BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC DÂN LẬP HẢI PHÒNG

ĐẶNG HOÀNG LONG

NGHIÊN CỨU ỔN ĐỊNH ĐÀN HỒI CỦA THANH BẰNG PHƯƠNG PHÁP MA TRẬN ĐỘ CỨNG ĐỘNG LỰC

Chuyên ngành: **Kỹ thuật Xây dựng Công trình Dân dụng và Công nghiệp**
MÃ SỐ: 60.58.02.08

LUẬN VĂN THẠC SĨ KỸ THUẬT

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS. TS. NGƯT. TRẦN HỮU NGHỊ

Hải phòng, 2015

LỜI CẢM ƠN

Trong thời gian làm Luận văn tốt nghiệp, em đã nhận được nhiều sự giúp đỡ, đóng góp ý kiến và chỉ bảo nhiệt tình của thầy cô và bạn bè.

Em xin gửi lời biết ơn sâu sắc đến GS.T.S.NGƯT **Trần Hữu Nghị** Hiệu Trưởng trường DHDL Hải Phòng,T.S **Đoàn Văn Duẩn** giảng viên trường ĐHDL Hải Phòng những người đã tận tình hướng dẫn, chỉ bảo em trong suốt quá trình làm bài luận văn tốt nghiệp .

Em cũng xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo trong trường ĐHDL Hải Phòng nói chung và các thầy cô Khoa Xây Dựng trường DHDL Hải Phòng nói riêng đã cùng với tri thức và tâm huyết của mình để truyền đạt cho em kiến thức về các môn đại cương cũng như các môn chuyên ngành,giúp em có được cơ sở lý thuyết vững vàng và tạo điều kiện giúp đỡ em trong suốt quá trình học tập.

Cuối cùng, em xin chân thành cảm ơn gia đình và bạn bè, đã luôn tạo điều kiện, quan tâm, giúp đỡ, động viên em trong suốt quá trình học tập và hoàn thành bài luận văn tốt nghiệp.

Hải Phòng, ngày 12 tháng 12 năm 2015

Tác Giả Luận Văn

Đặng Hoàng Long

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan luận văn "**Nghiên cứu ổn định đàn hồi của thanh bằng phương pháp ma trận độ cứng động lực** " là công trình nghiên cứu của bản thân, được thực hiện trên cơ sở nghiên cứu, tính toán dưới sự hướng dẫn khoa học của GS.T.S **Trần Hữu Nghị .**

Các số liệu trong luận văn có nguồn trích dẫn, kết quả trong luận văn là trung thực và chưa từng được công bố trong các công trình khác .

MỤC LỤC :

DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU 7

DANH MỤC CÁC HÌNH VẼ 8

LỜI MỞ ĐẦU 10

CHƯƠNG 1 11

TỔNG QUAN 11

1.1. Các khái niệm ổn định và mất ổn định 11

1.1.1. Định nghĩa ổn định công trình 11

1.1.2. Định nghĩa ổn định chuyển động theo Liapunov 13

1.2. Các khái niệm 13

1.3. Các tiêu chuẩn cân bằng ổn định 15

13.1. Tiêu chuẩn dưới dạng tĩnh học 15

1.3.2. Tiêu chuẩn dưới dạng động lực học 18

1.3.3.Phạm vi sử dụng các tiêu chuẩn ổn định 22

1.4.Phương pháp ma trận độ cứng động lực 23

1.4.1. Khái niệm ma trận độ cứng động lực 23

1.4.2.Phương pháp ma trận độ cứng động lực cho kết cấu 25

1.4.3.Các bài toán phân tích kết cấu bằng phương pháp MTĐCĐL 25

1.4.4. Sơ đồ khối của phương pháp MTĐCĐL (sơ đồ 1.4.1)..... 27

1.4.5. Ma trận độ cứng động lực của phần tử thanh thẳng chịu uốn 27

1.5. Nghiên cứu về ứng dụng phương pháp MTĐGĐL vào việc tính toán ổn định hệ không bảo toàn trên thế giới và ở Việt nam 31

1.5.1.Ổn định của hệ không bảo toàn 31

1.5.2. Phương pháp ma trận độ cứng động lực..... 31
1.5.3. Về ứng dụng phương pháp ma trận độ cứng động lực trong tính toán ổn định của hệ đàn hồi chịu lực không bảo toàn..... 32
1.6.Kết luận chương 1..... 33
CHƯƠNG 2 34
GIẢI BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH CỦA THANH BẰNG PHƯƠNG PHÁP MA TRẬN ĐỘ CÚNG ĐỘNG LỰC 34
2.1. Ổn định thanh chịu nén bởi lực có phương thẳng đứng (lực bảo toàn)34
2.1.1. Phương pháp giải tích 34
2.1.2. Phương pháp ma trận độ cứng động lực..... 36
2.1.3. Xác định lực tới hạn 39
2.2.Ổn định của thanh chịu nén bởi lực đuổi (lực không bảo toàn)..... 40
2.2.1. Phương pháp giải tích 40
2.2.2. Phương pháp ma trận độ cứng động lực 41
2.2.3. Xác định lực tới hạn 44
2.3 Ảnh hưởng của sự phân bố khối lượng tới giá trị lực tới hạn của thanh chịu nén bởi lực đuổi 46
2.3.1. Phương pháp giải tích 46
2.3.2. Phương pháp ma trận độ cứng động lực..... 47
2.4. Ổn định của thanh chịu nén bởi lực có đường tác dụng không đổi 50
2.4.1.Phương pháp giải tích 50
2.4.2.Phương pháp ma trận độ cứng động lực..... 51
2.5. Kết luận chương 2..... 53
CHƯƠNG 3 54

PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH CỦA KẾT CẤU HỆ THANH CHỊU LỰC KHÔNG BẢO TOÀN BẰNG PHƯƠNG PHÁP MA TRẬN ĐỘ CỨNG ĐỘNG LỰC 54
3.1. Sơ đồ phân tích ổn định của các kết cấu thanh theo phương pháp ma trận độ cứng động lực 54
3.1.1. Sơ đồ khối 54
3.2. Ổn định của kết cấu thanh đơn giản có độ cứng không đổi 55
3.3. Ổn định của thanh có độ cứng thay đổi từng bậc 58
3.4. Ổn định của kết cấu hệ thanh 63
3.5. Kết luận chương 3 67
KẾT LUẬN CHUNG 68
TÀI LIỆU THAM KHẢO 70

DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU

Ký hiệu	Đại lượng
$\mathtt{P}_{\mathtt{th}}$	**Lực tới hạn.**
$\mathtt{P}$	**Lực tập trung**
M	**Mômen uốn**
N	**Lực dọc**
Q	**Lực cắt**
σ	**Ứng suất pháp**
τ	**Ứng suất tiếp**
F	**Diện tích mặt cắt**
E	**môđun Đàn Hồi**
G	**Modun trượt**
J	**Mô men quán tính tiết diện**
EJ	**Độ cứng uốn của tiết diện dầm**
V	**Chiều dài dầm hoặc diện tích tấm**
U^*	**Thế năng toàn phần**
U	**Thế năng biến dạng của nội lực**
U_P	**Thế năng của ngoại lực**
m	**Khối lượng chất điểm**
ρ	**Khối lượng đơn vị**
Ω	**Chiều dài hoặc diện tích phạm vi đặt lực**
$\mathbf{r}_i$	**Vectơ tọa độ**
$\dot{r}_i$	**Vectơ vận tốc**
$\ddot{r}_i$	**Vectơ gia tốc**
Z	**Lượng cưỡng bức**
k	**Độ cứng lò xo**
χ	**Độ cong của thanh**
$\lambda(x)$	**Nhân tử Lagrange**

ε	**Biến dạng của vật liệu**
δ	**Biến phân**
θ	**Biến dạng thể tích**
x	**BiÕn d¹ng uèn (®é cong ®-ên ®µn håi)**
μ, λ	**Hệ số Lamé**
ν	**Hệ số Poisson**
u	**Chuyển vị theo trục x**
Z	**Lượng cưỡng bức**
D	**Độ cứng uốn**
$D(1-\nu)$	**Độ cứng xoắn**

DANH MỤC CÁC HÌNH VẼ

Ký hiệu	Nội Dung
Hình 1.1.1	**Mất ổn định loại 1**
Hình 1.1.2	**Mất ổn định loại 2**
Hình 1.2.1	**Lực bảo toàn và lực không bảo toàn**
Hình 1.2.2	**Lực không bảo toàn (Lực đuổi)**
Hình 1.3.1	**Ví dụ về thanh chịu nén lệc tâm**
Hình 1.4.1	**Sơ đồ khối của phương pháp MTĐCĐL**
Hình 1.4.2	**Ví dụ về thanh thẳng chịu uốn**
Hình 1.4.3	**Ví dụ về thanh thẳng chịu uốn**
Hình 2.1.1	**Thanh chịu nén bởi lực bảo toàn theo phương đứng**
Hình 2.1.2	**Thanh chịu nén bởi lực bảo toàn theo phương đứng**
Hình 2.1.3	**Đồ thị Hàm số $\sigma = \sigma(\lambda)$**
Hình 2.2.3	Đồ thị hàm số $\Delta(\sigma,\lambda)/\pi^4$ với các giá trị σ khác nhau

Hình 2.2.4	Đồ thị hàm số $\sigma = \sigma(\lambda)$
Hình 2.3.1	**Thanh conson chịu nén bởi lực đuổi**
Hình 2.3.2	**Kết qủa tính toán Thanh conson chịu nén bởi lực đuổi .**
Hình 2.4.1	**Thanh chịu nén bởi lực có đường tác dụng không đổi**
Hình 3.1.1	**Sơ đồ phân tích ổn định của các kết cấu thanh theo phương pháp ma trận độ cứng động lực .**
Hình 3.1.2 a	Bài toán ổn định của thanh công xôn chịu lực đuổi
Hình 3.1.2 b	Sơ đồ các toạ độ nút trong hệ toạ độ chung .
Hình 3.2.2	Đồ thị hàm số $\sigma = \sigma(\lambda)$
Hình 3.3.1	Xét bài toán ổn định của thanh công xôn gồm 2 đoạn
Hình 3.3.2	Bài toán cụ thể trên MatLab cho ta biểu đồ quan hệ giữa các hệ số σ và λ trong khoảng giá trị 0 đếb 5
Hình 3.4.1	bài toán ổn định của kết cấu gồm 3 thanh liên kết với nhau và chịu nén
Hình 3.4.1 b	Số liệu các phần tử
Hình 3.4.2	bài toán ổn định của kết cấu gồm 3 thanh liên kết với nhau và chịu nén
Hình 3.4.3	Đồ thị hàm số $\sigma = \sigma(\lambda)$

LỜI MỞ ĐẦU

Hiện nay việc xây dựng nhiều công trình lớn với các dạng tải trọng phức tạp sử dụng vật liệu nhẹ trong đó thường sử dụng các thanh chịu nén có chiều dài lớn và dễ mất ổn dịnh ngày càng phổ biến. Vì vậy việc nghiên cứu ổn định công trình là quan trọng, cần thiết cho quá trình ứng dụng thực tế.

Đối với hệ thanh làm việc trong giới hạn đàn hồi, có nhiều phương pháp để xác định lực tới hạn mất ổn định như: *phương pháp tĩnh học, phương pháp năng lượng, phương pháp động lực học*. Đối với hệ chịu lực bảo toàn, cả ba phương pháp trên đều cho kết quả như nhau. Nhưng đối với các hệ chịu lực không bảo toàn thì nhất thiết phải áp dụng phương pháp động lực học mới cho kết quả chính xác. Do cách giải của phương pháp động lực học thường phức tạp hơn, nên cho đến nay còn ít được nghiên cứu và chỉ dừng lại ở các kết cấu đơn giản.

Mục đích của đề tài này là áp dụng phương pháp ma trận độ cứng động lực (MTĐCĐL) mới được phát triển gần đây để giải bài toán ổn định của các hệ thanh phức tạp chịu lực không bảo toàn. Từ đó, Luận văn sẽ xây dựng các chương trình tính toán ổn định của hệ thanh chịu lực không bảo toàn. Để kiểm nghiệm chương trình, Luận văn sẽ so sánh kết quả tính toán trên máy tính với các kết quả của các bài toán đơn giản.

Nội dung Luận văn được trình bày theo bố cục sau:

- **Chương** 1: Tổng quan.
- **Chương** 2: Giải bài toán ổn định thanh bằng phương pháp ma trận độ cứng động lực.
- **Chương** 3: Phân tích ổn định của kết cấu hệ thanh chịu lực không bảo toàn bằng phương pháp MTĐCĐL.
- Kết luận chung.

CHƯƠNG 1
TỔNG QUAN

1.1. Các khái niệm ổn định và mất ổn định

Ổn định là một khái niệm có liên quan đến nhiều lĩnh vực như trong cuộc sống, trong kỹ thuật nói chung, trong công trình và trong toán học. Trong mỗi lĩnh vực có một định nghĩa tương ứng phù hợp với đối tượng nghiên cứu.

Trong các giáo trình về ổn định công trình, người ta chỉ đề cập đến định nghĩa ổn định theo quan điểm Ơle - Lagrăng vốn có từ lâu đời trước định nghĩa của Liapunov, tự phát triển độc lập với định nghĩa ổn định chuyển động của Liapunov và cũng đủ để giải quyết phần lớn các bài toán ổn định trong lĩnh vực công trình. Người ta chỉ cần quan tâm đến định nghĩa ổn định chuyển động của Liapunov khi gặp các bài toán ổn định của hệ không bảo toàn, ổn định động và ổn định không đàn hồi. Theo Viện sỹ v.v. Bolotin [20], định nghĩa toán học của A.M. Liapunov về ổn định chuyển động được xem là tổng quát và bao chùm cho mọi lĩnh vực.

1.1.1. Định nghĩa ổn định công trình

Trong lĩnh vực công trình, ổn định là tính chất của công trình có khả năng giữ được vị trí ban đầu hoặc giữ được dạng cân bằng ban đầu trong trạng thái biến dạng tương ứng với các tải trọng tác dụng.

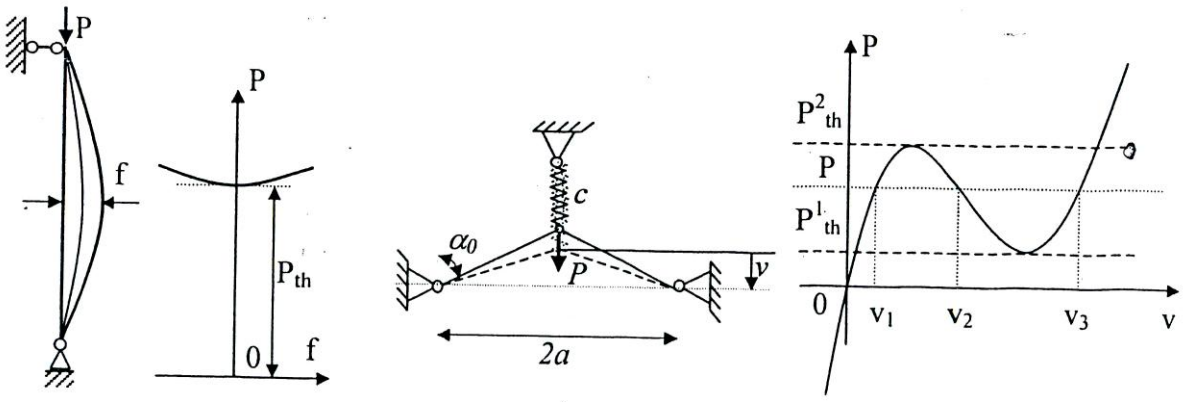
Vị trí của công trình hay dạng cân bằng ban đầu trong trạng thái biến dạng của công trình được gọi là *ổn định* dưới tác dụng của tải trọng nếu như sau khi gây cho công trình một độ lệch rất nhỏ khỏi vị trí ban đầu hay dạng cân bằng ban đầu bằng một nguyên nhân bất kỳ nào đó ngoài tải trọng đã có (còn được gọi là các *nhiễu)* rồi bỏ nguyên nhân đó đi thì công trình có khuynh hướng quay trở về trạng thái ban đầu.

Ngược lại, vị trí của công trình hay dạng cân bằng ban đầu trong trạng thái biến dạng của công trình được gọi là *không ổn định* dưới tác dụng của tải trọng nếu như sau khi gây cho công trình một độ lệch rất nhỏ khỏi vị trí ban đầu hay dạng cân bằng ban đầu bằng một nguyên nhân bất kỳ nào đó ngoài tải trọng đã có rồi bỏ nguyên nhân đó đi thì công trình sẽ không quay trở về trạng thái ban đầu. Lúc này độ lệch của công trình

không giảm dần mà tiếp tục phát triển cho đến khi công trình có vị trí mới hay dạng cân bằng mới.

Bước quá độ của công trình từ trạng thái ổn định sang trạng thái không ổn định gọi là *mất ổn định*. Giới hạn đầu của bước quá độ đó gọi là *trạng thái giới hạn* của công trình. Tải trọng tương ứng với trạng thái tới hạn gọi là *tải trọng tới hạn.* Từ khái niệm về ổn định, ta cần phân biệt hai trường hợp: mất ổn định về vị trí và mất ổn định về dạng cân bằng *ở* trạng thái biến dạng.

Hiện tượng mất ổn định về vị trí xảy ra khi toàn bộ công trình được xem là tuyệt đối cứng không giữ nguyên được vị trí ban đầu mà buộc phải chuyển sang vị trí khác. Đó là trường hợp mất ổn định hay trượt của công trình tường chắn, mố cầu, trụ cầu, tháp nước,... Bài toán ổn định về vị trí thường đơn giản, chỉ cần vận dụng các kiến thức về Cơ học cơ sở cũng đủ để giải.



Hình 1.1.1

Hình 1.1.2

Hiện tượng mất ổn định về dạng cân bằng ở trạng thái biến dạng xảy ra khi *dạng biến dạng ban đầu của vật thể biến dạng* tương ứng với tải trọng còn nhỏ *buộc phải chuyển sang dạng biến dạng mới* khác trước về tính chất nếu tảitrọng đạt tới một giá trị nào đó (được gọi là mất ổn định loại 1 — hình 1.1.1) *hoặc xảy ra khi biến dạng của vật thê phát triển nhanh* mà không xuất hiện dạng biến dạng mới khác trước

về tính chất nếu tải trọng đạt tới một giá trị nào đó (được gọi là mất ổn định loại 2 - hình 1.1.2). Dưới đây ta chỉ xét bài toán ổn định về dạng cân bằng ở trạng thái biến dạng.

1.1.2. Định nghĩa ổn định chuyển động theo Liapunov

Không mất tính tổng quát, ta xét chuyển động không nhiễu động $\vec{x} = 0$ của hệ cơ học được mô tả bởi phương trình nhiễu động dạng chuẩn

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}, t) \qquad (1.1.1)$$

Chuyển động không nhiễu động $\vec{x} = 0$ được gọi là *Ổn định chuyển động theo Liapunov* nếu ứng với mỗi số dương £ tuỳ ý bé đều có thể tìm được một số dương $\delta(\varepsilon, T)$ sao cho nếu các nhiễu động ban đầu thoả mãn điều kiện

$$\left\| \vec{x}(0) \right\| \leq \delta(\varepsilon, T) \qquad (1.1.2)$$

thì

$$\left\| \vec{x}(t) \right\| \leq \varepsilon; T \prec t \prec \infty \qquad (1.1.3)$$

Theo định nghĩa này ta thấy, nếu chuyển động $\vec{x} = 0$ là ổn định thì mọi chuyển động nhiễu động xuất phát từ các điểm bên trong mặt cầu bán kính δ sẽ không bao giờ vượt qua giới hạn là mặt cầu bán kính ε bao quanh gốc toạ độ.

Nếu δ =δ (ε) thì chuyển động $\vec{x} = 0$ được gọi là *ổn định đều*.

Nếu ngoài hệ thức (1.1.3), chuyển động nhiễu động còn thoả mãn điều kiện

$$\lim_{t \to \infty} \left\| \vec{x}(t) \right\| = 0 \qquad (1\text{-}1\text{-}4)$$

thì chuyển động $\vec{x} = 0$ được gọi là *ổn định tiệm cận.* Khi đó các nhiễu động không những phải luôn luôn nằm bên trong mặt cảu bán kính ε mà còn có xu hướng tiến dần đến gốc toạ độ.

1.2. Các khái niệm

Lực bảo toàn và không bảo toàn

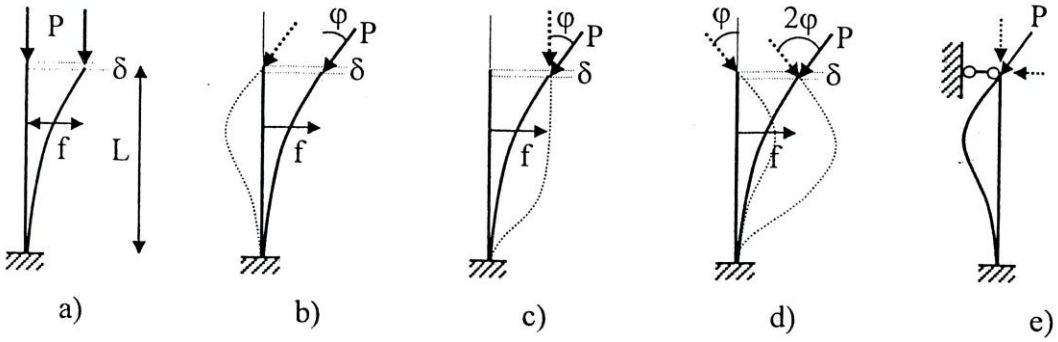
Lực bảo toàn là lực có các tính chất sau:

- *Độ biến thiên công của lực bằng vi phân toàn phần của hàm thế năng.*

- *Công sinh ra bởi lực trên các chuyển vị hữu hạn không phụ thuộc vào đường đi của lực mà chỉ phụ thuộc vào vị trí điểm đầu và điểm cuối.*

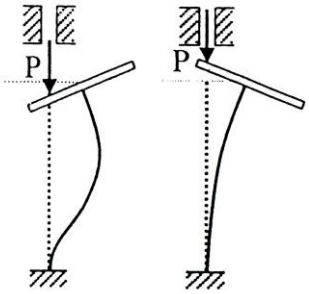
Các lực không có tính chất bảo toàn được gọi là các lực không bảo toàn.

Ví dụ về lực bảo toàn là trọng lực hay các lực khác có phương thẳng đứng không đổi, các lực này có nguồn gốc từ trọng lực (hình 1.2.1.a).



Hình 1.2.1

Ví dụ về lực không bảo toàn là lực đuổi luôn vuông góc với tiết diện thanh, lực này còn được gọi là lực tiếp tuyến vì nó luôn tiếp xúc với trục thanh (hình 1.2.1.b). Trên các hình 1.2.1.b - 1.2.l.d chỉ ra ba dạng chuyển vị của thanh từ vị trí thẳng đứng sang trạng thái lệch được đặc trưng bằng biên độ chuyển vị ngang/và góc quay *q)* của tiết diện:



Hình 1.2.2.

- Hình 1.2.1.Ở thể hiện trường hợp lực đuổi *P* quay một góc φ sau đó thực hiện chuyển vị ngang một đoạn f. Khi đó công của lực *P* là *âm* vì hướng của chuyển vị ngang ngược chiều với hướng của lực. Công của chuyển vị thẳng đứng bằng không vì biên độ chuyển vị thẳng đứng ở là vô cùng nhỏ so với biên độ chuyển vị ngang/.

- Hình 1.2.1.c thể hiện trường hợp lực đuổi *p* luôn có phương thẳng đứng, di chuyển ngang sau đó quay một góc φ . Khi đó công của lực P là *bằng 0.*

- Hình 1.2.1.d thể hiện trường hợp lực đuổi di chuyển ngang sau đó quay một góc 2φ. Khi đó công của lực P là *dương* vì hướng của chuyển vị ngang cùng chiều với hướng của lực, còn công của chuyển vị ngang bằng không.

Tuy nhiên nếu tại điểm đặt lực đuổi có gắn liên kết không cho chuyển vị ngang (hình 1.2.1.e) thì thành phần ngang của lực đuổi không sinh công.

Sự xuất hiện của ma sát nội do quan hệ phi đàn hồi hay do ma sát ngoại có phương pháp tuyến của mặt (áp lực thuỹ tĩnh), nếu chất lỏng hay chất khí đứng yên thì áp lực này không còn là một hệ lực bảo toàn.

Các ví dụ về bài toán ổn định của thanh chịu lực không bảo toàn là ổn định của thanh chịu nén bởi lực luôn hướng dọc theo trục thanh ban đầu (hình 1.2.2), ổn định của thanh công xôn chịu nén và xoắn mà véc tơ xoắn luôn tiếp xúc với trục thanh.Các ví dụ khác về bài toán ổn định của hệ không bảo toàn là ổn định của tuốc bin chịu áp lực thuỷ động lực học, ổn định của cácnh máy bay trong dòng khí siêu âm, ổn định của trục quay...liên quan đến sự phát triển gần đây của các ngành thiết kế máy, kỹ thuật hàng không, kỹ thuật tên lửa, kỹ thuật điều khiển tự động,...

1.3. Các tiêu chuẩn cân bằng ổn định

13.1. Tiêu chuẩn dưới dạng tĩnh học

Trong tĩnh học, sự cân bằng được mô tả dưới dạng các phương trình cân bằng tĩnh học song các điều kiện cân bằng này chưa nói lên được dưới dạng cân bằng đó là ổn định hay không ổn định. Tiêu chuẩn dưới dạng tĩnh học hay được sử dụng và được thể hiện qua ba dạng:

13.1.1. Tiêu chuẩn Euler

Theo tiêu chuẩn này, ta cần nghiên cứu khả năng tồn tại dạng cân bằng lân cận với dạng cân bằng ban đầu tương ứng với một giá trị tải trọng cho trước. Sự xuất hiện trạng thái cân bằng lân cận là dấu hiệu mất ổn định của dạng cân bằng ban đầu. Do trạng thái cân bằng lân cận rất gần với trạng thái cân bằng ban đầu nên bài toán xác định

tải trọng tới hạn là bài toán tuyến tính.

Tiêu chuẩn ơle thích hợp với các dạng mất ổn định loại 1 cho các bài toán *"lý tưởng*" như thanh thẳng chịu nén đúng tâm (hình 1.1.1).

1.3.1.2.Tiêu chuẩn năng lượng

Nguyên lý công khả dĩ và nguyên lý cực trị của thế năng toàn phần chỉ nói lên sự cân bằng của hệ mà chưa nói lên được trạng thái cân bằng đó là ổn định hay không ổn định. Để khẳng định vấn đề này, ta cần vận dụng nguyên lý Lejeune - Dirichlet: "Nếu hệ ở trạng thái cân bằng Ổn định thì thế năng toàn phần đạt giá trị cực tiểu so với tất cả các vị trí của hệ ở lân cận vị trí ban đầu với những chuyển vị vô cùng bé. Nếu hệ ở trạng thái cân bằng không Ổn đinh thì thế năng toàn phần đạt giá trị cực đại. Nếu hệ ở trạng thái cân bằng phiếm định thì thế năng toàn phần không đổi".

Thế năng toàn phần U^*của hệ ở trạng thái biến dạng gồm thế năng biến dạng (là thế năng của các nội lực) U và thế năng của các ngoại lực U_p trong đó thế năng của các ngoại lực được đo bằng công của các ngoại lực T nhưng trái dấu. Do đó, ta nhận được

$$U^*=U + U_P= U-T \qquad (1.3.1)$$

Độ biến thiên ΔU^* của thế năng toàn phần của hệ khi chuyển từ trạng thái đang xét sang trạng thái lân cận sẽ là

$$\Delta U^*=\delta U^* + \frac{1}{2}\delta^2 U^* \qquad (1.3.2)$$

Tại trạng thái cân bằng $\delta U^* =0$, theo nguyên lý Lejeune - Dirichlet:

- *Nếu $\delta^2 U^* > 0$ thì hệ ở trạng thái cân bằng ổn định.*
- *Nếu $\delta^2 U^* = 0$ thì hệ ở trạng thái cân bằng không ổn định*
- *Nếu $\delta^2 U^* < 0$ thì hệ ở trạng thái cân bằng phiếm định*

Ta có thể mở rộng tiêu chuẩn này cho các bài toán động lực học bằng cách đưa vào khảo sát sự thay đổi của cả thế năng biến dạng và động năng của hệ tại các điểm cân bằng kề cận.

Tiêu chuẩn năng lượng thích hợp cho các hệ đàn hồi chịu lực tác dụng có tính bảo toàn. Khi chỉ cần xác định sơ bộ giá trị lực tới hạn của hệ bảo toàn thì phù hợp hơn cả là

vận dụng tiêu chuẩn năng lượng.

1.3.1.3.Tiêu chuẩn sai lệch ban đầu

Khi xác định tải trọng tới hạn tương ứng với điểm phân nhánh các trạng thái cân bằng *(mất ổn định loại 1),* ta chỉ xét các hệ *"lý tưởng*" như giả thiết trục thanh chịu nén là thẳng, tải trọng đặt tại trọng tâm tiết diện, vật liệu là đồng nhất,... Trong các công trình thực, các điều kiện lý tưởng này rất khó xảy ra. Lúc này ta có thể xác định các đặc trưng ổn định của hệ "*lý tưởng*" bằng cách nghiên cứu các đối xử của hệ có sai lệch ban đầu và cho các tham số đặc trưng cho sự sai lệch này tiến đến không. Khi đó, ảnh hưởng của sự sai lệch ban đầu tăng rất nhanh khi tải trọng gần tới giá trị tới hạn của hệ *"lý tưởng"*.

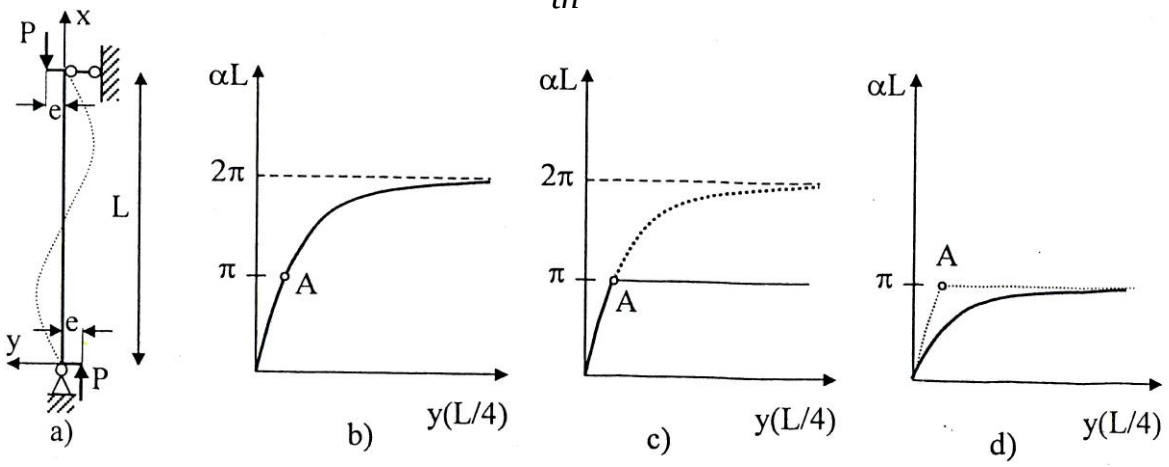
Theo tiêu chuẩn sai lệch ban đầu, ta cần xác định tải trọng tới hạn tương ứng với tham số biến dạng (độ võng, mômen uốn,...) tăng nhanh mà không xuất hiện dạng biến dạng mới khác trước về tính chất *(mất ổn định loại 2).*

Ví dụ đối với thanh chịu nén lệch tâm như trên hình 1.3.1 .a, ta có

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\alpha^2 y=\alpha^2 e\left(\frac{2x}{L}-1\right);\alpha=\sqrt{\frac{P}{EI}} \quad (1.3.4)$$

thoả mãn điều kiện liên kết tại hai đầu thanh. Độ võng tại $x = L/4$ sẽ tăng lên vô hạn khi $\alpha L = 2\pi$ (hình 1.3. l.b), từ đó ta nhận được tải trọng tới hạn

$$P_{th}=\frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$



Hình 1.3.1

Do *việc tính toán ổn định theo tiêu chuẩn sai lệch ban đầu là lập ra một tập hợp các trạng thái căn bằng tương ứng với các mức tải trọng tới hạn khác nhau mà chưa xét đến tính ổn định của các trạng thái cân bằng* này nên ta xét chuyển vị lân cận $y(x)+\delta y(x)$ với $y(x)$ xác định theo (1.3.5). Với một giá trị tải trọng cho trước, nếu tồn tại một nghiệm $\delta y(x)\neq 0$ thì dạng cân bằng $y(x)$ là không ổn định, nếu chỉ có nghiệm $\delta y(x)= 0$ thì dạng cân bằng $y(x)$ là ổn định. Thay vào (1.3.4), ta nhận được phương trình đối với gia số chuyển vị :

$$\frac{d^2\delta y}{dx^2}+\alpha^2\delta y=0;\alpha=\sqrt{\frac{P}{EI}} \qquad (1.3.7)$$

Khi $\alpha L=\pi$, ta có δy = Csin(πx/L), nên ta nhận được tải trọng tới hạn chỉ bằng 1/ 4 của tải trọng giới hạn tính theo (1.3.6) (hình l.3.1.c), trùng với giá trị tải trọng tới hạn của hệ *"lý tưởng*" và không phụ thuộc vào giá trị của các sai lệch ban đầu

$$P_{th}=\frac{\pi^2 EI}{L^2} \qquad (1.3.8)$$

Như vậy, trong cách lập bài toán tuyến tính, việc xác định tải trọng tới hạn theo tiêu chuẩn sai lệch ban đầu một cách hình thức và bỏ qua việc xét đến ổn định của hệ (theo đúng nghĩa của nó) có thể dẫn đến việc xác định tải trọng tới hạn không chính xác, lớn hơn giá trị tải trọng tới hạn thực tế.

Tiêu chuẩn này sẽ cho kết quả tin cậy nếu ta xét đến đồng thời cả tính chất phi tuyến thực sự và mức độ sai lệch ban đầu của hệ (hình 1-3.1 -d)

1.3.2. Tiêu chuẩn dưới dạng động lực học

Tiêu chuẩn ổn định dạng cân bằng của các hệ biến dạng dưới dạng động lực học gắn liền với định nghĩa ổn định chuyển động của Liapunov cho các bài toán ổn định dạng cân bằng ở trạng thái biến dạng.

Tiêu chuẩn cân bằng ổn định dưới dạng động lực học được xây dựng trên cơ sở nghiên cứu khuynh hướng chuyển động của hệ sau khi bị lệch ra khỏi dạng ban đầu bằng một nhiễu loạn nào đó rồi bỏ nhiễu loạn đó đi. Nếu sau khi nhiễu loạn mất đi, hệ

dao động tắt dần hay trở về trạng thái ban đầu mà không dao động thì sự cân bằng là ổn định, ngược lại là không ổn định.

Theo tiêu chuẩn này, ta cần khảo sát chuyển động bé của hệ ở lân cận vị trí cân bằng:

- *Nếu chuyển động tắt dần hay điều hoà (khi không kể đến lực cản) thì cân bằng là ổn định.*
- *Nếu chuyển động không tuần hoàn (xa dần trạng thái ban đầu), dẫn đến sự tăng dần của biên độ chuyển động thì cân bằng là không ổn định.*

Tuy phức tạp nhưng tiêu chuẩn ổn định dưới dạng động lực học được xem là đầy đủ và tổng quát, giải quyết được các bài toán ổn định mà các tiêu chuẩn dưới dạng tĩnh học không thể giải quyết được.

Để minh hoạ, ta xét bài toán ổn định của thanh công xôn không có khối lượng chịu lực đuổi (hình 1.3.2). Giả thiết chuyển vị là bé, ta nhận được

$$y'\Big|_{x=L} \frac{dy}{dx}\Big|_{x=L} \approx \varphi; P_x \approx P; P_y \approx P\varphi \qquad (1.3.9)$$

a) Theo tiêu chuẩn tĩnh học, ta có được phương trình đường đàn hồi của thanh ở trạng thái biến dạng như sau

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = P(f-y) - P\varphi(L-x) \qquad (1.3.10)$$

Phương trình này có nghiệm tổng quát là

$$y(x) = C_1 \sin\alpha x + C_2 \cos\alpha x + f + \varphi(L-x) \qquad (1.3.11)$$

trong đó:

$$\alpha = \sqrt{P/EI} \qquad (1.3.12)$$

Các hằng số C_1,C_2, f và φ được xác định từ các điều kiện biên

$y(0)=0$; $y'(0)=0$; $y(L) = f$; $y'(L)=\varphi$ (1.3.13)

Thay (1.3.12) vào (1.3.12) ta nhận được phương trình

$C_2+f-\varphi L=0$

$\alpha C_1+\varphi=0$

$$C_1\sin\alpha L+C_2\cos\alpha L=0$$

$$C_1\cos\alpha L-C_2\sin\alpha L=0 \qquad (1.3.14)$$

Vì định thức của hệ (1.3.14)

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -L \\ \alpha & 0 & 0 & 1 \\ \sin\alpha L & \cos\alpha L & 0 & 0 \\ \cos\alpha L & -\sin\alpha L & 0 & 0 \end{pmatrix} = -1$$

Nên suy ra $C_1=C_2=f=\varphi=0$, nghĩa là trong trường hợp này, không tồn tại dạng cân bằng cong khác với dạng cân bằng thẳng ban đầu của thanh

Điều này, theo tiêu chuẩn tĩnh, cho phép kết luận rằng thanh chịu nén bởi lực đuổi sẽ *"không bị mất ổn định"* với bất kỳ giá trị nào của lực P?

b) Theo tiêu chuẩn động lực học, ta xét chuyển động của hệ sau khi bị lệch ra khỏi dạng cân bằng thẳng ban đầu bởi một nhiễu loạn nào đó. Giả thiết khối lượng phân bố của thanh là nhỏ bỏ qua so với khối lượng tập trung *M* tại đầu nút, ta nhận được phương trình dao động của thanh có dạng

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = P(f-y) - P\varphi(L-x) - M\frac{d^2f}{dt^2}(L-x) \qquad (1.3.15)$$

Bằng cách đặt : $y(x,t) = y(x).e^{i\Omega t}; f(t) = F.e^{i\Omega t}; \varphi(t) = \Phi e^{i\Omega t}$

(1.3.16)

Với Ω là hằng số chưa biết, ta đưa phương trình (1.3.15) về dạng

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^2 Y = \alpha^2 F - \alpha^2\Phi.(L-x) + \frac{M\Omega^2 F}{EI}(L-x) \qquad (1.3.17)$$

Phương trình này có nghiệm tổng quát là

$$Y(x) = C_1\sin\alpha x+C_2\cos\alpha x+F-\Phi.(L-x)+\frac{M\Omega^2 F}{EI}(L-x) \qquad (1.3.18)$$

với các điều kiện biên

$$y(0)=0;\ y'(0)=0;\ y(L) = F;\ y'(L)=\Phi \qquad (1.3.19)$$

Thay (1.3.18) vào (1.3.19), ta nhận được phương trình tần số :

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1+\dfrac{M\Omega^2 F}{\alpha^2 EI} & -L \\ \alpha & 0 & -\dfrac{M\Omega^2}{\alpha^2 EI} & 1 \\ \sin\alpha L & \cos\alpha L & 0 & 0 \\ \cos\alpha L & -\sin\alpha L & -\dfrac{M\Omega^2 F}{\alpha^2 EI} & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Ký hiệu

$$\Omega_0 = \sqrt{\sqrt{\frac{P}{ML}}\frac{1}{\left|\dfrac{\sin\alpha L}{\alpha L} - cos\alpha L\right|}} \qquad (1.3.20)$$

- Khi tăng giá trị tải trọng P từ không, tần số dao động riêng Ω là số thực $\Omega = \pm\Omega_0$ .Chuyển động của hệ tại lân cận vị trí cân bằng là chuyển động điều hoà với tần số Ω_0, dạng cân bằng thẳng ban đầu là ổn định.

- Khi tăng giá trị tải trọng P tới giá trị mà

$$tg\alpha L = \alpha L \qquad (1.3.21)$$

thì tần số Q trở thành lớn vô cùng. Nghiệm bé nhất của phương trình (13.21) là αL = 4,493 tương ứng với giá trị tải trọng là

$$P_{th} = \frac{20{,}19EI}{L^2} \qquad (1.3.22)$$

- Nếu tiếp tục tăng tải, tần số dao động trở thành một cặp số phức thuần ảo

$\Omega = \pm i\Omega_0$. Tương ứng với nghiệm phức thuần ảo âm, chuyển động của hệ tại lân cận vị trí cân bằng có biên độ tăng theo thời gian $e^{i\Omega t} = e^{\Omega 0 t}$, do đó dạng cân bằng thẳng ban đầu là không ổn định.

Như vậy, theo tiêu chuẩn động lực học, thanh công xôn chịu nén bởi lực đuổi sẽ bị mất ổn định khi giá trị lực tới hạn xác định theo (1.3.22). Giá trị tải trọng tới hạn này bằng 8,18 lần giá trị tải trọng tới hạn của thanh công xôn chịu nén bởi lực thẳng đứng là lực bảo toàn (hình 1.2.1.a)

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \qquad (1.3.23)$$

1.3.3.Phạm vi sử dụng các tiêu chuẩn ổn định

Trên cơ sở các tiêu chuẩn về sự cân bằng ổn định đã trình bày, ta có thể vận dụng nhiều phương pháp khác nhau để giải bài toấn ổn định. Việc lựa chọn phương pháp khi giải một bài toán cụ thể không chỉ phụ thuộc vào dạng bài toán mà còn phụ thuộc mục đích giải bài toán và công cụ tính toán.

a) Đối với các bài toán ổn định cân bằng của hệ đàn hồi chịu lực bảo toàn thường gặp trong các công trình xây dựng, theo Viện sỹ v.v. Bolotin [20, 21], thì về nguyên tắc các tiêu chuẩn trên đều dẫn đến cùng một kết quả. Khi đó, việc mất ổn định của hệ chỉ xảy ra dưới dạng tĩnh mà không xảy ra hiện tượng dao động quanh vi trí cân bằng, do đó, ta chỉ cần sử dung các tiêu chuẩn tĩnh học (đặc biệt hay sử dụng tiêu chuẩn ơle) để xác định dạng cân bằng ổn định và tải trọng tới hạn.

b) Đối với các bài toán ổn định cân bằng của hệ đàn hồi chịu lực không bảo toàn thì nhất định phải sử dụng các tiêu chuẩn động lực học. Khi đó, việc mất ổn định của hệ có thể xảy ra dưới dạng tĩnh và cũng có thể xảy ra hiện tượng dao động quanh vị trí cân bằng. Việc phân tích dạng mất ổn định đối với mỗi bài toán là khá phức tạp. Sự có mặt của điểm phân nhánh theo tiêu chuẩn tĩnh ơle không phải là điều kiện cần và cũng không phải là điều kiện đủ thay thế cho điều kiện Ổn định [20]:

- Bôlôtin đã dẫn ra ví dụ cho thấy, dạng cân bằng ban đầu ổn định không chỉ ở các điểm phân nhánh mà cả ở các điểm được gọi là điểm giới hạn. Mặt khác, Ixlinxki cũng chỉ ra trường hợp cho thấy, sự có mặt của điểm phân nhánh không dẫn đến sự mất ổn định của dạng cân bằng ban đầu.

- Sử dụng tiêu chuẩn tĩnh ơle, ta chỉ xét được tập hợp các dạng cân bằng lân cận với dạng cân bằng ban đầu mà bỏ qua phân tích các dạng chuyển động khác có thể xảy ra. Nếu hệ chuyển từ dạng cân bằng ban đầu sang dạng chuyển động có biên độ tăng theo thời gian thì hệ không ổn định theo tiêu chuẩn động lực học.

- Mặt khác, bằng tiêu chuẩn ơle, người ta cũng khảo sát được một số bài toán ổn định của hệ đàn hồi chịu lực không bảo toàn như: bài toán ổn định của vành tròn chịu nén bởi lực ngoài phân bố đều và có phương pháp tuyến với mặt ngoài của vành; bài toán ổn định của cột vòm chịu tác dụng của lực đuổi phân bố đều dọc trục [20, 21].

Nói chung, miền áp dụng tiêu chuẩn tĩnh ơle không trùng với miền phân chia hệ chịu lực bảo toàn hay không bảo toàn. Hơn nữa, đối với các hệ không bảo toàn, miền ổn định lập ra bởi hệ có cản nhỏ dần đến không cũng không trùng với miền ổn định của hệ không có cản.

1.4.Phương pháp ma trận độ cứng động lực

1.4.1. Khái niệm ma trận độ cứng động lực

Theo phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH), các ma trận khối lượng M_e , ma trận độ cứng K_e và véc tơ tải trọng mặt quy về nút P_s của phần tử trong hệ toạ độ địa phương xác định theo các hệ thức sau:

$$M_e = \int_{V_e} N_e^T \rho_e N_e dV_e; K_e = \int_{V_e} B_e^T D_e N_e dV_e; P_{Se} = \int_{V_e} N_e^T f_{Se} dS_e \qquad (1.4.1)$$

Trong đó B_e là ma trận quan hệ giữa các thành phần biến dạng và chuyển vị nút; D_e là ma trận các hằng số đàn hồi; f_s là tải trọng bề mặt; N_e là hàm dạng của phần tử hữu hạn.

Ký hiệu:

- T_e là ma trận chuyển đổi các chuyển vị nút từ hệ tọa độ địa phương oxyz gắn liền với phần tử e sang hệ tọa độ tổng thể OXYZ. Ma trận T_e xác định thông qua côsin chỉ phương của các trục tọa độ địa phương gắn liền với phần tử e trong hệ tọa độ tổng thể.

- U_e là véc tơ chuyển vị nút (toạ độ suy rộng) trong hệ toạ độ địa phương, u là véc tơ chuyển vị nút trong hệ toạ độ tổng thể

$$U_e = T_e U hay U_e^T = U^T T_e^T \qquad (1.4.2)$$

- M là ma trận khối lượng, K là ma trận độ cứng, C là ma trận cản và P là véc tơ tải trọng mặt quy về nút của cả kết cấu trong hệ toạ độ tổng thể

$$M = \sum_e T_e^T M_e T_e; K = \sum_e T_e^T K_e T_e; P_s = \sum_e T_e^T P_s \quad (1.4.3)$$

Khi đó, phương trình cơ bản của phương pháp phần tử hữu hạn cho toàn bộ kết cấu trong hệ toạ độ tổng thể có dạng

$$MU(t)+CU(t)+KU(t)=P(t) \quad (1.4.4)$$

Đối với bài toán tĩnh, phương trình (1.4.4) là hệ phương trình đại số tuyến tính

$$KU = P \quad (1.4.5)$$

Trong miền tần số, phưởng trình (1.4.4) có dạng

$$\left[-\Omega^2 M + i\omega C + K\right]U(\omega) = F(\omega) \quad (1.4.6)$$

Tong đó ω là tần số (rad/giây), U(ω),F(ω) là biên độ phức của véc tơ chuyển vị nút và tải trọng ngoài. Rõ ràng là trong miền tần số phương trình chuyển động đã trở thành phương trình đại số tuyến tính. Nếu ký hiệu ma trận

$$K(\omega) = -\omega^2 M + i\omega C + K \quad (1.4.7)$$

thì phương trình chuyển động có dạng rất đơn giản

$$K(\omega)U(\omega) = F(\omega) \quad (1.4.8)$$

Phương trình này hoàn toàn đồng dạng với phương trình tĩnh học của hệ tuyến tính (1.4.5). Chính vì vậy ma trận k(ω) xác định theo (1.4.7) được gọi là ma trận độ cứng suy rộng hay *ma trận độ cứng động lực* (MTĐCĐL) của kết cấu. Hiển nhiên là nó trùng với ma trận độ cứng thông thường hay còn gọi là ma trận độ cứng tĩnh khi tần số bằng không, tức là không có chuyển động. Ngoài ra nếu biết MTĐCĐL K(ω) của hệ thì các bài toán phân tích kết cấu như bài toán dao động riêng, dao động cưỡng bức hay bài toán tĩnh đều giải được một cách đơn giản bằng các phép tính của đại số tuyến tính.

Đối với hệ hữu hạn bậc tự do thì MTĐCĐL hoàn toàn xác định nếu biết các ma trận khối lượng, hệ số cản và độ cứng. Nhưng việc tìm MTĐCĐL cho kết cấu hay một hệ liên tục không đơn giản nếu không sử dụng phương pháp PTHH. Nội dung chính của phương pháp MTĐCĐL là tìm cách mô hình hoá kết cấu hay một hệ liên tuc bằng hê phương trình đại số (1.4.8).

1.4.2.Phương pháp ma trận độ cứng động lực cho kết cấu

Trong các bước thực hiện của phương pháp PTHH, sai số chỉ có thể ở bước biểu diễn trường chuyển vị của phần tử qua các chuyển vị nút. Như vậy, độ chính xác của phương pháp PTHH cũng nằm trciìg vấn đề của bước này và khả năng phát triển của phương pháp cũng là ở đây.

Khi ứng dụng phương pháp PTHH vào các bài toán động lực học, chỉ có một chỗ duy nhất mà ta phải xấp xỉ trường chuyển vị trong phần tử bằng trường chuyển vị tĩnh, tức là đã bỏ qua yếu tố động lực học của trường chuyển vị. Nếu ta chọn các hàm dạng của phần tử hữu hạn là trường chuyển vị động thỏa mãn phương trình cân bằng động thì phương pháp PTHH không còn là một phương pháp gần đúng mà là một phương pháp chính xác. Phương pháp ma trận độ cứng động lực đã ra đời trên cơ sở ý tưởng này.

Để có thể chọn hàm dạng chuyển vị động một cách đơn giản, ta phải xét bài toán cân bằng động của phần tử hữu hạn trong miền tần số, tức là xét chuyển động với biên độ phức phụ thuộc vào tần số. Sau đó, việc thực hiện của phương pháp MTĐCĐL về thủ tục không khác gì phương pháp PTHH. Do đó công việc chính của phương pháp MTĐCĐL, khác với phương pháp PTHH, là việc xây dựng ma trận độ cứng động lực K(ω)và véc tơ biên độ phức của lực ngoài F(ω) cho phần tử.

1.4.3.Các bài toán phân tích kết cấu bằng phương pháp MTĐCĐL

Giả sử đã biết ma trận độ cứng động lực của kết cấu k(cò) và véc tơ biên độ phức của lực ngoài F(ω). Các bài toán cơ bản trong phân tích kết cấu sử dụng phương pháp MTĐCĐL bao gồm:

a) Bài toán phân tích tĩnh có dạng

$$K(0)U(0)=F(0) \qquad (1.4.9)$$

kết quả cho ta chuyển vị tĩnh của nút U^0

b) Bài toán dao động riêng có dạng

$$k(\omega)\phi = 0 \qquad (1.4.10)$$

Trong đó các tần số riêng ω_j được xác định từ phương trình

$$\det K(\omega) = 0 \qquad (1.4.11)$$

Đối với các bài toán có kích thước nhỏ, để xác định một số tần số riêng của (1.4.11) có thể sử dụng các thuật toán chia đôi hay Newton - Raphson,..., tuy nhiên, đối với các bài toán kích thước lớn, cần phải sử dụng phương pháp lặp của Wittric - Williams dựa trên định lý Sturm đảm bảo không có tần số riêng nào bị bỏ qua trong quá trình tìm kiếm tần số.

Các dạng riêng tương ứng với tần số ϕ_j được tìm từ phương trình (1.4.10) cùng với điều kiện chuẩn hoá dạng riêng.

c) Bài toán dao động cưỡng bức với kích động điều hoà là bài toán tổng quát (1.4.8) nêu trên. Nếu kích động ngoài là ngẫu nhiên với mật độ phổ là ma trận SF (co) thì phổ của chuyển vị nút được xác định bằng

$$S_U(\omega) = H^*(\omega) S_F(\omega) H(\omega) \qquad (1.4.13)$$

Trong đó $H(\omega) = K^{-1}(\omega)$ là ma trận chuyển.

d) Bài toán ổn định của hệ đàn hồi nói chung và bài toán ổn định của thanh chịu nén bởi lực bảo toàn hay không bảo toàn theo tiêu chuẩn ổn định dưới dạng động lực học nói riêng đưa về bài toán xác định tải trọng tới hạn p sao cho

$$\det K(\omega, P) = 0 \qquad (1.4.14)$$

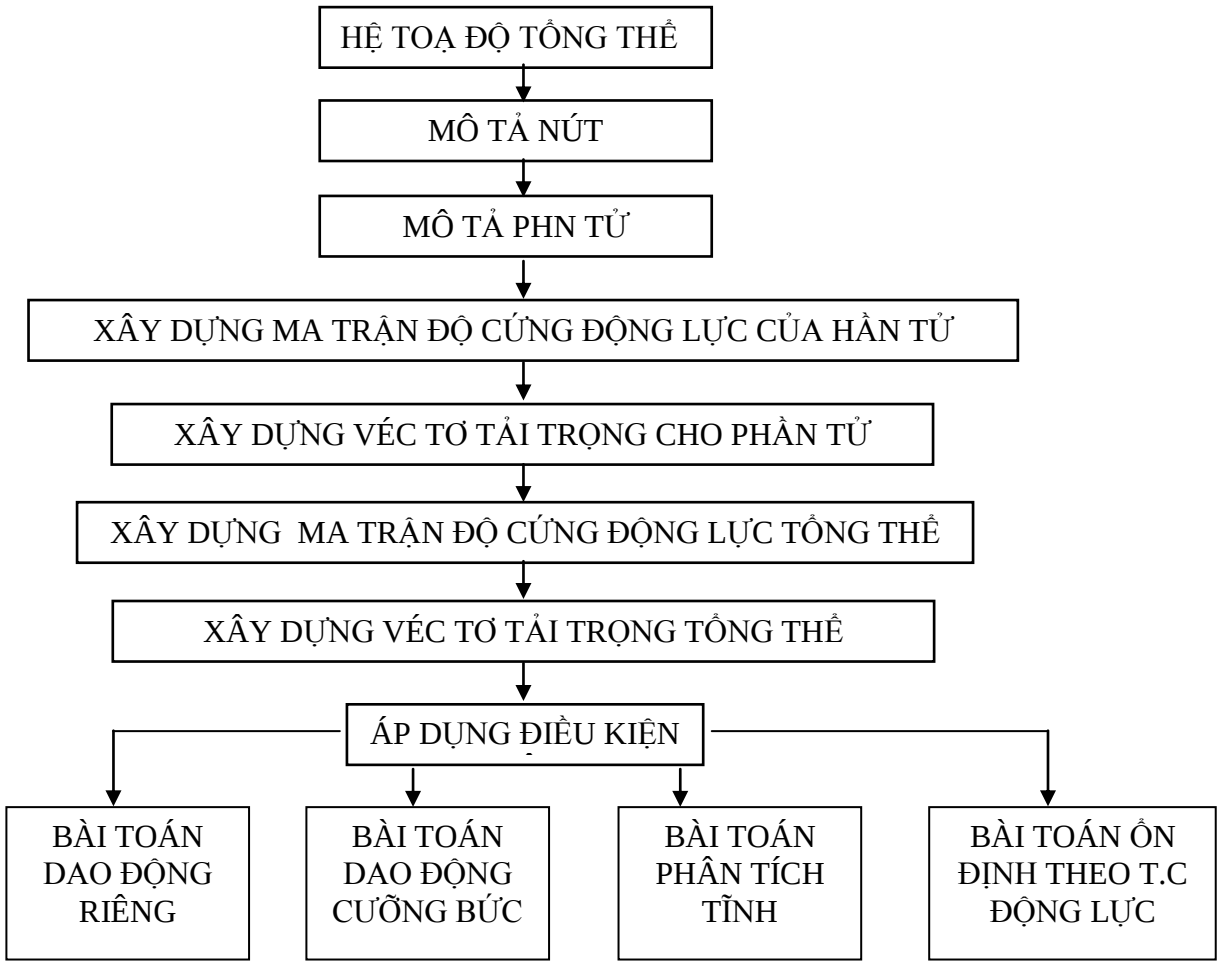
Tải trọng tới hạn P được xác định từ điều kiện tần số dao động riêng ω là một số phức có phần ảo âm. Khi đó hệ sẽ mất ổn định do sự tăng dần biên độ chuyển động của các chuyển động bé của hệ ở lân cận vị trí cân bằng.

Như vậy phương pháp MTĐCĐL là phương pháp chính xác nếu như ta xây dựng được ma trận độ cứng động lực và véc tơ tải trọng ngoài một cách chính xácẽ Một điều lý thú là phương pháp MTĐCĐL xem kết quả tính theo phương pháp PTHH như một trường hợp riêng vì ta có thể chứng minh được rằng, khai triển của MTĐCĐL ra chuỗi Taylor theo tần số có dạng:

$$k(\omega) = K + i\omega C - \omega^2 M + o(\omega^3)$$

Trong đó K, M, c là các ma trận của phương pháp PTHH.

1.4.4. Sơ đồ khối của phương pháp MTĐCĐL (sơ đồ 1.4.1)



1.4.5. Ma trận độ cứng động lực của phần tử thanh thẳng chịu uốn

Xét phần tử thanh chịu uốn trong mặt phẳng *xy* có chiều dài *L*, mômen quán tính đối với trục z là /. Thanh có hai nút, mỗi nút có hai bậc tự do là các chuyển vị ngang và góc xoay. Ta chọn các chuyển vị ngang, góc xoay tại hai nút thanh làm các chuyển vị nút (hình 1.4.2) và chọn hàm dạng là nghiệm bài toán dao động uốn tự do

$$EI\frac{d^4y(x)}{dx^4} = \rho A\omega^2 y(x) \qquad (1.4.15)$$

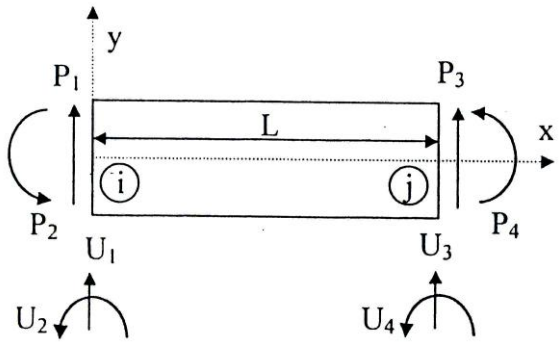
Với các điều kiện biên

$y(0)=U_1$; $y'(0)=U_2$; $y(L) = U_3$; $y'(L)=U_4$ (1.4.16)

Nghiệm của bài toán biên này là

$$y = \begin{bmatrix} \cos\gamma\zeta \\ Sin\gamma\zeta \\ \cosh\gamma\zeta \\ Sinh\gamma\zeta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1/2 - F_4/2\gamma^2 & F_2L/2\gamma^2 & -F_3/2\gamma^2 & F_1L/2\gamma^2 \\ -F_6/2\gamma^3 & L/2\gamma + F_4/2\gamma^3 & -F_5/2\gamma^3 & -F_3L/2\gamma^3 \\ 1/2 + F_4/2\gamma^2 & F_2L/2\gamma^2 & F_3/2\gamma^2 & -F_1/2\gamma^3 \\ F_6/2\gamma^3 & L/2\gamma + F_4/2\gamma^3 & F_5/2\gamma^3 & F_3L/2\gamma^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}$$

Hay là y=N.U (1.4.17)



Hình 1.4.2

Trong đó

- ζ=x/L là tham số chiều dài không thứ nguyên

- ω là tần số dao động (Rad/giây), ω=0 tương ứng với bài toán tĩnh

- γ là tham số động lực học, γ=0 ứng với bài toán tĩnh

$$\gamma\sqrt[4]{\frac{\upsilon A\omega^2}{EI}} \quad (1.4.18)$$

- Các hàm số F_1 được định nghĩa là

F_1= -γ(sinhγ-sinγ)/δ

F_2= -γ(coshγsinγ-sinhγcosγ)/δ

F_3= -γ^2(coshγ-cosγ)/δ

F_4= γ^2(sinhγsinγ)/δ

F_5= γ^3(sinhγ+sinγ)/δ

F_6= -γ^3(coshγsinγ+sinhγcosγ)/δ

δ=coshγcosγ-1

N=[N_1 N_2 N_3 N^4] là các hàm dạng của phần tử thanh chịu uốn

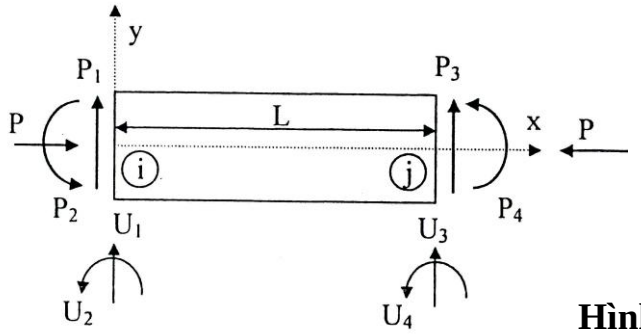
$$y=\begin{bmatrix}\cos\gamma\zeta\\ Sin\gamma\zeta\\ \cosh\gamma\zeta\\ Sinh\gamma\zeta\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}1/2-F_4/2\gamma^2 & F_2L/2\gamma^2 & -F_3/2\gamma^2 & F_1L/2\gamma^2\\ -F_6/2\gamma^3 & L/2\gamma+F_4/2\gamma^3 & -F_5/2\gamma^3 & -F_3L/2\gamma^3\\ 1/2+F_4/2\gamma^2 & F_2L/2\gamma^2 & F_3/2\gamma^2 & -F_1/2\gamma^3\\ F_6/2\gamma^3 & L/2\gamma+F_4/2\gamma^3 & F_5/2\gamma^3 & F_3L/2\gamma^3\end{bmatrix} \quad (1.4.20)$$

Trong đó P>0 nếu phần thanh chịu nén, P<0 nếu chịu kéo.

Nghiệm của bài toán biên này có dạng tương ứng (1.4.17)

Với các hàm dạng là

$$[N]=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\begin{bmatrix}\cos\gamma\zeta\\ Sin\gamma\zeta\\ \cosh\gamma\zeta\\ Sinh\gamma\zeta\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\beta^2-F_4 & F_2L & -F_3 & F_1L\\ -F_6/\alpha & (\alpha^2+F_4/\alpha)L & -F_5/\alpha & -F_3L/\alpha\\ \alpha^2+F_4 & -F_2L & F_3 & -F_1L\\ F_6/\beta & (\beta-F_4/\beta)L & F_5/\beta & F_3L/\beta\end{bmatrix} \quad (1.4.28)$$



Hình 1.4.3

Trong đó

- σ là tham số kể đến ảnh hưởng của lực dọc

$$\sigma=\frac{PL^2}{EI} \quad (1.4.29)$$

- λ là tham số động lực học

$$\lambda=\omega L^2 x\sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \quad (1.4.30)$$

- α,β là các tham số

$$\alpha=\sqrt{\frac{\sigma}{2}+\sqrt{\frac{\sigma^2}{4}+\lambda^2}};\ \beta=\sqrt{\frac{-\sigma}{2}+\sqrt{\frac{\sigma^4}{4}+\lambda^2}} \quad (1.4.31)$$

- Các hàm số F_i được định nghĩa như sau:

F_1= (βsinα-αsinhβ)(α^2+β^2)/δ

F_2= (αcosαsinhβ-βsinαcoshβ)(α^2+β^2)/δ

F_3= (cosα-coshβ)αβ(α^2+β^2)/δ

F_4= [(β^2-α^2)(cosαcoshβ-1)+2αβsinαsinhβ)]αβ/δ

F_5= (βsinhβ+αsinα +βsinhβcosα)αβ/δ

F_6= -(αcoshβsinα+βsinhβcosα)(α^2+β^2)αβ/δ

δ=2αβ(cosαcoshβ-1)+(α^2-β^2)sinαsinhβ

Ma trận độ cứng động lực của phần tử có dạng

$K_e(\omega,P)= K_e(\omega,P)+P.G_e(\omega,P)-\omega^2(\omega,P)$

Trong đó

- Ma trận khối lượng M_e, độ cứng K_e xác định theo (1.4.1)

- Ma trận G_e là ma trận độ cứng hình học của phần tử thanh do xét đến ảnh hưởng của lực dọc, xác định theo công thức

$$G_e(\omega,P)=\int_0^L\left[\frac{\partial N_e(\omega,P,x)}{\partial x}\right]^T\left[\frac{\partial N_e(\omega,P,x)}{\partial x}\right]dx$$

Khi đó ma trận độ cứng của phần tử thanh chịu uốn có kể đến ảnh hưởng của lực dọc có dạng

$$K_e=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} F_6 & -F_4L & F_5 & F_3L \\ -F_4L & F_2L_2 & -F_3L & F_1L^2 \\ F_5 & -F_3L & F_6 & F_4L \\ F_3L & F_1L^2 & F_4L & F_2L^2 \end{bmatrix} \qquad (1.4.35)$$

Leung A.Y.T. [12] đã chứng minh rằng, ma trận khối lượng M_e và ma trận độ cứng hình học G_e được xác định từ ma trận độ cứng động lực như sau

$$M_e=\frac{-\partial}{\partial\omega^2}K_e;\ G_e=\frac{-\partial}{\partial P}K_e \qquad (1.4.36)$$

1.5. Nghiên cứu về ứng dụng phương pháp MTĐGĐL vào việc tính toán ổn định hệ không bảo toàn trên thế giới và ở Việt nam

1.5.1.Ổn định của hệ không bảo toàn

Việc kiểm tra ổn định dạng cân bằng của hệ đàn hồi bằng phương pháp phân tích chuyển động nhiễu đã được đề xuất từ lâu. Tuy vậy trong một thời gian dài, người ta cho rằng các kết quả nhận được bằng phương pháp động lực là hoàn toàn trùng với các kết quả nhận được bằng các phương pháp tĩnh. Tính chất không đầy đủ và không hoàn toàn tương đương của các phương pháp tĩnh với các phương pháp động lực học lần đầu tiên được tác giả B.L. Nicôlai công bố năm 1927-1928 khi nghiên cứu ổn định của thanh công xôn chịu nén và xoắn. Sau đó, p. Pápcôvích đã chỉ ra rằng không thể áp dụng được phương pháp ơle đối với các bài toán chịu lực không bảo toàn.

Tính chất quan trọng của bài toán ổn định của thanh công xôn chịu lực đuổi không phải là từ ý nghĩa thực tế của bài toán mà là bài toán này đã chỉ ra ranh giới áp dụng của các tiêu chuẩn ổn định tĩnh và động lực học. Năm 1950, Pluge đã xét bài toán ổn định thanh công xôn không có khối lượng chịu lực đuổi và đi đến kết luận sai lầm là thanh vẫn ổn định khi tải trọng tăng. Năm 1952, Béco đã giải thành công bài toán ổn định thanh công xôn có khối lượng phân bố đều chịu lực đuổi.

Trong thời gian này, G. Zichler và v.v. Bôlôtin đã có nhiều kết quả xuất xắc về việc áp dụng phương pháp động lực học vào nghiên cứu ổn định của đàn hồi chịu lực không bảo toàn. Các tác giả đi đến kết luận rằng, lý thuyết ổn định đàn hồi của ơle, Lagrăng dựa trên cơ sở tĩnh học có thể đáp ứng hoàn toàn đối với các hệ đàn hồi chịu lực bảo toàn, đối với các hệ đàn hồi chịu lực không bảo toàn thì buộc phải sử dụng các phương pháp động lực học để xác định trạng thái cân bằng ổn định và giá trị tải trọng tới hạn.

1.5.2. Phương pháp ma trận độ cứng động lực

Những tác giả đầu tiền nghiên cứu xây dựng phương pháp MTĐCĐL phải kể đến: W.H. Wittrick và F.w. Williams [14] đã xây dựng thuật toán chung cho việc tính toán tần số dao động riêng theo phương pháp MTĐCĐL của các kết cấu đàn hồi. A.Y.T.

Leung [12, 13] đã xây dựng phương pháp MTĐCĐL cho các phần tử thanh chịu kéo nén, xoắn và phần tử dầm ơle chịu uốn khi bỏ qua cản, ảnh hưởng của lực cắt,.... J. Lee và D.J. Thompson [15] đã xây dựng công thức MTĐCĐL cho trường hợp dao động tự do và dao động sóng của lò xo. D.H. Moon và M.s. Choi [16] đã tiến hành phân tích và đo đạc thực nghiệm dao động kết cấu khung. Y. Matsui và T. Hayashikawa [17] đã nghiên cứu phương pháp MTĐCĐL cho bài toán dao động xoắn của dầm liên tục. A.Y.T. Leung [12] đã áp dụng đã kết hợp phương pháp kết cấu con và phương pháp MTĐCĐL vào việc phân tích dao động của kết cấu khung. Tác giả cũng đề cập bước đầu đến bài toán phân tích kết cấu bằng phương pháp MTĐCĐL chịu tải trộng ngẫu nhiên [13].

Từ năm 1999 ở Việt nam đã có một số nghiên cứu ứng dụng phương pháp MTĐCĐL vào phân tích kết cấu: Tác giả Nguyễn Xuân Hùng đã nghiên cứu phát triển phương pháp MTĐCĐL để tính toán dao động của kết cấu [11]. Các tác giả Nguyễn Tiến Khiêm và Trần Văn Liên đã ứng dụng phương pháp MTĐCĐL để mô phỏng và phân tích dầm đàn hồi có nhiều vết nứt [3, 4, 5]; phát triển phương pháp ma trận chuyển tiếp để xây dựng MTĐCĐL của dầm có số lượng vết nứt bất kì, làm cơ sở nghiên cứu các kết cấu khung, dàn có các phần tử bị nứt, đồng thời áp dụng để giải bài toán tĩnh, dao động riêng và dao động cưỡng bức của dầm có nhiều vết nứt với các điều kiện biên khác nhau; xác định tải trọng sóng tác dụng lên kết cấu khung theo phương pháp MTĐCĐL [5].

1.5.3. Về ứng dụng phương pháp ma trận độ cứng động lực trong tính toán ổn định của hệ đàn hồi chịu lực không bảo toàn

Việc ứng dụng phương pháp ma trận độ cứng động lực vào phân tích kết cấu đã được thực hiện ở Việt Nam, từ nhiều năm trước đây, tuy nhiên do mức độ phức tạp của bài toán ổn định đồng thời chưa có sự phát triển hỗ trợ của các công cụ máy tính nên các việc , giải các bài toán ổn định có áp dụng phương pháp MTĐCĐL chưa được nghiên cứu một cách cơ bản.

Với phạm vi của mình, Luận văn đưa ra cách áp dụng phương pháp MTĐCĐL

vào giải quyết các bài toán ổn định từ đơn giản đến phức tạp, từ đó đưa ra đường lối áp dụng vào các bài toán ổn định chung nếu có điều kiện nghiên cứu sau này.

1.6.Kết luận chương 1

Trong chương 1, Luận văn đã trình bày tóm tắt các khái niệm về ổn định, mất ổn định trong lĩnh vực công trình và các tiêu chuẩn cân bằng về ổn định cũng như phạm vi áp dụng của các tiêu chuẩn này

- Đối với các bài toán ổn định cân bằng của hệ đàn hồi chịu lực bảo toàn thường gặp trong các công trình xây dựng, thì về nguyên tắc các tiêu chuẩn trên đều dẫn đến cùng một kết quả.
- Đối với các bài toán ổn định cân bằng của hệ đàn hồi chịu lực không bảo toàn thì nhất định phải sử dụng các tiêu chuẩn động lực học.

Tuy phức tạp nhưng tiêu chuẩn ổn định dưới dạng động lực học được xem là đầy đủ và tổng quát, giải quyết được các bài toán ổn định mà các tiêu chuẩn dưới dạng tĩnh học không giải quyết được.

Trong chương này, Luận văn cũng trình bày các khái niệm cơ bản của phương pháp MTĐCĐL, các bài toán phân tích kết cấu theo phương pháp MTĐCĐL. Ngoài ra, Luận văn cũng trình bày ma trận độ cứng động lực của phần tử thanh thẳng chịu uốn khi không kể đến và có kể đến ảnh hưởng của lực dọc. Đây là những cơ sở cho việc áp dụng phương pháp MTĐCĐL vào việc xác định lực tới hạn gây mất ổn định của các kết cấu thanh chịu nén bởi các lực không bảo toàn.

CHƯƠNG 2

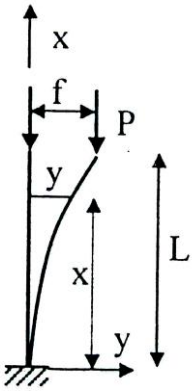
GIẢI BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH CỦA THANH BẰNG PHƯƠNG PHÁP MA TRẬN ĐỘ CỨNG ĐỘNG LỰC

2.1. Ổn định thanh chịu nén bởi lực có phương thẳng đứng (lực bảo toàn)

2.1.1. Phương pháp giải tích

Xét bài toán ổn định của thanh công xôn có mômen quán tính chính I, môđun đàn hồi *E,* khối lượng phân bố đều trên một đơn vị chiều dài *m.* Thanh chịu nén bởi lực có phương thẳng đứng *p* là lực bảo toàn mang giá trị dương nếu phần thanh bị nén (hình 2.1.1). Giả thiết chuyển vị là bé và xét chuyển động của hệ sau khi bị lệch ra khỏi dạng cân bằng thẳng ban đầu bởi một nhiễu loạn nào đó, ta nhận được

$$EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = P(f - y) + M_{qt} \qquad (2.1.1)$$



Hình 2.1.1

Trong đó M_{qt} là mômen uốn do lực quán tính gây ra. Từ SBVL, ta có

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (2.1.2)$$

Vi phân hai vế (2.1.1) sử dụng (2.1.2) ta nhận dược

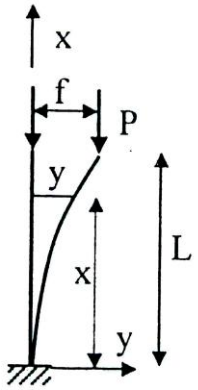
$$EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^4} + P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \qquad (2.1.3)$$

Với các điều kiện biên tại đầu ngàm

$$y(0,t) = 0;\ \frac{\partial y(0,t)}{\partial x} = 0 \qquad (2.1.4)$$

Và tại đầu tự do

$$\frac{\partial^2 y(L,t)}{\partial x^2} = 0; \frac{\partial^3 y(L,t)}{\partial x^3} = -\frac{P}{EI}\frac{\partial\ y(L,t)}{\partial x} \qquad (2.1.5)$$



Hình 2.1.2

Bằng cách đặt

$y(x,t)=Y(x).e^{i\omega t}$ (2.1.6)

Trong đó *Y(x)* là hàm số chưa biết; ω là hằng số chưa biết, nói chung là một số phức. Ta đưa phương trình (2.1.3) về dạng

$$\frac{d^4Y}{d\zeta^4}+\partial\frac{d^2y}{d\zeta^2}-\lambda^2Y=0 \qquad (2.1.7)$$

Với các tham số không nguyên

$$\zeta=\frac{x}{L};\sigma=\frac{PL^2}{EI};\lambda=\omega L^2\sqrt{\frac{m}{EI}} \qquad (2.1.8)$$

Phương trình (2.1.7) có nghiệm tổng quát

$Y(x) = C_1\sin\alpha\zeta+C_2\cos\alpha\zeta+C_3\sin\beta\zeta+C_4\cos\beta\zeta+$

(2.1.9)

Trong đó :

$$\alpha=\sqrt{\frac{\sigma}{2}+\sqrt{\frac{\sigma^2}{4}+\lambda^2}}\ ;\ \beta=\sqrt{-\frac{\sigma}{2}+\sqrt{\frac{\sigma^2}{4}+\lambda^2}} \qquad (2.1.10)$$

Thay (2.1.9) vào (2.1.4_-(2.1.5) và từ điều kiên các hằng số tích phân không đồng thời bằng không, ta nhận phương trình tần số.

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & \beta & 0 \\ -\alpha^2\sin\alpha & -\alpha^2\cos\alpha & \beta^2\sin\beta & \beta^2\cosh\beta \\ (\sigma\alpha-\alpha^3)\cos\alpha & (\sigma\alpha+\alpha^3)\sin\alpha & (\sigma\beta+\beta^3)\cosh\beta & (\sigma\beta+\beta^3)\sinh\beta \end{pmatrix}=0$$

Hay là :

$$\Delta(\sigma,\lambda)=2\lambda^2-\sigma\lambda\sin\alpha\sin\beta+(\sigma^2+2\lambda^2)\cos\alpha\cosh\beta=0 \qquad (2.1.11)$$

2.1.2. Phương pháp ma trận độ cứng động lực

Từ phương trình cơ bản của phương pháp ma trận độ cứng động lực cho kết cấu trong hệ toạ độ tổng thể (1.4.8), khử dạng suy biến của ma trận độ cứng động lực theo điều kiện biên ngàm tại nút *x=0*

$$U_1=0;\ U_2=0 \qquad (2.1.12)$$

Ta nhận được

$$K(\omega,P)U(\omega)=F(\omega) \qquad (2.1.13)$$

Trong đó K(ω,P) là ma trận độ cứng động lực rút gọn

$$K(\omega,P)=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} F_6 & F_4L \\ F_4L & F_2L^2 \end{bmatrix} \qquad (2.1.14)$$

Trong bài toán này, lực *p* được xem như là một tính chất đặc trưng của hệ mà không được xem là tải trọng nên véc tơ lực đặt ở nút bằng không

$$F(\omega)=0 \qquad (2.1.15$$

Khi đó phương trình (2.1.13) trở thành

$$k(\omega,P)u(\omega)=0 \qquad (2.1.16)$$

Theo tiêu chuẩn cân bằng ổn định dưới dạng động lực học, hệ sẽ mất ổn định khi chuyển động bé của hệ ở lân cận vị trí cân bằng dẫn đến sự tăng dần biên độ chuyển động, tức là khi $U(\omega)\neq 0$. Như vậy, hệ sẽ mất ổn định khi định thức ma trận độ cứng động lực rút gọn bằng không

$$\det K(\omega,P)=\frac{EI}{L^3}\det\begin{vmatrix} F_6 & F_4L \\ F_4L & F_2L_2 \end{vmatrix} \qquad (2.1.17)$$

Do đó ta nhận được phương triìn xác định lực tới hạn

$$F_6.F_2-F_4^2=0 \qquad (2.1.18)$$

Ký hiệu vế trái của (2.1.18) là Φ ta có

$$\Phi = \frac{(\alpha^2+\beta^2)^2\alpha\beta}{\delta^2}\left[(-\alpha\sin\alpha\cosh\beta-\beta\cos\alpha\sinh\beta)(\alpha\cos\alpha\sinh\beta-\beta\sin\alpha\cosh\beta\right]$$
$$-\frac{\alpha^2\beta^2}{\delta^2}\begin{bmatrix}(\beta^2-\alpha^2)^2(\cos\alpha\cosh\beta-1)^2+4\alpha\beta(\beta^2-\alpha^2)\sin\alpha\sinh\beta(\cos\alpha\cosh\beta-1\\+(2\alpha\beta\sin\alpha\sinh\beta)^2\end{bmatrix}$$

$$-\frac{\alpha^2\beta^2}{\delta^2}\begin{bmatrix}(\beta^2-\alpha^2)^2\cos^2\alpha\cosh^2\beta-2(\beta^2-\alpha^2)\cos\alpha\cosh\beta\\(\beta^2-\alpha^2)^2+4\alpha\beta(\beta^2-\alpha^2)\sin\alpha\cos\alpha\sinh\beta\cosh\beta\\-4\alpha\beta(\beta^2-\alpha^2)\sin\alpha\sinh\beta+4\alpha^2\beta^2\sin^2\alpha\sinh^2\beta\end{bmatrix}$$

Hay là :

$$\Phi = \frac{\alpha\beta}{\delta^2}\begin{bmatrix}(\beta^2-\alpha^2)(\alpha^2+\beta^2)^2\sin\alpha\cos\alpha\sinh\beta\cos\beta-\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)\cos^2\alpha\sinh^2\beta\\+\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)^2\sin^2\cosh^2\beta-\alpha\beta(\beta^2-\alpha^2)\cos^2\alpha\cosh^2\beta\\+2\alpha\beta(\beta^2-\alpha^2)\cos\alpha\cosh\beta-4\alpha^2\beta^2(\beta^2-\alpha^2)\sin\alpha s\cos\alpha\sinh\beta\cos\beta\\+4\alpha\beta(\beta^2-\alpha^2)\sin\alpha\sinh\beta+4\alpha^3\beta^3\sin^2\alpha\sinh^2\beta-\alpha\beta(\beta^2-\alpha^2)^2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{\alpha^2\beta^2}{\delta^2}\begin{bmatrix}(\beta^2-\alpha^2)^3\sin\alpha\cos\alpha\sinh\beta\cosh\beta-\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)^2\cos^2\alpha\sinh^2\beta\\+\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)^2\sin^2\alpha\cosh^2\beta-\alpha\beta(\beta^2-\alpha^2)^2\cos^2\alpha\cosh^2\beta\\-4\alpha^3\beta^3\sin^2\alpha\sinh^2\beta+2\alpha\beta(\beta^2-\alpha^2)\cos^2\alpha\cosh^2\beta\\+4\alpha^2\beta^2(\beta^2-\alpha^2)\sin\alpha\sinh\beta-\alpha\ \beta(\beta^2-\alpha^2)^2\end{bmatrix}$$

Sử dụng các đồng chất thức :

$\alpha\beta=\lambda;\alpha^2-\beta^2=\sigma;\ (\alpha^2+\beta^2)^2=(\sigma^2+4\lambda^2);\ \sin^2x=1-\cos^2x;\ \sinh^2x=\cosh^2x-1$

Ta nhận được :

$$\Phi = \frac{\lambda}{\delta^2}\begin{bmatrix} -\sigma^3 \sin\alpha\cos\alpha\sinh\beta\cosh\beta - \lambda(\sigma^2+4\lambda^2)\cos^2\sinh^2\beta \\ +\lambda(\sigma^2+4\lambda^2)\sin^2\cosh^2\beta - \lambda\sigma^2\cos^2\alpha socsh^2\beta - 4\lambda^3\sin^2\alpha\sinh^2\beta \\ +2\lambda\sigma^2\cos\alpha\cosh\beta - 4\lambda^2\sigma\sin\alpha\sinh\beta - \lambda\alpha^2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{-\lambda}{\delta^2}\begin{bmatrix} -\sigma^3\sin\alpha\cos\alpha\sinh\beta\cosh\beta + 4\lambda^2\sigma\sin\alpha\sinh\beta - 2\lambda\sigma^2\cos\alpha\cosh^2\beta \\ -\lambda(\sigma^3+4\lambda^2)\sin^2\alpha\cosh^2\beta + \gamma\sigma^2\cosh^2\beta + 4\lambda^3\sin^2\alpha\sinh^2\beta \\ +\lambda(\sigma^2+4\lambda^2)\cos^2\alpha\sinh^2\beta + \lambda\sigma^2 \end{bmatrix} \qquad (2.1.20)$$

$$= \frac{-\lambda}{\delta^2}\begin{bmatrix} \sigma^3\sin\alpha\cos\alpha\sinh\beta\cosh\beta + 4\lambda^2\sigma\sin\alpha\sinh\beta - 2\lambda\sigma^2\cos\alpha\cosh^2\beta \\ +\lambda(\cos^2\alpha\cosh^2\beta + \cos^2\alpha\sinh^2\beta - \sin^2\alpha\cosh^2\beta + 1 \\ +4\lambda^3(\sin^2\alpha\sinh^2\beta + \cos^2\alpha\sinh^2\beta - \sin^2\alpha\cosh^2\beta \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \frac{\lambda}{\delta^2}\begin{bmatrix} \sigma^3\sin\alpha\cos\alpha\sinh\beta\cosh\beta + 4\lambda^2\sigma\sin\alpha\sinh\beta - 2\lambda\sigma^2\cos\alpha\cosh\beta \\ +\lambda\sigma^2\begin{bmatrix}\cos^2\alpha\cosh^2\beta + \cos^2\alpha\sinh^2\beta - \sin^2\alpha\cosh^2\beta + 1 \\ +(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(\cosh^2\beta - \sinh^2\beta)\end{bmatrix} \\ +4\lambda^3\left[(1-\cos^2\alpha)(\cosh^2\beta - 1) + \cos^2\alpha(\cosh^2\beta - 1) - (1-\cos^2\alpha)\cosh^2\beta\right] \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\lambda}{\delta^2}\begin{bmatrix} \sigma^3\sin\alpha\cos\alpha\sinh\beta\cosh\beta + 4\lambda^2\sigma\sin\alpha\sinh\beta - 2\lambda\sigma^2\cos\alpha\cosh\beta \\ (2\cos^2\alpha\cosh^2\beta - \sin^2\alpha\sinh^2\beta) + 4\lambda^3(\cos^2\alpha\cosh^2\beta + 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\lambda}{\delta^2}\begin{bmatrix} \sigma^3\sin\alpha\cos\alpha\sinh\beta\cosh\beta + 4\lambda^2\sigma\sin\alpha\sinh\beta - 2\lambda\sigma^2\cos\alpha\cosh\beta \\ +2\lambda(\sigma^2+2\lambda^2)\cos^2\alpha\cosh^2\beta - \sigma^2\sin^2\alpha\sinh^2\beta - 4\lambda^3 \end{bmatrix} \qquad (2.1.19)$$

Mặt khác :

$[2\lambda^2-\sigma\lambda\sin\alpha\cos\beta+(\sigma^2+2\lambda^2)\cos\alpha\cosh\beta]\delta$

$=[2\lambda^2-\sigma\lambda\sin\alpha\cos\beta+(\sigma^2+2\lambda^2)\cos\alpha\cosh\beta](2\lambda\sin\alpha\cos\beta+\sigma\sin\alpha\sinh\beta-2\lambda)$

$$\begin{bmatrix} 4\lambda^3\cos\alpha\cosh\beta+2\lambda^2\sigma\sin\alpha\sinh\beta-4\lambda^3+2\lambda(\sigma^2+2\lambda^2)\cos^2\alpha\cosh\beta \\ +\sigma(\sigma^2+2\lambda^2)\sin\alpha\cos\alpha\sinh\beta\cosh\beta-2\lambda(\sigma^2+2\lambda^2)\cos\alpha\cosh\beta \\ -2\lambda^2\sigma\sin\alpha\cos\alpha\sinh\beta\cosh\beta-\sigma^2\lambda\sin^2\alpha\sinh^2\beta+2\lambda^2\sigma\sin\alpha\sinh\beta \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \sigma^3\sin\alpha\cos\alpha\sinh\beta\cosh\beta+4\lambda^2\sigma\sin\alpha\sinh\beta-2\lambda\sigma^2\sin\ \alpha\cosh\beta \\ +2\lambda\ (\sigma^2+2\lambda^2)\cos^2\alpha\cosh^2\beta-\sigma^2\lambda\sin^2\alpha\sinh^2\beta-4\lambda^3 \end{bmatrix} \qquad (2.1.20)$$

So sánh (2.1.19) và (2.1.20) ta nhận được dạng rút gọn của vế trái (2.1.18)

$$\Phi=F_6F_2-F_4^2=-\frac{\lambda}{\delta}\left[\lambda 2^2-\sigma\lambda\sinh\beta+(\sigma^2+2\lambda^2)\cos\alpha sosh\beta\right] \qquad (2.1.21)$$

Từ (2.1.21) dẫn đến phương trình :

$$2\lambda^2-\sigma\sin\lambda\sinh\beta+(\sigma^2+2\lambda^2)\cos\alpha\cosh\beta$$

Đây chính là phương trình (2.1.11) mà ta đã lập bằng phương pháp giải tích, tức là cách giải theo phương pháp ma trận độ cứng động lực và phương pháp giải tích cho ta cùng một kết quả.

2.1.3. Xác định lực tới hạn

Từ (2.1.11), ta nhận thấy

- Khi không có lực P thì σ=0, nghiệm λ của phương trình (2.1.11) là số thực, nó tương ứng với tần số riêng đầu tiên của thanh công xôn không chịu nén. Khi tăng giá trị tham số tải trọng đến giá trị σ=2,4674=$\pi^2/4$, tham số λdần về 0 (hình 2.1.2) tương ứng với tải trọng tới hạn.

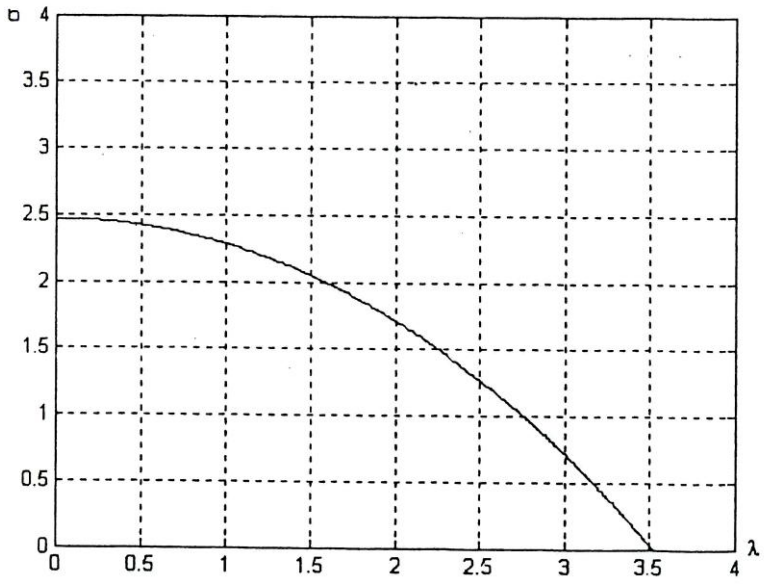
$$P_{th}=\frac{\pi^2EI}{4L^2} \qquad (2.1.22)$$

- Khi σ tiếp tục, nghiệm λ là số thực, hơn nữa một trong các nghiệm này có phần ảo là âm. Khi đó tần số ω cũng là số phức có dạng ω=a±ib. Từ hệ thức (2.1.6), ta nhận

được.

$y(x,t)=Y(x).e^{i\omega t}=Y(x).e^{i(a+ib)t}=Y(x).e^{(ia-b)t}$

Như vậy, khi $b < 0$, biên độ chuyển vị của thanh sẽ tăng theo thời gian, do đó, theo tiêu chuẩn động lực học, thanh công xôn chịu nén bởi lực có phương thẳng đứng sẽ bị mất ổn định khi $\sigma=\sigma$ tương ứng với tải trọng tới hạn (2.1.22). Kết quả tìm được phù hợp với kết quả theo tiêu chuẩn tĩnh học từ SBVL. Trường hợp khối lượng riêng của thanh là nhỏ bỏ qua so với khối lượng tập trung tại đầu tự do *M* thì tải trọng tới hạn tìm được cũng là (2.1.22).



Hình 2.1.3. Đồ thị hàm số $\sigma=\sigma(\lambda)$

2.2.Ổn định của thanh chịu nén bởi lực đuổi (lực không bảo toàn)

2.2.1. Phương pháp giải tích

Xét bài toán ổn định của thanh công xôn có mômen quán tính chính I, môđun đàn hồi *E,* khối lượng phân bố đều trên một đơn vị chiều dài *m* chịu nén bởi lực đuổi *P* (hình 2.2.l). Giả thiết chuyển vị là bé, ta nhận được

$$y'\Big|_{x=L} = \frac{dy}{dx}\Big| \approx \varphi; P_x \approx P; P_y \approx P\varphi \qquad (2.2.1)$$

Xét chuyển động của hệ sau khi bị lệch ra khỏi dạng cân bằng thẳng ban đầu bởi một nhiễu loạn nào đó, ta nhận được phương trình dao động là

$$EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = P(f-y) - P\varphi(L-x) + M_{qt} \qquad (2.2.2)$$

Trong đó M_{qt} là mômen uốn do lực quán tính gây ra. Vi phân hai vế (2.2.2) và sử dụng (2.1.2), ta nhận được phương trình dao động của thanh (2.1.3) với điều kiện biên tại đầu ngàm (2.1.4). Tại đầu tự do, các điều kiện biên là

$$\frac{\partial^2 y(L,t)}{\partial x^2} = 0; \frac{\partial^2 y(L,t)}{\partial x^3} = 0 \qquad (2.2.3)$$

Bằng cách đặt tương tự (2.1.6) và (2.1.8), từ điều kiện các hằng số tích phân không đồng thời bằng không, ta nhận phương trình tần số

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & \beta & 0 \\ -\alpha^2\sin\alpha & -\alpha^2\cos\alpha & \beta^2\sinh\beta & \beta^2\cosh\beta \\ -\alpha^3\cos\alpha & \alpha^3\sin\alpha & \beta^3\cosh\beta & \beta^3\sinh\beta \end{pmatrix} = 0$$

Hay là

$$\Delta(\beta,\alpha)=\sigma^2+2\lambda^2+\sigma\lambda\sin\alpha\sinh\beta+2\lambda^2\cos\alpha\cosh\beta=0 \qquad (2.2.4)$$

2.2.2. Phương pháp ma trận độ cứng động lực

Đối với bài toán thanh chịu nén bởi lực đuổi (hình 2.2.1) đặt tại nút 2 *(x=L)*, sử dụng (1.4.27), lực cắt tại nút 2 được biểu diễn dưới dạng

$$\overline{Q}_3 e^{t\omega t} = -EI\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(L,t) = Q_3 e^{t\omega t} + P\frac{\partial\ y}{\partial x}(L,t) = Q_3 e^{t\omega t} + P\frac{\partial N(L,\omega)}{\partial x}\{u\}e^{t\omega t} \qquad (2.2.5)$$

Khi đó phương trình (1.4.8) có dạng

$$\overline{K}(\omega,P)\overline{U}(\omega)=\left[\overline{K}(\omega,P)+\begin{Bmatrix}0\\0\\P\dfrac{\partial N(L,\omega)}{\partial x}\\0\end{Bmatrix}\right]\overline{U}(\omega)=\overline{F}(\omega) \qquad (2.2.6)$$

Từ đó, ta nhận được ma trận độ cứng động lực của phần tử thanh chịu lực đuổi đặt tại nút 2 (x=L) có dạng

$$\overline{K}=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} F_6 & -F_4L & F_5 & F_3L\\ -F_4L & F_2L^2 & -F^3L & F_2L^2\\ F_5+\dfrac{PL^3)}{EI}\dfrac{PL^3\partial N_1(L,\omega)}{\partial x} & -F_3L+\dfrac{PL^3)}{EI}\dfrac{PL^3\partial N_2(L,\omega)}{\partial x} & F_6+\dfrac{PL^3}{EI}\dfrac{PL^3\partial N_4(L,\omega)}{\partial x} & F_4L+\dfrac{PL^3}{EI}\dfrac{PL^3\partial N_2(L,\omega)}{\partial x}\\ F_3L & F_1L^2 & F_3L^2 & \end{bmatrix}$$

Trong bài toán này, lực P được xem xét như là một tính chất đặc trưng của hệ mà không được xem là tải trọng nên véctơ lực đặt ở nút bằng không.

$F(\omega)=0$ (2.2.8)

Khử dạng suy biến của ma trận độ cứng động lực theo điều kiện biên tại x=0

$U_1=0$; $U_2=0$ (2.2.9)

Ta nhận được

$K(\omega,P)UF(\omega)=0$ (2.1.10)

Trong đó K(ω,P) là ma trận độ cứng động lực rút gọn

$$\overline{K}=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} F_6+\dfrac{PL^3}{EI}\dfrac{PL^3\partial N_3(L,\omega)}{\partial x} & F_4L+\dfrac{PL^3}{EI}\dfrac{PL^3\partial N_4(L,\omega)}{\partial x}\\ F_4L & F_2L^2 \end{bmatrix} \qquad (2.2.11)$$

Trong biểu thức (2.2.11) các hàm số F_2, F_4, F_6 được xác định theo (1.4.32), các hàm số $N_3(x,\omega)$ được xác định theo (1.4.28)

$$N_3(x,\omega)=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left(-F_3\cos\alpha\zeta-\frac{F_5}{\alpha}\sin\alpha\zeta+F_3\cosh\beta\zeta+\frac{F_5}{\alpha}\sinh\beta\zeta\right)$$

$$N_4(x,\omega)=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left(F_1\cos\alpha\zeta-\frac{F_3}{\alpha}\sin\alpha\zeta-F_1L\cosh\beta\zeta+\frac{F_3L}{\beta}\sinh\beta\zeta\right)$$

Do đó

$$\frac{\partial N_3(x,\omega)}{\partial x}=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{F_3\alpha}{L}\sin\alpha\zeta-\frac{F_5}{L}\cos\alpha\zeta+\frac{F_3\beta}{L}\sinh\beta\zeta+\frac{F_5}{L}\cosh\beta\zeta\right)$$

$$\frac{\partial N_4(x,\omega)}{\partial x}=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left(F_1\alpha\sin\alpha\zeta-F_3\cos\alpha\zeta-F_1\beta\sinh\beta\zeta+F_3\cosh\beta\zeta\right)$$

Tại nút 2 (x=L), ta có

$$\frac{\partial N_3(x,\omega)}{\partial x}=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{F_3\alpha}{L}\sin\alpha\zeta-\frac{F_5}{L}\cos\alpha\zeta+\frac{F_3\beta}{L}\sinh\beta\zeta+\frac{F_5}{L}\cosh\beta\zeta\right)$$

$$=\frac{(\cos\alpha-\cosh\beta)\alpha^2\beta}{\delta L}\sin\alpha-\frac{(\beta\sinh\beta+\alpha\sin\alpha)\alpha\beta}{\delta L}\cos\alpha$$

$$+\frac{(\cos\alpha-\cosh\beta)\alpha\ \beta^2}{\delta L}\sinh\beta+\frac{(\beta\sinh\beta+\alpha\sin\alpha)\alpha\beta}{\delta L}\cosh\beta$$

$$=\frac{\alpha\beta}{\delta L}\begin{pmatrix}\alpha\sin\alpha\cos\alpha-\alpha\sin\alpha\cos\beta-\alpha\sin\alpha\cos\alpha-\beta\cos\alpha\sinh\beta\\+\beta\cos\alpha\sinh\beta-\beta\sinh\beta\cosh\beta+\beta\sinh\beta\cosh\beta+\alpha\sin\alpha\cosh\beta\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial N_4(x,\omega)}{\partial x}=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left(F_1\alpha\sin\alpha\zeta-F_3\cos\alpha\zeta-F_1\beta\sinh\beta\zeta+F_3\cosh\beta\zeta\right)$$

$$=\frac{(\alpha\sinh\beta-\beta\sin\alpha)\alpha}{\delta}\sin\alpha-\frac{(\cos\alpha-\cosh\beta)\alpha\beta}{\delta}\cos\alpha$$

$$+\frac{(\alpha\sinh\beta-\beta\sin\alpha)\alpha}{\delta}\sin\beta-\frac{(\cos\alpha-\cosh\beta)\alpha\beta}{\delta}\cos\beta$$

$$=\frac{1}{\delta}\begin{bmatrix}\alpha^2\sin\alpha\sinh\beta-\alpha\beta\sin^2\alpha-\alpha\beta\cos^2\alpha+\alpha\beta\cos\alpha\cosh\beta\\+\alpha\beta\sinh^2\beta-\beta^2\sin\alpha\sinh\beta+\alpha\beta\cos\alpha\cosh\beta-\alpha\beta\cosh^2\beta\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{\delta}\left[(\alpha^2-\beta^2)\sin\alpha\sinh\beta-\alpha\beta+2\alpha\beta\cos\alpha\cosh\beta-\alpha\beta(\cosh^2\beta-\sinh^2\beta)\right]$$

$$=\frac{1}{\delta}\left[(\alpha^2-\beta^2)\sin\alpha\sinh\beta-2\alpha\beta+2\alpha\beta\cos\alpha\cosh\beta\right]=\frac{\delta}{\delta}=1$$

Như vậy :

$$\frac{\partial N_3(x,\omega)}{\partial x}=0;\ \frac{\partial N_4(x,\omega)}{\partial x}=0 \qquad (2.2.12)$$

Thay (2.2.12) vào (2.2.11) ta nhận được ma trận độ cứng động lực rút gọn

$$\overline{K}(\omega,P)=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix}F_6 & F_4L+\dfrac{PL^3}{EI}\\ F_4L & F_2L^2\end{bmatrix} \qquad (2.2.13)$$

Theo tiêu chuẩn cân bằng ổn định dưới dnạg động lực học, hệ sẽ mất ổn định khi định mức của ma trận độ cứng động lực rút gọn bằng không

$$\det \overline{K}(\omega, P) = \frac{EI}{L^3} \det \begin{vmatrix} F_6 & F_4 L + \dfrac{PL^3}{EI} \\ F_4 L & F_2 L^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.2.14)$$

Suy ra

$$F_6 F_2 L^2 - F_4^2 L^2 - F_4 \frac{PL^4}{EI} = L^2 (F_6 F_2 - F_4^2 - \sigma F_4) = 0 \qquad (2.2.15)$$

Sử dụng (2.2.21) ta biến đổi vế trái của (2.2.15)

$$F_6 F_2 - F_4^2 - \sigma F = -\frac{\lambda}{\delta}\left[2\lambda^2 - \sigma\lambda \sin\alpha \sinh\beta + (\sigma^2 + 2\lambda^2)\cos\alpha \cosh\beta\right]$$

$$-\sigma\frac{\lambda}{\delta}\left[(\beta^2 - \alpha^2)(\cos\alpha \cosh\beta - 1) + 2\alpha\beta \sin\alpha \sinh\beta\right]$$

$$= -\frac{\lambda}{\delta}\begin{bmatrix} 2\lambda^2 - \sigma\lambda \sin\alpha \sinh\beta + (\sigma^2 + 2\lambda^2)\cos\alpha \cosh\beta \\ -\sigma^2 \cos\alpha \cosh\beta + \sigma^2 + 2\sigma\lambda \sin\alpha \sinh\beta \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{\lambda}{\delta}(2\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma\lambda \sin\alpha \sinh\beta + 2\lambda^2 \cos\alpha \cosh\beta)$$

Từ đó ta nhận được phương trình

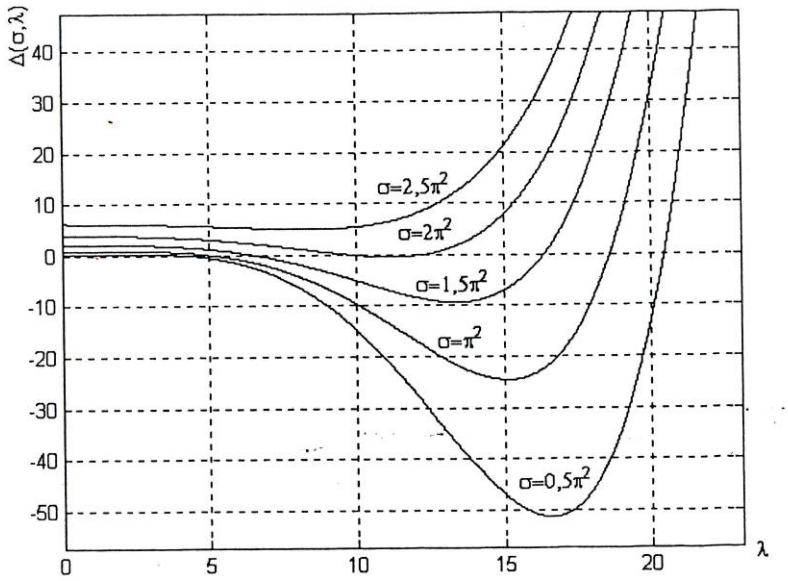
$$2\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma\lambda \sin\alpha \sinh\beta + 2\lambda^2 \cos\alpha \cosh\beta = 0$$

Phương trình này hoàn toàn trùng với phương trình (2.2.4) nhận được bằng phương pháp giải tích, tức là cách giải theo phương pháp ma trận độ cứng động lực và phương pháp giải tích cho ta cùng một kết quả .

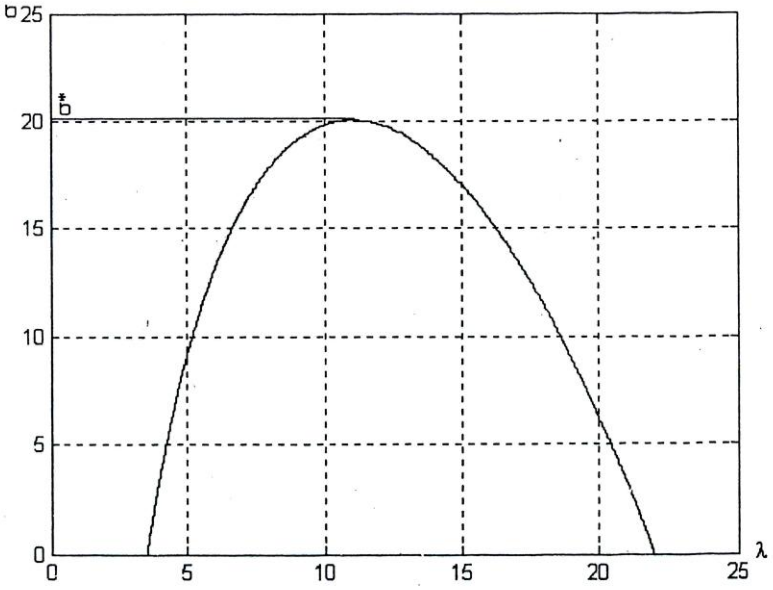
2.2.3. Xác định lực tới hạn

Từ (2.1.11), ta nhận thấy

Khi không có lực *p* thì $\sigma=0$, nghiệm λ của phương trình (2.l.ll) là số thực, nó tương ứng với tần số riêng đầu tiên của thanh công xôn không chịu nén. Khi tăng giá trị tham số tải trọng σ hai nghiệm bé nhất của phương trình tiến dần về nhau (hình 2.2.2) và khi $\sigma = \sigma = 20{,}05$ thì hai nghiệm này trùng nhau (hình 2.2.3)



Hình 2.2.3. Đồ thị hàm số $\Delta(\sigma,\lambda)/\pi^4$ với các giá trị σ khác nhau



Hình 2.2.4. Đồ thị hàm số $\sigma = \sigma(\lambda)$

Khi σ tiếp tục tăng, nghiệm λ là các số phức, hơn nữa một trong các nghiệm này có phần ảo là âm. Do đó, biên độ chuyển vị của htanh sẽ tăng theo thời gian, thanh công xôn chịu nén bởi lực đuổi sẽ bị mất ổn định khi σ=σ, tương ứng với tải trọng giới hạn

$$P_{th} = 20{,}05\frac{EI}{L^2} \qquad (2.2.17)$$

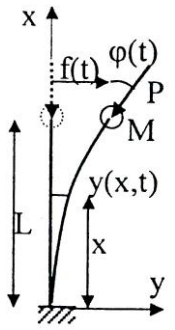
Giá trị tải trọng giới hạn của lực đuổi tìm được gần với giá trị tải trọng tới hạn khi bỏ qua khối lượng phân bố của thanh (1.3.22) và gấp 8,13 lần tải trọng tới hạn của thanh công xôn chịu nén bởi lực thẳng đứng (2.1.22)

2.3 Ảnh hưởng của sự phân bố khối lượng tới giá trị lực tới hạn của thanh chịu nén bởi lực đuổi

2.3.1. Phương pháp giải tích

Xét thanh công xôn tại đầu tự do có khối lượng tập trung M và nén bởi lực đuổi P (hình 2.3.1). Khi đó ta cũng nhận được phương trình dao động (2.1.3) và điều kiện biên tại ngàm (2.1.4). Điều kiện biên tại đầu tự do có dạng

$$\frac{\sigma^2 y(L,t)}{\sigma x^2} = 0; \frac{\sigma^2 y(L,t)}{\sigma x^3} = \frac{M}{EI}\frac{\sigma^2 y(L,t)}{\sigma t^2} \qquad (2.3.1)$$



Hình 2.3.1

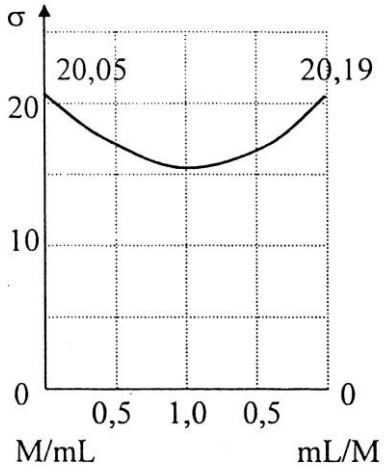
Bằng cách đặt tương tự (2.1.6) và (2.1.8), từ điều kiện các hằng số tích phân không đồng thời bằng không ta nhận phương trình tần số

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\alpha & 0 & \beta & 0 \\ -\alpha^2\sin\alpha & -\alpha^2\cos\alpha & \beta^2\sinh\beta & \beta^2\cosh\beta \\ \frac{ML^3\omega^2}{EI}\sin\alpha - \alpha^3\cos\alpha & \frac{ML^3\omega^2}{EI}\cos\alpha + \alpha^3\sin\alpha & \frac{ML^3\omega^2}{EI}\sinh\beta + \beta^3\cos\beta & \frac{ML^3\omega^2}{EI}\cosh\beta + \beta^3\sin\beta \end{pmatrix}$$

Từ đó ta có được phương trình đặc trưng :

$$\Delta(\sigma,\lambda)=\sigma^2+2\lambda^2+\sigma\lambda\sin\alpha\sinh\beta+2\lambda^2\cos\alpha\cosh\beta$$
$$+2\frac{M}{mL}\lambda\sqrt{\frac{\sigma^2}{4}+\lambda^2}\,(\alpha\cos\alpha\sinh\beta-\beta\sin\alpha\cosh\beta)=0 \qquad (2.3.2)$$

Kết quả tính toán bằng số được thể hiện trên hình 2.3.2.



Hình 2.3.2

Nếu M=0 thì σ=20,05 và tải trọng tới hạn xác định theo (2.2.5). Nếu khối lượng riêng của thanh là nhỏ bỏ qua so với khối lượng tập trung tại đầu tự do M thì giá trị của tham số tải trọng tới hạn σ^* là nghiệm phương trình $tg\sqrt{\sigma}=\sqrt{\sigma}$ tức là σ = 20,19 (hình 2.3.2) tương ứng với tải trọng tới hạn xác định theo (1.3.22).

2.3.2. Phương pháp ma trận độ cứng động lực

Đối với bài toán thanh chịu nén bởi lực đuổi có khối lượng tập trung đặt tại nút 2 *(x=L)*, lực cắt tại nút 2 được biểu diễn dưới dạng

$$\overline{Q}_3e^{i\omega t}=-EI\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(L,t)=Q_3e^{i\omega t}+P\frac{\partial y}{\partial x}(L,t)+M\frac{\partial y}{\partial x}(L,t)$$
$$=Q_3e^{i\omega t}+P\frac{\partial N(L,\omega)}{\partial x}\{u\}e^{i\omega t}-\omega^2M.N(L,\omega)\{u\}e^{i\omega t}$$

Trong bài toán này, lực P được xem như là một tính chất đặc trưng của hệ mà không được xem là tải trọng nên véc tơ lực đặt ở nút bằng không

$$F(\omega)=0 \qquad (2.2.4)$$

Sau khi khử dạng suy biến với điều kiện biên ngàm tại x=0

$U_1 = 0$; $U_2 = 0$ (2.3.5)

Ta nhận được ma trận độ cứng động lực rút gọn của phần tử thanh chịu lực đuổi có khối lượng tập trung đặt tại nút 2 có dạng :

$$\overline{K}(\omega,P)=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} F_6+\dfrac{PL^3}{EI}\dfrac{\partial N_3(L,\omega)}{\partial x}-\omega^2\dfrac{ML^3}{EI}N_3(L,\omega) & F_4L+\dfrac{PL^3}{EI}\dfrac{\partial N_4(L,\omega)}{\partial x}-\omega^2\dfrac{ML^3}{EI}N_4(L,\omega) \\ F_4L & F_2L^2 \end{bmatrix}$$

(2.3.6)

Trong biểu thức (2.3.6), các hàm số F_2,F_4,F_6 được xác định theo (1.4.32), các hệ số $N_3(L,\omega)$ và $N_4(L,\omega)$ được xác định theo (1.4.28)

$$N_3(x,\omega)=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left(-F_3\cos\alpha\zeta-\frac{F_5}{\alpha}\sin\alpha\zeta+F_3\cosh\beta\zeta+\frac{F_5}{\alpha}\sinh\beta\zeta\right)$$

$$N_4(x,\omega)=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left(F_1L\cos\alpha\zeta-\frac{F_3L}{\alpha}\sin\alpha\zeta-F_1L\cosh\beta\zeta+\frac{F_3}{\beta}\sinh\beta\zeta\right)$$

Tại nút 2 (x=L), ta có

$$N_3(L,\omega)=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left(-F_3\cos\alpha\zeta-\frac{F_5}{\alpha}\sin\alpha\zeta+F_3\cosh\beta\zeta+\frac{F_5}{\alpha}\sinh\beta\zeta\right)$$

$$\begin{aligned}
&=\frac{(\cos\alpha-\cosh\beta)\alpha\ \beta}{\delta}\cos\alpha-\frac{(\beta\sinh\beta+\alpha\sin\alpha)\alpha\beta}{\delta}\sin\alpha\\
&+\frac{(\cos\alpha-\cosh\beta)\alpha\ \beta}{\delta}\sinh\beta+\frac{(\beta\sinh\beta+\alpha\sin\alpha)\alpha}{\delta}\sinh\beta\\
&=\frac{1}{\delta}\begin{bmatrix}\alpha\beta\cos^2\alpha+\alpha\beta\alpha\cos\alpha\cos\beta-\beta^2\alpha\sin\alpha\sinh\beta-\alpha\beta\sin^2\alpha\\+\alpha\beta\cos\alpha\cos\beta-\alpha\beta\cosh^2\beta+\alpha\beta\sinh^2\beta+\alpha^2\sin\alpha\sinh\beta\end{bmatrix}\\
&=\frac{1}{\delta}\left[2\alpha\beta\cos\alpha\cos\beta+(\alpha^2-\beta^2)\sin\alpha\sinh\beta-2\alpha\beta\right]=\frac{\delta}{\delta}=1
\end{aligned}$$

$$N_4(L,\omega)=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left(F_1L\cos\alpha\zeta-\frac{F_3L}{\alpha}\sin\alpha\zeta-F_1L\cosh\beta\zeta+\frac{F_3}{\beta}\sinh\beta\zeta\right)$$

$$= \frac{(-\alpha \sinh\beta + \beta \sin\alpha)L}{\delta} \cos\alpha - \frac{(\cos\alpha - \cosh\beta)\beta L}{\delta} \sin\alpha$$
$$+ \frac{(\alpha \sinh\beta - \beta \sin\alpha)L}{\delta} \cos\beta + \frac{(\cos\alpha - \cosh\beta)\alpha L}{\delta} \sinh\beta$$
$$= \frac{1}{\delta}\begin{bmatrix} \beta \sin\alpha \cos\alpha - \alpha \cos\alpha \sinh\beta - \beta \cos\alpha \sin\alpha - \beta \sin\alpha \alpha \cosh\beta \\ + \alpha \sinh \quad \beta \cos\beta - \beta \quad \sin\alpha \cos\beta + \alpha \cos\alpha \sinh\beta - \alpha \sinh\beta \cosh\beta \end{bmatrix} = 0$$

Như vậy

$N_3(L,\omega)=1$; $N_4(L,\omega)=0$ (2.3.7)

Thay (2.3.7) vào (2.3.6) ta nhận được ma trận độ cứng động lực rút gọn

$$\overline{K}(\omega, P) = \frac{EI}{L^2}\begin{bmatrix} F_6 - \omega^2 \frac{ML^3}{EI} & F_4 L + \frac{PL^3}{EI} \\ F_4 L & F_2 L_2 \end{bmatrix} \quad (2.3.8)$$

Theo tiêu chuẩn cân bằng ổn định dưới dạng động lực học, hệ sẽ mất ổn định khi định mức của ma trận độ cứng động lực rút gọn bằng không, từ đó ta nhận được phương trình đặc trưng.

$$F_6 F_2 L^2 - F_4^2 L^2 - F_4 \frac{PL^4}{EI} - \omega^2 \frac{ML^5}{EI} F_2 = L^2 (F_6 F_2 - F_4^2 - \sigma F_4 - \omega^2 \frac{ML^3}{EI} F_2) = 0 \quad (2.3.9)$$

Sử dụng (2.2.16) vế trái của (2.3.9) có dạng

$$F_6 F_2 - F_4^2 - \sigma F_4 \frac{PL^4}{EI} - \omega^2 \frac{ML^3}{EI} F_2 = 2\lambda^2 + \sigma^2 + \sigma\lambda \sin\alpha \sinh\beta + 2\lambda^2 \cos\alpha \cosh\beta)$$
$$- \omega^2 \frac{ML^3}{EI} \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{\delta} (\alpha \cos\alpha \sinh\beta - \beta \sin\alpha \cosh\beta)$$

(2.3.10)

Từ (2.1.8) suy ra

$$\frac{\omega^2 L^4}{EI} = \frac{\lambda^2}{m}$$

Khi đó biểu thức thứ hai của vế phải (2.3.10) có dạng :

$$-\omega^2 \frac{ML^3}{EI}\frac{(\alpha^2+\beta^2)}{\delta}(\alpha\cos\alpha\sinh\beta-\beta\sin\alpha\cosh\beta)$$
$$=-\frac{\lambda^2 M}{mL}\frac{(\alpha^2+\beta^2)}{\delta}(\alpha\cos\alpha\sinh\beta-\beta\sin\alpha\cosh\beta)$$
$$=-\frac{\lambda}{\delta}\frac{M}{mL}\lambda\left(2\sqrt{\frac{\sigma^2}{4}+\alpha^2}\right)(\alpha\cos\alpha\sinh\beta-\beta\sin\alpha\cosh\beta)$$

Do đó vế trái của (2.3.9) có dạng :

$$F_6F_2-F_4^2-\sigma F_4\frac{ML^3}{EI}F_2=-\frac{\lambda}{\delta}\left[\begin{array}{c}2\lambda^2+\sigma^2+\sigma\lambda\sin\alpha\sinh\beta+2\lambda^2\cos\alpha\cos\beta\\+2\frac{M}{mL}\lambda\sqrt{\frac{\sigma^2}{4}+\lambda^2}(\alpha\cos\alpha\sinh\beta-\beta\sin\alpha\cosh\beta)\end{array}\right]$$

Phương trình (2.3.9) trở thành :

$$\Delta(\sigma,\lambda)=2\lambda^2+\sigma^2+\sigma\lambda\sin\alpha\sinh\beta+2\lambda^2\cos\alpha\cosh\beta$$
$$+2\frac{M}{mL}\lambda\sqrt{\frac{\sigma^2}{4}+\lambda^2}(\alpha\cos\alpha\sinh\beta-\beta\sin\alpha\cosh\beta)=0$$

Phương trình này hoàn toàn trùng với phương trình (2.3.2) được giải theo phương pháp giải tích, tức là cách giải theo phương pháp ma trận độ cứng động lực và phương pháp giải tích cho ta cùng một kết quả.

2.4. Ổn định của thanh chịu nén bởi lực có đường tác dụng không đổi

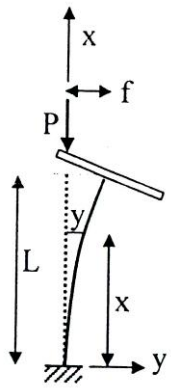
2.4.1.Phương pháp giải tích

Xét ổn định của thanh công xôn có khối lượng phân bố đều chịu nén bởi lực có đường tác dụng không đổi P (hình 2.4.1). Giả thiết chuyển vị là bé như (2.2.1), xét chuyển động của hệ sau khi bị lệch ra khỏi dạng cân bằng thẳng ban đầu bởi một nhiễu loạn nào đó, ta có được phương trình dao động

$$EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-Py+M_{qt} \qquad (2.4.1)$$

trong đó M_{qt} là mômen uốn do lực quán tính gây ra. Vi phân hai vế (2.4.1), sử dụng (2.1.2), ta cũng nhận được phương trình (2.1.3). Các điều kiện biên tại đầu ngàm tương tự (2.1.4). Tại đầu tự do, thay cho điều kiện (2.1.5), điều kiện biên có

dạng



Hình 2.4.1

$$EI\frac{\partial^2 y(L,t)}{\partial x^2} = -Py(L,t); EI\frac{\partial^3 y(L,t)}{\partial x^3} = -Py(L,t) \qquad (2.4.2)$$

Bằng cách đặt tương tự (2.1.6) và (2.1.8), ta nhận phương trình tần số

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & \beta & 0 \\ (\sigma-\alpha^2)\sin\alpha & (\sigma-\alpha^2)\cos\alpha & (\sigma+\beta^2)\sinh\beta & (\sigma+\beta^2)\cos\beta \\ (\sigma-\alpha^2)\cos\alpha & -(\sigma-\alpha^2)\alpha\sin\alpha & (\sigma+\beta^2)\cos\beta & (\sigma+\beta^2)\sinh\beta \end{pmatrix} = 0 \quad (2.4.2\text{ b})$$

Dẫn đến cùng phương trình đặc trưng (2.4.2) và cùng một giá trị tải trọng tới hạn (2.2.17) như bài toán ổn định của thanh chịu lực bởi lực đuổi.

Trường hợp khối lượng riêng của thanh là nhỏ bỏ qua so với khối lượng tập trung tại đầu tự do M thì tải trọng tới hạn cũng trùng với kết quả tải trọng tới hạn của bài toán ổn định thanh chịu lực đuổi (1.3.22).

2.4.2.Phương pháp ma trận độ cứng động lực

Đối với bài toán lực có đường tác dụng không đổi đặt tại nút **2** *(x=L)*, mômen tại nút 2 được biểu diễn dưới dạng

$$\overline{Q_3}e^{i\omega t} = Q_3 e^{i\omega t}$$

$$\overline{M_3}e^{i\omega t} = -EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(L,t) = M_3 e^{i\omega t} + P.y(L,t) = M_3 e^{i\omega t} + P.N(L,\omega)\{u\}e^{i\omega t} \qquad (2.4.3)$$

Trong bài toán này, lực P được xem như là một tính chất đặc trưng của hệ mà không được xem là tải trọng nên véc tơ lực đặt ở nút bằng không

$$F(\omega) = 0 \tag{2.4.4}$$

Khử dạng suy biến với điều kiện biên ngàm tại x=0

$U_1=0$; $U_2=0$ (2.4.5)

Ta nhận được ma trận độ cứng động lực rút gọn của thanh chịu lực có đường tác dụng không đổi đặt tại nút 2 có dạng

$$\overline{K}(\omega, P) = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} F_6 & F_4 L \\ F_4 L + \dfrac{PL^3}{EI} N_3(L,\omega) & F_2 L^2 + \dfrac{PL^3}{EI} N_4(L,\omega) \end{bmatrix} \tag{2.4.6}$$

Sử dụng (2.3.7) ta được

$$\overline{K}(\omega, P) = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} F_6 & F_4 L \\ F_4 L + \dfrac{PL^3}{EI} & F_2 L^2 \end{bmatrix} \tag{2.4.7}$$

Theo tiêu chuẩn cân bằng ổn định dưới dạng động lực học, hệ sẽ mất ổn định khi định thức của ma trận độ cứng động lực rút gọn bằng không, từ đó ta nhận được phương trình đặc trưng

$$F_6 F_2 L^2 - F_4^2 L^2 - F_4 \frac{PL^3}{EI} = L^2.(F_6 F_2 - F_4^2 L^2 - \sigma F_4) \tag{2.4.8}$$

Phương trình này hoàn toàn trùng với phương trình (2.2.15), do đó lực tới hạn của thanh chịu nén bởi lực có đường tác dụng không đổi đặt tại nút 2 có giá trị bằng với lực tới hạn của thanh chịu nén bởi lực đuổi

Như vậy, cách giải theo phương pháp giải tích và phương pháp MTĐCĐL đều dẫn đến cùng một kết quả.

2.5. Kết luận chương 2

Trong chương 2, Luận văn đã trình bày cách xác định lực tới hạn cho các bài toán ổn định của thanh chịu nén bởi các lực bảo toàn và không bảo toàn bằng phương pháp ma trận độ cứng động lực dựa vào tiêu chuẩn ổn định dưới dạng động lực học.

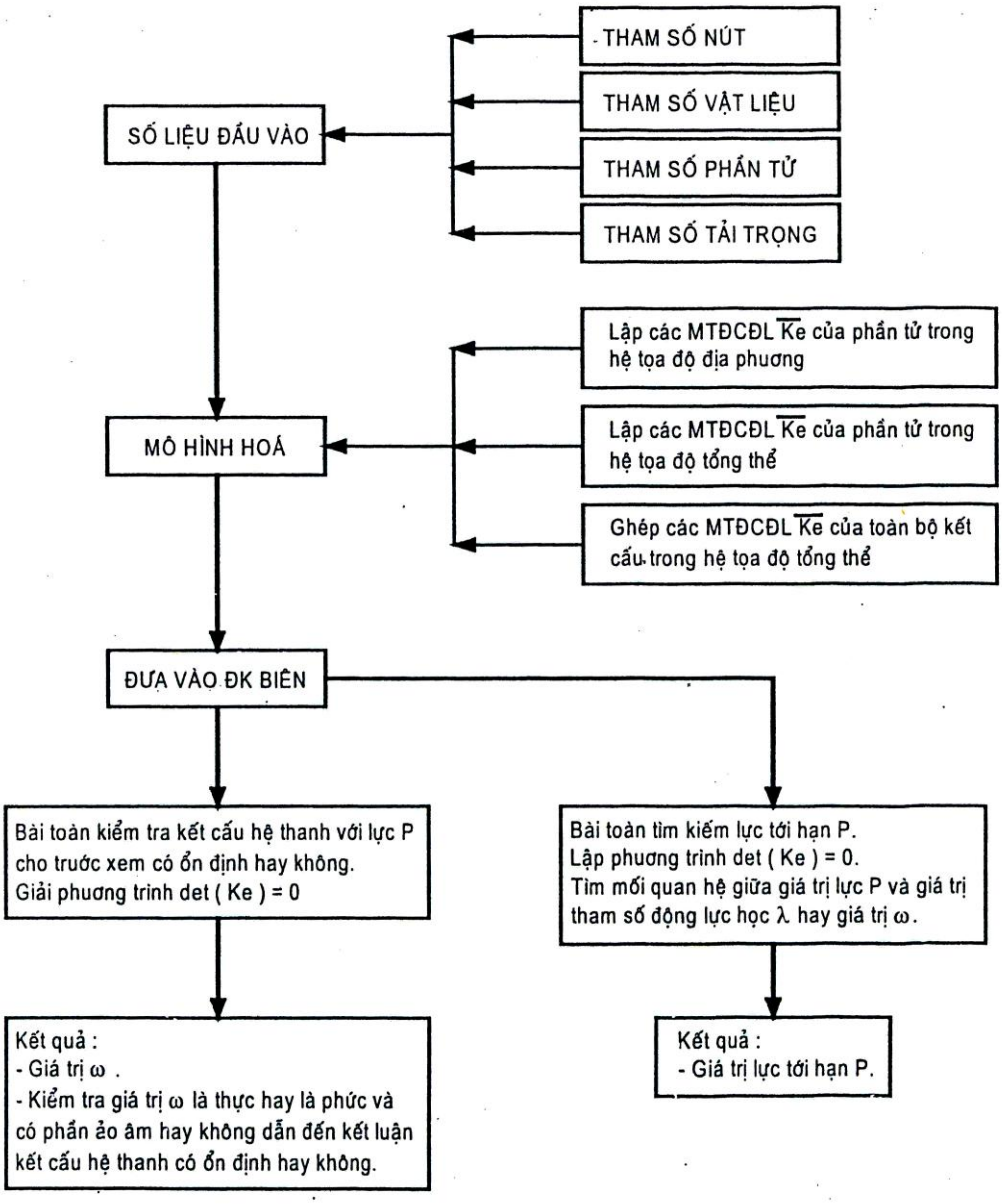
Từ các ví dụ điển hình đã được giải, Luận văn đã chứng minh rằng việc xác định lực tới hạn theo phương pháp ma trận độ cứng động lực dựa theo tiêu chuẩn ổn định dưới dạng động lực học dẫn đến các kết quả là các phương trình đặc trưng và các giá trị lực tới hạn hoàn toàn trùng với kết quả xác định theo các phương pháp giải tích. Đây chính là cơ sở để có thể áp dụng phương pháp ma trận độ cứng động lực vào các bài toán ổn định hệ thanh phức tạp hơn được xử lý bằng các chương trình tính toán hiện đại, áp dụng các phương pháp tính toán bằng số sẽ được trình bày ở chương 3.

CHƯƠNG 3

PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH CỦA KẾT CẤU HỆ THANH CHỊU LỰC KHÔNG BẢO TOÀN BẰNG PHƯƠNG PHÁP MA TRẬN ĐỘ CỨNG ĐỘNG LỰC

3.1. Sơ đồ phân tích ổn định của các kết cấu thanh theo phương pháp ma trận độ cứng động lực

3.1.1. Sơ đồ khối



3.1.2. Các kết quả ra

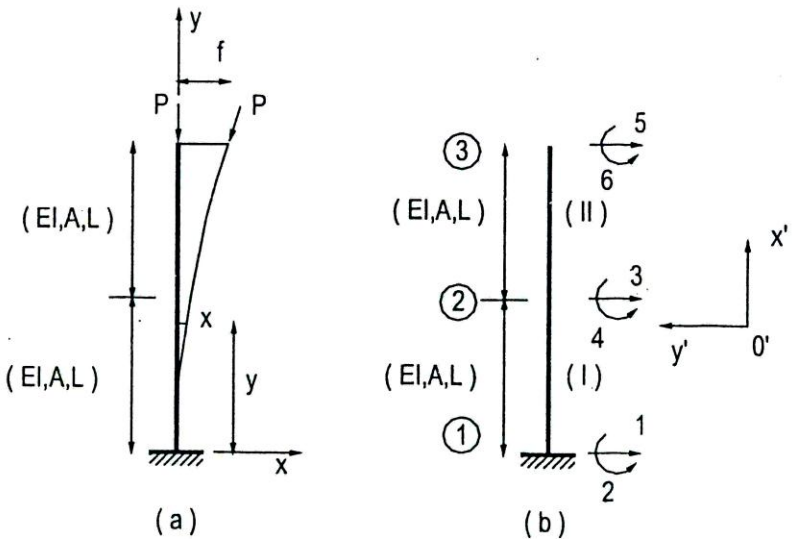
Các kết quả ra phụ thuộc 2 dạng bài toán:

- Bài toán kiểm tra cho kết quả là giá trị của ω là giá trị thực hoặc phức, đồng thời cho kết quả bài toán là ổn định hay không.
- Bài toán xác định lực tới hạn cho giá trị lực tới hạn P là một số thực. Đây là bài toán quan trọng hơn cả và là mục đích nghiên cứu của luận văn.

Các chương trình tính toằn ma trận độ cứng động lực được lập chủ yếu bằng chương trình Matlab được trình bày trong phần sau.

3.2. Ổn định của kết cấu thanh đơn giản có độ cứng không đổi

Xét bài toán ổn định của thanh công xôn chịu lực đuổi tương tự bài toán 2.2 nhưng thanh được chia làm 2 phần tử có mômen quán tính chính I, môđun đàn hồi E, diện tích A**,** chịu nén bởi lực đuổi P (hình 3.2.l.a).



Hình 3.2.l.a

Sơ đồ các toạ độ nút trong hệ toạ độ chung được bố trí trên hình 3.2.1 .b. Số liệu các phần tử ghi trong bảng 3.2.1 dưới đây

Phần tử	Nút i (đầu)	Nút j (cuối)	Diện tích tiết diện EI_{min}	Độ cứng EI_{min}	Chiều dài	cosα	sinα
I	1	2	A	EI	L	1	0
II	2	3	A	EI	L	1	0

Do hệ toạ độ địa phương của các phần tử trùng với hệ toạ độ tổng thể nên ta không cần dùng đến các ma trận chuyển.

- Ma trận độ cứng của phần tử trong hệ trục toạ độ tổng thể

- Phần tử I: áp dụng kết quả xác định ma trận độ cứng động lực của bài toán 2.1 đã xét ở chương 2, ta được

$$\overline{K_I} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} F_6 & F_4L & F_5 & F_3L \\ -F_4L & F_2L^2 & -F_3L & F_1L^2 \\ F_5 & -F_3L & F_6 & F_4L \\ F_3L & F_1L^2 & F_4L & F_2L^2 \end{bmatrix} \qquad (2.3.1)$$

Với các hộ số F_1 - F_6 và hệ số α,β,σ,λ được định nghĩa theo các công thức (1.4.29) đến (1.4.32).

- Phần tử II: áp dụng kết quả xác định MTĐCĐL bài toán 2.2 đã xét ở chương 2 với các hệ số F_1 - F_6 và hệ số α,β,σ,λ tương tự thanh số I

$$\overline{K_{II}} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} F_6 & -F_4L & F_5 & F_3L \\ -F_4L & F_2L^2 & -F_3L & F_1L^2 \\ F_5 & -F_3L & F_6 & F_4L + \dfrac{PL^3}{EI} \\ F_3L & F_1L^2 & F_4L & F_2L^2 \end{bmatrix} \qquad (3.2.2)$$

- Ma trận độ cứng của toàn kệ kết cấu trong hệ trục toạ độ tổng thể: Do hệ có hai phần tử nên ma trận độ cứng động lực toàn kết cấu là ma trận khối chéo, kích thước

(8x8), nhận được bằng cách ghép ma trận $\overline{K_I}$ và $\overline{K_{II}}$

$$\left[\overline{K_g}\right]=\begin{bmatrix}\overline{K}_1 & [0]\\ [0] & \left[\overline{K_{II}}\right]\end{bmatrix} \qquad (3.2.3)$$

- Khử trùng lặp: Áp dụng phương pháp độ cứng trực tiếp, ma trận độ cứng động lực toàn hệ được biểu diễn như sau:

$$\overline{K_{II}}=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} F_6 & -F_4L & F_5 & F_3L & 0 & 0\\ -F_4L & F_2L^2 & -F_3L & F_1L^2 & 0 & 0\\ F_5 & -F_3L & F_6+F_6 & F_4L-F_4L & F_5 & F_3L\\ F_3L & F_1L^2 & F_4L-F_4L & F_2L^2+F_2L^2 & -F_3L & F_1L^2\\ 0 & 0 & F_5 & -F_3L & F_6 & F_4L+\dfrac{PL^3}{EI}\\ 0 & 0 & F_3L & F_1L^2 & F_4L & F_1L^2 \end{bmatrix} \qquad (3.2.4)$$

- Khử dạng suy biến của ma trận độ cứng toàn kết cấu (3.2.4) theo điều kiện biên tại nít 1 là ngàm: $U_1=0$, $U_2=0$. Sau khi đã loại bỏ các hàng 1,2 và các cột 1,2 của ma trận trên, ta nhận được ma trận độ cứng toàn kết cấu có dạng như sau

$$\overline{K_a}=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 2F_6 & 0 & F_5 & F_3L\\ 0 & 2F_2L_2 & -F_3L & F_1L^2\\ F_5 & -F_3L & F_6 & F_4L+\sigma L\\ F_3L & F_1L^2 & F_4L & F_2L^2 \end{bmatrix} \qquad (3.2.5)$$

- Lập và giải phương trình ổn định

$$\det(\overline{K}^*)=0 \qquad (3.2.6)$$

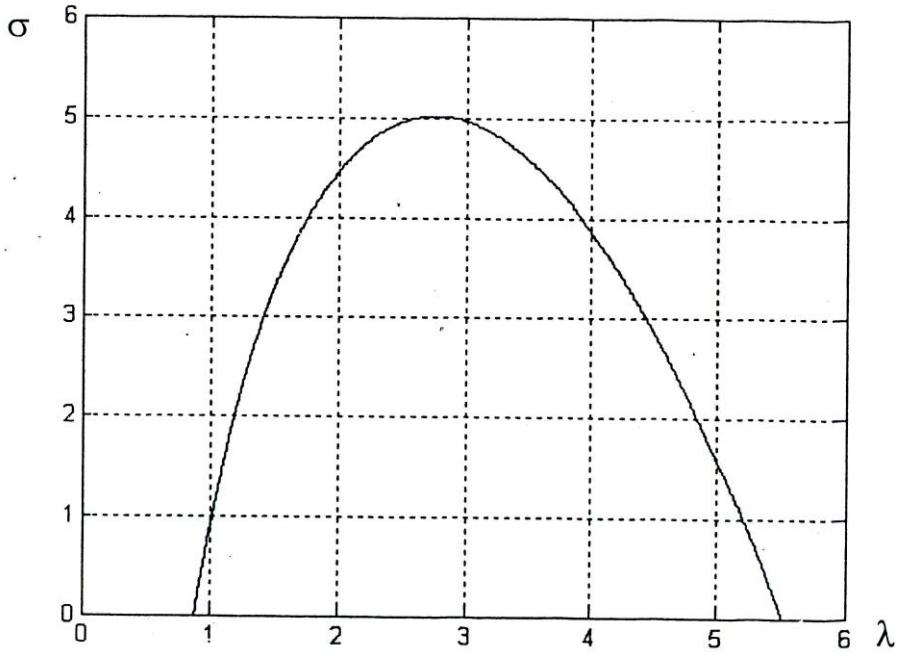
- Bước tính toán định thức ma trận được thực hiện với bài toán cụ thể trên MatLab cho ta biểu đồ quan hệ giữa các hệ số σ và λ trong khoảng giá trị 0 đếb 6 như sau (hình 3.4.3):

- Khi không có lực đuổi thì $\sigma=0$, nghiệm λ của phương trình (3.4.7) là các số thực, nó tương ứng với hai tần số riêng đầu tiên của thanh công xôn không chịu nén.

- Khi tăng giá trị tham số tải trọng σ hai nghiệm bé nhất của phương trình tiến dần về nhau và khi $\sigma = \sigma = 4{,}666$ thì hai nghiệm này là trùng nhau.

- Khi σ tiếp tục tăng, các nghiệm λ là các số phức, hơn nữa một trong các

nghiệm này có phần ảo là âm. Do đó, biên độ chuyển vị của thanh sẽ tăng theo thời gian, thanh công xôn chịu nén bởi lực đuổi sẽ bị mất ổn định khi σ = σ, tương ứng với tải trọng tới hạn



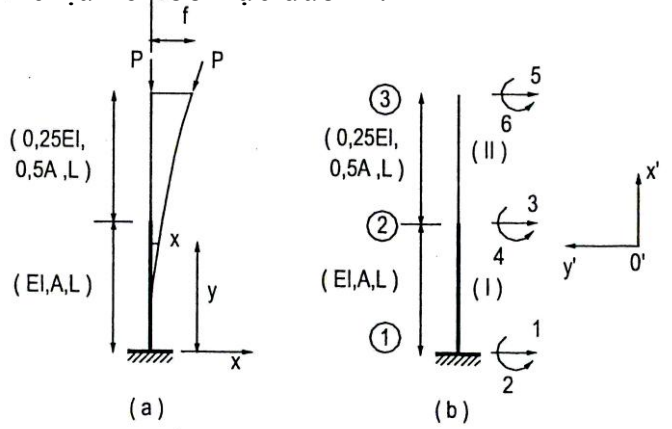
Hình 3.2.2. Đồ thị hàm số σ = σ(λ)

$$P_{th} = 5{,}0125\frac{EI}{L^2} = 20{,}05\frac{EI}{(2L)^2} \qquad (3.3.7)$$

Giá trị tải trọng tới hạn của lực đuổi tìm được phù hợp với giá trị tải trọng tới hạn đã được tìm ở bài toán 2.2.

3.3. Ổn định của thanh có độ cứng thay đổi từng bậc

Xét bài toán ổn định của thanh công xôn gồm 2 đoạn (hình 3.3.1.a) .Đoạn 1 có mômen quán tính chính I, mô dun hồi E, diện tích A. Đoạn 2 có mômen quán tính chính 0,25I, diện tích 0,5A chịu nén bởi lực đuổi P.



Hình 3.3.1

Sơ đồ các toạ độ nút trong hệ toạ độ tổng thể được thể hiện trên hình 3.3.1.b. Số liệu các phần tử ghi trong bảng 3.3.1 dưới đây.

Phần tử	**Nút i (đầu)**	**Nút j (cuối)**	**Diện tích tiết diện**	**Độ cứng EI_{min}**	**Chiều dài**	**cosα**	**sinα**
I	1	2	EI	EI	L	1	0
II	2	3	0,5A	0,25EI	L	1	0

Do các hệ toạ độ riêng của các phần tử trùng với hệ toạ độ tổng thể nên ta không cần dùng đến các ma trận chuyển.

Ma trận độ cứng của phần tử trong hệ trục toạ độ chung

- Phần I: Ma trận độ cứng động lực có dạng

$$\overline{K_I} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} F_{61} & -F_{41}L & F_{51} & F_{31}L \\ -F_{41}L & F_{41}L^2 & -F_{31}L & F_{31}L^2 \\ F_{51} & F_{31}L & F_{61} & F_{41}L \\ F_{31}L & F_{11}L & F_{41}L & F_{21}L^2 \end{bmatrix} \qquad (3.3.1)$$

Với các hệ số

$$F_{11} = (\beta_1 \sin\alpha_1 - \alpha_1 \sinh\beta_1)(\alpha_{11}^2 + \beta_1^2)/\delta_1$$

$$F_{21} = (\alpha_1 \cos\alpha_1 \sin\beta_1 - \beta_1 \sin\alpha_1 \cosh\beta_1)(\alpha_1^2 + \beta_1^2)/\delta_1$$

$$F_{31} = (\cos\alpha_1 - \cosh\beta_1)\alpha_1\beta_1/\delta_1$$

$$F_{41} = \left[(\beta_1^2 - \beta_1^2)(\cos\alpha_1 \cosh\beta_1 - 1) + 2\alpha_1\beta_1 \sin\alpha_1 \sinh\beta_1\right]\alpha\ \beta\ /\delta_1$$

$$F_{51} = (\beta_1 \sin\beta_1 + \alpha_1 \sinh\alpha_1)(\alpha_1^2 + \beta_1^2)\alpha_1\beta_1/\delta_1$$

$$F_{61} = -(\alpha_1 \cosh\beta_1 \sin\alpha_1 + \beta_1 \sinh\beta_1 \cos\alpha_1)(\alpha_1^2 + \beta_1^2)\alpha_1\beta_1/\delta_1$$

$$\delta_1 = 2\alpha_1\beta_1(\cos\alpha_1 \cosh\beta_1 - 1) + (\alpha_1^2 - \beta_1^2)\sin\alpha_1 \sinh\beta_1$$

Trong đó

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \lambda^2}};\ \beta_1 = \sqrt{\frac{-\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \lambda^2}} \qquad (3.3.3)$$

- Phần tử II: Ma trận độ cứng động lực có dạng

$$\overline{K_{11}} = \frac{0{,}25EI}{L^3}\begin{bmatrix} F_{62} & -F_{42}L & F_{52} & F_{32}L \\ -F_4L & F_{22}L^2 & -F_{32}L & F_{12}L \\ F_{52}+\dfrac{PL^3}{0{,}25\text{EI}}\dfrac{\partial N_1(L,\omega)}{\partial x} & -F_{32}L+\dfrac{PL^3}{0{,}25\text{EI}}\dfrac{\partial N_2(L,\omega)}{\partial x} & F_{62}L+\dfrac{PL^3}{0{,}25\text{EI}}\dfrac{\partial N_2(L,\omega)}{\partial x} & F_{42}L+\dfrac{PL^3}{0{,}25\text{EI}}\dfrac{\partial N_2(L,\omega)}{\partial x} \\ F_{32}L & F_{42}L & F_{42}L & F_{32}L^2 \end{bmatrix}$$

Với các hệ số F_{12}-F_{16} được định nghĩa như sau

$$F_{12} = (\beta_1 \sin\alpha_2 - \alpha_2 \sinh\beta_1)(\alpha_2^2+\beta_2^2)/\delta_2$$

$$F_{22} = (\alpha_2 \cos\alpha_2 \sin\beta_2 - \beta_2 \sin\alpha_2 \cosh\beta_2)(\alpha_2^2+\beta_2^2)/\delta_2$$

$$F_{32} = (\cos\alpha_2 - \cosh\beta_2)\alpha_2\beta_{21}/\delta_2$$

$$F_{42} = \left[(\beta_2^2-\beta_2^2)(\cos\alpha_2\cosh\beta_2 - 1) + 2\alpha_2\beta_2 \sin\alpha_2 \sinh\beta_2\right]\alpha_2\beta_2/\delta_2$$

$$F_{52} = (\beta_2 \sin\beta_2 + \alpha_2 \sinh\alpha_1)(\alpha_2^2+\beta_2^2)\alpha_2\beta_2/\delta_2 \qquad (3.3.5)$$

$$F_{62} = -(\alpha_2 \cosh\beta_2 \sin\alpha_2 + \beta_2 \sinh\beta_2 \cos\alpha_2)(\alpha_2^2+\beta_2^2)\alpha_2\beta_2/\delta_2$$

$$\delta_2 = 2\alpha_2\beta_2(\cos\alpha_2\cosh\beta_2 - 1) + (\alpha_2^2-\beta_2^2)\sin\alpha_2\sinh\beta_2$$

Trong đó

$$\lambda_2 = \omega L^2 x\sqrt{\frac{0{,}5\rho A}{0{,}25EI}} = \omega L^2 x\sqrt{\frac{02\rho A}{EI}} = \lambda\sqrt{2} \qquad (3.3.6)$$

$$\alpha_2 = \sqrt{2\sigma + \sqrt{4\sigma^2+2\lambda^2}};\ \beta_2 = \sqrt{-2\sigma + \sqrt{4\sigma^2+2\lambda^2}};$$

Vì rằng

$$\frac{\partial N_1(L,\omega)}{\partial x} = 0;\ \frac{\partial N_2(L,\omega)}{\partial x} = 0;\ \frac{\partial N_3(L,\omega)}{\partial x} = 0;\ \frac{\partial N_4(L,\omega)}{\partial x} = 1 \qquad (3.3.7)$$

Nên ta được

- Ma trận độ cứng của phần tử trong hệ trục toạ độ chung:

- Phần tử I, II: do hệ trục toạ độ địa phương của các phần tử này trùng với hệ trục toạ độ tổng thể nên tương tự bài toán 3.3, áp dụng phương pháp độ cứng trực tiếp, ta ghép được ma trận độ cứng động lực của các phần tử I, II tương ứng với các chuyển vị từ 1 đến 6 như sau:

$$\overline{K_{11}} = \frac{0{,}25EI}{L^3}\begin{bmatrix} F_{62} & -F_{42}L & F_{52} & F_{32}L \\ -F_{42}L & F_{22}L^3 & -F_{32}L & F_{12}L^3 \\ F_{52} & -F_{32}L & F_{62} & F_{42}L+\dfrac{PL^3}{0{,}25\mathrm{EI}} \\ F_{32}L & F_{12}L^2 & F_{42}L & F_{32}L^2 \end{bmatrix} \qquad (3.3.8)$$

Ma trận độ cứng của toàn hệ kết cấu trong hệ trục toạ độ chung: hệ có 2 phần tử nên ma trận độ cứng toàn kết cấu là ma trận khối chéo, kích thước ***(8x8)*** tìm được bằng cách ghép 2 ma trận và $\overline{K}_I$ và $\overline{K}_{II}$

$$\left[\overline{K}_g\right] = \begin{bmatrix} \overline{K}_1 & [0] \\ [0] & \left[\overline{K}_{II}\right] \end{bmatrix} \qquad (3.3.9)$$

- Khử trùng lặp: Áp dụng phương pháp độ cứng trực tiếp, ma trận độ cứng động lực toàn hệ được biểu diễn như sau:

$$\overline{K_g} = 0{,}25\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 4F_{61} & -4F_{41}L & 4F_{51} & 4F_{31}L & 0 & 0 \\ -4F_{41}L & 4F_{21}L^2 & -4F_{31}L & 4F_{11}L^2 & 0 & 0 \\ 4F_{51} & -4F_{31}L & 6F_{61}+F_{62} & 4F_{41}L-F_{42}L & F_{52} & F_{32}L \\ 4F_{31}L & 4F_{11}L^2 & 4F_{41}L-F_{42}L^2 & 4F_{21}L^2+F_{22}L^2 & -F_{32}L & F_{12}L^2 \\ 0 & 0 & F_{52} & -F_{32}L & F_{62} & F_{42}L+4\sigma L \\ 0 & 0 & F_{32}L & F_{12}L^2 & F_{42}L & F_{22}L^2 \end{bmatrix}$$

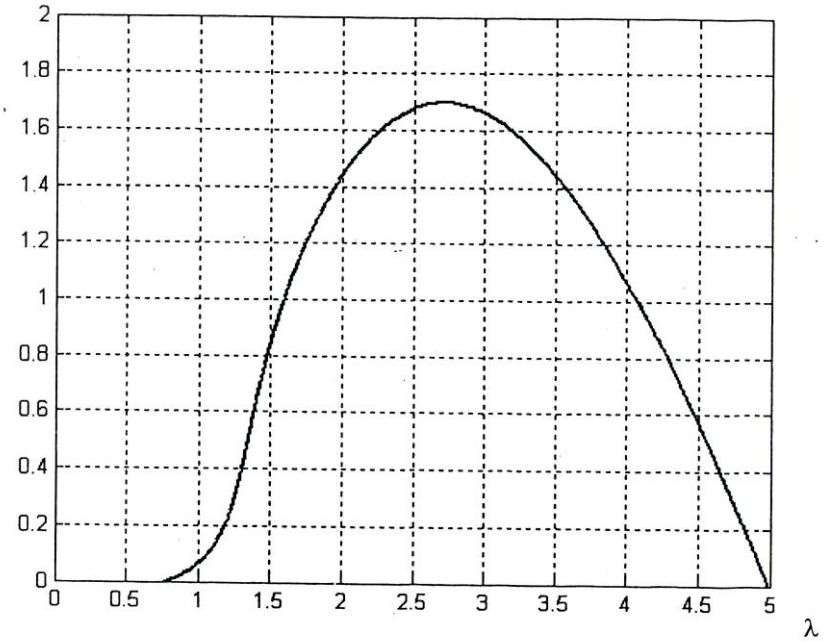
- Khử dạng suy biến của ma trận độ cứng toàn kết cấu (3.2.4) theo điều kiện biên tại nít 1 là ngàm: U_1=0, U_2=0. Sau khi đã loại bỏ các hàng 1,2 và các cột 1,2 của ma trận trên, ta nhận được ma trận độ cứng toàn kết cấu có dạng như sau

$$\overline{K^*} = 0{,}25\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 4F_{61}+F_{62} & 4F_{41}L-F_{42}L & F_{52} & F_{32}L \\ 4F_{41}L-4F_{42}L & 4F_{21}L^2+F_{22}L^2 & -F_{32}L & F_{12}L^2 \\ F_{52} & -F_{32}L & F_{62} & F_{42}L+4\sigma \\ F_{32}L & F_{12}L^2 & F_{42}L & F_{22}L^2 \end{bmatrix} \qquad (3.3.11)$$

- Lập và giải phương trình ổn định

$$\det(\overline{K}^*) = 0 \qquad (3.3.12)$$

- Bước tính toán định thức ma trận $(\overline{K}^*)$ được thực hiện với bài toán cụ thể trên MatLab cho ta biểu đồ quan hệ giữa các hệ số σ và λ trong khoảng giá trị 0 đếb 5 như sau (hình 3.3.2):



Hình 3.3.2

- Khi không có lực đuổi thì σ=0**,** nghiệm λ của phương trình (3.3.12) là các số thực, nó tương ứng với hai tần số riêng đầu tiên của thanh công xôn không chịu nén.

- Khi tăng giá trị tham số tải trọng σ hai nghiệm bé nhất của phương trình tiến dần về nhau và khi σ = σ = 1,6967 thì hai nghiệm này là trùng nhau.

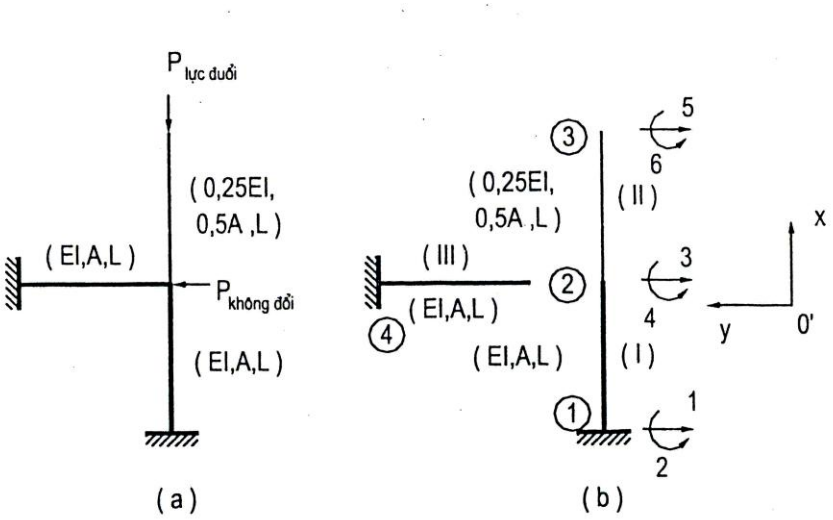
- Khi σ tiếp tục tăng, các nghiệm λ là các số phức, hơn nữa một trong các nghiệm này có phần ảo là âm. Do đó, biên độ chuyển vị của thanh sẽ tăng theo thời gian, thanh công xôn chịu nén bởi lực đuổi sẽ bị mất ổn định khi σ = σ, tương ứng với

tải trọng tới hạn

$$P_{th} = 1{,}6967\frac{EI}{L^2} \qquad (3.3.13)$$

3.4. Ổn định của kết cấu hệ thanh

Xét bài toán ổn định của kết cấu gồm 3 thanh liên kết với nhau và chịu nén bởi các lực như trên hình 3.4.1.a. Kết cấu được chia thành 3 phần tử. Các phần tử 1 và 3 có mômen quán tính chính I, môđun đàn hồi E**,** diện tích A**.** Phần tử 2 có mômen quán tính chính 0,251, diện tích 0,5A.



Hình 3.4.1

3.4.1.b. Số liệu các phần tử ghi trong bảng 3.4.1 dưới đây :

Phần tử	**Nút i (đầu)**	**Nút j (cuối)**	**Diện tích tiết diện**	**Độ cứng EI_{min}**	**Chiều dài**	**cosα**	**sinα**
I	1	2	EI	EI	L	1	0
II	2	3	0,5A	0,25EI	L	1	0
II	2	4	A	EI	L	0	1

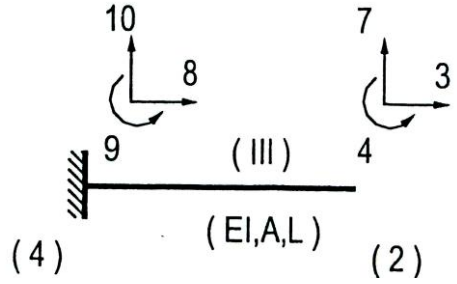
• Ma trận độ cứng của phần tử trong hệ trục toạ độ chung:

- Phần tử I, II: do hệ trục toạ độ địa phương của các phần tử này trùng với hệ trục toạ độ tổng thể nên tương tự bài toán 3.3, áp dụng phương pháp độ cứng trực tiếp, ta ghép được ma trận độ cứng động lực của các phần tử I, II tương ứng với các chuyển vị từ 1 đến 6 như sau:

$$\left[\overline{K}\right]=0{,}25\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 4F_{61} & -4F_{41}L & 4F_{51} & 0 & 0 & 0 \\ -4F_{41}L & -4F_{41}L^2 & 4F_{11}L^2 & 0 & 0 & 0 \\ 4F_{51} & -4F_{31}L & 4F_{11}L\ -F_{12}L & F_{52} & F_{52} & F_{32}L \\ 4F_{31}L & 4F_{11}L^2 & 4F_{11}L^2+F_{12}L^2 & -F_{32}L & -F_{32}L & F_{12}L^2 \\ 0 & 0 & F_{32}L & F_{62} & F_{62} & F_{42}L\ +4\sigma L \\ 0 & 0 & F_{12}L^2 & F_{12}L^2 & F_{42}L & F_{22}L^2 \end{bmatrix} \quad (3.4.1)$$

Trong đó các hệ số được lấy giống thanh số I, và đã được biểu diễn theo các công thức (3.3.2) - (3.3.8) ở bài toán 3.3.

- Phần tử III: Đối với phần tử III ta cần thực hiện việc chuyển MTĐCĐL từ hệ trục toạ độ địa phương về hệ trục toạ độ tổng thể tương ứng với các thành phần chuyển vj 3,4,7,8,9,10 tại các nút 2 và 4 (chú ý rằng các chuyển vị 3,8 bằng 0) như sau:



Hình 3.4.2

Ma trận độ cứng động lực của phần tử III có dạng

$$\overline{K}_m=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} & X_{15} & X_{16} \\ X_{21} & F_{61} & -F_{41}L & X_{24} & F_{51} & F_{31}L \\ X_{31} & -F_{41}L & F_{21}L^2 & X_{34} & -F_{31}L & F_{11}L^2 \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} & X_{45} & X_{46} \\ X_{51} & F_{51} & F_{31}L & X_{54} & F_{61} & F_{41}L \\ X_{61} & F_{31}L & F_{11}L^2 & X_{64} & F_{41}L & F_{21}L^2 \end{bmatrix} \quad (3.4.2)$$

Trong đó các hệ số được lấy giống thanh số I, và đã được biểu diễn theo các công thức (3.3.2) - (3.3.8) ở bài toán 3.3, đồng thời các hệ số X_{ij}- là các thành phần

của ma trận độ cứng động lực tương ứng với các chuyển vị dọc trục. Tuy nhiên chúng ta không cần quan tâm đến giá trị của các thành phần này do các chuyển vị 3, 7, 8, 10 đều có giá trị bằng 0, hơn nữa, khi khử suy biến của ma trận độ cứng động lực trong hệ tọa độ tổng thể thì các thành phần này đều được loại khỏi phương trình đặc trưng của hệ. Cuối cùng, ma trận độ cứng động lực của phần tử III trong hệ toạ độ chung được tính toán như sau:

$$T=\begin{bmatrix} \cos 90^0 & \sin 90^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin 90^0 & \cos 90^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos 90^0 & \sin 90^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin 90^0 & \cos 90^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.4.3)$$

Sử dụng

$$\overline{K}_m = T^T.\overline{K}_m T \qquad (3.4.4)$$

Ta nhận được ma trận độ cứng động lực của phần tử III trong hệ toạ độ chung như sau

$$\overline{K}_m=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} F_{61} & -F_{21} & F_{41}L & F_{51} & X_{24} & -F_{31}L \\ -X_{12} & X_{11} & X_{13} & -X_{15} & X_{14} & X_{16} \\ F_{41}L & X_{31} & F_{21}L^2 & F_{31}L & X_{34} & F_{11}L^2 \\ F_{51} & -X_{51} & F_{31}L & F_{61} & -X_{54} & -F_{41}L \\ -X_{42} & X_{41} & X_{43} & -X_{45} & X_{44} & X_{46} \\ -F_{31}L & X_{61} & F_{11}L^2 & -F_{41}L & X_{64} & F_{21}L^2 \end{bmatrix} \qquad (3.4.5)$$

(3.4.5)

Mặt khác ta nhận thấy sau khi ghép các ma trận phần tử thì các chuyển vị 3, 7, 8, 9, 10 của phần tử III đều trùng với chuyển vị tại các nút ngàm và đều bằng 0.

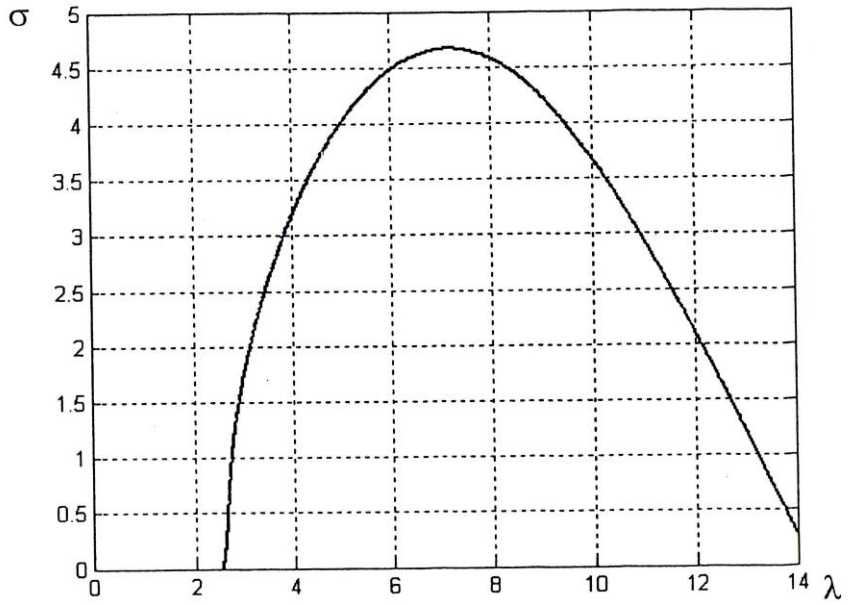
Như vậy sau khi ghép MTĐCĐL của phần tử III vào MTĐCĐL chung của kết cấu đồng thời loại bỏ các dòng và cột tương ứng với chuyển vị 3,7,8,9, 10 và các chuyển vị 1,2 để khử trùng lặp ta có MTĐCĐL toàn kết cấu trong hệ toạ độ chung như sau:

Đồng thời ta nhận xét rằng chuyển vị 1, 2, 3 bằng 0 (chuyển vị 3 bằng do trùng

với chuyển vị tại nút 4 là ngàm) nên để khử trùng lặp ta còn lại MTĐCĐL toàn kết cấu như sau:

$$\left[\overline{K^*}\right] = 0{,}25\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 4F_2L^2 + 4F_{21}L^2 & -F_{32}L & F_{12}L^2 \\ -F_{32}L & F_{62} & F_{42}L + 4\sigma L \\ F_{12}L^2 & F_{42}L & F_{22}L^2 \end{bmatrix} \qquad (3.4.6)$$

$$1`\det(\overline{K}^*) = 0 \qquad (3.4.7)$$



Hình 3.4.3. Đồ thị hàm số $\sigma = \sigma(\lambda)$

• Bước tính toán định thức ma trận $(\overline{K}^*)$ được thực hiện với bài toán cụ thể trên MatLab cho ta biểu đồ quan hệ giữa các hệ số σ và λ như sau (hình 3.4.3):

- Khi không có lực đuổi thì σ=0**,** nghiệm λ của phương trình (3.4.7) là các số thực, nó tương ứng với hai tần số riêng đầu tiên của thanh công xôn không chịu nén.

- Khi tăng giá trị tham số tải trọng σ hai nghiệm bé nhất của phương trình tiến dần về nhau và khi σ = σ = 4,666 thì hai nghiệm này là trùng nhau.

- Khi σ tiếp tục tăng, các nghiệm λ là các số phức, hơn nữa một trong các nghiệm này có phần ảo là âm. Do đó, biên độ chuyển vị của thanh sẽ tăng theo thời gian, thanh công xôn chịu nén bởi lực đuổi sẽ bị mất ổn định khi σ = σ, tương ứng với tải trọng tới hạn.

$$P_{th} = 4{,}666\frac{EI}{L^2} \qquad (3.4.6)$$

3.5. Kết luận chương 3

Trong chương 3 này, vận dụng tư tưởng phân chia kết cấu thành các phần tử hữu hạn của phương pháp PTHH, Luận văn đã trình bày các ví dụ áp dụng phương pháp ma trận độ cứng động lực để phân tích các bài toán ổn định của các hệ thanh từ đơn giản đến phức tạp chịu lực không bảo toàn theo tiêu chuẩn ổn định dưới dạng động lực học tổng quát. Kết quả phân tích cho thấy:

- Việc xác định lực tới hạn cho bài toán ổn định hệ thanh chịu lực không bảo toàn theo phương pháp ma trận độ cứng động lực được thực hiện theo một trình tự tương tự với việc áp dụng phương pháp PTHH. Đối với các trường hợp đơn giản có nghiêm giải tích thì kết quả xác định lực tới hạn theo phương pháp ma trận độ cứng động lực hoàn toàn trùng với các kết quả giải tích đã biết.
- Bằng phương pháp này, ta hoàn toàn có thể xác định lực tới hạn mất-ểii éịtth cho các hệ thanh phức tạp chịu các dạng tải trọng khác nhau (bảo toàn hay không bảo toàn). Đây là ưu thế nổi bật của phương pháp ma trận độ cứng động lực sử dụng tiêu chuẩn ổn định dưới dạng động lực học so với phương pháp phần tử hữu hạn dựa trên các tiêu chuẩn tĩnh học chưa thể giải quyết được.
- Dựa vào ưu thế của mình và sự phát triển càng ngày càng đa dạng của các phương pháp toán học hiện đại, phương pháp ma trận độ cứng động lực có thể được áp dụng giải quyết các bài toán càng ngày càng phức tạp hơn, nhưng với độ chính xác lại cao hơn và áp dụng được trong hầu hết các trường hợp bài toán kết cấu trong ngành xây dựng.

KẾT LUẬN CHUNG

Những kết quả đạt được trong luận văn có thể tóm tắt như sau:

1. Luận văn đã trình bày tóm tắt các khái niệm về ổn định, mất ổn định trong lĩnh vực công trình và các tiêu chuẩn cân bằng về ổn định cũng như phạm vi áp dụng của các tiêu chuẩn này. Tiêu chuẩn ổn định động lực học được xem là đầy đủ và tổng quát, giải quyết được các bài toán ổn định mà các tiêu chuẩn dưới dạng tĩnh học không giải quyết được.

Từ đó, Luận văn đã lựa chọn sử dụng tiêu chuẩn ổn định động lực học để phân tích ổn định của các hệ đàn hồi chịu lực không bảo toàn bằng phương pháp ma trận độ cứng động lực.

2. Luận văn đã chứng minh được rằng: kết quả xác định lực tới hạn mất ổn định theo phương pháp ma trận độ cứng động lực dựa vào tiêu chuẩn ổn định động lực học hoàn toàn trùng với kết quả xác định theo phương pháp giải tích. Đây chính là cơ sở để có thể áp dụng phương pháp ma trận độ cứng động lực vào các bài toán ổn định hệ thanh phức tạp hơn.

3. Vận dụng tư tưởng phân chia kết cấu liên tục thành các phần tử hữu hạn

4. của phương pháp PTHH, Luận văn đã chứng minh được rằng: việc xác định

lực tới hạn cho bài toán ổn định hệ thanh chịu lực không bảo toàn theo phương pháp ma trận độ cứng động lực được thực hiện theo một trình tự tương tự như khi áp dụng phương pháp PTHH. Bằng cách này, ta hoàn toàn có thể xác định lực tới hạn mất ổn định cho các hệ thanh phức tạp chịu các dạng tải trọng khác nhau (bảo toàn hay không bảo toàn).

Đây là ưu thế nổi bật của phương pháp ma trận độ cứng động lực sử dụng tiêu chuẩn ổn định dưới dạng động lực học so với phương pháp phần tử hữu hạn dựa trên các tiêu chuẩn tĩnh học chưa thể giải quyết được.

HƯỚNG PHÁT TRIỂN CỦA LUẬN VĂN

- Dựa trên các kết quả khả quan thu được, tiếp tục phát triển phương pháp ma trận độ cứng động lực áp dụng cho các bài toán ổn định hệ thanh chịu lực không bảo toàn phức tạp hơn, phát triển các chương trình máy tính phục vụ cho các bài toán dạng này.

- Xây dựng các tiêu chuẩn xác định dấu hiệu mất ổn định theo phượng pháp ma trận độ cứng động lực cho các bài toán ổn định thanh chịu bất kỳ. Đây là một vấn đề phức tạp liên quan nhiều đến các kiến thức toán học mà Luận văn chưa giải quyết được.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Lê Ngọc Hồng (2000), ***Sức bền vật liệu*** , NXB KHKT, Hà nội.

2. Lều Thọ Trình (2002), ***Ổn định công trình*** , NXB KHKT, Hà nội.

3. Nguyễn Tiến Khiêm, Trần Văn Liên (2002), ***"Phân tích tĩnh kết cấu khung có nhiều vết nứt ",*** Tuyển tập các công trình Hội nghị cơ học toàn quốc lần thứ VII, Hà nội.

4. Nguyễn Tiến Khiêm, Trần Văn Liên (2002), ***"Phân tích và chuẩn đoán dầm đàn hồi có nhiều vết nứt",*** Tuyển tập các công trình Hội nghị cơ học toàn quốc lần thứ VII, Hà nội .

5. Nguyễn Tiến Khiêm, Trần Văn Liên, Lê Khánh Toàn (2004), ***"Xác định tải trọng sóng tác dụng lên kết cấu khung theo phương pháp ma trận độ cứng động lực ",*** Tuyển tập các công trình Hội nghị khoa học toàn quốc Cơ học vật rắn biến dạng lần thứ VII, Đồ sơn.

6. Trần Văn Liên (2002), ***Bài toán ngược của cơ học và ứng dụng trong chuẩn đoán kỹ thuật công trình,*** Luận án tiến sỹ kỹ thuật, Trường Đại học Xây dựng Hà nội.

7. Phạm Huy Điển (2002), **Tính toán, lập trình và giảng dạy toán.học trên Maple,** NXB KHKT, Hà nội.

8. Nguyễn Hoài Sơn, Bùi Xuân Lâm, Đỗ Thanh Việt- (2000), ***ứng dụng MatLab trong tính toán Kỹ thuật,*** NXB Đại học Quốc gia, TP HCM.

9. Nguyễn Mạnh Yên (1996), ***Phương pháp số trong cơ học kết cấu***, NXB KHKT, Hà nội.

10. CALFEM (1996), **A Finite Element Toolbox to Matlab, Version 3.2,** Lund University, Sweeden

11. Nguyen Xuan Hung (2000), **"Dynamic of Marine Structure, Develop The Dynamic Stiffness Method for Calculating The Structure Vibration",** Proceedings of the national conierence " Vibration in Engineering", Hanoi.

12. Leung A.Y.T (1993), ***Dynamic Stiffness and Substructures,*** Springer-

Verlag, London.

13. Leung A.Y.T (2001), **Dynamic Stiffness for Structure with Distributed Deterministic or Random Load,** Joumal of Sound and Vibration,Vol 242 (3), 377-395.

14. Wittrick W.H. , Williams F.w. (1971), ***"A General Algoritnm for Computing Natural Frequencies of Elastic Structure***", Quart. Joum. Mach. and Applied Math, Vol. XXIV, Pt 3.

15 Lee J. , Thompson D.J. (2001), **"Dynamic Stiffness Analysis for Torsionaỉ Vibration of Continuous Beam with Thin-Walled Cross Sectiorì'',** Joumal of Sound and Vibration.Vol. 243 (4), 297-230.

16. Moon D.H., Choi M.s. (2000), **"Vibration Analysis for Frame Struture using Tranfer of Dynamics Stiffness Coefficien** Joumal of Sound and Vibration.Vol. 254 (3), 541-555.

17. Matsui Y, Hayashikawa T. (2001), **"Dynamic Stiffness Anaỉysis for Torsional Vibration of Continuous Beam with Thin-Walled Cross Section** " Joumal of Sound and Vibration,Vol. 243 (2), 301-316.

18. Khiem N.T., Lien T.v. (2002), **"The Dynamic Stiffness Matrix Method in Forced Vibration Analysis of Mutiple-Cracked Beam",** Joumal of Sound and Vibration,Vol. 254 (3), 541-555.

19. Rao s.s. (1986), ***MechanicalVibrations,*** Second Edition, Addison-Wesley Pub Company.

20. Bojiothh B.B. (1961), HeKOHcepeamueFibie 3aFanu meopuu ynpyaoủ ycmoỉmueocmu, PĨ3jũ(. OH3MQT, MocKBa)

21. riaHOBKO ^.r.; ryaHOBa H.H (1979), *Ycmoimueocmb u KoneôaHm ynpyaux cucmeM*, Hayica, MocKBa.