diện không đổi, để nghiên cứu các cấu kiện có tiết diện thay đổi ta cần rời rạc hoá thành nhiều đoạn mà trên mỗi đoạn, tiết diện là không đổi.

SAP2000 được sử dụng rất rộng rãi ở Việt Nam hiện nay đã giải quyết được những hạn chế trên của các chương trình trước. Chương trình này có thể phân tích được thanh có tiết diện thay đổi với độ cứng chống uốn EI biến đổi theo bậc 1, 2, 3 Việc tính ổn định được thực hiện thông qua sự khai báo hiệu ứng P -delta. Ý nghĩa của nó là điều khiển chương trình phân tích kết cấu, trong đó có kể tới tác dụng của lực dọc trục cũng như hiệu ứng uốn dọc do lực này gây ra Khi lực dọc $p < P_{th}$, chương trình sẽ cho ra kết quả phân tích nội lực, chuyển vị của bài toán. Ngược lại khi $p > P_{th}$ chương trình sẽ báo lỗi hệ bị mất ổn định và không cho ra kết quả nội lực, chuyển vị. Với cách gia tăng dần lực tác dụng trên công trình cho tới khi hệ mất ổn định, ta có thể tìm được lực tới hạn của bài toán.

1.5. NỘI DUNG CHÍNH CỦA LUẬN VĂN VÀ HƯỚNG GIẢI QUYẾT

Luận văn nghiên cứu ổn định của hệ thanh trong đó các cấu kiện có tiết diện thay đổi. Thuật toán để giải là vận dụng chuỗi nguyên. Quy luật thay đổi của tiết diện thanh được mô tả dưới dạng chuỗi:

$$I = I_0(1 + b_1\xi + b_2\xi^2 + b_3\xi^3 + \dots + b_i\xi^i + \dots + b_n\xi^n) = I_0 \sum_{i=0}^n b_i \xi^i \quad (1.8)$$

với $\xi = \frac{z}{l}, b_0 = 1$

Thuật toán này có thể áp dụng cho trường hợp các thanh có tiết diện thay đổi theo luật bất kỳ sau khi đưa về dạng lũy thừa.

Đối tượng nghiên cứu của luận văn là hệ thanh, trong đó có trường hợp riêng là thanh đơn. Khi kiểm tra ổn định cho hệ thanh, luận văn sử dụng phương pháp chuyển vị đã quen biết, cơ sở của phương pháp là các cấu kiện mẫu có tiết diện thay đổi. Do đó, các cấu kiện mẫu này cũng là một nội dung nghiên cứu của luận văn. Các kết quả thu được đã đối chiếu với các tài liệu tham khảo, các chương trình phân tích kết cấu dựa trên phương pháp Phần tử hữu hạn.

CHƯƠNG 2

ỔN ĐỊNH CỦA THANH CÓ TIẾT DIỆN THAY ĐỔI

Hướng thực hiện của luận văn là vận dụng chuỗi nguyên để giải bài toán ổn định, bài toán uốn ngang cùng với uốn dọc của thanh có tiết diện thay đổi, chuẩn bị cơ sở để kiểm tra ổn định của khung trong đó có các cấu kiện có tiết diện thay đổi.

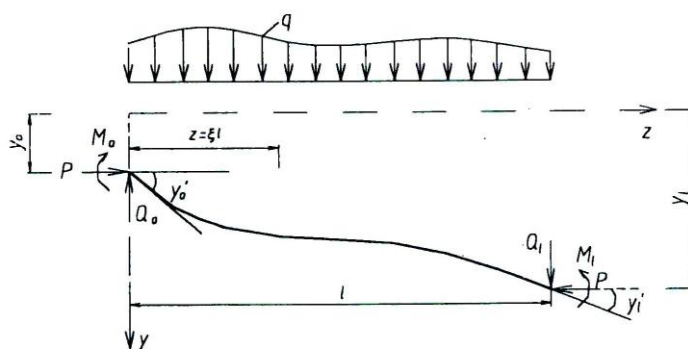
Giả thiết quy luật thay đổi của tiết diện thanh được mô tả dưới dạng chuỗi:

$$I = I_0(1 + b_1\xi + b_2\xi^2 + b_3\xi^3 + \dots + b_i\xi^i + \dots + b_n\xi^n) = I_0 \sum_{i=0}^n b_i \xi^i \quad (2.1)$$

với $\xi = \frac{z}{l}, b_0 = 1$

2.1. THIẾT LẬP VÀ TÌM NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Xét thanh có liên kết bất kỳ ở hai đầu, chịu lực nén dọc trục P , tải trọng ngang phân bố bất kỳ (hình 2.1).



Hình 2.1

Biểu thức mômen uốn trong thanh:

$$M(\xi) = M_0 + Q_0 \xi l + P(y - y_0) + M_q(\xi) \quad (2.2)$$

$M_q(\xi)$ là biểu thức mômen uốn do riêng các tải trọng ngang q gây ra.

Trong trường hợp tổng quát, ta có thể biểu thị:

$$M_q(\xi) = \sum_{j=2}^r \gamma_j \xi^j$$

với λ_j là hệ số thứ j của biểu thức mômen uốn do tải trọng ngang gây ra.

Từ phương trình vi phân của đường đàn hồi: $EI_0 y'' = -M$, sau khi thay các biểu thức (2.1) và (2.2), ta được:

$$\left(\sum_{i=0}^n b_i \xi^i \right) \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \mu^2 y = \sum_{j=0}^r C_j \xi^j \quad (2.3)$$

trong đó: $\mu^2 = t = \frac{Pl^2}{EI_0}$, $c_0 = ty_0 - \frac{l^2}{EI_0} M_0$, $c_1 = -\frac{l^3}{EI_0} Q_0$

Ta sẽ tìm nghiệm của phương trình vi phân (2.3), rồi từ đó có thể xác định nội lực trong thanh theo phương trình đường đàn hồi

Nghiệm tổng quát của phương trình (2.3) có dạng:

$$y = \mathcal{C}_1 y_1 + \mathcal{C}_2 y_2 + y_3 \quad (2.4)$$

trong đó, y_1 và y_2 là các nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình vi phân không vế phải còn y_3 là nghiệm riêng của phương trình vi phân có vế phải

2.1.1 Tìm nghiệm y_1 và y_2 của phương trình vi phân không có vế phải

$$\left(\sum_{i=0}^n b_i \xi^i \right) \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \mu^2 y = 0 \quad (2.5)$$

Đặt nghiệm của (2.5) dưới dạng:

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \xi^i \quad (2.6)$$

Điều kiện hội tụ của (2.6) là $|\xi| < R$, với R là bán kính hội tụ được xác định bằng nghiệm của đa thức:

$$P(\xi) = \sum_{i=0}^n b_i \xi^i = 0$$

Vì $P(\xi)$ biểu thị độ cứng của thanh nên $P(\xi) \neq 0$ khi $0 < z < l$ tức là khi $0 < \xi < 1$. DO đó, nghiệm R của $P(\xi)$ chỉ xảy ra với $R > 1$. Suy ra $|\xi| < R$. Như vậy chuỗi nghiệm (2.6) sẽ hội tụ

Từ (2.6) ta có $\frac{dy}{d\xi} = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i \xi^{i-1}$, $\frac{d^2 y}{d\xi^2} = \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1) a_i \xi^{i-2}$

Sau khi thay vào (2.5) đồng nhất hai vế ta sẽ lập được công thức xác định các hệ số a_i

$$a_i = -\frac{1}{(i-1)i} \{ (i-1)(i-2)b_1 a_{i-1} + [t + (i-2)(i-3)b_2] a_{i-2} + (i-3)(i-4)b_3 a_{i-3} + \dots + (i-n)(i-n-1)b_n a_{i-n} \}$$

Đó là công thức truy hồi, có thể xác định được tất cả các hệ số a_i theo a_0 và a_1 .

Mặt khác, nếu biểu thị a_i theo hàm lũy thừa của i thì:

$$a_i = -\frac{1}{(i-1)i} \sum_{s=1}^{\infty} u_{si} t^s \quad (2.7)$$

với $i=1,2,3,\dots$ và $s=\frac{i-1}{2}$

$$u_{si} = -\left[b_1 u_{(i-1)} + b_2 u_{s(i-2)} + \dots + b_n u_{(i-n)} + \frac{u_{(s-1)(i-2)}}{(i-2)(i-3)} \right] \quad (2.8)$$

Từ (2.7) và (2.6) ta có thể tìm được nghiệm y_1 và y_2

- Nghiệm y_1 ứng với $a_0=1$ và $a_1=0$

$$y_1 = 1 + g_1(\xi)t + g_2(\xi)t^2 + g_3(\xi)t^3 + \dots + g_s(\xi)t^s + \dots \quad (2.9)$$

$$\text{trong đó } g_s(\xi) = -\sum_{i=2s}^{\infty} \frac{1}{i(-1)} u_{si} \xi^i \quad (2.10)$$

$$\text{với } u_{12}=1 \text{ và } u_{si}=0 \text{ khi } i \leq 2s-1 \text{ Cụ thể: } \left(\frac{u_{12}}{2.1} \xi^2 + \frac{u_{13}}{3.2} \xi^3 + \frac{u_{14}}{4.3} \xi^5 + \frac{u_{16}}{6.1} \xi^6 + \dots \right)$$

$$g_2(\xi) = -\sum_{i=4}^{\infty} \frac{1}{i(i-1)} u_{2i} \xi^i = -\left(\frac{u_{24}}{4.3} \xi^4 + \frac{u_{25}}{5.4} \xi^5 + \frac{u_{26}}{6.5} \xi^6 + \frac{u_{27}}{7.6} \xi^7 + \dots \right)$$

$$g_3(\xi) = -\sum_{i=6}^{\infty} \frac{1}{i(i-1)} u_{3i} \xi^i = -\left(\frac{u_{36}}{6.5} \xi^6 + \frac{u_{37}}{7.6} \xi^7 + \frac{u_{38}}{8.7} \xi^8 + \frac{u_{39}}{9.8} \xi^9 + \dots \right)$$

Như vậy, để tính các hệ số $g_s(\xi)$, ta cần xác định các hệ số u_{si} theo công thức (2.8) và chú ý rằng $u_{12}=1$ và $u_{si}=0$ khi $i \leq 2s-1$. Ví dụ:

$$u_{13} = -(b_1 u_{12})$$

$$u_{14} = -(b_1 u_{14} + b_2 u_{13} + b_3 u_{12})$$

$$u_{16} = -(b_1 u_{15} + b_2 u_{14} + b_3 u_{13} + b_4 u_{12})$$

...

$$u_{24} = -\left(\frac{u_{12}}{2.1} \right)$$

$$u_{36} = -\left(\frac{u_{24}}{4.3} \right)$$

$$u_{25} = -\left(b_1 u_{24} + \frac{u_{13}}{3.2} \right)$$

$$u_{37} = -\left(b_1 u_{36} + \frac{u_{25}}{5.4} \right)$$

$$u_{26} = -\left(b_1 u_{25} + b_2 u_{24} + \frac{u_{14}}{4.3} \right)$$

$$u_{38} = -\left(b_1 u_{37} + b_2 u_{36} + \frac{u_{26}}{6.5} \right)$$

.....

.....

- Nghiệm y_2 ứng với $a_0=0$ và $a=1$

$$y_2 = \xi + w_1(\xi)t + w_2(\xi)t^2 + w_3(\xi)t^3 + \dots + w_s(\xi)t^s + \dots \quad (2.11)$$

$$\text{trong đó } w_s(\xi) = -\sum_{i=2s+1}^{\infty} \frac{1}{i(i-1)} u_{si} \xi^i \quad (2.12)$$

với $u_{13}=1$ và $u_{si}=0$ khi $i \leq 2s$. Cụ thể:

$$w_1(\xi) = -\sum_{i=3}^{\infty} \frac{1}{i(i-1)} u_{1i} \xi^i = -\left(\frac{u_{13}}{3.2} \xi^3 + \frac{u_{14}}{4.3} \xi^4 + \frac{u_{15}}{5.4} \xi^5 + \frac{u_{16}}{6.5} \xi^6 + \frac{u_{17}}{7.6} \xi^7 + \dots \right)$$

$$w_2(\xi) = -\sum_{i=3}^{\infty} \frac{1}{i(i-1)} u_{2i} \xi^i = -\left(\frac{u_{25}}{5.4} \xi^5 + \frac{u_{26}}{6.5} \xi^6 + \dots \right)$$

Để tính các hệ số $w_s(\xi)$, ta cũng xác định các hệ số u_{si} theo công thức (2.8) và chú ý rằng $u_{13}=1$ và $u_{si}=0$ khi $i \leq 2s$. Ví dụ:

$$u_{14} = -(b_1 u_{13})$$

$$u_{15} = -(b_1 u_{14} + b_2 u_{13})$$

$$u_{16} = -(b_1 u_{15} + b_2 u_{14} + b_3 u_{13})$$

....

$$u_{25} = -\left(\frac{u_{13}}{3.2} \right)$$

$$u_{37} = -\left(\frac{u_{25}}{5.4} \right)$$

$$u_{26} = -\left(b_1 u_{25} + \frac{u_{14}}{4.3} \right)$$

$$u_{38} = -(b_1 u_{37} + \frac{u_{26}}{6.5})$$

$$u_{27} = -(b_1 u_{26} + b_2 u_{25} + \frac{u_{15}}{5.4}) \dots$$

$$u_{39} = -(b_1 u_{38} + b_2 u_{37} + \frac{u_{27}}{7.6})$$

....

....

2.1.2 Tìm nghiệm y_3 của phương trình vi phân có vế phải (2.3)

Đặt nghiệm riêng y_3 dưới dạng:

$$y_3 = \sum_{k=0}^{\infty} v_k \xi^k \quad (2.13)$$

Thay (2.13) vào (2.3) thực hiện đồng nhất hai vế, ta có thể xác định các hệ số v_k của nghiệm (2.13) theo biểu thức sau:

$$V = (BD + \mu^2)^{-1} C \quad (2.14)$$

Nếu lấy chuỗi (2.13) tới $p+1$ số hạng ($k=0,1,2,\dots,p$) với $p \geq r$ thì ý nghĩa và cấu trúc của các ma trận trong công thức (2.14) như sau:

V- ma trận cột có $p+1$ hàng, các phần tử của ma trận V là các hệ số v_i cần xác định

$$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_i, \dots, v_p\}$$

C- ma trận cột có $p+1$ hàng, các phần tử là c_j đã biết\

$$C = \{c_0, c_1, c_2, c_3, \dots, c_i, \dots, c_p\}$$

U - Ma trận đơn vị có kích thước $[(p+1) \times (p+1)]$

B- ma trận vuông có kích thước $[(p+1) \times (p+1)]$. Các phần tử của B là các hệ số của quy luật biến thiên tiết diện:

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ b_{11} \\ b_2 b_1 \\ b_3 b_2 b_1 \\ \dots \\ \dots \\ b_p b_{p-1} b_{p-2} b_{p-3} \dots b_1, 1 \end{bmatrix} \text{ là ma trận tam giác dưới}$$

D- ma trận vuông có kích thước $[(p+1) \times (p+1)]$. Cấu trúc của D như sau:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1.2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4.5 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (p-1)p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Như vậy, để tìm v_k ta cần nghịch đảo một ma trận vuông kích thước $[(p+1) \times (p+1)]$ Sau khi biết các v_k ta có thể dễ dàng tìm được nghiệm y_3 theo (2.13)

2.1.3 Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (2.3)

Thay (2.9), (2.11) và (2.13) vào (2.4) ta được nghiệm tổng quát:

$$y = \mathcal{C}_1 [1 + g_1(\xi)t + g_2(\xi)t^2 + g_3(\xi)t^3 + \dots] + \mathcal{C}_2 [\xi + w_1(\xi)t + w_2(\xi)t^3 + \dots] + \sum_{k=0}^{\infty} v_k \xi^k \quad (2.15)$$

Các đại lượng chưa biết trong (2.15) được xác định từ các điều kiện biên.

2.2 Thuật toán giải bài toán ổn định của thanh có tiết diện thay đổi

Sau khi thiết lập được các biểu thức của các nghiệm y_1, y_2 và y_3 , ta

được phương trình đường đàn hồi của một thanh bất kỳ theo biểu thức (2.15). Trong phương trình đường đàn hồi này còn tồn tại những hằng số chưa biết \mathcal{C}_1 và \mathcal{C}_2 cần được xác định theo các điều kiện biên của thanh. Tiếp đó có thể tìm nội lực, biến dạng tại một điểm bất kỳ trên thanh.

Phương trình đường đàn hồi:

$$y = \mathcal{C}_1 y_1 + \mathcal{C}_2 y_2 + y_3$$

trong đó

$$y_1 = 1 - \left(\frac{u_{12}}{2.1} \xi^2 + \frac{u_{13}}{3.2} \xi^3 + \frac{u_{14}}{4.3} \xi^4 + \frac{u_{15}}{5.4} \xi^5 + \frac{u_{16}}{6.5} \xi^6 + \dots \right) t - \left(\frac{u_{24}}{4.3} \xi^4 + \frac{u_{25}}{5.4} \xi^5 + \frac{u_{26}}{6.5} \xi^6 + \frac{u_{27}}{7.6} \xi^7 + \dots \right) t^2 - \left(\frac{u_{36}}{6.5} \xi^6 + \frac{u_{37}}{7.6} \xi^7 + \frac{u_{38}}{8.7} \xi^8 + \frac{u_{39}}{9.8} \xi^9 + \dots \right) t^3 - \dots (2.16)$$

$$y_2 = \xi - \left(\frac{u_{13}}{3.2} \xi^3 + \frac{u_{14}}{4.3} \xi^4 + \frac{u_{15}}{5.4} \xi^5 + \frac{u_{16}}{6.5} \xi^6 + \frac{u_{17}}{7.6} \xi^7 + \dots \right) t - \left(\frac{u_{25}}{5.4} + \frac{u_{26}}{6.5} \xi^6 + \frac{u_{27}}{7.6} \xi^7 + \dots \right) t^2 - \left(\frac{u_{37}}{7.6} \xi^7 + \frac{u_{38}}{8.7} \xi^8 + \frac{u_{39}}{9.8} \xi^9 + \dots \right) t^3 - \left(\frac{u_{49}}{9.8} \xi^9 + \frac{u_{410}}{10.9} \xi^{10} + \frac{u_{411}}{11.10} \xi^{11} + \dots \right) t^4 - \dots (2.17)$$

Trong bài toán ổn định, vế phải của phương trình vi phân (2.3) là

$\sum_{j=0}^1 c_j \xi^j$ (do không có tải trọng ngang tác dụng), trong đó:

$$c_0 = t y_0 - \frac{l^2}{EI_0} M_0, c_1 = -\frac{l^3}{EI_0} Q_0$$

Do đó, ma trận $C = \{c_0, c_1\}$. Ở đây $r=1$, lấy chuỗi nghiệm của (2.13) tới $p+1$ số hạng sao cho $p \geq r$, nếu chọn $p+1=5$, thì kích thước ma trận B, D, U là 5×5

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & b_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & 1 & 0 \\ b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dễ dàng giải ra được

$$V = (BD + \mu^2 U)^{-1} C = (BD + tU)^{-1} C = \left\{ \frac{1}{t} c_0 \quad \frac{1}{t} c_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right\}$$

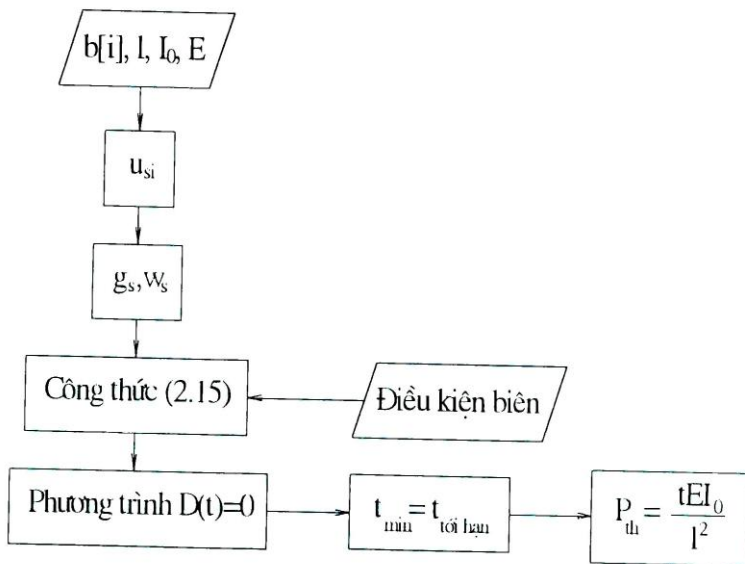
$$\text{Vậy } y_3 = \sum_{k=0}^{\infty} v_k \xi^k = \frac{1}{t} c_0 + \frac{1}{t} c_1 \xi \quad (2.18)$$

Đến đây ta đã có đủ các nghiệm của (2.4) hay (2.15), viết hoàn chỉnh là:

$$\begin{aligned}
 y = & \mathcal{C}_1 \left[1 - \left(\frac{u_{12}}{2.1} \xi^2 + \frac{u_{13}}{3.2} \xi^3 + \frac{u_{14}}{4.3} \xi^4 + \frac{u_{15}}{5.4} \xi^5 + \frac{u_{16}}{6.5} \xi^6 + \dots \right) t - \right. \\
 & \left. \left(\frac{u_{24}}{4.3} \xi^4 + \frac{u_{25}}{5.4} \xi^5 + \frac{u_{26}}{6.5} \xi^6 + \frac{u_{27}}{7.6} \xi^7 + \dots \right) t^2 - \left(\frac{u_{36}}{6.5} \xi^6 + \frac{u_{37}}{7.6} \xi^7 + \frac{u_{38}}{8.7} \xi^8 + \frac{u_{39}}{9.8} \xi^9 + \dots \right) t^3 - \dots \right] \\
 + & \mathcal{C}_2 \left[\xi - \left(\frac{u_{13}}{3.2} \xi^3 + \frac{u_{14}}{4.3} \xi^4 + \frac{u_{15}}{5.4} \xi^5 + \frac{u_{16}}{6.5} \xi^6 + \frac{u_{17}}{7.6} \xi^7 + \dots \right) t - \left(\frac{u_{25}}{5.4} \xi^5 + \frac{u_{26}}{6.5} \xi^6 + \frac{u_{27}}{7.6} \xi^7 + \dots \right) t^2 \right. \\
 & \left. - \left(\frac{u_{37}}{7.6} \xi^7 + \frac{u_{38}}{8.7} \xi^8 + \frac{u_{39}}{9.8} \xi^9 + \dots \right) t^3 - \left(\frac{u_{49}}{9.8} \xi^9 + \frac{u_{410}}{10.9} \xi^{10} + \frac{u_{411}}{11.10} \xi^{11} + \dots \right) t^4 - \dots \right] + \frac{1}{t} c_0 + \frac{1}{t} c_1 \xi
 \end{aligned}
 \tag{2.19}$$

Trong bài toán ổn định thì đại lượng chưa biết chính là lực P hay thông số t, giữ vai trò là ẩn số. Cách giải bài toán này như sau:

Khi đã biết quy luật biến thiên của tiết diện và điều kiện liên kết ở hai đầu thanh, ta có thể thiết lập hệ phương trình tìm các đại lượng $M_0, Q_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$. Hệ phương trình này là thuần nhất nên muốn cho thanh bị mất ổn định thì định thức



Hình 2.2

các hệ số của hệ phương trình này phải bằng không. Từ đây ta lập được phương trình ổn định biểu thị dưới dạng phương trình lũy thừa với ẩn số là t. Giải phương trình ổn định được nghiệm t, lấy nghiệm dương nhỏ nhất ta suy ra lực tới hạn cần tìm. Có thể diễn giải quá trình này theo sơ đồ trên hình 2.2

2.3 KIỂM TRA ỔN ĐỊNH THEO PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ

2.3.1 Nội dung phương pháp chuyển vị

Trong bài toán ổn định, hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc của phương pháp chuyển vị tương tự như khi kiểm tra bền. Tuy nhiên, do tải

trọng chỉ đặt tại các nút nên khi hệ chưa mất ổn định thì trong các thanh của hệ chỉ xuất hiện những lực nén hoặc kéo tự cân bằng mà không xuất hiện mômen uốn. Như vậy, biểu đồ (M_p^0) do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản sẽ không tồn tại và do đó các số hạng tự do R_{kP} của hệ phương trình chính tắc đều bằng không. Lúc đó, hệ phương trình chính tắc trở thành hệ phương trình thuần nhất. Khi xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc, khác với bài toán kiểm tra độ bền, các hệ số r_{km} không phụ thuộc tải trọng, nhưng khi kiểm tra ổn định, r_{km} phụ thuộc lực nén hoặc kéo trong các thanh. Phương trình ổn định là định thức các hệ số của hệ phương trình chính tắc bằng không.

2.3.2. Các vấn đề cần chuẩn bị

Để áp dụng phương pháp chuyển vị đã quen biết, ta cần thiết lập sẵn các kết quả phản lực và nội lực trong những phần tử mẫu là các thanh có liên kết hai đầu cho trước, chịu chuyển vị cưỡng bức ở các liên kết tựa. Với bài toán ổn định, ta còn phải kể tới ảnh hưởng của lực dọc trục trong phần tử mẫu.

2.4 THIẾT LẬP CÁC CẤU KIỆN MẪU TRONG PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ

Để chuẩn bị cho các tính toán sau này, ta tìm đạo hàm các hàm y_1, y_2, y_3 theo ξ :

Các đạo hàm cấp 1 của y_1, y_2, y_3 theo ξ :

$$y_1' = - \left(\frac{u_{12}}{1} \xi + \frac{u_{13}}{2} \xi^2 + \frac{u_{14}}{3} \xi^3 + \frac{u_{15}}{4} \xi^4 + \frac{u_{16}}{5} \xi^5 + \dots \right) t - \left(\frac{u_{24}}{3} \xi^3 + \frac{u_{25}}{4} \xi^4 + \frac{u_{26}}{5} \xi^5 + \frac{u_{27}}{6} \xi^6 + \dots \right) t^2 - \left(\frac{u_{36}}{5} \xi^5 + \frac{u_{37}}{6} \xi^6 + \frac{u_{38}}{7} \xi^7 + \frac{u_{39}}{8} \xi^8 + \dots \right) t^3 - \dots \quad (3.1)$$

$$y_2' = 1 - \left(\frac{u_{13}}{2} \xi^2 + \frac{u_{14}}{3} \xi^3 + \frac{u_{15}}{4} \xi^4 + \frac{u_{16}}{5} \xi^5 + \dots \right) t - \left(\frac{u_{25}}{4} \xi^4 + \frac{u_{26}}{5} \xi^5 + \frac{u_{27}}{6} \xi^6 + \dots \right) t^2 - \left(\frac{u_{37}}{6} \xi^6 + \frac{u_{38}}{7} \xi^7 + \frac{u_{39}}{8} \xi^8 + \dots \right) t^3 \dots \quad (3.2)$$

$$y_3' = \frac{1}{t} c_1 \quad (3.3)$$

Các đạo hàm cấp 2 theo ξ của y_1, y_2, y_3 :

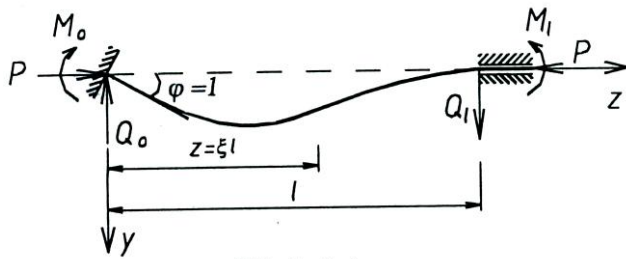
$$y_1'' = -(u_{12} + u_{13}\xi + u_{14}\xi^2 + u_{15}\xi^3 + u_{16}\xi^4 + \dots)t - (+u_{24}\xi^2 + u_{25}\xi^3 + u_{26}\xi^4 + u_{27}\xi^5 + \dots)t^2 - (u_{36}\xi^4 + u_{37}\xi^5 + u_{38}\xi^6 + u_{39}\xi^7 + \dots)t^3 - \dots \quad (3.4)$$

$$y_2'' = -(u_{13}\xi + u_{14}\xi^2 + u_{15}\xi^3 + u_{16}\xi^4 + u_{17}\xi^5 + \dots)t - (u_{25}\xi^3 + u_{26}\xi^4 + u_{27}\xi^5 + \dots)t^2 - (u_{37}\xi^5 + u_{38}\xi^6 + u_{39}\xi^7 + \dots)t^3 \dots \quad (3.8)$$

$$y_3''' = 0 \quad (3.9)$$

2.4.1. Thanh có hai đầu ngàm

2.4.1.1. Đầu ngàm xoay một góc bằng đơn vị (hình 3.1)



Hình 3.1

Điều kiện biên:

$$y(0)=0, y'(0)=1$$

$$y(l)=0, y'(l)=0$$

$$z = \xi l \Rightarrow y'_i y'_\xi$$

Theo (2.19) ta có:

$$\bullet y(0) = 0 \Rightarrow \mathcal{C}_1 + \frac{c_0}{t} = 0 \Rightarrow \mathcal{C}_1 = -\frac{c_0}{t} \quad (a)$$

Theo (3.1), (3.2), (3.3):

$$\bullet y'_z(0) = 1 \Rightarrow y'_\xi(0) = 1l \Rightarrow \mathcal{C}_2 + \frac{c_1}{t} = l \Rightarrow \mathcal{C}_2 = l - \frac{c_1}{t} \quad (b)$$

Theo (2.19):

$$\bullet y'_z(l) = 0 \Rightarrow y'_\xi(l) = 0 \Rightarrow$$

$$\mathcal{C}_1 \left[1 - \left(\frac{u_{12}}{2.1} + \frac{u_{13}}{3.2} + \frac{u_{14}}{4.3} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{24}}{4.3} + \frac{u_{25}}{5.4} + \frac{u_{26}}{6.5} + \dots \right) t^2 - \left(\frac{u_{36}}{6.5} + \frac{u_{37}}{7.6} + \frac{u_{38}}{8.7} + \dots \right) t^3 - \dots \right]$$

+

$$\mathcal{C}_2 \left[1 - \left(\frac{u_{13}}{3.2} + \frac{u_{14}}{4.3} + \frac{u_{15}}{5.4} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{25}}{5.4} + \frac{u_{26}}{6.5} + \frac{u_{27}}{7.6} + \dots \right) t^2 - \left(\frac{u_{37}}{7.6} + \frac{u_{38}}{8.7} + \frac{u_{310}}{10.9} + \dots \right) t^3 - \dots \right]$$

$$+ \frac{c_0}{t} + \frac{c_1}{t} = 0$$

Thế (a) và (b) vào phương trình này được:

$$\begin{aligned} & -c_0 \left[-\left(\frac{u_{12}}{2.1} + \frac{u_{13}}{3.2} + \frac{u_{14}}{4.3} + \dots \right) - \left(\frac{u_{24}}{4.3} + \frac{u_{25}}{5.4} + \frac{u_{26}}{6.5} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{36}}{6.5} + \frac{u_{37}}{7.6} + \frac{u_{38}}{8.7} + \dots \right) t^2 - \dots \right] \\ & -c_1 \left[-\left(\frac{u_{13}}{3.2} + \frac{u_{14}}{4.3} + \frac{u_{15}}{5.4} + \dots \right) - \left(\frac{u_{25}}{5.4} + \frac{u_{26}}{6.5} + \frac{u_{27}}{7.6} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{37}}{7.6} + \frac{u_{38}}{8.7} + \frac{u_{310}}{10.9} + \dots \right) t^2 - \dots \right] = \\ & = -l \left[1 - \left(\frac{u_{13}}{3.2} + \frac{u_{14}}{4.3} + \frac{u_{15}}{5.4} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{25}}{5.4} + \frac{u_{26}}{6.5} + \frac{u_{27}}{7.6} + \dots \right) t^2 - \left(\frac{u_{37}}{7.6} + \frac{u_{38}}{8.7} + \frac{u_{310}}{10.9} + \dots \right) t^3 - \dots \right] \end{aligned}$$

Trong trường hợp này $y_0=0$ nên $c_0 = -\frac{l^2}{EI_0} M_0$, $c_1 = -\frac{l^3}{EI_0} Q_0$, phương trình trên có

dạng:

$$\begin{aligned} & M_0 \left[-\left(\frac{u_{12}}{2.1} + \frac{u_{13}}{3.2} + \frac{u_{14}}{4.3} + \dots \right) - \left(\frac{u_{24}}{4.3} + \frac{u_{25}}{5.4} + \frac{u_{26}}{6.5} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{36}}{6.5} + \frac{u_{37}}{7.6} + \frac{u_{38}}{8.7} + \dots \right) t^2 - \dots \right] \\ & + Q_0 l \left[-\left(\frac{u_{13}}{3.2} + \frac{u_{14}}{4.3} + \frac{u_{15}}{5.4} + \dots \right) - \left(\frac{u_{25}}{5.4} + \frac{u_{26}}{6.5} + \frac{u_{27}}{7.6} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{37}}{7.6} + \frac{u_{38}}{8.7} + \frac{u_{310}}{10.9} + \dots \right) t^2 - \dots \right] = \\ & = -\frac{EI_0}{l} \left[1 - \left(\frac{u_{13}}{3.2} + \frac{u_{14}}{4.3} + \frac{u_{15}}{5.4} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{25}}{5.4} + \frac{u_{26}}{6.5} + \frac{u_{27}}{7.6} + \dots \right) t^2 - \left(\frac{u_{37}}{7.6} + \frac{u_{38}}{8.7} + \frac{u_{310}}{10.9} + \dots \right) t^3 - \dots \right] \end{aligned} \quad (c)$$

Theo (3.1), (3.2), (3.3):

$$\mathcal{C}_1 \left[-\left(\frac{u_{12}}{1} + \frac{u_{13}}{2} + \frac{u_{14}}{3} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{24}}{3} + \frac{u_{25}}{4} + \frac{u_{26}}{5} + \dots \right) t^2 - \left(\frac{u_{36}}{5} + \frac{u_{37}}{6} + \frac{u_{38}}{7} + \dots \right) t^3 - \dots \right] +$$

$$\mathcal{C}_2 \left[1 - \left(\frac{u_{13}}{2} + \frac{u_{14}}{3} + \frac{u_{15}}{4} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{25}}{4} + \frac{u_{26}}{5} + \dots \right) t^2 - \dots \right] + \frac{1}{t} c_1 = 0 \text{ hay}$$

$$-c_0 \left[-\left(\frac{u_{12}}{1} + \frac{u_{13}}{2} + \frac{u_{14}}{3} + \dots \right) - \left(\frac{u_{24}}{3} + \frac{u_{25}}{4} + \frac{u_{26}}{5} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{36}}{5} + \frac{u_{37}}{6} + \frac{u_{38}}{7} + \dots \right) t^2 - \dots \right] -$$

$$-c_0 \left[-\left(\frac{u_{13}}{2} + \frac{u_{14}}{3} + \frac{u_{15}}{4} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{25}}{4} + \frac{u_{26}}{5} + \dots \right) t^2 - \dots \right] = \text{hay}$$

$$= -l \left[1 - \left(\frac{u_{13}}{2} + \frac{u_{14}}{3} + \frac{u_{15}}{4} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{25}}{4} + \frac{u_{26}}{5} + \dots \right) t^2 - \dots \right] \text{ hay}$$

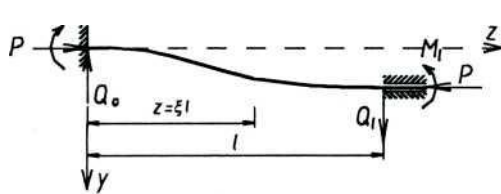
$$M_0 \left[-\left(\frac{u_{12}}{1} + \frac{u_{13}}{2} + \frac{u_{14}}{3} + \dots \right) - \left(\frac{u_{24}}{3} + \frac{u_{25}}{4} + \frac{u_{26}}{5} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{36}}{5} + \frac{u_{37}}{6} + \frac{u_{38}}{7} + \dots \right) t^2 - \dots \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + Q_0 l \left[- \left(\frac{u_{13}}{2} + \frac{u_{14}}{3} + \frac{u_{15}}{4} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{25}}{4} + \frac{u_{26}}{5} + \dots \right) t - \dots \right] \\
& = - \frac{EI_0}{l} \left[1 - \left(\frac{u_{13}}{2} + \frac{u_{14}}{3} + \frac{u_{15}}{4} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{25}}{4} + \frac{u_{26}}{5} + \dots \right) t^2 - \dots \right] \quad (d)
\end{aligned}$$

Trong đó E, I_0, l, t lần lượt là môđun đàn hồi khi kéo hoặc nén của vật liệu, mômen quán tính chính trung tâm của tiết diện tại đầu thanh (ứng với $\xi = 0$), l là chiều dài thanh và t là đại lượng phụ thuộc lực nén p . Khi cho biết quy luật biến thiên của tiết diện, ta có thể tính được tất cả các hệ số U_{si} . Từ hai phương trình (c) và (d), ta có thể tìm được các phản lực ở đầu thanh M_0 và Q_0 .

Tiếp đó ta suy ra được c_0, c_1 cũng như $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ và lập phương trình đường đàn hồi theo (2.19). Lấy các đạo hàm cấp 2 và cấp 3, ta được các hàm M và Q . Tiếp đó dễ dàng tìm được M_l và Q_l khi thế $\xi = 1$ vào biểu thức của M và Q .

2.4 Hai đầu thanh chuyển vị thẳng tương đối theo phương vuông góc với trục thanh một giá trị bằng đơn vị (hình 3.2)



Hình 3.2

Điều kiện biên:

$$y(0)=0, y'(0)=0$$

$$y(l)=1, y'(l)=0$$

Theo (2.19), ta có:

$$\bullet y(0) = 0 \Rightarrow \mathcal{C}_1 + \frac{c_0}{t} = 0 \Rightarrow \mathcal{C}_1 = -\frac{c_0}{t} \quad (a)$$

Theo (3.1), (3.2), (3.3):

$$\bullet y'(0) = 0 \Rightarrow \mathcal{C}_2 + \frac{c_1}{t} = 0 \Rightarrow \mathcal{C}_2 = -\frac{c_1}{t} \quad (b)$$

Theo (2.19):

$$\bullet y_z(l) = 1 \Rightarrow y_\xi(1) = 1 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{C}_1 \left[1 - \left(\frac{u_{12}}{2.1} + \frac{u_{13}}{3.2} + \frac{u_{14}}{4.3} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{24}}{4.3} + \frac{u_{25}}{5.4} + \frac{u_{26}}{6.5} + \dots \right) t^2 - \left(\frac{u_{36}}{6.5} + \frac{u_{37}}{7.6} + \frac{u_{38}}{8.7} + \dots \right) t^3 - \dots \right] \\
& + \mathcal{C}_2 \left[1 - \left(\frac{u_{13}}{3.2} + \frac{u_{14}}{4.3} + \frac{u_{15}}{5.4} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{25}}{5.4} + \frac{u_{26}}{6.5} + \frac{u_{27}}{7.6} + \dots \right) t^2 - \left(\frac{u_{37}}{7.6} + \frac{u_{38}}{8.7} + \frac{u_{310}}{9.8} + \dots \right) t^3 - \dots \right]
\end{aligned}$$

$$+ \frac{c_0}{t} + \frac{c_1}{t} = 1$$

Thế (a) và (b) vào phương trình này được:

$$-c_0 \left[-\left(\frac{u_{12}}{2.1} + \frac{u_{13}}{3.2} + \frac{u_{14}}{4.3} + \dots \right) - \left(\frac{u_{24}}{4.3} + \frac{u_{25}}{5.4} + \frac{u_{26}}{6.5} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{36}}{6.5} + \frac{u_{37}}{7.6} + \frac{u_{38}}{8.7} + \dots \right) t^2 - \dots \right]$$

$$-c_1 \left[-\left(\frac{u_{13}}{3.2} + \frac{u_{14}}{4.3} + \frac{u_{15}}{5.4} + \dots \right) - \left(\frac{u_{25}}{5.4} + \frac{u_{26}}{6.5} + \frac{u_{27}}{7.6} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{37}}{7.6} + \frac{u_{38}}{8.7} + \frac{u_{310}}{9.8} + \dots \right) t^2 - \dots \right] = 1$$

Thay $c_0 = -\frac{l^2}{EI_0} M_0$, $c_1 = -\frac{l^3}{EI_0} Q_0$, phương trình trên có dạng:

$$M_0 \left[-\left(\frac{u_{12}}{2.1} + \frac{u_{13}}{3.2} + \frac{u_{14}}{4.3} + \dots \right) - \left(\frac{u_{24}}{4.3} + \frac{u_{25}}{5.4} + \frac{u_{26}}{6.5} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{36}}{6.5} + \frac{u_{37}}{7.6} + \frac{u_{38}}{8.7} + \dots \right) t^2 - \dots \right] +$$

$$Q_0 l \left[-\left(\frac{u_{13}}{3.2} + \frac{u_{14}}{4.3} + \frac{u_{15}}{5.4} + \dots \right) - \left(\frac{u_{25}}{5.4} + \frac{u_{26}}{6.5} + \frac{u_{27}}{7.6} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{37}}{7.6} + \frac{u_{38}}{8.7} + \frac{u_{310}}{9.8} + \dots \right) t^2 - \dots \right] = \frac{EI_0}{l^2}$$

Theo (3.1), (3.2), (3.3):

- $y'_z(l) = 0 \Rightarrow y'_z(1) = 0 \Rightarrow$

$$\mathcal{C}_1 \left[-\left(\frac{u_{12}}{1} + \frac{u_{13}}{2} + \frac{u_{14}}{3} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{24}}{3} + \frac{u_{25}}{4} + \frac{u_{26}}{5} + \dots \right) t^2 - \left(\frac{u_{36}}{5} + \frac{u_{37}}{6} + \frac{u_{38}}{7} + \dots \right) t^3 - \dots \right] +$$

$$\mathcal{C}_2 \left[1 - \left(\frac{u_{13}}{2} + \frac{u_{14}}{3} + \frac{u_{15}}{4} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{25}}{4} + \frac{u_{26}}{5} + \dots \right) t^2 - \left(\frac{u_{37}}{6} + \frac{u_{38}}{7} + \dots \right) t^2 - \dots \right] + \frac{1}{t} c_1 = 0$$

hay $-c_0 \left[-\left(\frac{u_{12}}{1} + \frac{u_{13}}{2} + \frac{u_{14}}{3} + \dots \right) - \left(\frac{u_{24}}{3} + \frac{u_{25}}{4} + \frac{u_{26}}{5} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{36}}{5} + \frac{u_{37}}{6} + \frac{u_{38}}{7} + \dots \right) t^2 - \dots \right] +$

$$-c_1 \left[-\left(\frac{u_{13}}{2} + \frac{u_{14}}{3} + \frac{u_{15}}{4} + \dots \right) - \left(\frac{u_{25}}{4} + \frac{u_{26}}{5} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{37}}{6} + \frac{u_{38}}{7} + \dots \right) t^2 - \dots \right] = 0$$

hay

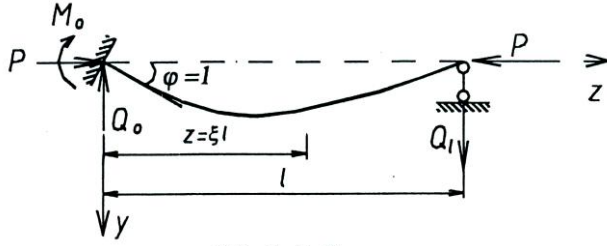
$$M_0 \left[-\left(\frac{u_{12}}{1} + \frac{u_{13}}{2} + \frac{u_{14}}{3} + \dots \right) - \left(\frac{u_{24}}{3} + \frac{u_{25}}{4} + \frac{u_{26}}{5} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{36}}{5} + \frac{u_{37}}{6} + \frac{u_{38}}{7} + \dots \right) t^2 - \dots \right] +$$

$$+ Q_0 l \left[-\left(\frac{u_{13}}{2} + \frac{u_{14}}{3} + \frac{u_{15}}{4} + \dots \right) - \left(\frac{u_{25}}{4} + \frac{u_{26}}{5} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{37}}{6} + \frac{u_{38}}{7} + \frac{u_{39}}{8} + \dots \right) t^2 - \dots \right] = 0 \quad (d)$$

Từ hai phương trình (c) và (d), ta có thể tìm được các phản lực đầu thanh M_0 và Q_0 .

2.4.1. Thanh có một đầu ngàm, một đầu khớp

2.4.2.1 Đầu ngàm xoay một góc bằng đơn vị (hình 3.3)



Hình 3.3

Điều kiện biên:

$$y(0)=0, y'(0)=1$$

$$y(l)=0, y''(l)=0$$

$$z = \xi l \Rightarrow y_z'' = \frac{1}{l^2} y'' \xi$$

Theo (2.19), ta có:

$$\bullet y(0) = 0 \Rightarrow \mathcal{C}_1 + \frac{c_0}{t} = 0 \Rightarrow \mathcal{C}_1 = -\frac{c_0}{t} \quad (a)$$

Theo (3.1), (3.2), (3.3):

$$\bullet y_z'(0) = 1 \Rightarrow y_z'(\xi)(0) = 1 \Rightarrow \mathcal{C}_2 + \frac{c_1}{t} = 1 \Rightarrow \mathcal{C}_2 = 1 - \frac{c_1}{t} \quad (b)$$

Theo (2.19):

$$\bullet y_z(l) = 1 \Rightarrow y_z(\xi)(1) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{C}_1 \left[1 - \left(\frac{u_{12}}{2.1} + \frac{u_{13}}{3.2} + \frac{u_{14}}{4.3} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{24}}{4.3} + \frac{u_{25}}{5.4} + \frac{u_{26}}{6.5} + \dots \right) t^2 - \left(\frac{u_{36}}{6.5} + \frac{u_{37}}{7.6} + \frac{u_{38}}{8.7} + \dots \right) t^3 - \dots \right] + \\ & + \mathcal{C}_2 \left[1 - \left(\frac{u_{13}}{3.2} + \frac{u_{14}}{4.3} + \frac{u_{15}}{5.4} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{25}}{5.4} + \frac{u_{26}}{6.5} + \frac{u_{27}}{7.6} + \dots \right) t^2 - \left(\frac{u_{37}}{7.6} + \frac{u_{38}}{8.7} + \frac{u_{310}}{9.8} + \dots \right) t^3 - \dots \right] \\ & + \frac{c_0}{t} + \frac{c_1}{t} = 0 \end{aligned}$$

Thế (a) và (b) vào phương trình này được:

$$\begin{aligned} & -c_0 \left[-\left(\frac{u_{12}}{2.1} + \frac{u_{13}}{3.2} + \frac{u_{14}}{4.3} + \dots \right) - \left(\frac{u_{24}}{4.3} + \frac{u_{25}}{5.4} + \frac{u_{26}}{6.5} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{36}}{6.5} + \frac{u_{37}}{7.6} + \frac{u_{38}}{8.7} + \dots \right) t^2 - \dots \right] \\ & -c_1 \left[-\left(\frac{u_{13}}{3.2} + \frac{u_{14}}{4.3} + \frac{u_{15}}{5.4} + \dots \right) - \left(\frac{u_{25}}{5.4} + \frac{u_{26}}{6.5} + \frac{u_{27}}{7.6} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{37}}{7.6} + \frac{u_{38}}{8.7} + \frac{u_{310}}{9.8} + \dots \right) t^2 - \dots \right] = \\ & = -l \left[1 - \left(\frac{u_{13}}{3.2} + \frac{u_{14}}{4.3} + \frac{u_{15}}{5.4} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{25}}{5.4} + \frac{u_{26}}{6.5} + \frac{u_{27}}{7.6} + \dots \right) t^2 - \left(\frac{u_{37}}{7.6} + \frac{u_{38}}{8.7} + \frac{u_{310}}{9.8} + \dots \right) t^3 - \dots \right] \end{aligned}$$

Lại thay $c_0 = -\frac{l^2}{EI_0} M_0$, $c_1 = -\frac{l^3}{EI_0} Q_0$, phương trình trên, được:

$$\begin{aligned} & M_0 \left[-\left(\frac{u_{12}}{2.1} + \frac{u_{13}}{3.2} + \frac{u_{14}}{4.3} + \dots \right) - \left(\frac{u_{24}}{4.3} + \frac{u_{25}}{5.4} + \frac{u_{26}}{6.5} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{36}}{6.5} + \frac{u_{37}}{7.6} + \frac{u_{38}}{8.7} + \dots \right) t^2 - \dots \right] \\ & + Q_0 l \left[-\left(\frac{u_{13}}{3.2} + \frac{u_{14}}{4.3} + \frac{u_{15}}{5.4} + \dots \right) - \left(\frac{u_{25}}{5.4} + \frac{u_{26}}{6.5} + \frac{u_{27}}{7.6} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{37}}{7.6} + \frac{u_{38}}{8.7} + \frac{u_{310}}{9.8} + \dots \right) t^2 - \dots \right] = \end{aligned}$$

$$= -\frac{EI_0}{l} \left[1 - \left(\frac{u_{13}}{3.2} + \frac{u_{14}}{4.3} + \frac{u_{15}}{5.4} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{25}}{5.4} + \frac{u_{26}}{6.5} + \frac{u_{27}}{7.6} + \dots \right) t^2 - \left(\frac{u_{37}}{7.6} + \frac{u_{38}}{8.7} + \frac{u_{310}}{9.8} + \dots \right) t^3 - \dots \right]$$

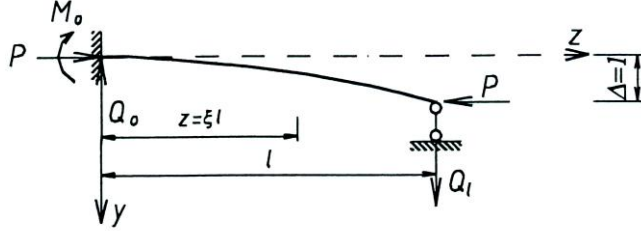
Theo (3.4), (3.5), (3.6) có:

$$y_z''(l) = 0 \Rightarrow y_\xi''(1) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{C}_1 [-(u_{12} + u_{13} + u_{14} + u_{15} + \dots)t - (u_{24} + u_{25} + u_{26} + u_{27} + \dots)t^2 - (u_{36} + u_{37} + u_{38} + u_{39} + \dots)t^3 - \dots] \\ & + \mathcal{C}_2 [-(u_{13} + u_{14} + u_{15} + u_{16} + \dots)t - (u_{25} + u_{26} + u_{27} + \dots)t^2 - (u_{37} + u_{38} + u_{39} + \dots)t^3 - \dots] = 0 \\ \Rightarrow & -c_0 [-(u_{12} + u_{13} + u_{14} + u_{15} + \dots) - (u_{24} + u_{25} + u_{26} + u_{27} + \dots)t - (u_{36} + u_{37} + u_{38} + u_{39} + \dots)t^2 - \dots] \\ & - c_1 [-(u_{13} + u_{14} + u_{15} + u_{16} + \dots) - (u_{25} + u_{26} + u_{27} + \dots)t - (u_{37} + u_{38} + u_{39} + \dots)t^2 - \dots] \\ & - l [-(u_{13} + u_{14} + u_{15} + u_{16} + \dots)t - (u_{25} + u_{26} + u_{27} + \dots)t^2 - (u_{37} + u_{38} + u_{39} + \dots)t^3 - \dots] \\ \Rightarrow & M_0 [-(u_{12} + u_{13} + u_{14} + u_{15} + \dots) - (u_{24} + u_{25} + u_{26} + u_{27} + \dots)t - (u_{36} + u_{37} + u_{38} + u_{39} + \dots)t^2 - \dots] \\ & + lQ_0 [-(u_{13} + u_{14} + u_{15} + u_{16} + \dots) - (u_{25} + u_{26} + u_{27} + \dots)t - (u_{37} + u_{38} + u_{39} + \dots)t^2 - \dots] = \\ & -\frac{EI_0}{l} [-(u_{13} + u_{14} + u_{15} + u_{16} + \dots)t - (u_{25} + u_{26} + u_{27} + \dots)t^2 - (u_{37} + u_{38} + u_{39} + \dots)t^3 - \dots] = \end{aligned}$$

Từ hai phương trình (c) và (d), ta có thể giải được nghiệm M_0 và Q_0 .

2.4.2.2. Đầu khớp chuyển vị thẳng một đoạn bằng đơn vị (hình 3.4)



Hình 3.4

Điều kiện biên:

$$y(l) = 1, y''(l) = 0$$

Do $M(l) = 0$

Theo (2.19), ta có:

$$\bullet y(0) = 0 \Rightarrow \mathcal{C}_1 + \frac{c_0}{t} = 0 \Rightarrow \mathcal{C}_1 = -\frac{c_0}{t} \quad (a)$$

Theo (3.1), (3.2), (3.3):

$$\bullet y_z'(0) = 0 \Rightarrow y_\xi'(0) = 0 \Rightarrow \mathcal{C}_2 + \frac{c_1}{t} = 0 \Rightarrow \mathcal{C}_2 = -\frac{c_1}{t} \quad (b)$$

Theo (2.19) ta có:

$$\bullet y_z(l) = 1 \Rightarrow y_\xi(1) = 1 \Rightarrow$$

$$\mathcal{C}_1 \left[1 - \left(\frac{u_{12}}{2.1} + \frac{u_{13}}{3.2} + \frac{u_{14}}{4.3} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{24}}{4.3} + \frac{u_{25}}{5.4} + \frac{u_{26}}{6.5} + \dots \right) t^2 - \left(\frac{u_{36}}{6.5} + \frac{u_{37}}{7.6} + \frac{u_{38}}{8.7} + \dots \right) t^3 - \dots \right] +$$

$$+ \mathcal{C}_2 \left[1 - \left(\frac{u_{13}}{3.2} + \frac{u_{14}}{4.3} + \frac{u_{15}}{5.4} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{25}}{5.4} + \frac{u_{26}}{6.5} + \frac{u_{27}}{7.6} + \dots \right) t^2 - \left(\frac{u_{37}}{7.6} + \frac{u_{38}}{8.7} + \frac{u_{310}}{9.8} + \dots \right) t^3 - \dots \right]$$

$$+ \frac{c_0}{t} + \frac{c_1}{t} = 1$$

Thế (a) và (b) vào phương trình này được:

$$-c_0 \left[- \left(\frac{u_{12}}{2.1} + \frac{u_{13}}{3.2} + \frac{u_{14}}{4.3} + \dots \right) - \left(\frac{u_{24}}{4.3} + \frac{u_{25}}{5.4} + \frac{u_{26}}{6.5} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{36}}{6.5} + \frac{u_{37}}{7.6} + \frac{u_{38}}{8.7} + \dots \right) t^2 - \dots \right]$$

$$-c_1 \left[- \left(\frac{u_{13}}{3.2} + \frac{u_{14}}{4.3} + \frac{u_{15}}{5.4} + \dots \right) - \left(\frac{u_{25}}{5.4} + \frac{u_{26}}{6.5} + \frac{u_{27}}{7.6} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{37}}{7.6} + \frac{u_{38}}{8.7} + \frac{u_{310}}{9.8} + \dots \right) t^2 - \dots \right] = 1$$

hay $M_0 \left[- \left(\frac{u_{12}}{2.1} + \frac{u_{13}}{3.2} + \frac{u_{14}}{4.3} + \dots \right) - \left(\frac{u_{24}}{4.3} + \frac{u_{25}}{5.4} + \frac{u_{26}}{6.5} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{36}}{6.5} + \frac{u_{37}}{7.6} + \frac{u_{38}}{8.7} + \dots \right) t^2 - \dots \right] +$

$$+ Q_0 l \left[- \left(\frac{u_{13}}{3.2} + \frac{u_{14}}{4.3} + \frac{u_{15}}{5.4} + \dots \right) - \left(\frac{u_{25}}{5.4} + \frac{u_{26}}{6.5} + \frac{u_{27}}{7.6} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{37}}{7.6} + \frac{u_{38}}{8.7} + \frac{u_{310}}{9.8} + \dots \right) t^2 - \dots \right] = \frac{EI_0}{l^2}$$

Theo (3.4), (3.5), (3.6):

$$y_z''(l) = 0 \Rightarrow y_\xi''(1) = 0 \Rightarrow$$

$$\mathcal{C}_1 [-(u_{12}+u_{13}+u_{14}+u_{15}+\dots)t - (u_{24}+u_{25}+u_{26}+u_{27}+\dots)t^2 - (u_{36}+u_{37}+u_{38}+u_{39}+\dots)t^3 - \dots]$$

$$+ \mathcal{C}_2 [-(u_{13}+u_{14}+u_{15}+u_{16}+\dots)t - (u_{25}+u_{26}+u_{27}+\dots)t^2 - (u_{37}+u_{38}+u_{39}+\dots)t^3 - \dots] = 0$$

hay

$$-c_0 [-(u_{12}+u_{13}+u_{14}+u_{15}+\dots) - (u_{24}+u_{25}+u_{26}+u_{27}+\dots)t - (u_{36}+u_{37}+u_{38}+u_{39}+\dots)t^2 - \dots]$$

$$-c_1 [-(u_{13}+u_{14}+u_{15}+u_{16}+\dots) - (u_{25}+u_{26}+u_{27}+\dots)t - (u_{37}+u_{38}+u_{39}+\dots)t^2 - \dots] = 0$$

hay

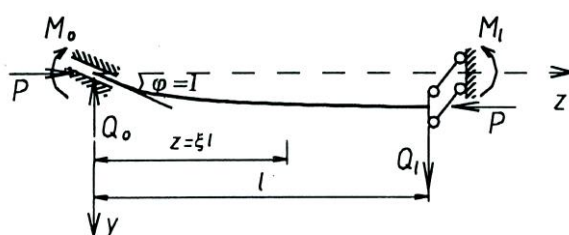
$$M_0 [-(u_{12}+u_{13}+u_{14}+u_{15}+\dots) - (u_{24}+u_{25}+u_{26}+u_{27}+\dots)t - (u_{36}+u_{37}+u_{38}+u_{39}+\dots)t^2 - \dots]$$

$$+ lQ_0 [-(u_{13}+u_{14}+u_{15}+u_{16}+\dots) - (u_{25}+u_{26}+u_{27}+\dots)t - (u_{37}+u_{38}+u_{39}+\dots)t^2 - \dots] = 0 \quad (d)$$

Từ 2 phương trình (c) và (d), ta có thể tìm được các phản lực đầu thanh M_0 và Q_0

2.4.2. Thanh có một đầu ngàm, một đầu ngàm trượt

2.4.2.1. Đầu ngàm xoay một góc bằng đơn vị (hình 3.5)



Hình 3.5

Điều kiện biên:

$$y(0)=0, Y'(0)=1$$

$$y'(l) = 0; Q_0=Q_1=0$$

- $Q_0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

Theo (2.19), ta có:

- $y(0) = 0 \Rightarrow \mathcal{C}_1 + \frac{c_0}{t} = 0 \Rightarrow \mathcal{C}_1 = -\frac{c_0}{t}$ (a)

Theo (3.1), (3.2), (3.3):

- $y'_z(0) = 1 \Rightarrow y'_\xi(0) = 1.l \Rightarrow \mathcal{C}_2 + \frac{c_1}{t} = l \Rightarrow \mathcal{C}_2 = l - \frac{c_1}{t} = 1$ (b)

- $y'_z(l) = 0 \Rightarrow y'_\xi(1) = 0 \Rightarrow$

$$\mathcal{C}_1 \left[-\left(\frac{u_{12}}{1} + \frac{u_{13}}{2} + \frac{u_{14}}{3} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{24}}{3} + \frac{u_{25}}{4} + \frac{u_{26}}{5} + \dots \right) t^2 - \left(\frac{u_{36}}{5} + \frac{u_{37}}{6} + \frac{u_{38}}{7} + \dots \right) t^3 - \dots \right] +$$

$$\mathcal{C}_2 \left[1 - \left(\frac{u_{13}}{2} + \frac{u_{14}}{3} + \frac{u_{15}}{4} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{25}}{4} + \frac{u_{26}}{5} + \dots \right) t^2 - \dots \right] + \frac{1}{t} c_1 = 0$$

hay

$$\mathcal{C}_1 \left[-\left(\frac{u_{12}}{1} + \frac{u_{13}}{2} + \frac{u_{14}}{3} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{24}}{3} + \frac{u_{25}}{4} + \frac{u_{26}}{5} + \dots \right) t^2 - \left(\frac{u_{36}}{5} + \frac{u_{37}}{6} + \frac{u_{38}}{7} + \dots \right) t^3 - \dots \right] +$$

$$+ \mathcal{C}_2 \left[1 - \left(\frac{u_{13}}{2} + \frac{u_{14}}{3} + \frac{u_{15}}{4} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{25}}{4} + \frac{u_{26}}{5} + \dots \right) t^2 - \dots \right] + \frac{1}{t} c_1 = 0$$

hay

$$-c_0 \left[-\left(\frac{u_{12}}{1} + \frac{u_{13}}{2} + \frac{u_{14}}{3} + \dots \right) - \left(\frac{u_{24}}{3} + \frac{u_{25}}{4} + \frac{u_{26}}{5} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{36}}{5} + \frac{u_{37}}{6} + \frac{u_{38}}{7} + \dots \right) t^2 - \dots \right] +$$

$$+ l \left[1 - \left(\frac{u_{13}}{2} + \frac{u_{14}}{3} + \frac{u_{15}}{4} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{25}}{4} + \frac{u_{26}}{5} + \dots \right) t^2 - \dots \right] = 0$$

Vậy

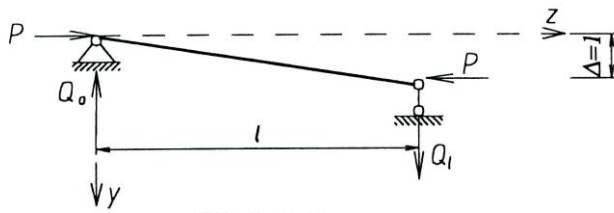
$$M_0 = \frac{-\frac{EI_0}{l} \left[1 - \left(\frac{u_{13}}{2} + \frac{u_{14}}{3} + \frac{u_{15}}{4} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{25}}{4} + \frac{u_{26}}{5} + \frac{u_{27}}{6} + \dots \right) t^2 - \dots \right]}{\left[-\left(\frac{u_{12}}{1} + \frac{u_{13}}{2} + \frac{u_{14}}{3} + \dots \right) - \left(\frac{u_{24}}{3} + \frac{u_{25}}{4} + \frac{u_{26}}{5} + \dots \right) t - \left(\frac{u_{36}}{5} + \frac{u_{37}}{6} + \frac{u_{38}}{7} + \dots \right) t^2 - \dots \right]}$$

2.4.3 Hai đầu thanh chuyển vị thẳng tương đối theo phương vuông góc với trục thanh một giá trị bằng đơn vị

Nếu đầu ngàm chuyển vị thì đầu ngàm trượt chuyển vị theo, trong hệ không phát sinh phản lực và nội lực.

Nếu đầu ngàm trượt chuyển vị thì thành làm việc như thanh có hai đầu bị ngàm.

2.4.4.2 Thanh có hai đầu khớp (hình 3.6)



Hình 3.6

Tìm phản lực ở hai đầu khi cho chuyển vị thẳng tương đối giữa hai đầu 1.

Xác định được ngay: $M(0) = M(l) = 0$

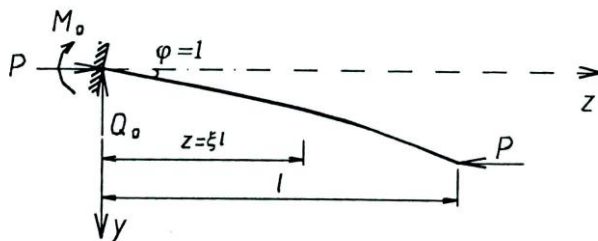
Để tính $Q(0)$, ta dùng phương trình cân bằng:

$$\sum M(l) = 0, \text{ ta được } Q_0 = -\frac{P \cdot l}{l} = -\frac{P}{l}$$

Ta thấy công thức này không phụ thuộc sự thay đổi của tiết diện cũng như vật liệu.

2.4.4. Thanh có một đầu ngàm, một đầu tự do (hình 3.7)

Đầu ngàm chịu chuyển vị xoay bằng đơn vị.



Hình 3.7

Điều kiện biên:

$$y'(0) = 1$$

$$M(l) = 0$$

$$Q_0 = Q_1 = 0$$

• $Q_0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$ (a)

Theo (3.1), (3.2), (3.3), ta có:

• $y'_z(0) = 1 \Rightarrow y'_\xi(0) = 1 \cdot l \Rightarrow \mathcal{C}_2 + \frac{c_1}{t} = l \Rightarrow \mathcal{C}_2 = l - \frac{c_1}{t} = 1$ (b)

Theo (3.4), (3.5), (3.6), ta có:

• $Ml = 0 \Rightarrow y''(l) = 0 \Rightarrow$

$$\mathcal{C}_1 [-(u_{12} + u_{13} + u_{14} + \dots)t - (u_{24} + u_{25} + u_{26} + \dots)t^2 - (u_{36} + u_{37} + u_{38} + \dots)t^3 - \dots] +$$

$$\mathcal{C}_2 [-(u_{13} + u_{14} + u_{15} + \dots)t - (u_{25} + u_{26} + u_{27} + \dots)t^2 - \dots] = 0$$

$$\text{Được } \mathcal{C}_1 = \frac{-l [-(u_{13} + u_{14} + u_{15} + \dots)t - (u_{25} + u_{26} + u_{27} + \dots)t^2 - \dots]}{-(u_{12} + u_{13} + u_{14} + \dots)t - (u_{24} + u_{25} + u_{26} + \dots)t^2 - (u_{36} + u_{37} + u_{38} + \dots)t^3 - \dots}$$

Ta có: $y''(0) = \mathcal{C}_1[-(u_{12})t] + \mathcal{C}_2 \cdot 0 = \mathcal{C}_1(-u_{12} \cdot t)$

Mà $M(0) = -EI_z \cdot y''(0) = -\frac{EI_0}{l^2} \cdot y''(0) = -\frac{EI_0}{l^2} \cdot \mathcal{C}_1(-u_{12} \cdot t) = \frac{EI_0}{l^2} \cdot \mathcal{C}_1 \cdot u_{12} \cdot t$

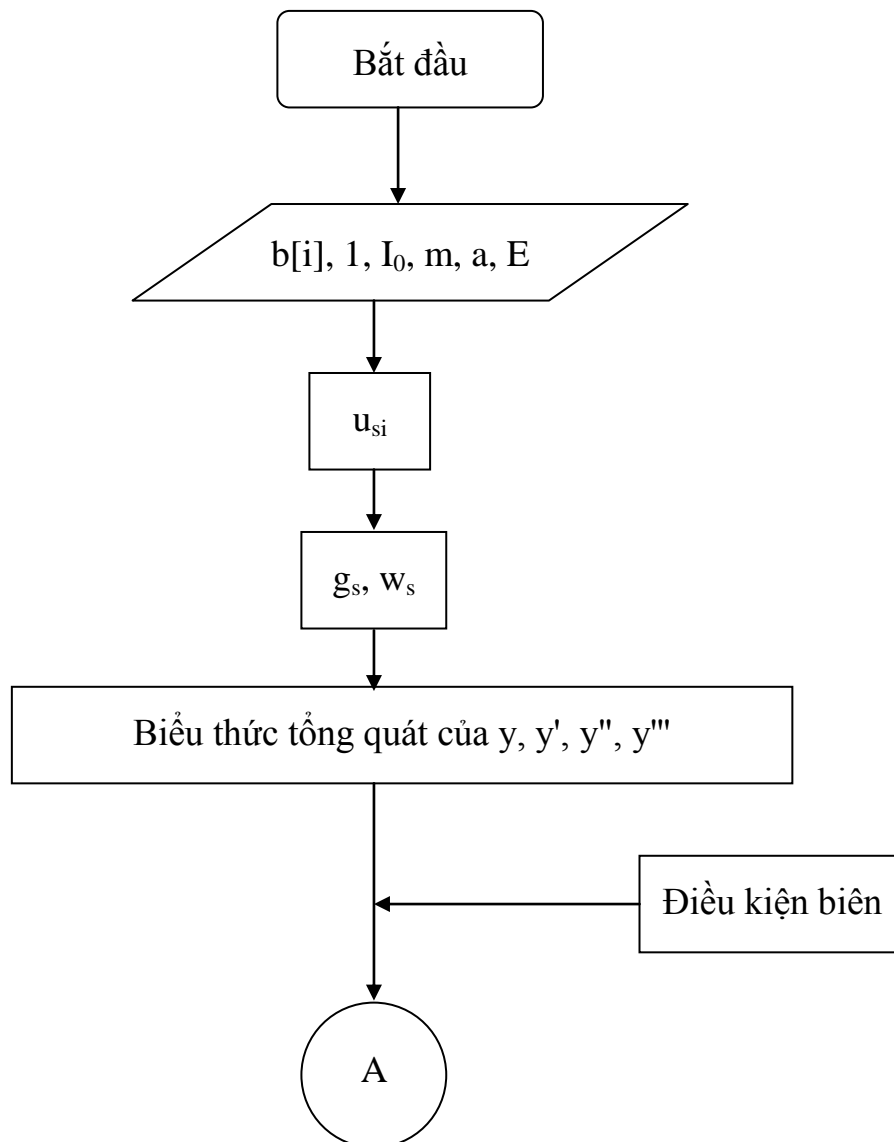
Vậy

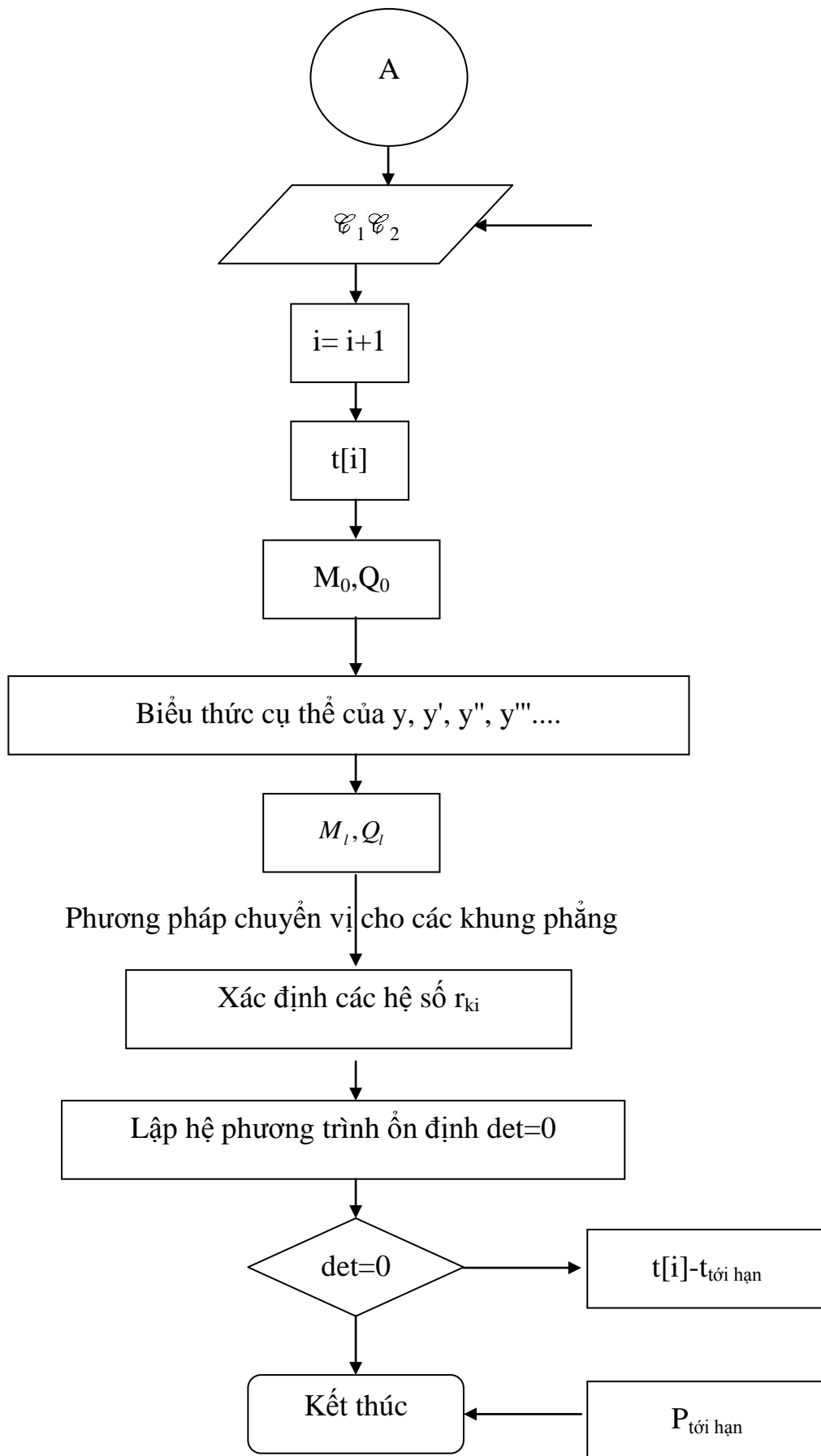
$M(0) =$

$$\frac{EI_0}{l^2} \cdot u_{12} \cdot t \cdot \frac{-l[-(u_{13} + u_{14} + u_{15} + \dots)t - (u_{25} + u_{26} + u_{27} + \dots)t^2 - \dots]}{-(u_{12} + u_{13} + u_{14} + \dots)t - (u_{24} + u_{25} + u_{26} + \dots)t^2 - (u_{36} + u_{37} + u_{38} + \dots)t^3 - \dots}$$

2.5. SƠ ĐỒ THUẬT TOÁN TÌM LỰC TỐI HẠN TRONG HỆ THANH CÓ TIẾT DIỆN THAY ĐỔI VÀ CHƯƠNG TRÌNH TÍNH TN01.

SƠ ĐỒ THUẬT TOÁN TÌM LỰC TỐI HẠN TRONG HỆ THANH CÓ TIẾT DIỆN THAY ĐỔI





Trên cơ sở sơ đồ thuật toán trên, chương trình tính TN01 được xây

dựng, có tính chất liên hoàn, thực hiện toàn bộ các quá trình trên sơ đồ: từ tìm các số hạng của chuỗi đến tìm được lực tới hạn. Chương trình này được viết theo ngôn ngữ Turbo PASCAL, thực hiện các nội dung đặc trưng bởi các chương trình con tương ứng:

1 Nhập dữ liệu và tính các số hạng của chuỗi nghiệm y , tìm các hệ số của đạo hàm cấp 1, 2, 3 của nó.

2 Tính các phản lực đầu thanh của các loại cấu kiện mẫu sử dụng trong phương pháp chuyển vị.

3 Tính các hệ số trong phương trình chính tắc và giải phương trình ổn định. Các hệ số này được lập cho một số khung tiêu biểu: khung 1 tầng - 1 nhịp, khung 1 tầng - 2 nhịp, chân cột liên kết ngàm hoặc khớp, đỉnh cột và dầm liên kết hàn hoặc khớp. Các khung này được giới thiệu ở phần ví dụ (mục 3.4).

Đối với bài toán kiểm tra ổn định của một thanh đơn có tiết diện thay đổi, chương trình đã thực hiện kiểm tra cho thanh có một đầu ngàm, một đầu tự do. Dữ liệu vào cũng tương tự như bài toán khung.

Kết quả chương trình đưa ra là giá trị t_{min} , P_{th} , và hệ số quy đổi chiều dài của thanh tương đương μ . (đối với bài toán thanh đơn). Chương trình đã được vận hành với các bài toán khung có số ẩn là 1, 2, 3 và 4 theo phương pháp chuyển vị. Phương trình ổn định được thiết lập tương ứng với các định thức cấp 1, 2, 3 và 4. Khi gặp một bài toán có nhiều ẩn hơn, hình dạng phức tạp hơn, ta sẽ thiết lập thêm một đoạn chương trình con tương ứng mà không đòi hỏi nhiều thời gian, thuật toán hoàn toàn tương tự như các bài toán đã giải nhưng định thức sẽ lớn hơn.

```

PROGRAM TN01;
USES      crt;
Var       ff:text;
          filename: string [20];
          i,j,s,m,n,a,h:integer;
          b,gg,ww,GP,G2,G3,WP,W2,W3:array[0..30]ofreal;
          D,DMo,DQo,Dl,DM1,DQ1,c,CMo,CQo,cĩ,CM1,CQ1,TT:array
;                                                [0..70] of real;
          u, g, V, w : array [ 1. . 25 , 1. . 8 0 ] of real;
          q,L,Jo,min,F,tuM,mau,tuQ,tuMl,maul,tuQl, z,t,pl,p2,
          k,y1,y2,yyl,yy2,beta,qk,mk,rkk,
          r11,r22,r33,r 4 4,r12,r13,r 14,r23,r24,r34, : real;
PROCEDURE DULIEU;{VAO DU LIEU VA TINH CAC SO HANG CUA
CHUOI}      BEGIN
          write ( ' ten file: '); readln(filename);
          assign (ff, filename) ; reset (ff) ,
          readln (ff,n);      readln(ff,m) ; readln(ff,a) ;
          readln (ff, L); readln (ff, Jo) ;
          for i:=1 to n do readln(ff,b[i]);      close(ff);
          {tinh cac so hang u cua yl}
          u [1, 2 ] :=1,
          s:=1; while i<=2*s-1 do u[s,i]:=0;
          for i:=2*s to 2*s+a do begin
          u [s,i]:=- (b[1]*u[s,i-1]+b[2]*u[s,i-2]+b[3]*u[s,i-3]
          +b[4]*u[i,s,i-4]) ;
          end;
          for s :=2 to m do
          for i:=2*s to 2*s+a do begin
          u [s,i:= -(b[1]*u[s,i-1]+b[2]*u [s,i-2]+b[3]*u[s,i-3]
          +b[4]*u[s,1-4]+u[s-1,i-2]/(((1-2)*(i-3))))); end;
          while i<=2*s-1 do u[s,i]:=0;
          for s:=1 to m do begin
          for i:=2*s to 2*s+a do begin
          writeln ('u [' ,s, ' , ' ,i, ' ] =' ,u [s,i]);

```

```

end;

end;

for s:=1 to m do begin
for i:=2*s to 2*s+a do begin
g [s, i] :=-u [s, i] / (i* (i-1) ) ;
writeln ('g[' ,s, ',' ,i, ']' =',g[s,i]);
end;

gg[s]:=0;GP[s]:=0;G2[s]:=0;G3[s]:=0;
for i:=2*s to 2*s+a do begin
{he so cua y1}      gg [s]      :=gg [s] +g[s,i] ;
{he so cua y'1}    GP [s]      :=GP [s ]-u[s,i]/(i-1),
{he so cua y"1}    G2 [s]      :=G2 [s]-u[s,i] ;
{he so cua y'''1}  G3 [s]      :=G3 [s] - (i-2) *u [s,i] ,
end;

writeln('gg [' , s, ']' =',gg [s]) ;
writeln      ('GP[' ,s,'] =',GP[s]);
writeln      ('G2' ,s,'] =',G2[s]);
writeln      ('G3 [' ,s,'] =',G3[s]);
end;

{tinh cac so hang V cua y2}
v[1,3]:=1;
s:=1,while i<=2*s do v[s,i]:=0;
for i:=2*s+2 to 2*s+a+1 do begin
v[s,ii:= -(b[1]*v[s,i-1]+b[2]*v[s,i-2]+b[3]*v[s,1-3]
+b[4]*v[s,i-4]);
end;

for s:=2 to m do
for i:=2*s+1 to 2*s+a+1 do begin
v[s,i]:= -(b[1]*v[s,i-1]+b[2]*v[s,i-2]+b[3]*v[s,i-3]
+b[4]*v[s,i-4]+v[s-1,i-2]/((1-2)*(i-3)));
end;

while i<=2*s do v[s,i]:=0;
for s:=1 to m do          begin
for i:=2*s+1 to 2*s+a+1 do begin
writeln ('v[' ,s, ',' ,i, ']' = w[s,i]);

```

```

end; end;

for s:=1 to m do begin
for i:=2*s+1 to 2*s+a+1 do begin
w[s,i]:=-v[s,i]/(i*(i-1) ) ;
writeln ('w[' ,s , ' ,i,'] ='/w[s,i]);
end;

ww[s]:=0,WP[s]:=0;W2 [s]:=0;W3 [s]:=0;
for i:=2*s+1 to 2*s+a+1 do begin
{ he so cua y2} ww[s] = ww [s] +w [s,i];
{ he so cua y'2} WP[s] = WP[s]-v[s,i]/(i-1);
{ he so cua y"2} W2[s] = W2[s]-v[s,i];
{ he so cua y""2} W3[s] = W3[s]-V[s,i]*(i-2);
end;

writeln('ww[' ,s,']=',ww[s]); writeln('WP
[' ,s,'] =', WP [s])
writeln('W2[' ,s,']=',W2[s]);
writeln('W3[' ,s,'] =',W3 [s]);
end;

q:=2e4*Jo/L; writeln('q=',q:12:5);
End;
PROCEDURE N_N_DELTA; Begin
{HAI DAU NGAM,tinh cac he so cua t bac n-nguyen
nhan cv thang}
D[i-1]:=0; begin
for i:=1 to m do begin for s:=1 to i do begin
D[i-1]:=D[i-1]+gg[s]*WP[-s+i+1]-GP[s]*ww[-s+i+1];end;
end;

for i:=m+1 to 2*m-1 do begin for s:=i-(m-1) to m do
begin
D [i-1 ] :=D[i-1]+gg[s] *WP [-s+i+1]-GP[s] *ww [-s+i+1] ; end;

```

```

end;
end;
for i: =1 to m do begin DMo [i - 1] := WP [i];
end;
while i > m do DMo begin DQo [i-1] := GP [i];
end;
while i > m do DQo [i-1] := 0; End;
PROCEDURE N_K_DELTA;      begin
  { dau ngam dau khop-tinh cac he so cua t bac n- nguyen nhan cv thang }
  c [i-1] :=0; begin
  for i : =1 to m do begin for s : =1 to i do begin
  c [ i-1] :=c [i-1] + gg [s] * W2 [-s + i + 1] - G2 [s] *ww [-s + i + 1]; end;
  end;
  for i : =m+1 to 2*m-1 do begin for s : = i - ( m-1)   to m do
  begin
  c [i-1] + gg [s] * W2 [ -s + i + 1] - G2 [ s ] * ww [ -s + i + 1];
  end;
  end;
  end;
  for i: =1 to m do begin  CMo [ i-1] := W2 [i]; end;
  while i>m do CMo [i-1] :=0;
  for i : =1 to m do begin CQo [i-1] := -G2 [I] ; end;
  while i>m do CQo [i -m] := 0; end;
PROCEDURE N_N_phi; Begin
  { HAI DAU NGAM - tinh cac he so cua t bac n-nguyen nhan cv xoay }
  D1[i-1] :=0; begin

```


CHƯƠNG 3
ỔN ĐỊNH CỦA KHUNG PHẪNG
VỚI CÁC CẤU KIỆN CÓ TIẾT DIỆN THAY ĐỔI

Như đã biết, khi nghiên cứu ổn định của các khung phẳng, để đơn giản hóa việc xác định lực tới hạn, ta có thể chấp nhận một số giả thiết sau:

4 Vật liệu của khung làm việc trong giới hạn đàn hồi.

5 Các nút của khung được xem là tuyệt đối cứng, chuyển vị của các đầu thanh quy tụ vào mỗi nút đều như nhau.

6 Bỏ qua biến dạng dọc trục và biến dạng trượt so với biến dạng uốn. Trước và sau biến dạng, chiều dài theo phương ban đầu của các thanh không đổi.

7 Khi xác định chuyển vị trong khung chỉ kể đến ảnh hưởng của biến dạng uốn và do lực dọc xuất hiện trước biến dạng gây ra. Ảnh hưởng của gia số lực dọc xuất hiện sau khi hệ mất ổn định bỏ qua.

8 Tải trọng tác dụng lên khung chỉ đặt ở các nút. Những tải trọng này chỉ gây hiện tượng kéo hoặc nén mà không gây ra hiện tượng uốn ngang trong các thanh của khung khi hệ chưa mất ổn định.

Đặc trưng cho sự thay đổi tiết diện của thanh có các thông số

$$b_1 = -3K; b_2 = 3k^2; b_3 = -k^3.$$

* n=4 (Hình 3.10d): Tiết diện tròn hoặc hình vuông.

$$\sqrt{\frac{I_A}{I_B}} \approx \sqrt{\left(\frac{d_A}{d_B}\right)^A} = (1-k)^2;$$

Cho tiết diện tròn: $I_0 = I_B = \frac{\pi d_B^4}{64}$

$$I(z) = \frac{\pi d(z)^4}{64} = \frac{\pi d_B^4 (1 - k\zeta)^4}{64} = I_0 (1 - k\zeta)^4$$

Đặc trưng cho sự thay đổi tiết diện của thanh có các thông số

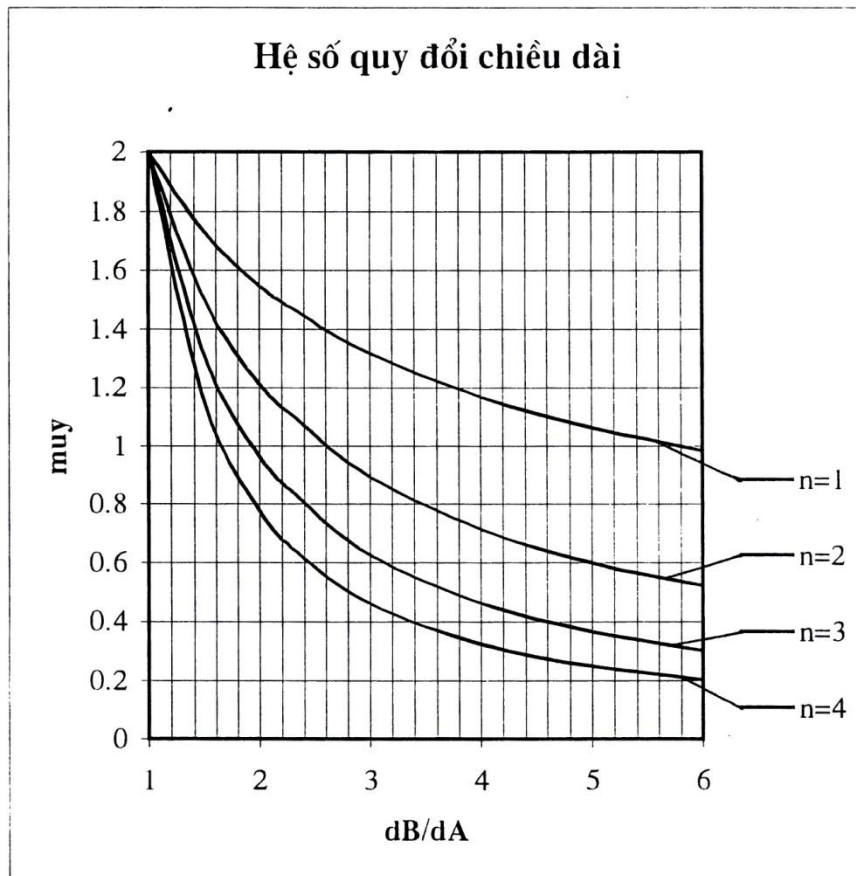
$$b_1 = -4k; b_2 = 6k^2; b_3 = -4k^3; b_4 = k^4.$$

Để thực hiện vẽ toán đồ xác định hệ số quy đổi chiều dài cho cột ở hình 3.9, ví dụ thực hiện tính toán trên một loạt các thanh với tiết diện thay đổi, n nhận các giá trị 1, 2, 3, 4 tỷ số $\frac{d_B}{d_A}$ biến đổi từ 1 đến 6. Chương trình đòi hỏi khai báo tỷ số này, từ đó chương trình tính được các hệ số đặc trưng cho sự thay đổi tiết diện b_i . Thuật toán thực hiện như trên hình 2.2. Với mỗi số một cặp $\left(n, \frac{d_B}{d_A}\right)$, chương trình tính TN01 tìm được một giá trị t_{\min} , P_{th} , μ . Nhận được các giá trị của μ , ta thực hiện vẽ toán đồ cho cột.

Kết quả tính toán μ , được thể hiện ở bảng 3.1

Bảng 3.1

d_B/d_A	n=4	n=3	n=2	n=1
1	2	2	2	2
1.5	1.14136	1.303	1.4699	1.726
2	0.77426	0.9608	1.21	1.5469
2.333	0.623	0.8255	1.0876	1.4587
3	0.457	0.62459	0.89058	1.3157
4	0.32072	0.4607	0.71196	1.167
5	0.247	0.36456	0.5963	1.0613
6	0.2018	0.30123	0.5196	0.9805



Thực hiện vẽ toán đồ bằng phương pháp vẽ đồ thị trong chương trình EXCEL.

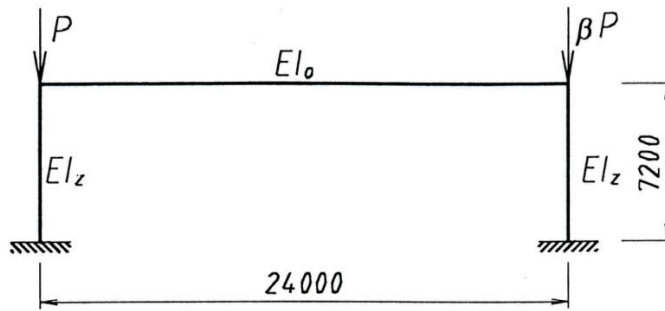
Với các thanh có liên kết khác ở hai đầu, tùy thuộc điều kiện biên, ta cũng thực hiện tương tự như ví dụ trên sẽ vẽ được toán đồ tương ứng.

So sánh với tài liệu [7], ta có nhận xét sau:

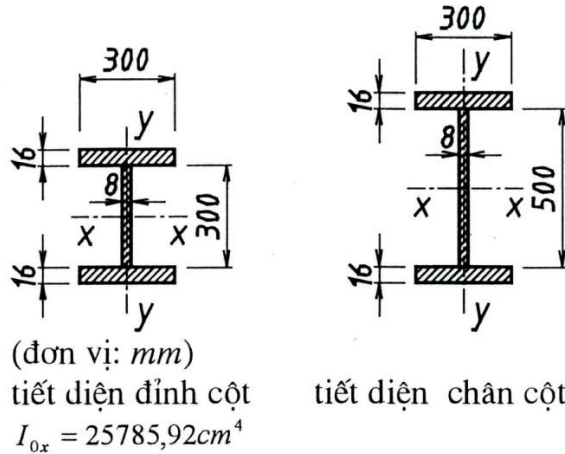
Tại hữu hạn điểm đã khảo sát, giá trị của hệ số quy đổi chiều dài tính được có thể coi trùng khít với các giá trị ở [7] cung cấp, cho thấy kết quả từ phương trình tính TN01 là đáng tin cậy.

3.1.1. Ví dụ về khung với các thanh có tiết diện thay đổi

Ví dụ 3.1: Tìm lực tới hạn của hệ khung một tầng một nhịp:



Hình 3.13



Cột có tiết diện thay đổi, thép tổ hợp hình chữ I như ở hình vẽ 3.13. Tiết diện ở đỉnh cột và các thanh ngang là I_0 .

Chiều cao tiết diện cột là thay đổi tuyến tính theo chiều dài thanh; các kích thước khác không đổi.

Thì có môđun đàn hồi: $E=20000 \text{ kN/cm}^2$.

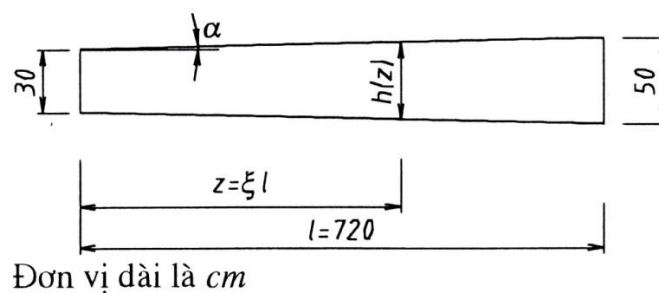
Phân tích bài toán với hai trường hợp:

a) $\beta = 2$

b) $\beta = 4$

Xét thanh đứng 9cootj), tìm quy luật biến thiên của tiết diện:

Gọi chiều cao của bụng là $j(z)$.



Hình 3.14

$$h(z) = 30 + 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot z = 30 + 2 \cdot \frac{50 - 30}{2 \cdot l} \cdot \xi \cdot l = 30 + 20 \xi ;$$

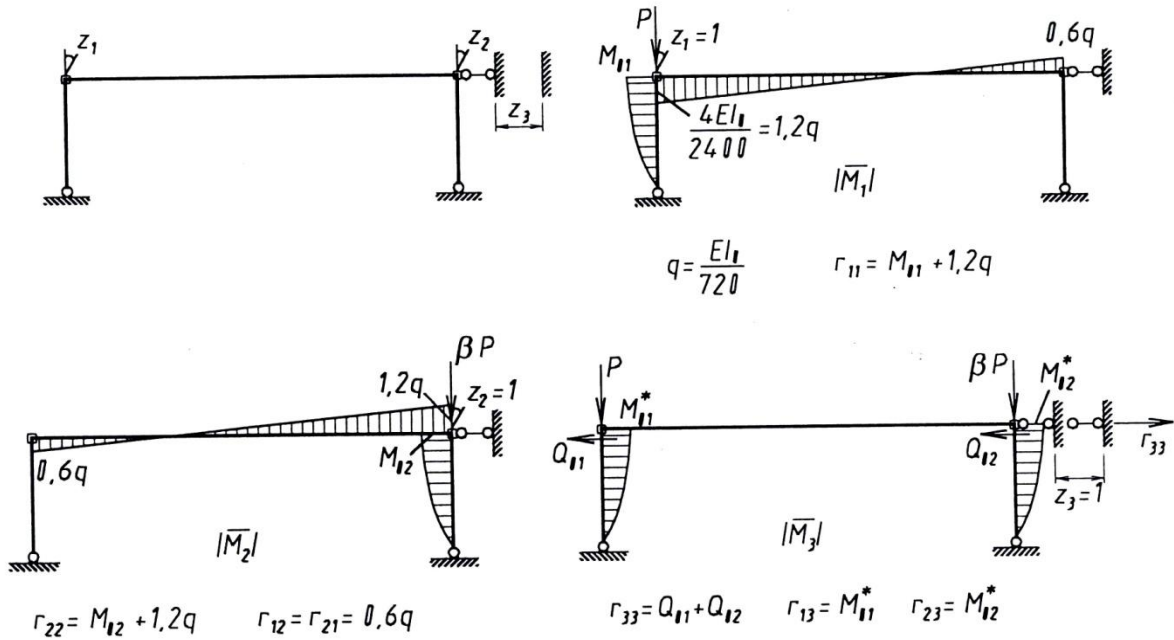
$$I(z) = \frac{0,8 \cdot h(z)^3}{12} + 2 \left[\frac{30 \cdot 1,6^3}{12} + 30 \cdot 1,6 \cdot \left(\frac{h(z) + 1,6}{2} \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{0,8 \cdot (30 + 20\zeta)^3}{12} + 96 \left[\frac{1,6^2}{12} + \left(\frac{(30 + 20\zeta) + 1,6}{2} \right)^2 \right] =$$

$$= 25785,92(1 + 1,31607\zeta + 0,4654\zeta^2 + 0,02\zeta^3)$$

Vậy, thanh đứng có $I_0 = 25785,92 \text{cm}^4$, $b_1 = 1,31607$; $b_2 = 0,4654$; $b_3 = 0,02$.

Theo phương pháp chuyển vị, hệ có 3 ẩn số:



Trong đó:

M_{01} là phản lực mômen uốn tại đầu thanh đứng bên trái khi hệ cơ bản chịu chuyển vị xoay $z_1 = 1$.

M_{02} là phản lực mômen uốn tại đầu thanh đứng bên trái khi hệ cơ bản chịu chuyển vị xoay $z_2 = 1$.

Q_{01} , Q_{02} , và M_{01}^* , Q_{02}^* là phản lực vuông góc với trục thanh ban đầu và mômen uốn tại đầu thanh đứng bên trái và bên phải khi hệ cơ bản chịu chuyển vị thẳng $z_3 = 1$.

Phương trình ổn định:

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Giải phương trình ổn định trên với ẩn số là t , ta sẽ tìm được lực tới hạn P .

a) Giải khi $\beta = 2$

Áp dụng chương trình tính TN01, ta tính được $t = 5,592603$, hay $P_{th} = 5566,3\text{kN}$. So sánh với kết quả tính từ phương pháp Phần tử hữu hạn, thể hiện trong bảng 3.2.

Bảng 3.2

Theo TN01	Theo phương pháp Phần tử hữu hạn	
	Theo SAP2000	Theo STRAND6
$P_{th} = 5566.3\text{kN}$	$P_{th} = 5545\text{kN}$	$P_{th} = 5690\text{kN}$
Độ lệch (%)	0.995	2.7%

b) Giải khi $\beta = 4$

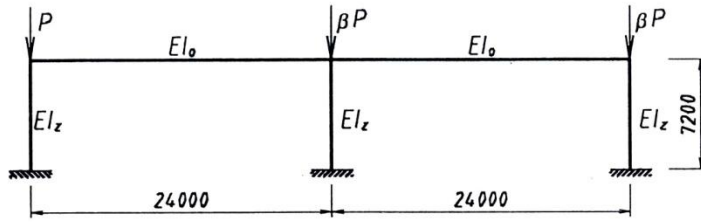
Áp dụng chương trình tính TN01 tìm được $t=3.334939$, hay $P_{th} = 3317,7\text{kN}$. So sánh với kết quả tính từ phương pháp Phần tử hữu hạn, thể hiện trong bảng 3.3

Bảng 3.3

Theo TN01	Theo phương pháp Phần tử hữu hạn	
	Theo SAP2000	Theo STRAND6
$P_{th} = 3317.7\text{kN}$	$P_{th} = 3285\text{kN}$	$P_{th} = 3410\text{kN}$
Độ lệch (%)	0.995%	2.7%

Ví dụ 3.2: Tìm lực tới hạn cho hệ khung 1 tầng 2 nhịp:

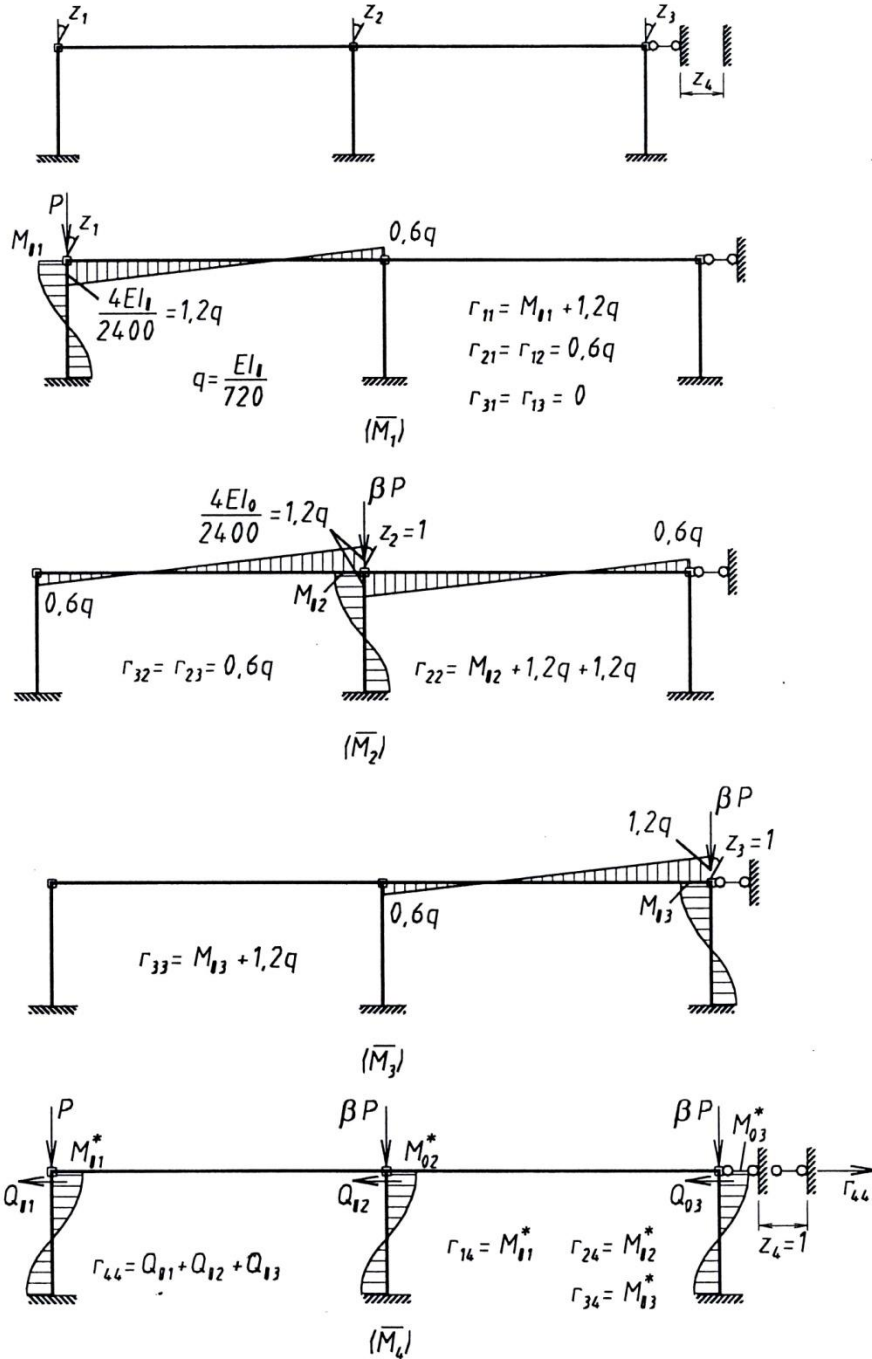
Kích thước các thanh giống như ở ví dụ 3.1.



Giải bài toán với $\beta = 2$

Số ẩn số: $n = 4$

Hình 3.15



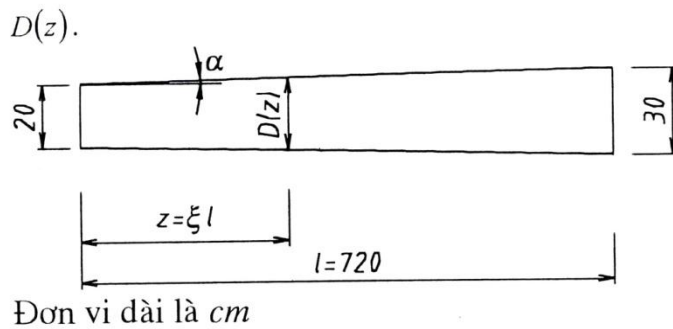
Phương trình ổn định:

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{vmatrix} = 0$$

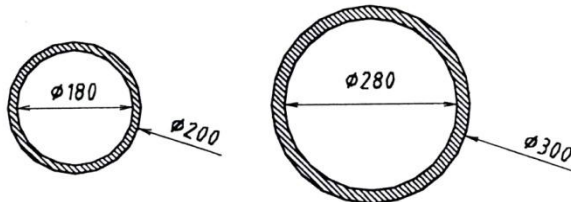
Áp dụng chương trình TN01 được $t=5.4199276$, hay $P = 5381,89\text{kN}$. So sánh với kết quả tính từ SAP2000, ta được lực tới hạn $P = 5345\text{kN}$ hay $t = 5.37279$, sai số là $0,877\%$.

Ví dụ 3.3: Tìm lực tới hạn cho khung đã xét ở ví dụ 3.1, các thanh bằng thép có tiết diện hình ống (hình 3.16).

Tìm quy luật biến thiên của tiết diện: Gọi đường kính ngoài của tiết diện là $D(z)$.



Hình 3.16



chiều dày ống $\delta=10\text{mm}$

tiết diện đầu thanh
 $I_0 = 2700,984\text{cm}^4$

tiết diện cuối thanh

$$D(z) = 20 + 2tg\alpha.z = 20 + 2 \cdot \frac{30-20}{2.l} \zeta.l = 20 \left(1 + \frac{\zeta}{2} \right) (cm)$$

Tại tiết diện có hoành độ z , đường kính trong là:

$$20 \left(1 + \frac{\zeta}{2} \right) - 2 = 18 + 10\zeta = 18 \left(1 + \frac{10}{18} \zeta \right) (cm) \text{ do đó:}$$

$$I(\zeta) = \frac{\pi}{64} \left(20^4 \left(1 + \frac{\zeta}{2} \right)^4 - 18^4 \left(1 + \frac{10}{18} \zeta \right)^4 \right)$$

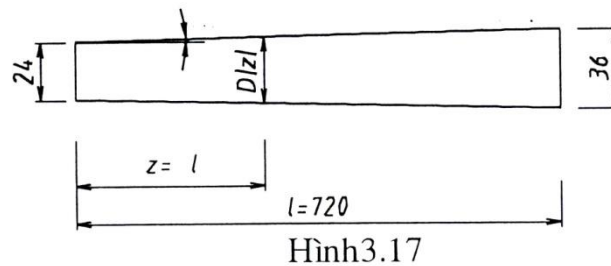
$$I(\zeta) = 2700,984(1 + 1,576039546\zeta^2 + 0,145391102\zeta^3)$$

Như vậy, các hệ số của quy luật biến tiết diện như sau:

$$I_0 = 2700,984\text{cm}^4; b_1 = 1,576039546; b_2 = 0,828729281; b_3 = 0,145391102$$

Thực hiện các bước tương tự trong ví dụ 1, chỉ thay đổi các lượng I_0, b_1, b_2, b_3 . Kết quả từ TN01 cho $t = 6,3098387013$, tương đương với $P = 669,7\text{kN}$. So sánh với kết quả tính từ SAP2000, ta được lực tới hạn $P = 655,5\text{kN}$ hay $t = 6,290516775$, sai số là 0,3%.

Ví dụ 3.4: Tìm lực tới hạn của khung có dạng đã xét ở ví dụ 3.1, vật liệu và tiết diện thanh như sau:



Thanh có tiết diện đặc hình vuông.

Tiết diện đầu thanh: 24x24(cm)

Tiết diện cuối thanh: 36x36 (cm)

Vật liệu bê tông có môđun đàn hồi: $E = 2500\text{kN/cm}^2$.

$$D(z) = 24 + 2tg\alpha \cdot z = 24 + 2 \cdot \frac{36-24}{2 \cdot l} \zeta \cdot l = 24 \left(1 + \frac{\zeta}{2} \right)$$

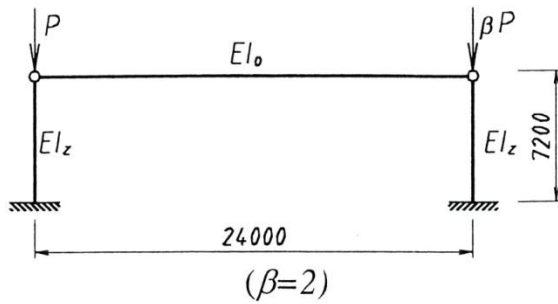
$$I(\zeta) = \frac{24^4 \left(1 + \frac{\zeta}{2} \right)^4}{12} = 27648(1 + 2\zeta + 1,5\zeta^2 + 0,5\zeta^3 + 0,0625\zeta^4)$$

Vậy, thanh có $I_0 = 27648\text{cm}^4$; $b_1 = 2, b_2 = 1,5, b_3 = 0,5; b_4 = 0,0625$

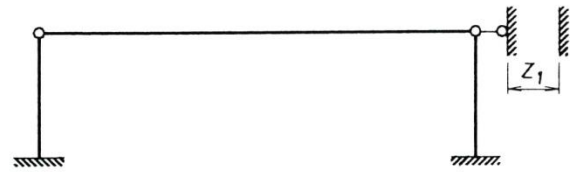
Giải các bước giống như ví dụ 3.1, chỉ thay đổi các lượng I_0, b_1, b_2, b_3, b_4 . kết quả từ TN01 cho $t = 7,587496286$, tương đương $P = 1011,6\text{kN}$. So sánh với kết quả tính từ SAP2000, ta được lực tới hạn $P = 1006\text{kN}$ hay $t = 7,545$, sai số là 0,56 %.

Ví dụ 3.5: Tìm lực tới hạn cho hệ khung 1 tầng 1 nhịp kích thước đã xét ở ví dụ 1, đỉnh cột liên kết khớp với dầm ngang (hình 3.18).

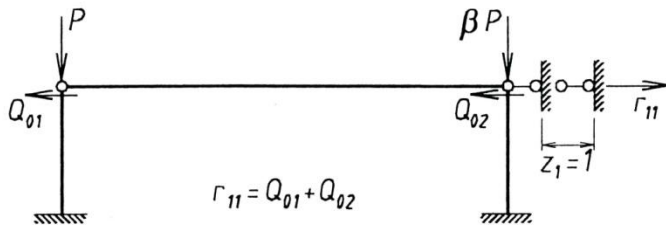
Trong trường hợp này, các thông số liên quan đến các tiết diện đã tìm được trong ví dụ 1 như: I_0, E, b_1, b_2, b_3 .



Hình 3.18



Bài toán có 1 ẩn số là chuyển vị ngang của đỉnh cột.



Hình 3.19

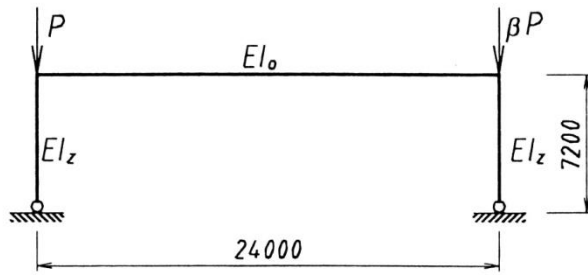
Phương trình chính tắc:
 $D = r_{11} = 0$

Vận dụng chương trình TN01, ta được $t = 3,356728235165$ hay $P_{th} = 3339,36\text{kN}$. So sánh với kết quả từ phương pháp phân tử hữu hạn: $t = 3,3475161$ hay $p_{th} = 3330, \text{kN}$ ta thấy sai số là 0,2%.

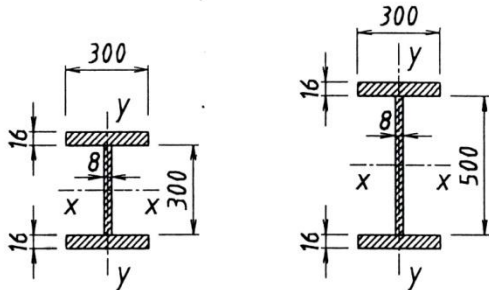
Ví dụ 3.6: Tìm lực tới hạn cho hệ khung một tầng một nhịp với các chân cột liên kết khớp (hình 3.20).

Ta sẽ giải bài toán này với hai trường hợp:

- a) $\beta = 2$
- b) $\beta = 4$



Hình 3.20



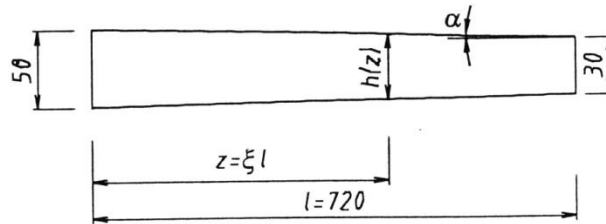
Hình 3.21

tiết diện chân cột

tiết diện đỉnh cột và

dầm ngang, có $I_{0x} = 72255,2533 \text{ cm}^4$

Tìm quy luật biến thiên của tiết diện: Gọi chiều cao của bản bụng là $h(z)$.



Đơn vị dài là cm

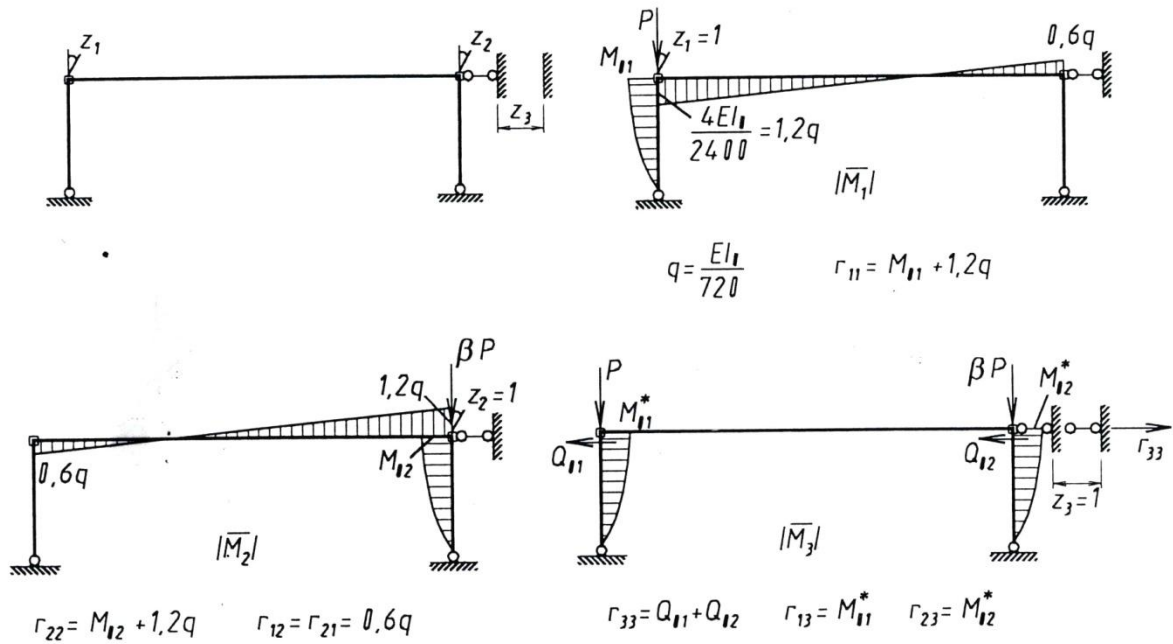
$$h(z) = 50 - 2tg\alpha \cdot z = 50 + 2 \cdot \frac{50-30}{2l} \zeta \cdot l = 50 - 20\zeta$$

$$\begin{aligned} I(z) &= \frac{0,8 \cdot h(z)^3}{12} + \left[\frac{30 \cdot 1,6^3}{12} + 30 \cdot 1,6 \cdot \left(\frac{h(z) + 1,6}{2} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{0,8 \cdot (50 - 20\zeta)^3}{12} + 96 \left[\frac{1,6^2}{12} + \left(\frac{(50 - 20\zeta) + 1,6}{2} \right)^2 \right] = \\ &= 72255,2533(1 - 0,82396777\zeta + 0,188221608\zeta^2 - 0,007381193\zeta^3) \end{aligned}$$

Vậy, thanh trên có

$$I_0 = 72255,2533 \text{ cm}^4; b_1 = -0,82396777; b_2 = 0,188221608; b_3 = -0,007381193.$$

Theo phương pháp chuyển vị, hệ có 3 ẩn số:



$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Giải phương trình ổn định trên với ẩn số là t , ta sẽ tìm được lực tới hạn P .

a) Khi $\beta = 2$

Áp dụng chương trình tính trong TN01, ta tính được $t=0,645027789$, hay $P_{th}=1798,1kN$. So sánh với kết quả tính từ phương pháp phần tử hữu hạn (ứng dụng SAP2000), ta được lực tới hạn $P_{th} = 1769,5kN$ hay $t=0,634769244$, sai số là 1,6%.

b) Khi $\beta = 4$

Áp dụng TN01 được $t=0,3861792216$, hay $P_{th} = 1059,4kN$ hay $t= 0,3800367$, sai số là 1,6%.

CHƯƠNG 4

KẾT LUẬN

I. NHỮNG KẾT QUẢ ĐẠT ĐƯỢC

1. Luận văn đã sử dụng chuỗi nguyên để giải bài toán uốn ngang cùng với uốn dọc, bài toán ổn định của hệ thanh với các phần tử thanh có tiết diện thay đổi. Các chuỗi nguyên được dùng để biểu đạt cho quy luật thay đổi của tiết diện thanh, các nghiệm của phương trình vi phân đường đàn hồi.

2. Để áp dụng phương pháp chuyển vị kiểm tra ổn định của khung phẳng với các phần tử thanh có tiết diện thay đổi, trong luận văn đã phân tích các cấu kiện mẫu. Đó là thanh có tiết diện thay đổi, tương ứng với các dạng liên kết khác nhau ở hai đầu, chịu chuyển vị cưỡng bức gối tựa và lực nén trục.

Từ biểu thức dưới dạng chuỗi của các nghiệm là phản lực tại các đầu thanh, lập phương trình ổn định cho khung bất kỳ để tìm lực tới hạn. Đã lập chương trình TN01 để thực hiện tính toán liên tục từ khâu xác định phản lực đến giải phương trình ổn định. Chương trình đã được vận hành để tìm lực tới hạn cho các khung 1 tầng 1 nhịp, 1 tầng 2 nhịp trong đó các thanh có độ cứng thay đổi theo luật bậc 2, 3, 4, liên kết ở đầu thanh khác nhau. Độ chính xác của chương trình được đánh giá thông qua kết quả so sánh với các bài toán tương ứng thực hiện trên SAP2000 và STRAND6.

II. KHẢ NĂNG ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG PHÁP

Qua kết quả đã trình bày trên đây cho thấy:

- Cách tính có thể áp dụng cho các hệ thanh với các phần tử có mặt cắt biến đổi liên tục bất kỳ sau khi vận dụng chuỗi Taulor để đưa quy luật biến thiên của I về dạng chuỗi nguyên.

- Bước đầu, chương trình TN01 có thể áp dụng để kiểm tra ổn định cho 1 số thanh và khung điển hình thường gặp trong thực tế. Khi gặp bài toán khung có hình dạng mới, liên kết mới thì việc lập chương trình con để tìm nghiệm của

phương trình ổn định cũng dễ dàng không đòi hỏi nhiều thời gian, bổ sung vào chương trình chính cho phong phú thêm.

- Thuật toán và chương trình nguyên dụng TN01 kiến nghị đã được vận hành thuận lợi và được kiểm chứng thông qua một số ví dụ. Do đó hy vọng là đủ độ tin cậy để được áp dụng trong thực tế

- Có thể lập bảng hoặc toán đồ để xác định lực tới hạn cho các bài toán thanh đơn có tiết diện thay đổi thường gặp.

III. HƯỚNG PHÁT TRIỂN SAU LUẬN VĂN

Do thời gian và khuôn khổ của luận văn, một số vấn đề sau cần được tiếp tục nghiên cứu và phát triển trên cơ sở các kết quả đạt được:

1. Xây dựng thêm các toán đồ hoặc bảng tra thực hành để tìm hệ số quy đổi chiều dài tương đương μ cho một số loại thanh đơn thường gặp trong thực tế thiết kế kết cấu công trình.

2. Đối với bài toán ổn định của hệ thanh với các thanh có tiết diện thay đổi, nghiên cứu việc áp dụng phương pháp Phần tử hữu hạn để xây dựng chương trình tính tổng quát có thể tính cho hệ thanh bất kỳ.

Tài liệu tham khảo

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

1. *EMPREP M.A MriAHOBKO %r.* (1977), Sổ tay cơ học, bản dịch của Nguyễn Thành Bang, Phạm Nguyên Long, Trần Trung Tiến, NXB Khoa học kỹ thuật Hà Nội.
2. Lê Văn Mai (1991), " Một phương pháp giải bài toán ổn định các công trình", Tuyển tập báo cáo Hội nghị Khoa Học Toàn quốc Cơ học vật rắn biến dạng, tr.136-144.
3. Lê Thọ Trình - Đỗ Văn Bình (2002), ổn định công trình, NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà nội.
4. Lê Thọ Trình - Đỗ Văn Bình (1980), " ổn định của thanh có tiết diện thay đổi", Tuyển tập các công trình của Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ hai, Viện Khoa học Việt Nam, tr.96-103
5. Xtiphen P. Timôsenko (1976), ổn định đàn hồi, Bản dịch của Phạm Hồng Giang, Vũ Thành Hải, Nguyễn Khải , Đoàn Hữu Quang, NXB Khoa học Kỹ thuật, Hà nội.

Tiếng Anh

6. CSI- Computers and structures, Inc.(1998),SAP2000 Analysis Reference Volume 1, Computers and structures, Inc., University of Calornia, Berkeley, USA.

Tiếng Đức

7. Petersen, C.(1992), Statik und Stabilitaet der Baukonstruktionen, Vieweg.

Tiếng Nga