

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC DÂN LẬP HẢI PHÒNG**

-----

**CAO QUANG NGỌC**

**NGHIÊN CỨU NỘI LỰC VÀ CHUYỂN VỊ CỦA HỆ DẦM  
CÓ XÉT ĐẾN BIẾN DẠNG TRƯỢT NGANG**

**Chuyên ngành: Kỹ thuật Xây dựng Công trình Dân dụng & Công nghiệp**

**Mã số: 60.58.02.08**

**LUẬN VĂN THẠC SỸ KỸ THUẬT**

**NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC**

**GS.TSKH. HÀ HUY CƯỜNG**

**Hải Phòng, 2015**

## ***Lời cảm ơn***

Với tất cả sự kính trọng và biết ơn sâu sắc nhất, tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn của mình tới sự hướng dẫn tận tình và chu đáo của thầy hướng dẫn GS.TSKH Hà Huy Cương, các thầy cô trong khoa Sau đại học, khoa Xây dựng và toàn thể các thầy cô giáo trường Đại học Dân Lập Hải Phòng những người đã tạo điều kiện cho tôi hoàn thành luận văn này.

Do những hạn chế về kiến thức, thời gian, kinh nghiệm và tài liệu tham khảo nên thiếu sót và khuyết điểm là điều không thể tránh khỏi. Vì vậy, tôi rất mong nhận được sự góp ý, chỉ bảo của các thầy cô giáo đó chính là sự giúp đỡ quý báu mà tôi mong muốn nhất để cố gắng hoàn thiện hơn trong quá trình nghiên cứu và công tác sau này.

Xin trân trọng cảm ơn!

**Tác giả luận văn**

**Cao Quang Ngọc**

## MỞ ĐẦU

Những năm gần đây, do kinh tế phát triển, dân số tăng và quỹ đất ngày càng thu hẹp, đặc biệt là trong các thành phố lớn. Để đáp ứng nhu cầu sử dụng hết sức đa dạng của người dân, các giải pháp kết cấu cho nhà cao tầng đã được các kỹ sư thiết kế sử dụng trong đó có giải pháp kết cấu nhà cao tầng kết hợp theo phương đứng, tầng một làm siêu thị, nhà hàng... với diện tích sàn rất lớn, các tầng trên là nhà ở, khách sạn và văn phòng cho thuê có diện tích nhỏ được sử dụng tương đối phổ biến. Trong những công trình đó người ta thường dùng các kết cấu dầm chuyển, sàn chuyển hoặc dàn chuyển làm nhiệm vụ tiếp nhận tải trọng từ các tầng bên trên truyền xuống cột và xuống móng. Kết cấu dầm chuyển có đặc điểm là chiều cao tiết diện rất lớn so với chiều dài của chúng (dầm cao), do đó việc nghiên cứu nội lực và chuyển vị của các bài toán cơ học kết cấu nói chung và các bài toán cơ học kết cấu có dạng cột ngắn và dầm cao nói riêng có tầm quan trọng đặc biệt, đòi hỏi phải nghiên cứu đầy đủ cả về mặt lý thuyết và thực nghiệm.

Cho đến nay, các đường lối xây dựng bài toán kết cấu chịu uốn thường không kể đến ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang do lực cắt gây ra hoặc có kể đến nhưng do cách đặt vấn đề và cách chọn ẩn chưa thật chính xác nên đã gặp rất nhiều khó khăn mà không tìm được kết quả của bài toán một cách chính xác và đầy đủ.

Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss do GS.TSKH. Hà Huy Cương đề xuất là phương pháp cho phép áp dụng nguyên lý cực trị Gauss - vốn được phát biểu cho hệ chất điểm - để xây dựng bài toán cơ học kết cấu dưới dạng tổng quát. Từ đó tìm được kết quả chính xác của các bài toán dù đó là bài toán tĩnh hay bài toán động, bài toán tuyến tính hay bài toán phi tuyến.

### **Đối tượng, phương pháp và phạm vi nghiên cứu của đề tài**

Trong luận văn này, tác giả sử dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss nói trên để xây dựng và giải bài toán dầm chịu uốn có xét đến biến dạng trượt ngang do lực cắt gây ra, chịu tác dụng của tải trọng tĩnh.

Do sự cần thiết của việc nghiên cứu nội lực và chuyển vị của kết cấu chịu uốn có xét đến biến dạng trượt, mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu của đề tài này là:

## **Mục đích nghiên cứu của đề tài**

*“Nghiên cứu nội lực và chuyển vị của hệ dầm có xét đến biến dạng trượt ngang”*

## **Nhiệm vụ nghiên cứu của đề tài**

1. Tìm hiểu và giới thiệu các phương pháp xây dựng và các phương pháp giải bài toán cơ học kết cấu hiện nay.
2. Trình bày Phương pháp Nguyên lý cực trị Gauss do GS. TSKH. Hà Huy Cương đề xuất, với các ứng dụng trong cơ học môi trường liên tục nói chung và cơ học vật rắn biến dạng nói riêng.
3. Giới thiệu lý thuyết xét biến dạng trượt đối với bài toán kết cấu dầm chịu uốn với việc dùng hai hàm chưa biết là hàm độ võng  $y$  và hàm lực cắt  $Q$ .
4. Xây dựng và giải bài toán dầm có xét đến biến dạng trượt, chịu tác dụng của tải trọng tĩnh.
5. Lập chương trình máy tính điện tử cho các bài toán nêu trên.

## **Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài nghiên cứu**

Việc xác định nội lực và chuyển vị của kết cấu chịu uốn đã được nhiều tác giả trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu, kể cả bài toán có xét đến lực cắt ngang  $Q$ . Trong các nghiên cứu đó các tác giả đã sử dụng lý thuyết dầm truyền thông, lý thuyết dầm Euler – Bernoulli (Lý thuyết không đầy đủ về dầm, bỏ qua thành phần biến dạng trượt ngang do lực cắt  $Q$  gây ra) để xây dựng bài toán. Khi xây dựng các công thức tính toán nội lực và chuyển vị, giả thiết Bernoulli – giả thiết tiết diện phẳng (tiết diện dầm trước và sau khi biến dạng vẫn phẳng và vuông góc với trục trung hòa) được chấp nhận, tức là góc trượt do lực cắt  $Q$  gây ra đã bị bỏ qua, quan niệm tính toán này làm ảnh hưởng không nhỏ tới độ chính xác của kết quả các bài toán. Một số tác giả như X.P. Timoshenko, O.C. Zienkiewicz, J.K. Bathe, W.T. Thomson cũng đã đề cập tới ảnh hưởng của biến dạng trượt khi phân tích kết cấu chịu uốn, nhưng vấn đề thường được bỏ ngỏ hoặc không được giải quyết một cách triệt để kể cả trong các lời giải số. Khắc phục được những tồn tại nêu trên của các tác giả khác chính là ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài, ý nghĩa khoa học đó nằm ở chỗ đề tài đã xây dựng được lý thuyết dầm có xét đến ảnh hưởng của biến

dạng trượt ngang do lực cắt  $Q$  gây ra (Lý thuyết đầy đủ hay lý thuyết tổng quát về dầm) khi nghiên cứu nội lực và chuyển vị của dầm và khung chịu tác dụng của tải trọng tĩnh, tìm được kết quả chính xác của các bài toán đồng thời đưa ra được kết luận “ Lý thuyết dầm Euler – Bernoulli thường dùng hiện nay chỉ là một trường hợp riêng của Lý thuyết dầm này”.

## **LỜI CAM ĐOAN**

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của bản thân, được thực hiện trên cơ sở nghiên cứu, tính toán dưới sự hướng dẫn khoa học của GS.TSKH Hà Huy Cương.

Các số liệu trong luận văn có nguồn trích dẫn, kết quả trong luận văn là trung thực.

**Tác giả luận văn**

**Cao Quang Ngọc**

## DANH MỤC KÝ HIỆU

KÝ HIỆU	ĐẠI LƯỢNG
$T$	Động năng
$\Pi$	Thế năng
$E$	Môđun đàn hồi
$C(x)$	Phiếm hàm mở rộng
$G$	Môđun trượt
$2G$	Độ cứng của biên dạng
$J$	Mô men quán tính tiết diện
$EJ$	Độ cứng uốn của tiết diện dầm
$M$	Mômen uốn
$N$	Lực dọc
$P$	Lực tập trung
$Q$	Lực cắt
$q$	Ngoại lực phân bố tác dụng lên dầm
$m$	Khối lượng chất điểm
$\tau$	Ứng suất tiếp
$\sigma$	Ứng suất pháp

$\varepsilon$	Biến dạng trượt
$\lambda(x)$	Độ võng của dầm
$\varepsilon$	Biến dạng của vật liệu
$\delta$	Biến phân
$r_i$	Véc tơ tọa độ
$\alpha$	Đại lượng Ten xơ
$G$	Modun trượt
$\theta$	Biến dạng thể tích
$x$	Biến dạng uốn (độ cong đường đàn hồi)
$\mu, \lambda$	Hệ số Lamé



$\nu$	Hệ số Poisson
$u$	Chuyển vị theo trục x
$Z$	Lượng cường bức
$D$	Độ cứng uốn
$D(1 - \nu)$	Độ cứng xoắn

## MỤC LỤC

<i>Lời cảm ơn</i> .....	2
MỞ ĐẦU.....	3
LỜI CAM ĐOAN.....	6
DANH MỤC KÝ HIỆU.....	7
CHƯƠNG I. CÁC PHƯƠNG PHÁP XÂY DỰNG VÀ CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN CƠ HỌC KẾT CẤU.....	13
1. Phương pháp xây dựng bài toán cơ học.....	13
1.1. Phương pháp xây dựng phương trình vi phân cân bằng phân tử.....	13
1.2. Phương pháp năng lượng.....	16
1.3. Nguyên lý công ảo.....	19
1.4. Phương trình Lagrange:.....	21
2. Bài toán cơ học kết cấu và các phương pháp giải.....	24
2.1. Phương pháp lực.....	24
2.2. Phương pháp chuyển vị.....	24
2.3. Phương pháp hỗn hợp và phương pháp liên hợp.....	25
2.4. Phương pháp phần tử hữu hạn.....	25
2.5. Phương pháp sai phân hữu hạn.....	25
2.6. Phương pháp hỗn hợp sai phân - biến phân.....	26
CHƯƠNG 2. PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN LÝ CỰC TRỊ GAUSS.....	27
2.1. Nguyên lý cực trị Gauss.....	27
2.2. Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss.....	29
2.3. Cơ hệ môi trường liên tục: ứng suất và biến dạng.....	36

2.4. Cơ học kết cấu.....	42
2.5. Phương pháp nguyên lí cực trị Gauss và các phương trình cân bằng của cơ hệ.....	46
2.5.1. Phương trình cân bằng tĩnh đối với môi trường đàn hồi, đồng chất, đẳng hướng.....	46
2.5.2. Phương trình vi phân của mặt võng của tấm chịu uốn.....	48
CHƯƠNG 3. BÀI TOÁN DẦM CHỊU UỐN CÓ XÉT ĐẾN BIẾN DẠNG TRƯỢT NGANG.....	51
3.1. Lý thuyết dầm có xét biến dạng trượt.....	51
3.2. Bài toán dầm có xét biến dạng trượt ngang.....	57
3.3. Các ví dụ tính toán dầm.....	58
KẾT LUẬN.....	81
KIẾN NGHỊ VÀ NHỮNG NGHIÊN CỨU TIẾP THEO.....	82
DANH MỤC TÀI LIỆU THAM KHẢO.....	83

# CHƯƠNG 1.

## CÁC PHƯƠNG PHÁP XÂY DỰNG VÀ CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN CƠ HỌC KẾT CẤU

Trong chương này trình bày các phương pháp truyền thống để xây dựng các bài toán cơ học nói chung; giới thiệu bài toán cơ học kết cấu (bài toán tĩnh) và các phương pháp giải thường dùng hiện nay.

### 1. Phương pháp xây dựng bài toán cơ học

Bốn phương pháp chung để xây dựng bài toán cơ học kết cấu được trình bày dưới đây. Dùng lý thuyết dầm chịu uốn để minh họa.

#### 1.1. Phương pháp xây dựng phương trình vi phân cân bằng phân tố

Phương trình vi phân cân bằng được xây dựng trực tiếp từ việc xét các điều kiện cân bằng lực của phân tố được tách ra khỏi kết cấu. Trong sức bền vật liệu khi nghiên cứu dầm chịu uốn ngang sử dụng các giả thiết sau:

- Trục dầm không bị biến dạng nên không có ứng suất.
- Mặt cắt thẳng góc với trục dầm sau khi biến dạng vẫn phẳng và thẳng góc với trục dầm (giả thiết Euler–Bernoulli).
- Không xét lực nén giữa các thớ theo chiều cao của dầm

Với giả thiết thứ ba thì chỉ có ứng suất pháp  $\sigma_x$  và các ứng suất tiếp  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{zx}$  tác dụng lên phân tố dầm (hình 1.3), ứng suất pháp  $\sigma_z$  bằng không. Hai giả thiết thứ ba và thứ nhất dẫn đến trục dầm chỉ có chuyển vị thẳng đứng  $y(x)$  và nó được gọi là đường độ võng hay đường đàn hồi của dầm. Giả thiết thứ nhất xem chiều dài trục dầm không thay đổi khi bị võng đòi hỏi độ võng của dầm là nhỏ so với chiều cao dầm,  $y_{\max} / h \leq$

1/5. Với giả thiết thứ hai thì biến dạng trượt do ứng suất tiếp gây ra không được xét trong tính độ võng của dầm như trình bày dưới đây. Giả thiết này chỉ đúng khi tỉ lệ  $h/l \leq 1/5$ . Chuyển vị ngang  $u$  của điểm nằm ở độ cao  $z$  so với trục dầm bằng

$$u = -z \frac{dy}{dx}$$

Biến dạng và ứng suất xác định như sau

$$\varepsilon_x = -z \frac{d^2 y}{dx^2}; \quad \sigma_{xx} = -Ez \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Momen tác dụng lên trục dầm:

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} -Ebz^2 \frac{d^2 y}{dx^2} dz = -\frac{Ebh^3}{12} \frac{d^2 y}{dx^2}$$

hay  $M = EJ\chi$  (1.7)

trong đó:  $EJ = \frac{Ebh^3}{12}$ ,  $\chi = -\frac{d^2 y}{dx^2}$

$EJ$  được gọi là độ cứng uốn của dầm;  $\chi$  là độ cong của đường đàn hồi và sẽ được gọi là biến dạng uốn;  $b$  là chiều rộng dầm. Để đơn giản trình bày, ở đây chỉ dùng trường hợp dầm có tiết diện chữ nhật.

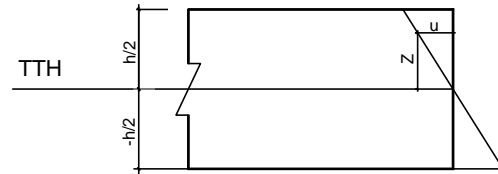
Cách tính nội lực momen ở trên không xét đến biến dạng trượt do các ứng suất tiếp gây ra. Tổng các ứng suất tiếp  $\sigma_{zx}$  trên mặt cắt sẽ cho ta lực cắt  $Q$  tác dụng

lên trục dầm: 
$$Q = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{zx} dz$$

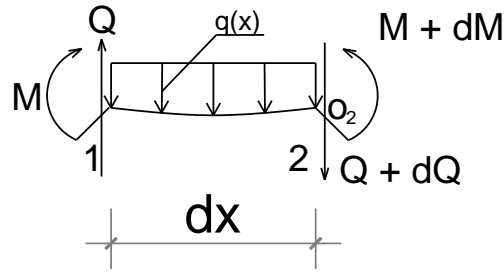
Biểu thức của ứng suất tiếp  $\sigma_{zx}$  trong tích phân trên sẽ trình bày sau.

Nhờ các giả thiết nêu trên, thay cho trạng thái ứng suất trong dầm, ta chỉ cần nghiên cứu phương trình cân bằng của các nội lực  $M$  và  $Q$  tác dụng lên trục dầm.

Xét phân tố  $dx$  của trục dầm chịu tác dụng của các lực  $M, Q$  và ngoại lực phân bố  $q$ , hình 1.3. Chiều dương của  $M, Q$  và  $q$  trên hình vẽ tương ứng với chiều dương của độ võng hướng xuống dưới.



Hình 1.2. Phân tố dầm



Hình 1.3. Xét cân bằng phân tố

Lấy tổng momen đối với điểm  $O_2$ , bỏ qua các vô cùng bé bậc cao ta có

$$\frac{dM}{dx} - Q = 0 \quad (1.8)$$

Lấy tổng hình chiếu các lực lên trục thẳng đứng:

$$\frac{dQ}{dx} + q = 0 \quad (1.9)$$

Phương trình (1.8) là phương trình liên hệ giữa momen uốn và lực cắt, phương trình (1.9) là phương trình cân bằng lực cắt  $Q$  và ngoại lực phân bố  $q$ . Đó là hai phương trình xuất phát (hai phương trình đầu tiên) của phương pháp cân bằng phân tố. Lấy đạo hàm phương trình (1.8) theo  $x$  rồi cộng với phương trình (1.9), ta có phương trình dẫn xuất sau

$$\frac{d^2M}{dx^2} + q = 0 \quad (1.10)$$

Thay  $M$  xác định theo (1.7) vào (1.10) nhận được phương trình vi phân xác định đường đàn hồi của thanh

$$EJ \frac{d^4y}{dx^4} = q \quad (1.11)$$

Phương trình (1.11) được giải với các điều kiện biên của  $y$  và các đạo hàm đến bậc ba của  $y$  (4 điều kiện), hai điều kiện biên tại mỗi đầu cuối thanh.

Các điều kiện biên thường dùng như sau

a) Liên kết khớp tại  $x=0$ :

Chuyển vị bằng không,  $y|_{x=0} = 0$ , momen uốn  $M = 0$ , suy ra  $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0} = 0$

b) Liên kết ngàm tại  $x=0$ :

Chuyển vị bằng không,  $y|_{x=0} = 0$ , góc xoay bằng không,  $\frac{dy}{dx}|_{x=0} = 0$

c) không có gối tựa tại  $x=0$ :

Momen uốn  $M = 0$ , suy ra  $\frac{d^2 y}{dx^2}|_{x=0} = 0$ ; lực cắt  $Q=0$ , suy ra  $\frac{d^3 y}{dx^3}|_{x=0} = 0$

Các điều kiện tại  $x=l$  cũng lấy tương tự như trên.

Bây giờ tìm hiểu sự phân bố ứng suất tiếp  $\sigma_{xz}$  trên chiều dày  $h$  của dầm.

Trước tiên viết phương trình cân bằng ứng suất trên trục  $x$  như sau

$$-\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \quad \text{hay} \quad \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = -Ez \frac{d^3 y}{dx^3}$$

Tích phân phương trình trên theo  $z$ :  $\sigma_{xz} = -\frac{Ez^2}{2} \frac{d^3 y}{dx^3} + C(x)$

Hàm  $C(x)$  xác định từ điều kiện ứng suất tiếp bằng không tại mặt trên và mặt dưới dầm,  $z = \pm \frac{h}{2}$ . Ta có:  $C(x) = \frac{Eh^2}{8} \frac{d^3 y}{dx^3}$

Ứng suất tiếp phân bố trên mặt cắt dầm có dạng

$$\sigma_{xz} = -\frac{E}{8} \frac{d^3 y}{dx^3} (4z^2 - h^2)$$

Đó là hàm parabol bậc hai. Ứng suất tiếp lớn nhất tại trục dầm ( $z=0$ ) có giá trị bằng

$$\sigma_{xz}|_{z=0} = \frac{Eh^2}{8} \frac{d^3 y}{dx^3}$$

Tích phân hàm ứng suất tiếp theo chiều cao dầm rồi nhân với chiều rộng  $b$  ta có lực cắt  $Q$  tác dụng lên phần trái của dầm

$$Q = \frac{Eb^3}{12} \frac{d^3 y}{dx^3}$$

Ứng suất tiếp trung bình trên chiều cao dầm bằng:  $\sigma_{xz}^{tb} = \frac{Eh^2}{12} \frac{d^3 y}{dx^3}$

Tỉ lệ giữa ứng suất tiếp max tại trục dầm và ứng suất trung bình  $\alpha=1.5$ .

## 1.2. Phương pháp năng lượng

Năng lượng của cơ hệ bao gồm động năng T và thế năng  $\Pi$ . Động năng được xác định theo khối lượng và vận tốc chuyển động, còn thế năng  $\Pi$  bao gồm thế năng biến dạng và công của các trường lực, phụ thuộc vào chuyển vị. Trường lực là lực có thể như lực trọng trường. Các lực ngoài tác dụng lên cơ hệ là lực không thế.

Đối với hệ bảo toàn, năng lượng là không đổi

$$T + \Pi = \text{const} \quad (1.12)$$

Do đó tốc độ thay đổi năng lượng phải bằng không

$$\frac{d}{dt}(T + \Pi) = 0 \quad (1.13)$$

Ta xét bài toán tĩnh,  $T=0$ , do đó

$$\Pi = \text{const} \quad (1.14)$$

Thế năng  $\Pi$  có thể biểu thị qua ứng suất và nội lực cũng có thể biểu thị qua chuyển vị và biến dạng. Vì vậy ta có hai nguyên lý biến phân năng lượng sau:

### Nguyên lý thế năng biến dạng cực tiểu

Khi phương trình cân bằng được biểu thị qua ứng suất hoặc nội lực và do đó thế năng biến dạng cũng biểu thị qua ứng suất hoặc nội lực ta có nguyên lý thế năng biến dạng cực tiểu, nguyên lý Castiliano (1847-1884). Nguyên lý phát biểu như sau:

***Trong tất cả các trạng thái cân bằng lực có thể thì trạng thái cân bằng thực xảy ra khi thế năng biến dạng là cực tiểu.***

Trạng thái cân bằng lực có thể là trạng thái mà các lực tác dụng lên phân tử thỏa mãn các phương trình cân bằng. Ta viết nguyên lý dưới dạng sau:

$$\Pi(F) \rightarrow \min$$

Với ràng buộc là các phương trình cân bằng viết dưới dạng lực.

Đối với dầm ta có:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EJ} dx \rightarrow \min \quad (1.15)$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q \quad (1.16)$$



Nội lực cần tìm mômen uốn là hàm phân bố theo chiều dài dầm  $M(x)$  và phải thỏa mãn các điều kiện liên kết ở hai đầu thanh (được xác định ở hai đầu thanh). Đây là bài toán cực trị có ràng buộc. Bằng cách dùng thừa số Lagrange  $\lambda(x)$  đưa về bài toán không ràng buộc sau:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EJ} dx + \int_0^l \lambda(x) \left[ \frac{d^2 M}{dx^2} + q \right] dx \rightarrow \min \quad (1.17)$$

$\lambda(x)$  là thừa số Lagrange và cũng là ẩn của bài toán. Theo phép tính biến phân từ phiếm hàm (1.17) ta nhận được hai phương trình sau (phương trình Euler-Lagrange).

$$M = -EJ \frac{d^2 \lambda}{dx^2} \quad (1.18)$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q \quad (1.19)$$

$\lambda(x)$  có thứ nguyên là chuyển vị cho nên phương trình (1.18) biểu thị quan hệ giữa  $M$  và chuyển vị. Thế (1.18) vào (1.19) ta có

$$EJ \frac{d^4 \lambda}{dx^4} = q \quad (1.20)$$

$\lambda(x)$  là độ võng của dầm và phương trình (1.20) là phương trình vi phân cân bằng của dầm viết theo chuyển vị nhận được ở trên.

### **Nguyên lý công bù cực đại**

Khi dùng ẩn là các chuyển vị và biến dạng thì có nguyên lý công bù cực đại.

***Trong tất cả các chuyển vị động học có thể (khả dĩ) thì chuyển vị thực là chuyển vị có công bù cực đại.***

Chuyển vị động học có thể là chuyển vị thỏa mãn các phương trình liên hệ giữa chuyển vị và biến dạng và thỏa mãn các điều kiện biên. Công bù bằng tích của ngoại lực và chuyển vị trừ đi năng lượng biến dạng.

[Công ngoại lực – thế năng biến dạng] → max

Với ràng buộc là các phương trình liên hệ giữa chuyển vị và biến dạng.

Lấy ví dụ đối với dầm chịu uốn, ta có

$$\int_0^l qy dx - \frac{1}{2} \int_0^l EJ \chi^2 dx \rightarrow \max \quad (1.21)$$

Với ràng buộc:

$$\chi = -\frac{d^2y}{dx^2} \quad (1.22)$$

$\chi$  là biến dạng uốn cũng là độ cong của đường độ võng. Tích phân thứ nhất trong (1.21) là công toàn phần của ngoại lực (không có hệ số  $\frac{1}{2}$ ), tích phân thứ hai là thế năng biến dạng biểu thị qua biến dạng uốn.

Thay  $\chi$  từ (1.22) vào (1.21), ta có

$$\int_0^l qy dx - \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left( -\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 dx \rightarrow \max \quad (1.23)$$

Thay dấu của (1.23) ta có

$$\frac{1}{2} \int_0^l EJ \left( -\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^l qy dx \rightarrow \min \quad (1.24)$$

Khi  $y$  có giá trị xác định tại hai đầu mút dầm thì điều kiện cần để biểu thức (1.24) cực tiểu là phương trình Euler sau

$$EJ \frac{d^4y}{dx^4} = q \quad (1.25)$$

Phương trình (1.25) là phương trình vi phân cân bằng của dầm chịu uốn. Nguyên lý công bù cực đại dưới dạng biểu thức (1.24) được sử dụng rộng rãi trong tính toán công trình theo phương pháp phần tử hữu hạn.

### 1.3. Nguyên lý công ảo

Nguyên lý công học -íc số đông rất róng rãi trong c-  
hãc. Theo K.F. Gauss (1777-1855) th× mãi nguyên lý trong  
c- hãc hoÆc trực tiếp hoÆc gián tiếp Òu rít ra tở  
nguyên lý chuyển vP 0.

Xét c- hõ chÊt Òióm ẽ tr¹ng th,i c©n b»ng ta cũ

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0,$$

(1.26)

$\sum X; \sum Y; \sum Z$ : lµ tæng h×nh chiÕu cũa tÊt c¶ c,c lúc t,c  
đông l²n ba trục cũa hõ to¹ Òé §Ò c,c. Ta viÕt biÓu thøc  
sau:

$$\sum X\delta U + \sum Y\delta V + \sum Z\delta W = 0,$$

(1.27)

ẽ Òy xem c,c  $\delta U; \delta V; \delta W$ ; lµ c,c thõa sè bÊt kú.

Tở (1.26) ta cũ (1.27) vµ ng-íc l²i tở (1.27) ta sĩ  
nhËn Ò-íc (1.26) bËi v× c,c  $\delta U; \delta V; \delta W$ ; lµ nh÷ng thõa sè  
bÊt kú. Bõy giê ta xem  $\delta U; \delta V; \delta W$ ; lµ c,c biÕn ph©n cũa  
c,c chuyển vP 0 theo ba chiÕu cũa hõ to¹ Òé vuøng gãc.  
Chuyển vP 0 lµ chuyển vP bÐ do nguyên nh©n bÊt kú b²n  
ngõuì nµo Òã gõy ra. C,c chuyển vP 0 nµy ph¶i tho¶ m·n  
c,c ÒiÒu kiÕn li²n kÕt cũa hõ.

Khi cũ chuyển vP 0 th× vP trÝ cũa c,c lúc t,c đông  
tr²n hõ cũ thó thay Òæi nh-ng ph--ng chiÕu vµ Òé lín cũa  
nã vÉn gi÷ nguyên kh«ng Òæi. Nh- vËy, c,c chuyển vP 0  
 $\delta U; \delta V; \delta W$  lµ c,c Ò²i l-ìng Òéc lËp víi lúc t,c đông vµ tở  
hai biÓu thøc (1.26) vµ (1.27) ta cũ nguyên lý công học:

**Nõu nh- tæng công cũa c,c lúc t,c đông cũa hõ thùc  
hiÕn tr²n c,c chuyển vP 0 b»ng kh«ng th× hõ ẽ tr¹ng  
th,i c©n b»ng.**

Sèi víi hõ Òµn hải (hõ biõn d'ng) th× ngoµi ngo'i lúc cõn cũ nái lúc. VÊn ÒÒ ÒÆt ra ẽ Ò©y lµ c, ch tÝnh c«ng cũa nái lúc nh- thõ nµo.

Tr-íc hõit ta cçn ph¶i Ò-a th<sup>a</sup>m y<sup>a</sup>u cçu Òèi víi chuyón vÐ ¶o nh- sau:

C, c chuyón vÐ ¶o ph¶i tho¶ m·n c, c li<sup>a</sup>n hõ gi÷a chuyón vÐ vµ biõn d'ng. Nõu nh- c, c chuyón vÐ cũ biõn

d'ng  $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \dots$  th× biõn phõn c, c chuyón vÐ ¶o

$\delta u; \delta v; \delta w$  cõng ph¶i cũ c, c biõn d'ng ¶o t--ng õng:

$$\frac{\partial}{\partial x} \delta u; \frac{\partial}{\partial y} \delta v; \dots$$

Th«ng th-êng c«ng cũa nái lúc (hõÆc õng suÊt) Ò-íc tÝnh qua thõ n'ng biõn d'ng. Khi cũ c, c chuyón vÐ ¶o  $\delta U; \delta V; \delta W$ ; th× thõ n'ng biõn d'ng  $\Pi$  sĩ thay Òæi b»ng Ò'i l-íng biõn phõn  $\delta \Pi$ . Do Òã nguy<sup>a</sup>n lý chuyón vÐ ¶o Òèi víi hõ biõn d'ng Ò-íc viõit nh- sau:

$$\delta \Pi - \sum X \delta U - \sum Y \delta V - \sum Z \delta W = 0,$$

(1.28)

C, c Ò'i l-íng biõn phõn trong (1.28) Òòu lµ chuyón vÐ ¶o cho n<sup>a</sup>n nõu xem nái lúc (õng suÊt) trong qu, tr×nh chuyón vÐ ¶o cõng kh«ng Òæi th× dÊu biõn phõn trong (1.28) cũ thó viõit l'i nh- sau:

$$\delta [\Pi - \sum XU - \sum YV - \sum ZW] = 0$$

(1.29)

Hai bióu thõc (1.28) vµ (1.29) d-íi d'ng chi tiõit h-n Ò-íc tr×nh bµy trong [30, Tr.261].

$$\delta \int_0^l \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 - qy \right] dx = 0 \quad \text{hay} \quad \int_0^l \delta \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 - qy \right] dx = 0$$

(1.30)

Ph--ng tr×nh Euler cña (1.30) nh- sau:  $EJ \frac{d^4 y}{dx^4} - q = 0$

#### 1.4. Ph--ng tr×nh Lagrange:

Ph--ng tr×nh Lagrange lµ ph--ng tr×nh vi ph©n cña chuyón ®éng ®-íc biÓu thÞ qua c,c to¹ ®é tæng qu,t (c,c chuyón vÞ tæng qu,t).

Gãi T lµ ®éng n'ng vµ  $\Pi$  lµ thõ n'ng cña hõ, c,c  $q_i$  lµ c,c chuyón vÞ tæng qu,t vµ  $Q_i$  lµ c,c lúc tæng qu,t th× ph--ng tr×nh Lagrange cã d'ng:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i, \quad (i=1, 2, 3, \dots, n)$$

(1.31)

trong ®ã:  $\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial t}$  lµ vËn tèc cña chuyón ®éng. Sèi víi mçi chuyón vÞ  $q_i$  s' cã mét ph--ng tr×nh Lagrange. S'ng n'ng T trong to¹ ®é tæng qu,t lµ hµm cña vËn tèc vµ cã thó lµ hµm cña c¶ chuyón vÞ tæng qu,t.

Thõ n'ng toµn phÇn cña hõ bao g¸m thõ n'ng biÕn d'ng vµ thõ n'ng cña lúc cã thõ (lúc tr¸ng tr-êng lµ lúc cã thõ).  $Q_i$  lµ lúc kh«ng thõ cã thó ®-íc hiÓu lµ c,c lúc ngoµi t,c dông l'¸n hõ (lúc tæng qu,t). ,p dông ph--ng tr×nh Lagrange ®Ó x©y dùng ph--ng tr×nh chuyón ®éng cña dÇm chÞu uèn nh- sau:

Gãi  $y_i$  lµ chuyón vÞ (tæng qu,t) cña ®iÓm  $i$  cña dÇm vµ  $q_i$  lµ lúc t,c dông t'í ®iÓm  $i$  cña dÇm vµ  $m_i$  lµ khèi l-îng.

Séng n'ng cña dÇm

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m \dot{y}_i^2 dx \quad \text{trong } \textcircled{\text{ã}}: \quad \dot{y}_i = \frac{\partial y_i}{\partial t}$$

(1.32)

Thõ n'ng biõn d'ng cña dÇm chĐu uèn

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} EJ \left( \frac{\partial^2 y_i}{\partial x^2} \right)_i^2$$

(1.33)

DÊu tæng lêy cho tÊt c¶ c, c ®ióm i cña dÇm. Ph--ng tr×nh Lagrange ®èi vói dÇm cã d'ng

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial y_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} = q_i,$$

(1.34)

Ta tÝnh hai thụng phÇn ®Çu cña ph--ng tr×nh (1.34)

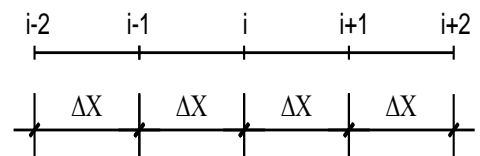
$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \right) = \frac{\partial}{\partial t} m_i \dot{y}_i = m_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} = m_i \ddot{y}_i,$$

(1.35)

$$\frac{\partial T}{\partial y_i} = 0$$

Só tÝnh thõ n'ng biõn d'ng cã thó d'ng ph--ng ph, p sai ph©n h÷u h'n, h×nh 1.5.

Bèi v× ®é vâng  $y_i$  cña dÇm chø cã mÆt trong bióu thøc thõ n'ng biõn d'ng cña ba ®ióm li^n tiõp  $i-1$ ,  $i$  vù  $i+1$ , cho n^n chø cÇn tÝnh thõ n'ng biõn d'ng cña dÇm (1.33) cho ba ®ióm nuy,  $\Delta x$  lù kho¶ng c, ch gi÷a c, c ®ióm.



H×nh 1.4. B-íc sai ph©n

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} EJ \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_i^2 &= \frac{1}{2} EJ \left( \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{\Delta x^2} \right)^2 \\ \frac{1}{2} EJ \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{i-1}^2 &= \frac{1}{2} EJ \left( \frac{y_{i-2} - 2y_{i-1} + y_i}{\Delta x^2} \right)^2 \\ \frac{1}{2} EJ \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{i+1}^2 &= \frac{1}{2} EJ \left( \frac{y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}}{\Delta x^2} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.36)$$

Tæng céng ba ph--ng tr×nh trªn cho ta thõ n'ng cña dçm

®ó tÝnh  $y_i$ . Ta tÝnh  $\frac{\partial \Pi}{\partial y_i}$  cña ph--ng tr×nh (1.34).

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} &= EJ \left( \frac{-2y_{i-1} + 4y_i - 2y_{i+1} + y_{i-2} - 2y_{i-1} + y_i + y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}}{\Delta x^4} \right) \\ &= EJ \left( \frac{y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}}{\Delta x^4} \right) = EJ \frac{\Delta_i^4}{\Delta x^4} \Big|_i \end{aligned} \right\}$$

(1.37)

Bióu thøc (1.37) bióu thø sai ph©n h÷u h¹n cña  $EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \Big|_i$ .

Céng (1.35) vµ (1.37) nhËn ®-íc ph--ng tr×nh Lagrange ®èi víi chuyón vø  $y_i$

$$m \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \Big|_i = q_i$$

(1.38)

Sióm i lµ bÊt kú nªn nhËn ®-íc ph--ng tr×nh vi ph©n c©n b»ng cña dçm

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = q$$

(1.39)

Sẽ với bài toán tĩnh  $T=0$  ta có: 
$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = q$$
 (1.40)

Phương pháp số đông phương trình Lagrange có nên các phương trình vi phân của các văng của dầm phương trình tự do.

Để trình phương trình tự do phương pháp chung có thể dùng bài toán cơ, lấy bài toán dầm chịu uốn làm ví dụ để biết cách số đông chúng ta có thể nên các bài toán phương trình vi phân của bầm của họ.

## 2. Bài toán cơ học kết cấu và các phương pháp giải

Bài toán cơ học kết cấu nhằm xác định nội lực và chuyển vị của hệ thanh, tấm, vỏ dưới tác dụng của các loại tải trọng, nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức,... và được chia làm hai loại:

- Bài toán tĩnh định: là bài toán có cấu tạo hình học bất biến hình và đủ liên kết tựa với đất, các liên kết sắp xếp hợp lý, chịu các loại tải trọng. Để xác định nội lực và chuyển vị chỉ cần dùng các phương trình cân bằng tĩnh học là đủ;
- Bài toán siêu tĩnh: là bài toán có cấu tạo hình học bất biến hình và thừa liên kết (nội hoặc ngoại) chịu các loại tải trọng, nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức,... Để xác định nội lực và chuyển vị ngoài các phương trình cân bằng ta còn phải bổ sung các phương trình biến dạng.

Nếu tính đến tận ứng suất, có thể nói rằng mọi bài toán cơ học vật rắn biến dạng nói chung và bài toán cơ học kết cấu nói riêng đều là bài toán siêu tĩnh.

Đã có nhiều phương pháp để giải bài toán siêu tĩnh. Hai phương pháp truyền thống cơ bản là phương pháp lực và phương pháp chuyển vị. Khi sử dụng chúng thường phải giải hệ phương trình đại số tuyến tính. Số lượng các phương trình tùy thuộc vào phương pháp phân tích. Từ phương pháp chuyển vị ta có hai cách tính gần



đúng hay được sử dụng là H. Cross và G. Kani. Từ khi xuất hiện máy tính điện tử, người ta bổ sung thêm các phương pháp số khác như: Phương pháp phần tử hữu hạn; Phương pháp sai phân hữu hạn...

### **2.1. Phương pháp lực**

Trong hệ siêu tĩnh ta thay các liên kết thừa bằng các lực chưa biết, còn giá trị các chuyển vị trong hệ cơ bản tương ứng với vị trí và phương của các lực ẩn số do bản thân các lực đó và do các nguyên nhân bên ngoài gây ra bằng không. Từ điều kiện này ta lập được hệ các phương trình đại số tuyến tính, giải hệ này ta tìm được các ẩn số và từ đó suy ra các đại lượng cần tìm.

### **2.2. Phương pháp chuyển vị**

Khác với phương pháp lực, phương pháp chuyển vị lấy chuyển vị tại các nút làm ẩn. Những chuyển vị này phải có giá trị sao cho phản lực tại các liên kết đặt thêm vào hệ do bản thân chúng và do các nguyên nhân bên ngoài gây ra bằng không. Lập hệ phương trình đại số tuyến tính thỏa mãn điều kiện này và giải hệ đó ta tìm được các ẩn, từ đó xác định các đại lượng còn lại. Hệ cơ bản trong phương pháp chuyển vị là duy nhất và giới hạn giải các bài toán phụ thuộc vào số các phần tử mẫu có sẵn.

### **2.3. Phương pháp hỗn hợp và phương pháp liên hợp**

Phương pháp hỗn hợp, phương pháp liên hợp là sự kết hợp song song giữa phương pháp lực và phương pháp chuyển vị. Trong phương pháp này ta có thể chọn hệ cơ bản theo phương pháp lực nhưng không loại bỏ hết các liên kết thừa mà chỉ loại bỏ các liên kết thuộc bộ phận thích hợp với phương pháp lực; hoặc chọn hệ cơ bản theo phương pháp chuyển vị nhưng không đặt đầy đủ các liên kết phụ nhằm ngăn cản toàn bộ các chuyển vị nút mà chỉ đặt các liên kết phụ tại các nút thuộc bộ phận thích hợp với phương pháp chuyển vị. Trường hợp đầu hệ cơ bản là siêu tĩnh, còn trường hợp sau hệ cơ bản là siêu động.

Trong cả hai cách nói trên, bài toán ban đầu được đưa về hai bài toán độc lập: Một theo phương pháp lực và một theo phương pháp chuyển vị.

### **2.4. Phương pháp phần tử hữu hạn**

Thực chất của phương pháp phần tử hữu hạn là rời rạc hóa bản thân kết cấu (chia kết cấu thành một số phần tử có kích thước hữu hạn). Các phần tử liền kề liên hệ với nhau bằng các phương trình cân bằng và các phương trình liên tục.

Để giải quyết bài toán cơ học kết cấu, có thể tiếp cận phương pháp này bằng đường lối trực tiếp, suy diễn vật lý hoặc đường lối toán học, suy diễn biến phân. Tuy nhiên bằng cách nào đi chăng nữa thì kết quả thu được là một ma trận (độ cứng hoặc độ mềm). Ma trận đó được xây dựng dựa trên cơ sở cực trị hóa phiếm hàm biểu diễn năng lượng. Trong phạm vi mỗi phần tử riêng biệt, các hàm chuyển vị được xấp xỉ gần đúng theo một dạng nào đó, thông thường là các đa thức.

### **2.5. Phương pháp sai phân hữu hạn**

Phương pháp sai phân hữu hạn cũng là thay thế hệ liên tục bằng mô hình rời rạc, song hàm cần tìm (hàm mang đến cho phiếm hàm giá trị dừng), nhận những giá trị gần đúng tại một số hữu hạn điểm của miền tích phân, còn giá trị các điểm trung gian sẽ được xác định nhờ một phương pháp tích phân nào đó. Phương pháp này cho lời giải số của phương trình vi phân về chuyển vị và nội lực tại các điểm nút. Thông thường ta phải thay đạo hàm bằng các sai phân của hàm tại các nút. Phương trình vi phân của chuyển vị hoặc nội lực được viết dưới dạng sai phân tại mỗi nút, biểu thị quan hệ của chuyển vị tại một nút và các nút lân cận dưới tác dụng của ngoại lực.

### **2.6. Phương pháp hỗn hợp sai phân – biến phân**

Kết hợp phương pháp sai phân với phương pháp biến phân ta có một phương pháp linh động hơn: Hoặc là sai phân các đạo hàm trong phương trình biến phân hoặc là sai phân theo một phương và biến phân theo một phương khác (đối với bài toán hai chiều).

## CHƯƠNG 2. PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN LÝ CỰC TRỊ GAUSS

Trong chương 1 đã trình bày bốn đường lối xây dựng bài toán cơ học và các phương pháp giải hiện nay thường dùng trong các giáo trình, tài liệu trong và ngoài nước. Khác với chương 1, chương này trình bày nguyên lý Gauss, sau đó trình bày phương pháp mới dựa trên nguyên lý cực trị Gauss để xây dựng và giải các bài toán cơ học dưới dạng tổng quát, chủ yếu là của cơ hệ vật rắn biến dạng. Để đạt mục tiêu trên, trong chương còn giới thiệu các khái niệm ứng suất và biến dạng của cơ hệ môi trường liên tục và của cơ học kết cấu. Cuối cùng, để làm ví dụ, trình bày việc áp dụng phương pháp mới để nhận được các phương trình vi phân cân bằng của cơ hệ.

### 2.1. Nguyên lý cực trị Gauss

Năm 1829 nhà toán học người Đức K.F. Gauss đã đưa ra nguyên lý sau đây đối với cơ hệ chất điểm [1, tr. 171]:

*“Chuyển động thực của hệ chất điểm có liên kết tùy ý chịu tác động bất kì ở mỗi thời điểm xảy ra một cách phù hợp nhất có thể với chuyển động của hệ đó khi hoàn toàn tự do, nghĩa là chuyển động thực xảy ra với lượng cưỡng bức tối thiểu nếu như số đo lượng cưỡng bức lấy bằng tổng các tích khối lượng chất điểm với bình phương độ lệch vị trí chất điểm so với vị trí khi chúng hoàn toàn tự do”.*

Gọi  $m_i$  là khối lượng chất điểm,  $A_i$  là vị trí của nó,  $B_i$  là vị trí sau thời đoạn vô cùng bé do tác động lực ngoài và do vận tốc ở đầu thời đoạn gây ra,  $C_i$  là vị trí có thể ( bị ràng buộc bởi liên kết) thì lượng cưỡng bức được viết như sau:

$$Z = \sum_i m_i (\overline{B_i C_i})^2 \rightarrow Min \quad (2.1)$$

Dấu tổng trong (2.1) lấy theo số chất điểm.

Sử dụng nguyên lý vận tốc ảo và nguyên lý D ‘Alembert, xét hệ ở trạng thái cân bằng và cho rằng có lực với độ lớn tỉ lệ với độ dài  $\overline{B_i C_i}$  tác dụng theo chiều từ  $C_i$  đến  $B_i$ , Gauss đã chứng minh nguyên lý của mình [1, tr. 172].

Để có thể sử dụng nguyên lý Gauss cần biết đại lượng biến phân của nó. Theo [1, tr. 889], Gibbs (năm 1879) và Appell (năm 1899) đi từ các lập luận khác nhau đều nhận được nguyên lý Gauss và chỉ ra rằng đại lượng biến phân của nguyên lý này là gia tốc. Điều này có nghĩa là:

$$\delta r_i = 0; \quad \delta \dot{r}_i = 0; \quad \delta \ddot{r}_i \neq 0 \quad (2.2)$$

ở đây  $\delta$  là kí hiệu biến phân ( lấy vi phân khi cố định thời gian ),  $r_i$ ,  $\dot{r}_i$  và  $\ddot{r}_i$  lần lượt là vector toạ độ, vector vận tốc và vector gia tốc của điểm  $i$ . Chuyển dịch của chất điểm của hệ có liên kết dưới tác dụng của lực  $F_i$  sau thời đoạn  $dt$  tính theo công thức sau đây:

$$r_i + \dot{r}_i dt + \frac{1}{2} \ddot{r}_i dt^2 \quad (2.3)$$

Vì  $\delta r_i = 0$  và  $\delta \dot{r}_i = 0$  nên chuyển dịch của chất điểm hoàn toàn tự do (có thể hình dung ở đầu thời đoạn  $dt$  liên kết được giải phóng nhưng vẫn giữ lực tác dụng) sau thời đoạn  $dt$  là :

$$r_i + \dot{r}_i dt + \frac{1}{2} \frac{F_i}{m_i} dt^2 \quad (2.4)$$

Hiệu của (2.4) và (2.3) cho ta độ lệch vị trí của chất điểm có liên kết so với vị trí của nó khi hoàn toàn tự do.

Có thể xem  $dt$  là hằng thì lượng cưỡng bức  $Z$  theo (2.1) được viết dưới dạng lực như sau (với độ chính xác bằng thừa số  $dt^4/4$ ):

$$Z = \sum_i m_i \left( \frac{F_i}{m_i} - \ddot{r}_i \right)^2 \rightarrow \text{Min} \quad (2.5)$$

hoặc

$$Z = \sum_i \frac{1}{m_i} (F_i - m_i \ddot{r}_i)^2 \rightarrow \text{Min} \quad (2.5a)$$

Khi tính lượng cưỡng bức theo (2.5) cần xem gia tốc là đại lượng biến phân (biến phân kiểu Gauss theo cách nói của Boltzmann). Như vậy, phương pháp tìm cực tiểu của các bài toán cơ học được xây dựng theo nguyên lý (2.5) không thể là bất kỳ mà phải là (khi không có ràng buộc nào khác):

$$\frac{\partial Z}{\partial \ddot{r}_i} = 0 \quad (2.6)$$

Điều kiện (2.6) sẽ cho ta phương trình cân bằng. Thật vậy, áp dụng (2.6) vào (2.5) ta nhận được phương trình cân bằng của hệ (ở đây lực tác dụng bằng lực quán tính). Appell và Boltzmann (năm 1897) còn cho biết nguyên lý Gauss đúng cho hệ liên kết holonom và cả hệ liên kết không holonom [1, tr. 890].

Nguyên lý Gauss (2.1) hoặc (2.5) có dạng của phương pháp bình phương tối thiểu là phương pháp cũng do Gauss đưa ra và được dùng rộng rãi trong toán học hiện đại, trong giải tích cũng như trong lời giải số. Có lẽ vì vậy nguyên lý Gauss thu hút sự chú ý của nhiều nhà khoa học, thí dụ, Hertz (năm 1894) dựa trên ý tưởng lượng cưỡng bức đưa ra nguyên lý đường thẳng nhất (đường có độ cong nhỏ nhất) hoặc Prigogine (năm 1954) và Gyarmati (năm 1965) đã xây dựng được lượng cưỡng bức của các quá trình không hồi phục trong nhiệt động lực học [2].

Các tài liệu giáo khoa về cơ học thường giới thiệu nguyên lý Gauss dưới dạng (2.5) là dạng dùng được để tính toán. Nhưng nguyên lý (2.5) với đại lượng biến phân là gia tốc chỉ là một biểu thị của nguyên lý Gauss (2.1) bởi vì đại lượng biến phân trong cơ học còn có thể là chuyển vị và vận tốc như trình bày sau đây.

## 2.2. Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss

Trong bài viết của mình Gauss nêu nhận xét rằng *nguyên lý vận tốc ảo biến vấn đề tĩnh học thành vấn đề toán học thuần túy, còn nguyên lý D'Alembert đưa bài toán động lực học về bài toán tĩnh học và mọi nguyên lý của cơ học hoặc nhiều hoặc*

ít đều có thể trực tiếp rút ra từ hai nguyên lý trên. Dưới đây trình bày phương pháp dựa trên nguyên lý chuyển vị ảo để nhận được biểu thức (2.1) của nguyên lý Gauss.

Xét hệ chất điểm có liên kết tùy ý ở một thời điểm bất kì nào đó có nghĩa là phải đưa lực quán tính  $f_i$  của hệ tại thời điểm đó tác dụng lên hệ. Đối với hệ hoàn toàn tự do lực quán tính  $f_{0i}$  của nó bằng với ngoại lực (chỉ số '0' ở chân kí tự chỉ rằng kí tự đó thuộc hệ so sánh, trường hợp này là hệ hoàn toàn tự do có cùng khối lượng và cùng chịu tác dụng lực ngoài giống như hệ có liên kết). Như vậy, các lực tác dụng lên hệ có liên kết gồm các lực  $f_i = m_i \ddot{r}_i$  và các lực  $f_{0i} = m_i \ddot{r}_{0i}$  (thay cho ngoại lực). Theo nguyên lý chuyển vị ảo đối với liên kết giữ (liên kết dưới dạng đẳng thức) và không giữ (liên kết dưới dạng bất đẳng thức) điều kiện cần và đủ để hệ ở trạng thái cân bằng là [1, tr. 887] :

$$\sum_i (f_i - f_{0i}) \delta r_i \leq 0 \quad (2.7)$$

Biểu thức (2.7) cũng được Fourier (năm 1798) và Ostrogradsky (năm 1838) độc lập đưa ra.

Có thể nhận xét ngay rằng phần trong ngoặc đơn của (2.7) biểu thị lực tác dụng lên hệ nên phải bằng không để hệ ở trạng thái cân bằng.

Trong biểu thức (2.7) cần xem các chuyển vị  $r_i$  độc lập đối với lực tác dụng. Cho nên từ (2.7) có thể viết:

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) r_i \rightarrow Min \quad (2.8)$$

Trong (2.8)  $r_i$  là các biến độc lập cần tìm để bảo đảm cho  $Z$  cực tiểu. Vì chuyển vị  $r_{0i}$  của hệ hoàn toàn tự do đã biết nên biểu thức (2.8) tương đương với các biểu thức dưới đây:

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) (r_i - r_{0i}) \rightarrow Min \quad (2.8a)$$

hoặc

$$Z = \sum_i m_i \left[ \frac{f_i}{m_i} - \ddot{r}_{0i} \right] (r_i - r_{0i}) \rightarrow Min \quad (2.8b)$$

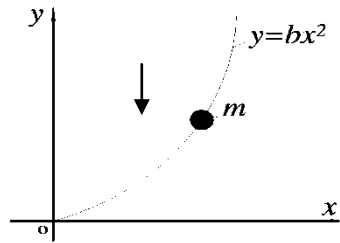
Dễ dàng nhận thấy (2.8b) là tích của khối lượng  $m_i$  với bình phương độ lệch vị trí chất điểm và do đó  $Z$  xác định theo (2.8) là lượng cường bức của nguyên lý Gauss (với độ chính xác bằng thừa số  $dt^2/2$ ). So với (2.5), lượng cường bức  $Z$  xác định theo (2.8) biểu thị đầy đủ và rõ ràng tư tưởng của nguyên lý Gauss thể hiện ở chỗ,

thứ nhất, nó cho phép so sánh hệ có liên kết với hệ hoàn toàn tự do, thứ hai, đại lượng không biết (đại lượng biến phân) trong (2.8) là chuyển vị giống như trong (2.1). Cực tiểu của (2.8) cần và phải được tìm từ điều kiện (khi không có các ràng buộc nào khác):

$$\frac{\partial Z}{\partial r_i} = 0 \quad (2.9)$$

Điều kiện (2.9) áp dụng vào (2.8) cho ta phương trình cân bằng của cơ hệ.

Ví dụ 1 Ví dụ này lấy từ [3, tr. 64]. Viết phương trình chuyển động của khối lượng  $m$  chạy trên đường cong  $y = bx^2$  trong mặt phẳng ( $xy$ ), không có lực ma sát, dưới tác dụng của trường gia tốc  $g$  (Hình 1.1).



Hình 1.1

Các lực tác dụng lên khối lượng  $m$  bao gồm: lực quán tính theo chiều  $y$ , lực trọng trường theo chiều âm của  $y$ , lực quán tính theo  $x$ . Chọn hệ so sánh là hệ có cùng khối lượng  $m$  nằm trong trường gia tốc  $g$  nhưng hoàn toàn tự do. Lượng cưỡng bức được viết theo (2.8) như sau:

$$Z = (m\ddot{y} + mg)y + (m\ddot{x})x \rightarrow \text{Min} \quad (a)$$

Thế  $y = bx^2$  vào (a) ta có

$$Z = (m\ddot{y} + mg)bx^2 + (m\ddot{x})x \rightarrow \text{Min} \quad (b)$$

Xem chuyển vị  $x$  là biến độc lập và từ điều kiện  $\frac{\partial Z}{\partial x} = 0$  nhận được:

$$2bx\ddot{y} + 2bgx + \ddot{x} = 0 \quad (c)$$

Thay  $\ddot{y} = 2bx\ddot{x} + 2b\dot{x}^2$  vào (c) nhận được phương trình chuyển động của khối lượng  $m$

$$(4b^2x^2 + 1)\ddot{x} + 4b^2x\dot{x}^2 + 2bgx = 0 \quad (d)$$

Phương trình (d) là kết quả cần tìm.

Như nhận xét của Gauss nêu trên, có thể nói biểu thức (2.7) đã biến vấn đề tĩnh học (cân bằng lực) thành vấn đề toán học thuần túy. Thật vậy, nếu ta dùng gia tốc là đại lượng biến phân thì tương tự như (2.7) có thể viết

$$\sum_i (f_i - f_{0i}) \delta \ddot{r}_i \leq 0 \quad (2.10)$$

với điều kiện gia tốc  $\ddot{r}_i$  là đại lượng độc lập đối với lực tác dụng.

Từ (1.10) có thể viết

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) \ddot{r}_i \rightarrow \text{Min} \quad (2.11)$$

Trong (2.11) cần xem gia tốc  $\ddot{r}_i$  là đại lượng biến phân để bảo đảm cho Z cực tiểu. Vì gia tốc  $\ddot{r}_{0i}$  của hệ hoàn toàn tự do đã biết nên biểu thức (2.11) tương đương với các biểu thức dưới đây:

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i})(\ddot{r}_i - \ddot{r}_{0i}) \rightarrow \text{Min} \quad (2.11a)$$

hoặc

$$Z = \sum_i m_i \left( \frac{f_i}{m_i} - \ddot{r}_{0i} \right) (\ddot{r}_i - \ddot{r}_{0i}) \rightarrow \text{Min}$$

$$Z = \sum_i m_i (\ddot{r}_i - \ddot{r}_{0i})^2 \rightarrow \text{Min} \quad (2.11b)$$

Ta thấy (2.11b) trùng với (2.5). Các gia tốc  $\ddot{r}_i$  phải thỏa mãn các liên kết nếu có và điều kiện cực tiểu của (2.11) là biểu thức (2.6).

Ví dụ 2 . Làm lại ví dụ 1 (Hình 1) theo nguyên lí (2.5) hoặc biểu thức (2.11)

Khối lượng m vừa chuyển động theo x, vừa chuyển động theo y, nhưng do có liên kết  $y = bx^2$  nên chỉ có một bậc tự do, thí dụ là x. Các lực tác dụng lên m bao gồm: Lực quán tính theo chiều y, lực trọng trường theo chiều âm của y, lực quán tính theo x. Lượng cưỡng bức Z viết theo (2.5) là:

$$Z = m \left( \frac{mg}{m} + \ddot{y} \right)^2 + m \ddot{x}^2 \rightarrow \text{Min} \quad (a)$$

Lấy đạo hàm ràng buộc  $y = bx^2$  theo thời gian hai lần ta có :

$$\ddot{y} = 2bx\ddot{x} + 2bx^2 \quad (b)$$

Thay  $\ddot{y}$  trong (a) bằng (b), nhận được



$$Z = (g + 2bx\ddot{x} + 2b\dot{x}^2)^2 + \ddot{x}^2 \rightarrow \text{Min} \quad (\text{c})$$

Xem gia tốc  $\ddot{x}$  là biến độc lập và từ điều kiện  $\partial Z / \partial \ddot{x} = 0$  ta có phương trình chuyển động của khối lượng m như sau :

$$(4b^2x^2 + 1)\ddot{x} + 4b^2x\dot{x}^2 + 2bgx = 0 \quad (\text{d})$$

Phương trình (d) là kết quả cần tìm.

Tương tự, cũng có thể dùng vận tốc  $\dot{r}_i$  là đại lượng biến phân, khi đó lượng cường bức  $Z$  được viết :

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) \dot{r}_i \rightarrow \text{Min} \quad (2.12)$$

với điều kiện vận tốc  $\dot{r}_i$  là biến độc lập và thỏa mãn các liên kết nếu có. Trong trường hợp này điều kiện cực tiểu của nguyên lý (2.12) sẽ là (khi không có ràng buộc nào khác) :

$$\frac{\partial Z}{\partial \dot{r}_i} = 0 \quad (2.13)$$

Làm lại bài toán của ví dụ 1 với đại lượng biến phân là vận tốc (biểu thức 2.12) cũng cho ta kết quả đúng đắn.

Tóm lại, các nguyên lý (2.5) hoặc (2.11) với đại lượng biến phân là gia tốc độc lập đối với lực tác dụng, nguyên lý (2.8) với đại lượng biến phân là chuyển vị độc lập đối với lực tác dụng và nguyên lý (2.12) với đại lượng biến phân là vận tốc độc lập đối với lực tác dụng đã biến phương trình cân bằng lực (vấn đề cơ học) thành các bài toán toán học thuần túy và có thể được phát biểu như sau : *Chuyển động thực của cơ hệ xảy ra khi lượng cường bức Z*

- xác định theo (2.5) thì được tìm theo gia tốc, điều kiện (2.6)
- xác định theo (2.8) thì được tìm theo chuyển vị, điều kiện (2.9)
- xác định theo (2.12) thì được tìm theo vận tốc, điều kiện (2.13)

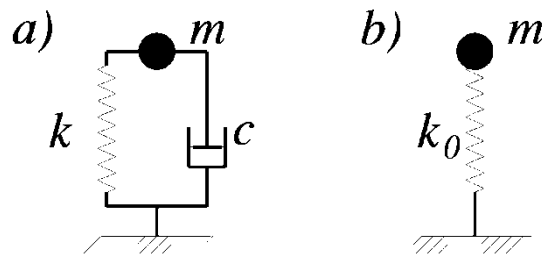
*là cực tiểu.*

Đương nhiên, các đại lượng biến phân gia tốc, chuyển vị và vận tốc phải thỏa mãn các điều kiện liên kết của hệ.

Để có thể áp dụng cho cả các bài toán tĩnh của môi trường liên tục ta sẽ dùng nguyên lý (2.8) với đại lượng biến phân là chuyển vị và điều kiện cực tiểu là (2.9). Nguyên lý (2.5) không cho phép giải các bài toán tĩnh. Do đó, cách trình bày nguyên lý Gauss dưới dạng này đã hạn chế việc sử dụng nguyên lý trong cơ học.

Có thể mở rộng nguyên lý Gauss bằng cách so sánh hệ cần tính với hệ có liên kết tùy ý chịu tác dụng của lực giống như hệ cần tính mà lời giải của nó đã biết. Khi đó thay cho lực ngoài ta dùng lực liên kết và lực quán tính của hệ so sánh với dấu ngược lại để tác động lên hệ cần tính. Điều này là hiển nhiên bởi vì ngoại lực luôn cân bằng với nội lực. Xét ví dụ minh họa sau

Ví dụ 3 Hệ cần tính là khối lượng  $m$  có liên kết lò xo độ cứng  $k$  và liên kết nhớt với hệ số nhớt  $c$  chịu tác dụng lực  $p(t)$  (Hình 2.2). Xét dao động thẳng đứng  $u(t)$  của  $m$  so với vị trí cân bằng tĩnh của nó. Bài toán có một bậc dao động tự do. Ta chọn hệ so sánh có khối lượng  $m_0$  và liên kết lò xo độ cứng  $k_0$  cùng chịu lực  $p(t)$  (Hình 2.2.b).



Hình 2.2 a) Hệ cần tính; b) Hệ so sánh.

Dao động  $u_0(t)$  của hệ so sánh (so với vị trí cân bằng tĩnh của nó) xác định từ phương trình cân bằng sau :

$$m_0 \ddot{u}_0 + k_0 u_0 = p(t) \quad (a)$$

Lực tác dụng lên khối lượng  $m$  gồm có: lực quán tính  $m\ddot{u}$ , lực cản lò xo  $ku$ , lực cản nhớt  $c\dot{u}$  và lực  $p(t)$  được thay bằng nội lực của hệ so sánh. Lượng cưỡng bức theo (2.8) viết được:

$$Z = (m\ddot{u} + c\dot{u} + ku - m_0\ddot{u}_0 - k_0 u_0)u \rightarrow Min \quad (b)$$

Phần trong dấu ngoặc đơn của (b) biểu thị lực tác dụng và theo nguyên lý chuyển vị (2.8) cần xem chuyển vị  $u$  là biến độc lập đối với lực tác dụng thì từ điều kiện  $\delta Z/\delta u = 0$  nhận được phương trình cân bằng của hệ cần tính

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = m_0\ddot{u}_0 + k_0u_0 \quad (c)$$

hay chú ý tới (a) ta có

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad (d)$$

Nhìn vào (c) và (d) thấy rằng thay cho việc giải phương trình vi phân cân bằng (d) của hệ cần tính ta có thể giải phương trình (c) ứng với từng thời điểm. Vế phải của (c) có thể là nghiệm riêng hoặc nghiệm cơ bản (trường hợp  $p(t)$  là xung đơn vị) của (d) hoặc, một cách tổng quát, là thể hiện của  $p(t)$  trên hệ bất kì nào khác (lời giải của hệ bất kì khi chịu tác động của  $p(t)$ ). Nhận xét này rất hữu ích bởi vì nó cho ta một phương pháp nữa để giải các phương trình vi phân phức tạp, đặc biệt là đối với các bài toán có điều kiện biên ở vô hạn hoặc là khi giải bằng số.

Lượng cưỡng bức  $Z$  theo (b) có thể viết dưới dạng sau:

$$Z = Z1 + Z2 + Z3 \rightarrow Min \quad (e)$$

$$Z1 = \frac{1}{k}(ku - k_0u_0)^2, \quad Z2 = 2c\dot{u}u, \quad Z3 = 2m(\ddot{u} - \ddot{u}_0)u \quad (f)$$

Ở đây  $Z1$  viết dưới dạng bình phương tối thiểu. Vì  $Z1$  được viết dưới dạng bình phương tối thiểu nên các đại lượng  $Z2$  và  $Z3$  phải nhân với hệ số 2. Các biểu thức lượng cưỡng bức (b) và (e), (f) là tương đương.

Những nhận xét rút ra từ ví dụ minh họa nêu trên áp dụng đúng cho bất kì hệ nào khác.

Trình bày trên cho thấy có thể dùng hệ có liên kết bất kì để làm hệ so sánh cho nên có thể mở rộng biểu thức (2.8) như sau :

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) r_i \rightarrow Min \quad (2.14)$$

với  $f_i$  là nội lực bao gồm lực quán tính và lực liên kết nếu có của hệ cần tính,  $f_{0i}$  là nội lực và lực liên kết đã biết của hệ so sánh bất kỳ chịu tác dụng lực ngoài giống như hệ cần tính.

Chú ý rằng khi sử dụng biểu thức (2.14) cần xem chuyển vị  $r_i$  là đại lượng độc lập đối với lực và phải thỏa mãn các điều kiện liên kết nếu có. Bởi vì cực tiểu của lượng cưỡng bức  $Z$  phải được tìm theo (2.9) (khi không có các ràng buộc nào khác) nghĩa là phải giải phương trình cân bằng của cơ hệ nên bài toán luôn có nghiệm và nghiệm là duy nhất

*Phương pháp của nguyên lý (2.14) cho phép dùng hệ so sánh bất kỳ. Đại lượng biến phân của (2.14) là chuyển vị, điều kiện cực tiểu của nó là biểu thức (2.9). Phương pháp này do GS. TSKH Hà Huy Cương đề xuất và được gọi là phương pháp nguyên lý cực trị Gauss.*

Biểu thức (2.7) trong các giáo trình cơ học thường mang dấu bằng, nghĩa là chỉ xét trường hợp liên kết giữ và khi đó từ (2.7) sẽ nhận được nguyên lý công ảo. Có thể nói biểu thức (2.7) với dấu nhỏ thua hoặc bằng là sự khác biệt cơ bản giữa nguyên lý cơ học của Gauss với cơ học dựa trên nguyên lý công ảo hiện dùng.

### **2.3. Cơ hệ môi trường liên tục: ứng suất và biến dạng**

Trong mục này trình bày phương pháp nguyên lý Gauss đối với cơ hệ môi trường liên tục. Muốn vậy cần biết khái niệm ứng suất và biến dạng của môi trường liên tục. Để trình bày gọn dưới đây dùng các đại lượng tenxơ với cách hiểu như sau [4 ,tr.196]:

$$a_i a_i = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$a_{kk} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

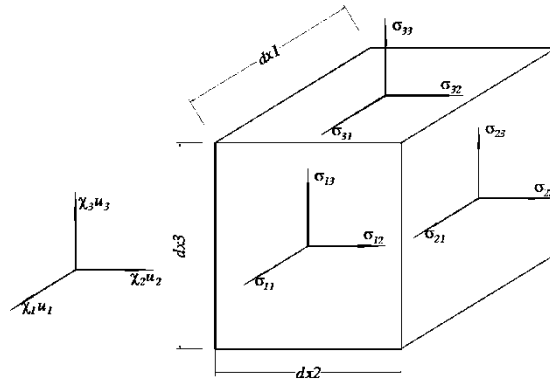
và hệ số Kronecker

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{khi } i = j$$

$$\delta_{ij} = 0 \quad \text{khi } i \neq j$$

với  $i = 1,2,3$  ;  $j = 1,2,3$  ;  $k = 1,2,3$  đối với không gian 3 chiều.

Có thể nói đối tượng nghiên cứu của cơ hệ môi trường liên tục trong tọa độ vuông góc là phân tử khối chữ nhật (ba chiều, kích thước vô cùng bé) hoặc phân tử chữ nhật (hai chiều, kích thước vô cùng bé) được tách ra từ môi trường (hình 2.3).



Hình 2.3. Trạng thái ứng suất phân tử

Khi đó lý thuyết ứng suất cho thấy ngoài các lực thông thường (lực gây các chuyển vị tịnh tiến trong cơ hệ chất điểm) trên bề mặt phân tử còn có các ứng suất tác dụng. Có 9 ứng suất  $\sigma_{ij}$  tác dụng lên bề mặt phân tử. Thứ nguyên của ứng suất bằng lực chia cho đơn vị diện tích.

Từ điều kiện cân bằng lực và momen sẽ nhận được phương trình cân bằng tĩnh của phân tử

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (2.15)$$

Trong (2.15)  $\sigma_{ij}$  là ứng suất,  $\sigma_{ij,j}$  biểu thị đạo hàm của ứng suất theo tọa độ không gian,  $\partial\sigma_{ij}/\partial x_j = \sigma_{ij,j}$ ,  $b_i$  là lực khối (lực khối xem như là lực cản). Nếu không có lực momen khối thì từ phương trình cân bằng sẽ có:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.16)$$

Số ứng suất độc lập tác dụng lên bề mặt phân tử chỉ còn 6. Lý thuyết ứng suất cho thấy khi biết trạng thái ứng suất phân tử thì sẽ xác định được trạng thái lực tại điểm đó của môi trường và ngược lại.

Khi chịu tác dụng ngoại lực, phân tử chuyển động và biến hình. Lý thuyết biến dạng cho thấy ngoài các chuyển vị  $u_i$  phân tử còn chịu các biến dạng  $\epsilon_{ij}$ . Nếu xem biến dạng là bé (bình phương hoặc tích hai biến dạng là nhỏ so với chính nó) thì các biến dạng được xác định theo các phương trình sau:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} ( u_{i,j} + u_{j,i} ) \quad (2.17)$$

Các  $\varepsilon_{ij}$  là các đại lượng không thứ nguyên. Tương tự như tenxơ  $\sigma_{ij}$ , tenxơ  $\varepsilon_{ij}$  đối xứng và có 6 biến dạng độc lập tương ứng với 6 ứng suất.

Từ (2.17) thấy rằng trạng thái chuyển vị xác định duy nhất trạng thái biến dạng, nhưng ngược lại không đúng bởi vì có những chuyển vị không gây biến dạng (chuyển vị của vật rắn tuyệt đối). Ngoài các phương trình nêu trên, để bảo đảm tính liên tục của môi trường còn có các các phương trình về điều kiện không bị gián đoạn.

Tùy theo tính chất cơ học của vật liệu môi trường mà có các liên hệ khác nhau giữa ứng suất và biến dạng. Do có 6 ứng suất và 6 biến dạng nên một cách tổng quát cần biết 36 thông số tính chất vật liệu. Tuy nhiên từ điều kiện biểu thị năng lượng biến dạng phải giống nhau con số 36 rút xuống còn 21. Đối với vật liệu đẳng hướng chỉ còn 2 thông số tính chất vật liệu độc lập được chọn trong số các thông số sau: hai hằng số Lamé  $\mu$  và  $\lambda$ , môđun Young  $E$ , môđun trượt  $G$  và hệ số Poisson  $\nu$ , giữa chúng có các liên hệ sau đây :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad , \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.18)$$

Đối với vật liệu đồng nhất, đẳng hướng, tuân theo định luật Húc (Hooke) thì liên hệ giữa ứng suất và biến dạng sẽ là :

$$\sigma_{ij} = 2G (\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} ) \quad (2.19)$$

Từ công thức (2.19) thấy rằng ứng suất  $\sigma_{ij}$  không những phụ thuộc vào biến dạng  $\varepsilon_{ij}$  theo phương của nó mà còn phụ thuộc vào các biến dạng theo các phương khác thông qua hệ số Poisson  $\nu$ . Hệ số  $2G$  để tiện trình bày sau này sẽ được gọi là *độ cứng của biến dạng*.

Những trình bày trên cho thấy đối với cơ hệ môi trường liên tục cần xem các biến dạng  $\varepsilon_{ij}$  là độc lập đối với nhau và được xác định theo phương trình (2.17), cần xét các phương trình về điều kiện không bị gián đoạn của môi trường và liên hệ giữa ứng suất và biến dạng. Đối với môi trường đàn hồi, đồng nhất, đẳng hướng liên

hệ ứng suất - biến dạng lấy theo (2.19) và điều kiện không bị gián đoạn của môi trường tự động thoả mãn khi biểu thị ứng suất qua chuyển vị.

Tóm lại, khác với cơ hệ chất điểm, trong môi trường liên tục ngoài lực khối và lực quán tính là các lực tác dụng gây chuyển vị, còn phải xét thêm các ứng suất  $\sigma_{ij}$  gây ra các biến dạng  $\varepsilon_{ij}$ .

Từ nhận xét vừa nêu, có thể sẽ có ích đối với nhận thức khi đưa ra các nhận định tổng quát về mối tương quan giữa cơ học chất điểm và cơ hệ môi trường liên tục như sau:

- Khái niệm cơ bản của cơ chất điểm là chất điểm, các lực tác dụng lên chất điểm gây ra các chuyển vị, đặc trưng của chất điểm là khối lượng;
- Khái niệm cơ bản của cơ hệ môi trường liên tục là mặt cắt phân tử, các ứng suất gây ra các biến dạng, các đặc trưng của mặt cắt phân tử là các độ cứng biến dạng tương ứng với các ứng suất. Các độ cứng này xác định tùy theo tính chất vật liệu môi trường. Trong cơ hệ môi trường liên tục còn có lực khối và lực quán tính gây chuyển vị giống như trong cơ hệ chất điểm. Do đó, có thể tóm tắt mối tương quan vừa nêu dưới dạng:

<i>Chất điểm</i>	$\Leftrightarrow$	<i>Mặt cắt phân tử</i>
<i>Lực</i>	$\Leftrightarrow$	<i>Lực</i> <i>Các ứng suất</i>
<i>Chuyển vị</i>	$\Leftrightarrow$	<i>Chuyển vị</i> <i>Biến dạng</i>
<i>Khối lượng</i>	$\Leftrightarrow$	<i>Khối lượng</i> <i>Các độ cứng biến dạng</i>

Kí hiệu  $\Leftrightarrow$  chỉ sự tương đương giữa các khái niệm. Với cách hiểu này cũng dễ dàng xây dựng phép hàm lượng cưỡng bức tương tự như (2.14) đối với cơ hệ môi trường liên tục bất kỳ được trình bày sau đây.

Trước tiên, ta dùng hệ so sánh là hệ chất điểm có cùng khối lượng, cùng chịu tác dụng lực ngoài và hoàn toàn tự do. Đối với môi trường liên tục cần xét thêm ứng suất và biến dạng nên lượng cưỡng bức  $Z$  của hệ viết tương tự (2.14) như sau:

$$Z_{\dots} = Z_1 + Z_2 \rightarrow \text{Min}$$

$$Z_1 = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV, \quad Z_2 = \int_V (\rho \ddot{u}_i u_i + b_i u_i - \rho \ddot{u}_{0i} u_i) dF \quad (2.20)$$

Trong (2.20)  $V$  là thể tích vật thể,  $\rho$  là khối lượng đơn vị. Lực quán tính là lực cản nên trong (2.20) mang dấu cộng. Lượng cường bức  $Z_1$  xét ứng suất của môi trường liên tục cần tính, hệ chất điểm so sánh không có ứng suất. Lượng cường bức  $Z_2$  xét lực khối và lực quán tính của môi trường liên tục, lực quán tính của hệ chất điểm so sánh. Các lực này đều gây chuyển vị  $u$ .

Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, trong (2.20) cần xem các biến dạng  $\varepsilon_{ij}$  là độc lập đối với các ứng suất  $\sigma_{ij}$  và các chuyển vị  $u_i$  là độc lập đối với lực tác dụng (ở đây là lực khối và lực quán tính) và độc lập đối với nhau. Điều kiện cực tiểu của (2.20) là

$$\frac{\partial Z_1}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial Z_2}{\partial u_i} = 0 \quad (2.21.a)$$

Nếu biến dạng  $\varepsilon_{ij}$  biểu thị qua chuyển vị (công thức (2.17)) thì điều kiện cực tiểu của (2.20) được viết như sau:

$$\frac{\partial Z_1}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial u_i} + \frac{\partial Z_2}{\partial u_i} = 0 \quad (2.21.b)$$

Từ điều kiện (2.21.a) nhận được

$$\sigma_{ij,j} + b_i + \rho \ddot{u}_i - \rho \ddot{u}_{0i} = 0 \quad (2.22)$$

Phương trình (2.22) là phương trình vi phân cân bằng của cơ hệ môi trường liên tục dưới dạng ứng suất.

Nếu tại điểm đang xét không có lực ngoài tác dụng thì  $\rho \ddot{u}_{0i}$  bị triệt tiêu, phương trình (2.22) là phương trình cân bằng động lực học thường gặp của cơ hệ môi trường liên tục. Trường hợp bài toán tĩnh,  $\rho \ddot{u}_i$  cũng bằng không, phương trình (2.22) khi đó trùng với (2.15).

Dễ dàng nhận được phương trình vi phân cân bằng dưới dạng chuyển vị bằng cách đưa liên hệ ứng suất - biến dạng vào phương trình (2.22) hoặc vào phiếm hàm (2.20). Trong mục (2.5) dưới đây sẽ trở lại vấn đề này.



Cần nêu nhận xét rằng biểu thức (2.20) cho phép so sánh cơ hệ môi trường liên tục với cơ hệ chất điểm hoàn toàn tự do khi hai hệ cùng chịu lực ngoài như nhau. Trong (2.20) không chứa các thông số tính chất vật liệu của môi trường nên nó đúng với môi trường bất kỳ.

Xét các trường hợp khác của phiếm hàm lượng cưỡng bức (2.20):

- Trường hợp không dùng hệ so sánh thì phải đưa lực ngoài  $p_i$  vào (2.20). Lực  $p_i$  thường tác dụng lên bề mặt  $\Omega$  của vật nên ta viết

$$Z = \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + \rho \ddot{u}_i u_i - b_i u_i) dv - \int_{\Omega} p_i u_i d\Omega \rightarrow Min \quad (2.23)$$

- Có thể dùng hệ so sánh cũng là cơ hệ môi trường liên tục có liên kết bất kỳ với điều kiện hai hệ cùng chịu lực ngoài giống nhau:

$$Z = \int_V [(\sigma_{ij} - \sigma_{0ij}) \varepsilon_{ij} + (\rho \ddot{u}_i - \rho_0 \ddot{u}_{0i}) u_i - (b_i - b_{0i}) u_i] dv \rightarrow Min \quad (2.24)$$

Giống như đã trình bày ở ví dụ 3, thực chất của phương pháp nguyên lý cực trị Gauss là dùng nội lực của hệ so sánh tác dụng lên hệ cần tìm.

- Đối với bài toán tĩnh, lực quán tính triệt tiêu, khi không xét lực khối, biểu thức (2.24) có dạng:

$$Z = \int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{0ij}) \varepsilon_{ij} dv \rightarrow Min \quad (2.25)$$

- Đối với bài toán tĩnh, không xét lực khối, không dùng hệ so sánh, từ (2.23) ta có:

$$Z = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv - \int_{\Omega} p_i u_i d\Omega \rightarrow Min \quad (2.26)$$

Các chuyển vị  $u_i$  và biến dạng  $\varepsilon_{ij}$  (xác định theo (2.17)) trong các phiếm hàm (2.20, 2.23, 2.24, 2.25) và (2.26) là những đại lượng độc lập đối với lực tác dụng và ứng suất và phải thoả mãn các điều kiện liên kết nếu có. Chuyển động thực của cơ hệ môi trường liên tục xảy ra khi cực tiểu các phiếm hàm lượng cưỡng bức vừa nêu theo điều kiện (2.21) nếu không có các điều kiện liên kết nào khác.

Đối với môi trường đàn hồi, quan hệ ứng suất – biến dạng xác định theo (2.19), ta có thể viết lượng cưỡng bức dưới dạng bình phương tối thiểu như nhận xét đã nêu ở ví dụ 3:

$$Z = \int_V \frac{1}{2G} (\sigma_{ij} - \sigma_{0ij})^2 dv + 2 \int_V (f_{mi} - f_{0mi}) u_i dv \rightarrow Min \quad (2.27a)$$

$$\text{hoặc} \quad Z = \int_V 2G(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{0ij})^2 dv + 2 \int_V m_i (\ddot{u}_i - \ddot{u}_{0i}) u_i dv \quad \rightarrow \text{Min}$$

Tương tự, khi không dùng hệ so sánh thì phải xét lực ngoài, có thể viết lại (2.26) như dưới đây

$$Z = \int_V \frac{1}{2G} (\sigma_{ij})^2 dv + 2 \int_V f_{mi} u_i dv - 2 \int_{\Omega} p_i u_i d\Omega \quad \rightarrow \text{Min} \quad (2.27b)$$

$$\text{hoặc} \quad Z = \int_V 2G(\varepsilon_{ij})^2 dv + 2 \int_V (m_i \ddot{u}_i) u_i dv - 2 \int_{\Omega} p_i u_i d\Omega \quad \rightarrow \text{Min}$$

Trong (2.27)  $f_{mi} = m_i \ddot{u}_i$  và  $f_{0mi} = m_{0i} \ddot{u}_{0i}$  là lực quán tính của hệ cần tính và hệ so sánh, liên hệ giữa ứng suất và biến dạng xác định theo biểu thức (2.19). Trong (2.27), cần xem các biến dạng  $\varepsilon_{ij}$  là các đại lượng biến phân độc lập đối với các ứng suất  $\sigma_{ij}$ , các chuyển vị  $u_i$  là độc lập đối với lực tác dụng  $p$  và lực quán tính.

Tích phân thứ nhất trong (2.27) liên quan đến ứng suất đàn hồi có trọng số là  $2G$ , Trở lên trình bày các phiếm hàm lượng cưỡng bức, đối với cơ hệ chất điểm là các biểu thức (2.14), đối với môi trường liên tục là biểu thức (2.20) và các trường hợp khác của nó là các biểu thức (2.23), (2.24), (2.25), (2.26) và (2.27). Trong các phiếm hàm này cần xem các biến dạng  $\varepsilon_{ij}$  xác định theo (2.17) và các chuyển vị  $u_i$  là các đại lượng không biết độc lập đối với ứng suất và lực tác dụng, thỏa mãn các điều kiện liên kết nếu có và các điều kiện không bị gián đoạn (riêng đối với môi trường liên tục). Cực tiểu các phiếm hàm này theo điều kiện (2.21) cho ta chuyển vị thực của cơ hệ cần tính.

Phương pháp nguyên lí cực trị Gauss là phương pháp mới trong cơ học môi trường liên tục.

#### 2.4. Cơ học kết cấu

Môn sức bền vật liệu và cơ học kết cấu nghiên cứu trạng thái ứng suất biến dạng của dầm, thanh, tấm, khung, dàn v.v... là những kết cấu có một hoặc hai kích thước nhỏ thua nhiều lần so với các kích thước còn lại. Trong trường hợp này để đơn giản nhưng kết quả tính vẫn bảo đảm độ chính xác đủ dùng trong thực tế (kiểm tra bằng thí nghiệm), có thể dùng mặt cắt kết cấu thay cho mặt cắt phân tố và các ứng suất tác dụng lên mặt cắt được quy về thành các nội lực tác dụng lên mặt trung

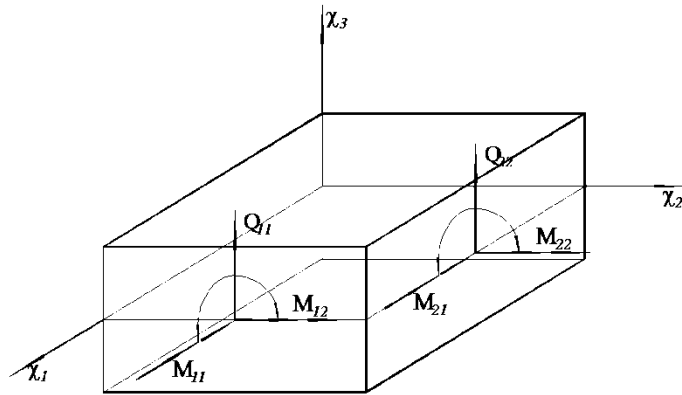
ình (đường trung bình đối với dầm) như lực dọc  $N$ , momen uốn  $M$ , lực cắt  $Q$  v.v... Muốn vậy cần đưa vào các giả thiết sau đây:

- Khi chịu lực dọc trục, ứng suất pháp được xem là phân bố đều trên tiết diện.
- Khi chịu lực ngang (tác dụng thẳng góc với mặt trung bình) có các giả thiết sau đây:

Mặt trung bình của tấm và trục trung bình của dầm không có nội lực và do đó không bị biến dạng.

Giả thiết tiết diện phẳng: tiết diện sau khi biến dạng vẫn phẳng.

Không xét ứng suất nén giữa các lớp theo chiều cao tiết diện, nghĩa là xem các lớp song song với mặt trung bình (tấm) làm việc ở trạng thái ứng suất phẳng.



Hình 2.4. Nội lực của phân tố tấm

Sử dụng các giả thiết trên, các momen uốn và xoắn và lực cắt tác dụng lên mặt cắt kết cấu xác định theo các biểu thức dưới đây (hình 2.4):

$$M_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} x_3 dx_3, \quad M_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} x_3 dx_3, \quad M_{12} = M_{21} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} x_3 dx_3$$

$$Q_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} dx_3, \quad Q_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23} dx_3 \quad (2.28)$$

ở đây  $h$  là chiều cao tiết diện.

Để có thể áp dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss cần biết các ‘biến dạng’ của tiết diện do momen uốn gây ra. Với các giả thiết nêu trên chỉ cần biết chuyển vị thẳng đứng  $w$  của trục hoặc mặt trung bình của kết cấu (còn gọi là đường

độ võng, đường đàn hồi) thì trong trường hợp uốn thuần tuý có thể tính được các chuyển vị theo các phương còn lại và dùng các phương trình (2.17) để xác định các biến dạng. Kết quả cho thấy các biến dạng trong mặt phẳng tâm (hoặc thớ dầm) phân bố tuyến tính theo chiều cao và tỉ lệ với độ cong  $\chi_{ij}$  của mặt võng ( $i=1,2; j=1,2$ ):

$$\varepsilon_{ij} = \chi_{ij} x_3 \quad ;$$

$$\chi_{11} = -w_{,11} \quad , \quad \chi_{22} = -w_{,22} \quad , \quad \chi_{12} = -w_{,12} \quad . \quad (2.29)$$

Dấu trừ trong công thức xác định độ cong (2.29) là do xem chuyển vị  $w$  có chiều dương hướng xuống dưới và dấu nội lực như trên hình 2.4. Như vậy, độ cong  $\chi_{ij}$  của các lớp song song với mặt trung bình là giống nhau và đó là ‘biến dạng’ do momen  $M_{ij}$  gây ra. Biết được biến dạng  $\varepsilon_{ij}$  xác định theo (2.29) sẽ tính được momen  $M_{ij}$  theo (2.28). Liên hệ giữa momen uốn và ‘biến dạng uốn’ của tiết diện như sau:

$$M_{11} = D(\chi_{11} + \nu\chi_{22}), \quad M_{22} = D(\chi_{22} + \nu\chi_{11}), \quad M_{12} = D(1 - \nu)\chi_{12} \quad (2.30)$$

ở đây  $D$  là độ cứng uốn

$$\text{đối với dầm } D = EJ = \frac{Eh^3}{12} \quad , \quad \text{đối với tấm } D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$$

và  $D(1 - \nu)$  được gọi là độ cứng xoắn (độ cứng của biến dạng xoắn).

(ở đây cần chú ý rằng do có liên kết gối tựa nên mặt trung bình có thể bị biến dạng trong mặt phẳng của nó, giả thiết mặt trung bình là mặt trung hoà nêu trên không được thoả mãn. Trong trường hợp này độ võng phải là bé so với chiều cao dầm hoặc chiều dày tấm để có thể bỏ qua ứng suất tác dụng trong mặt trung bình).

Trong trường hợp có lực cắt  $Q_{ii}$  thì chúng được xác định từ điều kiện cân bằng phân tử, ta có:

$$Q_{11} = \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} \quad , \quad Q_{22} = \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_1}$$

$$\text{hay } Q_{11} = D [(\chi_{11})_{,1} + (\chi_{12})_{,2}] \quad , \quad Q_{22} = D [(\chi_{12})_{,1} + (\chi_{22})_{,2}] \quad (2.31)$$

Từ công thức (2.28) có thể thấy độ cứng chịu cắt của tiết diện là  $Gh$  và biến dạng trượt  $\gamma_{11}$  và  $\gamma_{22}$  tương ứng với lực cắt sẽ bằng góc xoay của đường đàn hồi:

$$\gamma_{11} = w_{,1} = \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad \gamma_{22} = w_{,2} = \frac{\partial w}{\partial x_2} \quad (2.32)$$

Trong lý thuyết kết cấu chịu uốn nêu trên, độ võng của kết cấu chỉ do mo-men uốn gây ra, không xét biến dạng trượt do lực cắt gây ra.

Đối với các lực  $N_{ij}$  tác dụng lên mặt trung bình của tiết diện thì các biến dạng  $\varepsilon_{ij}$  ( $i=1,2; j=1,2$ ) vẫn xác định theo (2.17). Độ cứng của tiết diện chịu nén kéo sẽ là  $Eh$ .

Trong các công thức vừa nêu lấy  $i=1, j=1$  đối với bài toán một chiều (thanh, dầm), chiều rộng dầm bằng đơn vị.

Do sử dụng momen uốn của tiết diện nên phải đưa thêm các liên kết về xoay để mô tả các điều kiện biên của nó: liên kết khớp cho phép tiết diện xoay tự do, momen bằng không; liên kết ngàm không cho tiết diện xoay, momen khác không.

Sau khi đã biết ‘các biến dạng’ tương ứng với các nội lực của tiết diện (momen uốn, lực cắt, lực dọc trục v.v..) và độ cứng của chúng thì dễ dàng xây dựng các bài toán cơ học kết cấu theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss.

Ta có thể viết một cách tổng quát lượng cưỡng bức  $Z$  của bài toán cơ học kết cấu dưới dạng tương tự như (2.25) (bài toán tĩnh):

$$Z = \int_V [(M_{ij} - M_{0ij})\chi_{ij} + (Q_{ii} - Q_{0ii})\gamma_{ii} + (N_{ij} - N_{0ij})\varepsilon_{ij}] dv \rightarrow Min \quad (2.33a)$$

hoặc dưới dạng bình phương tối thiểu

$$Z = \int_V \frac{1}{Docung} (\text{Nội lực hệ cần tính} - \text{Nội lực hệ so sánh})^2 dv \rightarrow Min \quad (2.33b)$$

và trong trường hợp không dùng hệ so sánh ta có

$$Z = \int_V \frac{1}{Docung} (\text{Nội lực hệ cần tính})^2 dv - 2 \int_{\Omega} p_i w_i d\Omega \rightarrow Min \quad (2.33c)$$

ở đây  $V$  là chiều dài dầm hoặc diện tích tấm,  $\Omega$  là chiều dài hoặc diện tích phạm vi đặt lực. Trong (2.33) cần xem các độ cong  $\chi_{ij}$  là các đại lượng độc lập đối với nội lực momen uốn  $M_{ij}$ , các biến dạng trượt  $\gamma_{11}$  và  $\gamma_{22}$  là các đại lượng độc lập đối với lực cắt  $Q_{11}$  và  $Q_{22}$ , các biến dạng trong mặt trung bình  $\varepsilon_{ij}$  là các đại lượng độc lập đối với  $N_{ij}$  và đều là các đại lượng biến phân của bài toán. Điều đó chỉ ra rằng cực tiểu của lượng cưỡng bức  $Z$ , biểu thức (2.33), chỉ có thể tìm từ điều kiện:

$$\frac{\partial Z}{\partial \chi_{ij}} \frac{\partial \chi_{ij}}{\partial W} + \frac{\partial Z}{\partial \gamma_{ii}} \frac{\partial \gamma_{ii}}{\partial W} + \frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial W} + \frac{\partial Z}{\partial W} = 0 \quad (2.34)$$

Bởi vì các biến dạng uốn, biến dạng cắt v.v... là hàm của độ võng và độ võng là hàm của tọa độ nên điều kiện (2.34) được tính bằng phép tính biến phân và sẽ cho ta phương trình cân bằng tĩnh của kết cấu (xem mục 2.5 dưới đây).

Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss với biểu thức lượng cưỡng bức  $Z$  viết theo (2.33) và điều kiện cực tiểu (2.34) là phương pháp mới, tổng quát trong cơ học kết cấu.

## 2.5. Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss và các phương trình cân bằng của cơ hệ

Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, nếu như biết được các lực và nội lực của cơ hệ và các chuyển vị và biến dạng do chúng gây ra thì có thể viết được lượng cưỡng bức  $Z$  của hệ. Dùng phép tính biến phân với đại lượng biến phân là các chuyển vị độc lập đối với lực tác dụng và biến dạng độc lập với ứng suất sẽ nhận được phương trình vi phân cân bằng của hệ (phương trình Ô-le (Euler) của phiếm hàm  $Z$ ). Sau đây trình bày các ví dụ sử dụng phương pháp vừa nêu để tìm phương trình cân bằng.

### 2.5.1. Phương trình cân bằng tĩnh đối với môi trường đàn hồi, đồng nhất, đẳng hướng

Ba phương trình vi phân cân bằng của cơ hệ dưới dạng ứng suất là phương trình (2.22). Thế các ứng suất  $\sigma_{ij}$  xác định theo (2.19) vào (2.22) sẽ có các phương trình vi phân cân bằng của cơ hệ đàn hồi đồng nhất đẳng hướng dưới dạng chuyển

vị. Ở đây trình bày cách tính trực tiếp để nhận được các phương trình đó (trường hợp bài toán tĩnh).

Liên hệ biến dạng - chuyển vị (2.17) và ứng suất - biến dạng (2.19) được viết lại trong hệ tọa độ (x,y,z) dưới dạng thường dùng với u, v và w là các chuyển vị tương ứng theo các chiều (x,y,z) như sau:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \sigma_x &= 2G\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right), \quad \sigma_y = 2G\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right), \quad \sigma_z = 2G\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right) \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy}, \quad \tau_{xz} = G \gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz}\end{aligned}\quad (2.34)$$

ở đây  $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$  - biến dạng thể tích của phân tử.

Ta viết lượng cưỡng bức Z theo (2.25) cho mỗi ứng suất và lực khối b:

$$\begin{aligned}Z1 &= \int_V 2G\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right)\frac{\partial u}{\partial x} dV, \quad Z2 = \int_V 2G\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right)\frac{\partial v}{\partial y} dV, \\ Z3 &= \int_V 2G\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right)\frac{\partial w}{\partial z} dV, \quad Z4 = \int_V G \gamma_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)dV, \\ Z5 &= \int_V G \gamma_{xz} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)dV, \quad Z6 = \int_V G \gamma_{yz} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)dV \\ Z7 &= \int_V b_x u dV, \quad Z8 = \int_V b_y v dV, \quad Z9 = \int_V b_z w dV\end{aligned}\quad (2.35)$$

Lượng cưỡng bức Z bằng tổng các lượng cưỡng bức thành phần :

$$Z = Z1+Z2+Z3+Z4+Z5+Z6+Z7+Z8+Z9 \quad \rightarrow Min$$

Từ điều kiện cực tiểu (1.21) của phiếm hàm Z viết lại dưới dạng

$$\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial u} + \frac{\partial Z}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial w} + \frac{\partial Z}{\partial w} = 0 \quad (2.36)$$

sẽ nhận được ba phương trình vi phân cân bằng tĩnh. Bởi vì  $u$ ,  $v$  và  $w$  là các hàm của tọa độ  $(x,y,z)$ , không phải là biến độc lập, nên phép tính (2.36) là phép tính biến phân. Phương trình cân bằng thứ nhất với  $u$  là hàm chưa biết nhận được với chú ý rằng

- đại lượng biến phân của Z1 (ứng với  $\sigma_x$ ) là  $\varepsilon_x$  hay  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , như vậy

$$\frac{\partial Z1}{\partial \varepsilon_x} = - \frac{\partial}{\partial x} 2G \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{1-2\nu} \theta \right) = - 2G \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{v}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \theta \right)$$

- đại lượng biến phân của Z4 (ứng với  $\tau_{xy}$ ) là  $\gamma_{xy}$  có thành phần  $\frac{\partial u}{\partial y}$ , nên

$$\frac{\partial Z4}{\partial \gamma_{xy}} = - G \frac{\partial}{\partial y} \gamma_{xy} = -G \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)$$

- đại lượng biến phân của Z5 (ứng với  $\tau_{xz}$ ) là  $\gamma_{xz}$  có thành phần  $\frac{\partial u}{\partial z}$ , nên

$$\frac{\partial Z5}{\partial \gamma_{xz}} = -G \frac{\partial}{\partial z} \gamma_{xz} = - G \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} \right)$$

- đại lượng biến phân của Z7 là  $u$ , nên

$$\frac{\partial Z7}{\partial u} = b_x$$

Tổng cộng

$$\frac{\partial Z1}{\partial u} + \frac{\partial Z4}{\partial u} + \frac{\partial Z5}{\partial u} + \frac{\partial Z7}{\partial u} = 0$$

sau khi rút gọn sẽ là :

$$G \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{G}{1-2\nu} \left( \frac{\partial}{\partial x} \theta \right) + b_x = 0 \quad (2.37)$$

Phương trình cân bằng thứ hai nhận được với  $v$  là hàm chưa biết. Trong (2.35) các đại lượng biến phân của  $v$  có ở Z2, Z4, Z6 và Z8. Phương trình cân bằng thứ ba nhận được với  $w$  là hàm chưa biết. Trong (2.35) các đại lượng biến phân của  $w$  có ở



Z3, Z5, Z6 và Z9. Bằng cách tính biến phân tương tự sẽ có thêm hai phương trình cân bằng sau:

$$G\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \frac{G}{1-2\nu}\left(\frac{\partial}{\partial y}\theta\right) + b_y = 0 \quad (2.38)$$

$$G\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \frac{G}{1-2\nu}\left(\frac{\partial}{\partial z}\theta\right) + b_z = 0 \quad (2.39)$$

Ba phương trình (2.37), (2.38) và (2.39) là các phương trình vi phân cân bằng của cơ hệ đàn hồi, đồng nhất và đẳng hướng và được gọi là phương trình Navier [4] Dưới dạng tenxơ các phương trình này được viết gọn như sau:

$$G u_{j,kk} + \frac{G}{1-2\nu} u_{k,kj} + b_j = 0 \quad (2.40)$$

### 2.5.2. Phương trình vi phân của mặt võng của tấm chịu uốn

Xét tấm có chiều dày không đổi. Viết lại các biểu thức (2.30) đối với các nội lực momen uốn và xoắn và (2.31) đối với lực cắt tác dụng lên phân tử tấm trong hệ tọa độ (x,y) ta có :

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ Q_x &= -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right), \quad Q_y = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Biết được các lực tác dụng lên phân tử thì dễ dàng viết được lượng cường bức Z, thí dụ, dưới dạng bình phương tối thiểu theo (2.33.b) (khi không có ngoại lực):

$$\begin{aligned} Z1 &= \int_{\Omega} D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 d\Omega, \quad Z2 = \int_{\Omega} D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 d\Omega, \\ Z3 &= 2 \int_{\Omega} D(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 d\Omega \end{aligned} \quad (2.42)$$

ở đây  $\Omega$  là diện tích tấm. Lượng cường bức Z bằng tổng các lượng cường bức do mỗi thành phần nội lực momen uốn và xoắn gây ra :

$$Z = Z1 + Z2 + Z3 \rightarrow Min \quad (2.43)$$

Chú ý rằng trong (2.43) ta chỉ xét nội lực momen, chưa xét tới lực cắt, phân tử không có lực ngoài tác dụng. Hệ số 2 trong Z3 để xét momen xoắn tác dụng bằng nhau lên hai chiều x,y. Các ‘biến dạng’ tương ứng với các nội lực momen xác định theo (2.29) :

$$\chi_{xx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \chi_{yy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \chi_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.44)$$

Các ‘biến dạng’ này cần được xem là độc lập đối với các nội lực momen uốn và xoắn và là các đại lượng biến phân của bài toán. Do đó từ điều kiện cực tiểu (2.36) ta có :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z1}{\partial \chi_{xx}} \frac{\partial \chi_{xx}}{\partial w} &= 2D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 2D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right), \\ \frac{\partial Z2}{\partial \chi_{yy}} \frac{\partial \chi_{yy}}{\partial w} &= 2D \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 2D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right), \\ \frac{\partial Z3}{\partial \chi_{xy}} \frac{\partial \chi_{xy}}{\partial w} &= 4D(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 4D(1-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Tổng cộng các thành phần của (1.45) nhận được phương trình vi phân độ võng của tấm chịu uốn :

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \quad (2.46)$$

Phương trình (2.46) thường được gọi là phương trình Sophie Germain (năm 1811).

Khi xây dựng lượng cường bức Z (biểu thức 2.43) không xét tới lực cắt bởi vì lý thuyết kết cấu chịu uốn trình bày trên không xét biến dạng của lực cắt. Tuy nhiên, trong phạm vi của lý thuyết này, nếu dùng lực cắt xác định theo (2.31) và biến dạng trượt theo (2.32) thì lượng cường bức Z được viết như sau

$$Z = \int_{\Omega} Q_{xx} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) d\Omega + \int_{\Omega} Q_{yy} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) d\Omega \rightarrow Min \quad (2.47)$$

Xem các góc xoay  $\frac{\partial w}{\partial x}$  và  $\frac{\partial w}{\partial y}$  là các đại lượng biến phân độc lập đối với lực cắt  $Q_x$  và  $Q_y$  và bằng phép tính biến phân lại nhận được phương trình vi phân (2.46).

Đối với dầm, lượng cường bức viết theo (2.33.a) sẽ là :

$$Z = - \int_l EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (\chi_{xx}) dl - \int_{l_q} qw dl_q \quad (2.48)$$

Trong (2.48)  $l$  là chiều dài dầm,  $\chi_{xx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  là biến dạng uốn (độ cong) của dầm,  $l_q$  là chiều dài đoạn dầm có lực  $q$  tác dụng. Phương trình vi phân đường độ võng của dầm:

$$\frac{\partial Z}{\partial \chi_{xx}} \frac{d\chi_{xx}}{dw} + \frac{\partial Z}{\partial w} = EJ \frac{d^4 w}{dx^4} - q = 0 \quad (2.49)$$

### CHƯƠNG 3.

## BÀI TOÁN DẦM CHỊU UỐN CÓ XÉT ĐẾN BIẾN DẠNG TRƯỢT NGANG

Trong chương này trình bày lý thuyết dầm có xét biến dạng trượt và phương pháp mới nghiên cứu nội lực và chuyển vị của hệ dầm chịu uốn có xét biến dạng trượt ngang do lực cắt  $Q$  gây ra. Cuối cùng để làm sáng tỏ nội dung phương pháp, tác giả trình bày các ví dụ tính toán cụ thể như tính toán các dầm một nhịp với các điều kiện biên hai đầu khác nhau, dầm liên tục hai nhịp, dầm liên tục ba nhịp chịu các loại tải trọng khác nhau.

### 3.1. Lý thuyết dầm có xét biến dạng trượt

Lý thuyết xét biến dạng trượt trong dầm do Timoshenko đưa ra và thường được gọi là lý thuyết dầm Timoshenko. Khi xây dựng lý thuyết này vẫn sử dụng giả thiết tốt điển hình của lý thuyết dầm thông thường, tuy nhiên do có biến

dạng trượt, trục dầm sẽ xoay đi một góc vu kh $\llcorner$ ng c $\beta$ n th $\llcorner$ ng g $\acute{a}$ c v $\acute{i}$  ti $\acute{o}$ t di $\acute{o}$ n d $\acute{a}$ m n $\acute{a}$ a.

Lý thuyết xét biến dạng trượt được dùng phổ biến trong phương pháp phần tử hữu hạn hiện nay là dùng hàm độ võng  $y$  và hàm góc xoay  $\theta$  do momen uốn gây ra là hai hàm chưa biết. Trong trường hợp này biến dạng trượt tại trục trung hòa được xác định như sau, ví dụ như [36, trg 5].

$$\gamma = \frac{dy}{dx} - \theta \quad (3.1)$$

Từ đó ta có các công thức xác định  $M$  và  $Q$

$$M = -EJ \left( \frac{d\theta}{dx} \right)$$

$$Q = \frac{GF}{\alpha} \left[ -\frac{dy}{dx} + \theta \right] \quad (3.2)$$

Trong các công thức trên  $EJ$  là độ cứng uốn,  $GF$  là độ cứng cắt của tiết diện,  $G$  là môđun trượt của vật liệu,  $F$  là diện tích tiết diện,  $\alpha$  là hệ số xét sự phân bố không đều của ứng suất tiếp  $\tau$   $r^a$ n chiều cao tiết diện.

Các tác giả [36, trg 5] cho rằng khi môđun trượt  $G \rightarrow \infty$  thì từ (3.2) suy ra

$$\theta = \frac{dy}{dx} \quad (3.3)$$

nghĩa là trở về lý thuyết dầm không xét biến dạng trượt: Góc xoay của đường độ võng là do mômen gây ra. Theo tác giả, lập luận trên không đúng bởi vì khi thỏa mãn phương trình (3.3) thì từ phương trình (3.2) suy ra lực cắt  $Q = 0$ , dẫn về trường hợp uốn thuần túy của dầm. Vì lý do đó nên lý thuyết xét biến dạng trượt dùng  $y$  và  $\theta$  làm ẩn không hội tụ về lý thuyết dầm thông thường và khi áp dụng vào bài toán tấm, nó cũng không hội tụ về lý thuyết tấm thông thường (lý thuyết tấm Kierchhoff, [36, trg 71], [33, trg 404]. Phương hướng chung để khắc phục thiếu sót vừa nêu là bổ sung th $\acute{a}$ m các nút xét lực cắt  $Q$  trong các phần tử dầm hoặc phần tử tấm [33, 34, 36] hoặc dùng phần tử có hàm dạng là đa thức bậc thấp (bậc nhất) [39, trg 126].

Vấn đề tiếp theo phần cơ bản hàm dạng không bị hiện tượng biến dạng trượt bị khóa, shear locking, vấn đề liên tiếp tốc nghiệm cầu, [39]. Hình minh họa hiện nay về lý thuyết xét biến dạng trượt trong dầm và tấm là như trên.

Khác với các tác giả khác, trong [27, 28] lý thuyết xét biến dạng trượt được xây dựng trên cơ sở hai hàm chưa biết là hàm độ võng  $y$  và hàm lực cắt  $Q$ . Trong trường hợp này biến dạng trượt xác định theo

$$\gamma = \frac{\alpha Q}{GF} \quad (3.4)$$

$\alpha$  là hệ số xét sự phân bố không đều của ứng suất cắt tại trục dầm.

Góc xoay do momen uốn sinh ra bằng hiệu giữa góc xoay đường độ võng với góc xoay do lực cắt gây ra.

$$\theta = \frac{dy}{dx} - \gamma = \frac{dy}{dx} - \frac{\alpha Q}{GF} \quad (3.5)$$

Momen uốn sẽ bằng

$$M = -EJ \frac{d\theta}{dx} = EJ \left( -\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right) \quad (3.6)$$

Biến dạng uốn  $\chi$

$$\chi = -\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \quad (3.7)$$

Dựa trên lý thuyết này ta sẽ xây dựng phương trình cân bằng và các điều kiện biên của dầm như sau. Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss ta viết phiếm hàm lượng cường bức (chuyển động) như sau: (giả sử dầm có lực phân bố đều  $q$ ).

$$Z = \int_0^l M \chi dx + \int_0^l Q \gamma dx - \int_0^l q y dx \rightarrow Min \quad (3.8)$$

Các hàm độ võng  $y$ , hàm biến dạng trượt  $\gamma$  và hàm biến dạng uốn  $\chi$  là các đại lượng biến phân, nghĩa là điều kiện cần và đủ để hệ ở trạng thái cân bằng là

$$\delta Z = \int_0^l M \delta \chi dx + \int_0^l Q \delta \gamma dx - \int_0^l q \delta y dx = 0$$

$$\text{Hay } Z = \int_0^l M \delta \left[ -\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right] dx + \int_0^l Q \delta \left[ \frac{\alpha Q}{GF} \right] dx - \int_0^l q \delta [y] dx = 0 \quad (3.9)$$

Trong phương trình tích phân (2.9) hai đại lượng cần tìm là  $y(x)$  và  $Q(x)$  do đó có thể tách ra thành hai phương trình sau:

$$\int_0^l M \delta \left[ -\frac{d^2 y}{dx^2} \right] dx - \int_0^l q \delta [y] dx = 0 \quad (3.10)$$

$$\int_0^l M \delta \left[ \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right] dx + \int_0^l Q \delta \left[ \frac{\alpha Q}{GF} \right] dx = 0 \quad (3.11)$$

Lấy tích phân từng phần phương trình (3.10)

$$\int_0^l M \delta \left[ -\frac{d^2 y}{dx^2} \right] dx = - \int_0^l M d \left( \delta \left[ \frac{dy}{dx} \right] \right) dx = -M \delta \left[ \frac{dy}{dx} \right] \Big|_0^l + \int_0^l \frac{dM}{dx} \delta \left[ \frac{dy}{dx} \right] dx$$

Tích phân từng phần thành phần cuối của biểu thức trên ta có

$$\int_0^l M \delta \left[ -\frac{d^2 y}{dx^2} \right] dx = -M \delta \left[ \frac{dy}{dx} \right] \Big|_0^l + \frac{dM}{dx} \delta [y] \Big|_0^l - \int_0^l \frac{d^2 M}{dx^2} \delta [y] dx$$

Phương trình (3.10) sau khi lấy tích phân từng phần có dạng

$$-M \delta \left[ \frac{dy}{dx} \right] \Big|_0^l + \frac{dM}{dx} \delta [y] \Big|_0^l - \int_0^l \left( \frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) \delta [y] dx = 0 \quad (3.12)$$

Bởi vì các đại lượng  $\delta [y]$  và  $\delta \left[ \frac{dy}{dx} \right]$  là nhỏ và bất kỳ nên từ (2.12) ta có

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + q = 0 \quad (3.12a)$$

$$-M\delta \left[ \frac{dy}{dx} \right]_0^l = 0 \quad (3.12b)$$

$$\frac{dM}{dx} \delta[y]_0^l = 0 \quad (3.12c)$$

Tích phân từng phần phương trình (3.11):

$$\int_0^l M\delta \left[ \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right] dx = \int_0^l M d \left( \delta \left[ \frac{\alpha Q}{GF} \right] \right) dx = M \left( \delta \left[ \frac{\alpha Q}{GF} \right] \right)_0^l - \int_0^l \frac{dM}{dx} \delta \left[ \frac{\alpha Q}{GF} \right] dx$$

Sau khi lấy tích phân từng phần

$$M \left( \delta \left[ \frac{\alpha Q}{GF} \right] \right)_0^l + \int_0^l \left( -\frac{dM}{dx} + Q \right) \delta \left[ \frac{\alpha Q}{GF} \right] dx = 0 \quad (3.13)$$

Bởi vì biến phân  $\delta \left[ \frac{\alpha Q}{GF} \right]$  là nhỏ và bất kỳ nên từ (2.13) ta có

$$-\frac{dM}{dx} + Q = 0 \quad (2.13a)$$

$$M\delta \left[ \frac{\alpha Q}{GF} \right]_0^l = 0 \quad (2.13b)$$

Sử dụng công thức (3.6), hai phương trình vi phân cân bằng của dầm (3.12a) và (3.13a) có dạng.

$$EJ \left[ \frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{\alpha}{GF} \frac{d^3 Q}{dx^3} \right] = q \quad (2.14a)$$

$$EJ \left[ \frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{\alpha}{GF} \frac{d^2 Q}{dx^2} \right] = Q \quad (2.15a)$$

Phương trình (3.14a) và (3.15a) có thể viết lại dưới dạng

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{\alpha h^2}{6} \frac{d^3 Q}{dx^3} = q \quad (2.14b)$$

$$EJ \frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{\alpha h^2}{6} \frac{d^2 Q}{dx^2} = Q \quad (2.15b)$$

Để nhận được các điều kiện biên của dầm thì kết hợp (3.12b) và (3.13b) ta có

$$M\delta \left[ -\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha Q}{GF} \right] \Big|_0^l = 0 \quad (3.16)$$

Chú ý tới phương trình (3.13a), phương trình (3.12c) viết lại như sau

$$Q\delta[y] \Big|_0^l = 0 \quad (3.17)$$

Tóm lại, lý thuyết xét biến dạng trượt cho ta hai phương trình vi phân (3.14) và (3.15) đối với hai hàm  $y$  và  $Q$ : phương trình (3.14) là phương trình vi phân cân bằng giữa nội lực và ngoại lực, phương trình (3.15) là phương trình liên hệ giữa mômen uốn và lực cắt. Các phương trình (3.16) và (3.17) là các điều kiện biên ở hai đầu thanh.

Ta xét điều kiện biên (3.16)

Nếu như tại  $x=0$  hoặc  $x=l$ , góc xoay  $\theta$  do mômen uốn gây ra có biến phân

$$\delta\theta = \delta \left[ -\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha Q}{GF} \right] \Big|_0^l \neq 0 \text{ thì } M \Big|_0^l = 0 \rightarrow \text{liên kết khớp} \quad (3.18a)$$

Nếu như góc xoay  $\theta$  không có biến phân

$$\delta\theta = \delta \left[ -\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha Q}{GF} \right] \Big|_0^l = 0 \text{ thì } M \Big|_0^l \text{ bất kỳ} \rightarrow \text{liên kết ngàm} \quad (3.18b)$$

Đối với điều kiện (3.17), nếu như chuyển vị  $y$  tại  $x=0$  hoặc  $x=l$  có biến phân.

$$\delta[y] \Big|_0^l \neq 0 \text{ thì } Q \Big|_0^l = 0, \rightarrow \text{không có gối tựa} \quad (3.18c)$$

Nếu như  $\delta[y] \Big|_0^l = 0$  thì  $Q \Big|_0^l$  bất kỳ,  $\rightarrow$  liên kết gối tựa  $\quad (3.18d)$

Khi không xét biến dạng trượt,  $G \rightarrow \infty$  hoặc  $h \rightarrow 0$  thì các phương trình (3.14) và (3.15) cũng như các phương trình về điều kiện biên (3.16) và (3.17) hoặc (3.18) đều dẫn về lý thuyết dầm Euler- Bernoulli. Cho nên có thể nói lý thuyết



xét biến dạng trượt nêu trên (xem hàm  $y$  và hàm  $Q$  là hai hàm ch-a biốt) là lý thuyết đầy đủ về dầm.

Cuối cùng cần lưu ý rằng khi xét tính liên tục về góc xoay giữa hai đoạn dầm là nói đến tính liên tục của góc xoay do mômen gây ra xác định theo công thức (3.5), không phải liên tục của góc xoay  $\frac{dy}{dx}$ .

### **Hệ số $\alpha$**

Hệ số  $\alpha$  là hệ số tập trung ứng suất cắt tại trục dầm.

Đối với tiết diện chữ nhật  $\alpha=1.5$ , đối với tiết diện tròn  $\alpha=4/3$ . Tuy nhiên khi xét biến dạng trượt các trị trên thay đổi tương ứng bằng 1.2 và 1.11 [31, trg 132, 60, trg 492]. Trong tính toán sau này tác giả dùng hệ số  $\alpha=1.2$  đối với tiết diện chữ nhật. Phương pháp chung để xác định hệ số  $\alpha$  là cân bằng tổng theo chiều cao dầm công của ứng suất cắt thực hiện trên biến dạng trượt tương ứng với công lực cắt thực hiện trên biến dạng trượt tại trục dầm, vấn đề này đã được nhiều tác giả nghiên cứu [31] [33, trg 400].

### **3.2. Bài toán dầm có xét biến dạng trượt**

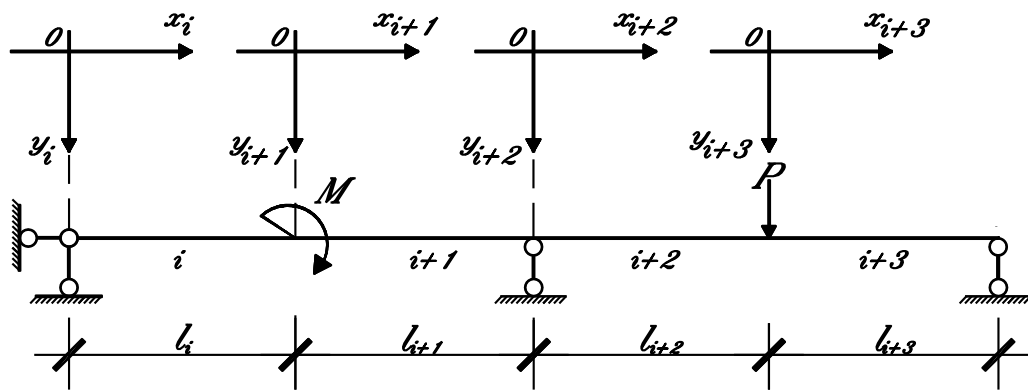
Dầm là kết cấu làm việc chịu uốn. Các đại lượng biến phân theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss là biến dạng và chuyển vị cho nên để tính dầm trước tiên cần giả định dạng đường độ võng của các đoạn của dầm, (thí dụ, theo đa thức) hoặc rời rạc đường độ võng theo phương pháp phân tử hữu hạn hoặc theo phương pháp sai phân hữu hạn. Như vậy, khi giải trực tiếp phiếm hàm lượng cường bức  $Z$  thì các ẩn của bài toán là:

- các hệ số của hàm xấp xỉ ( ví dụ, của đa thức xấp xỉ ) hoặc
  - chuyển vị tại các điểm của sai phân hữu hạn hoặc
  - chuyển vị và góc xoay tại hai nút của phân tử hữu hạn
- sẽ là các đại lượng biến phân (các biến độc lập) của bài toán.

Gọi  $y_i(x)$  là đường độ võng của đoạn thứ  $i$  nào đó của dầm hoặc khung với trục  $x$  trùng với trục dầm,  $EJ_i$  là độ cứng uốn của nó,  $\chi_i$  là biến dạng uốn. Theo (3.6, 3.7) viết cho đoạn thứ  $i$  của dầm hoặc khung, ta có:

$$EJ_i = \frac{Ebh^3}{12}, \chi_i = -\frac{d^2 y_i}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_i}{dx}, M_i = EJ_i \cdot \chi_i = EJ_i \left( -\frac{d^2 y_i}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_i}{dx} \right) \quad (3.7a)$$

ở đây  $E$  là môđun đàn hồi vật liệu dầm,  $b$  và  $h$  là chiều rộng và chiều cao tiết diện đoạn dầm. Tại điểm nối đoạn  $i$  và đoạn  $(i+1)$  chuyển vị và góc xoay hai đoạn phải bằng nhau (điều kiện liên tục), tại gối tựa chuyển vị bằng không, nếu là ngàm thì góc xoay cũng bằng không (hình 3.1).



**Hình 3.1 Sơ đồ phần tử, nút và tọa độ các đoạn thanh của dầm liên tục**

Biết được quan hệ (3.7a) thì dễ dàng xây dựng bài toán kết cấu chịu uốn có xét biến dạng trượt theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss.

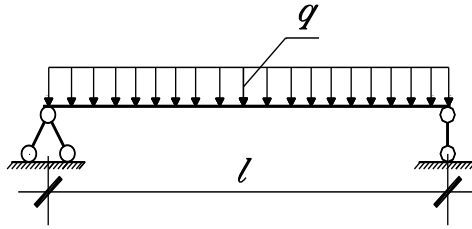
Khi giải bài toán cụ thể cần xét điều kiện động học của dầm. Do xem lực cắt  $Q$  là đại lượng chưa biết nên ngoài việc giả thiết đường độ võng  $y$  của dầm, cần giả thiết dạng phân bố lực cắt  $Q$ . Những ví dụ trình bày dưới đây nhằm minh họa cho phương pháp xét biến dạng trượt theo phương pháp của biểu thức (3.8).

### 3.3. Các ví dụ tính toán

#### 3.3.1. Tính toán dầm một nhịp

##### *Ví dụ 3.1: Dầm đơn giản*

Xác định nội lực và chuyển vị của dầm đơn giản chiều dài nhịp  $l$ , độ cứng uốn  $EJ$ , chịu tải phân bố đều  $q$ , hình 3.2. Tiết diện dầm chữ nhật, có chiều cao  $h$ , hệ số ứng suất trượt  $\alpha = 1.2$



**Hình 3.2. Dầm đơn giản**

Giả thiết đường độ võng  $y_1$  và đường lực cắt  $Q_1$  của dầm có dạng đa thức sau:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \\ Q_1 &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Trong đó:  $a_i(i=1\div 4)$ ,  $b_i(i=0\div 4)$ , là các ẩn của bài toán. Theo các biểu thức từ (3.4) đến (3.7) tính được: Biến dạng trượt  $\gamma$ ; góc xoay  $\theta$ ; biến dạng uốn  $\chi$  và momen uốn  $M$ , cụ thể là:

$$\gamma_1 = \frac{\alpha Q_1}{GF}; \quad \theta_1 = \frac{dy_1}{dx} - \gamma_1 = \frac{dy_1}{dx} - \frac{\alpha Q_1}{GF};$$

$$\chi_1 = -\frac{d^2y_1}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_1}{dx}; \quad M_{x1} = -EJ\chi_1 = EJ \left( -\frac{d^2y_1}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_1}{dx} \right)$$

Trong đó:  $\alpha$  là hệ số xét sự phân bố không đều của ứng suất cắt tại trục dầm;  $GF$  là độ cứng cắt của dầm

$$GF = \frac{E}{2} F = \frac{6EJ}{h^2}$$

Lượng cưỡng bức theo (3.8) được viết như sau:

$$Z = \int_0^l M_{x1} \chi_1 dx + \int_0^l Q_1 \gamma_1 dx - \int_0^l qy_1 dx \rightarrow Min \quad (b)$$

Hàm độ võng  $y$  thoả mãn điều kiện chuyển vị bằng không tại  $x=0$ , phải xét thêm các điều kiện: Momen tại đầu dầm (tại  $x=0$ ) bằng không; chuyển vị bằng không tại gối phải của dầm (tại  $x=l$ ) và Momen tại cuối dầm (tại  $x=l$ ) bằng không:

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= EJ \left( -\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_1}{dx} \right) \Big|_{x=0} = 0 \\ g_2 &= y_1 \Big|_{x=l} = 0; \\ g_3 &= EJ \left( -\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_1}{dx} \right) \Big|_{x=l} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Đưa bài toán tìm cực trị (b) với các ràng buộc (c) về bài toán cực trị không ràng buộc bằng cách xây dựng phiếm hàm mở rộng Lagrange F như sau:

$$F = Z + \sum_{k=1}^3 \lambda_k g_k \rightarrow \text{Min}$$

với  $\lambda_k (k=1 \div 3)$  là thừa số Lagrange cũng là các ẩn của bài toán. Như vậy có tổng cộng 12 ẩn (4 hệ số  $a_i$ , 5 hệ số  $b_i$  và  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ). Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss xem các biến dạng uốn là độc lập với mômen tác dụng cho nên điều kiện cực trị của phiếm hàm mở rộng F là:

$$\left. \begin{aligned} h_i &= \int_0^{l_1} [M_{x1}] \frac{\partial}{\partial a_i} (\chi_1) dx + \frac{\partial}{\partial a_i} \sum_{k=1}^3 (g_k \lambda_k) - \int_0^{l_1} [q] \frac{\partial}{\partial a_i} (y) = 0; a_i (i=1, 2, 3, 4) \\ f_i &= \int_0^{l_1} [M_{x1}] \frac{\partial}{\partial b_i} (\chi_1) dx + \frac{\partial}{\partial b_i} \sum_{k=1}^3 (g_k \lambda_k) + \int_0^{l_1} [Q_1] \frac{\partial}{\partial b_i} (\gamma_1) dx = 0; b_i (i=0, 1, 2, 3, 4) \\ u_i &= \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \sum_{k=1}^3 (g_k \lambda_k) = 0; \quad k=1, 2, 3 \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

nhận được 12 phương trình bậc nhất để xác định 12 ẩn số. Giải các phương trình trên ta nhận được kết quả tính đường độ võng  $y_1$  và lực cắt  $Q_1$  với 5 tỉ lệ  $\frac{h}{l}$  như

sau:

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{100} \quad y_1 = \frac{12503}{300000} \frac{ql^3}{EJ} x - \frac{1}{100000} \frac{ql^2}{EJ} x^2 - \frac{1}{12} \frac{ql}{EJ} x^3 + \frac{1}{24} \frac{q}{EJ} x^4$$

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{10} \quad y_1 = \frac{16}{375} \frac{ql^3}{EJ} x - \frac{1}{1000} \frac{ql^2}{EJ} x^2 - \frac{1}{12} \frac{ql}{EJ} x^3 + \frac{1}{24} \frac{q}{EJ} x^4$$

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{5} \quad y_1 = \frac{137}{3000} \frac{ql^3}{EJ} x - \frac{1}{250} \frac{ql^2}{EJ} x^2 - \frac{1}{12} \frac{ql}{EJ} x^3 + \frac{1}{24} \frac{q}{EJ} x^4$$

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{3} \quad y_1 = \frac{19}{360} \frac{ql^3}{EJ} x - \frac{1}{90} \frac{ql^2}{EJ} x^2 - \frac{1}{12} \frac{ql}{EJ} x^3 + \frac{1}{24} \frac{q}{EJ} x^4$$

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{2} \quad y_1 = \frac{1}{15} \frac{ql^3}{EJ} x - \frac{1}{40} \frac{ql^2}{EJ} x^2 - \frac{1}{12} \frac{ql}{EJ} x^3 + \frac{1}{24} \frac{q}{EJ} x^4$$

**Bảng 1: Độ võng, mômen lớn nhất tại giữa dầm, lực cắt lớn nhất tại đầu dầm**

Tỉ số h/l	Q <sub>1</sub>	y <sub>1max</sub>	M <sub>max</sub>
1/100	0.5ql - qx	0.013 $\frac{ql^4}{EJ}$	$\frac{1}{8} ql^2$
1/10	0.5ql - qx	0.01333333 $\frac{ql^4}{EJ}$	$\frac{1}{8} ql^2$
1/5	0.5ql - qx	0.014 $\frac{ql^4}{EJ}$	$\frac{1}{8} ql^2$
1/3	0.5ql - qx	0.0158 $\frac{ql^4}{EJ}$	$\frac{1}{8} ql^2$
1/2	0.5ql - qx	0.0193 $\frac{ql^4}{EJ}$	$\frac{1}{8} ql^2$

Từ kết quả tính thấy rằng dầm đơn giản chịu tải đối xứng, xét biến dạng trượt không làm thay đổi nội lực mo-men và lực cắt, chỉ làm thay đổi đường độ võng của dầm. Độ võng lớn nhất  $y_{\max}$  ở giữa nhịp có thể tăng 1.5 lần khi chiều cao dầm lớn. Đối với bài toán tính dầm đơn giản chịu tải đối xứng, xét biến dạng trượt không làm thay đổi nội lực mo-men và lực cắt, hình 2, chỉ làm thay đổi đường độ võng của dầm.

**Khi không xét biến dạng trượt (cho  $h/l=1/1000$ ), ta có:**

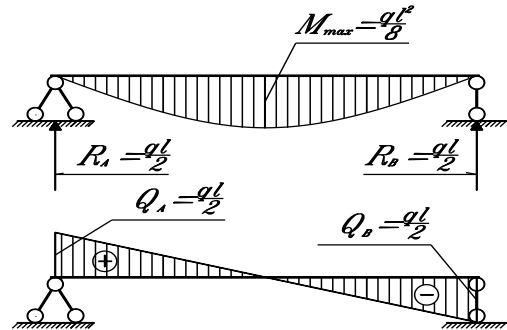
- Hàm đường độ võng của dầm đơn giản

$$y(x) = \frac{1}{24} \frac{ql^3}{EJ} x - \frac{1}{10000000} \frac{ql^2}{EJ} x^2 - \frac{1}{12} \frac{ql}{EJ} x^3 + \frac{1}{24} \frac{q}{EJ} x^4$$

- Tại  $x=l/2$  có:  $y(x)_{\max} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}$

- Hàm momen uốn và hàm lực cắt của dầm

$$M(x) = \frac{ql}{2} x - \frac{q}{2} x^2; \quad Q(x) = \frac{ql}{2} - qx$$



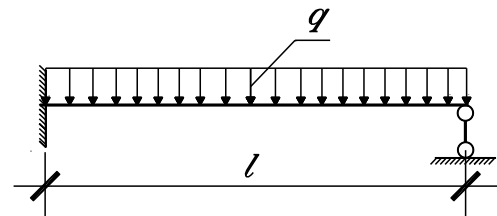
**Hình 3.3. Biểu đồ M và Q**

- Biểu đồ mômen uốn và lực cắt trong trường hợp không xét biến dạng trượt có dạng như, hình 3.3.

Ở trên ta đã xét bài toán dầm tĩnh định chịu tải trọng phân bố đều và thấy rằng việc kể thêm biến dạng trượt không làm thay đổi nội lực trong thanh là hoàn toàn chính xác vì nội lực của kết cấu tĩnh định không phụ thuộc vào độ cứng của dầm. Để thấy rõ ảnh hưởng của biến dạng trượt đến nội lực của dầm ta xét dầm siêu tĩnh sau:

**Ví dụ 3.2: Dầm đầu ngàm đầu khớp**

Xác định nội lực và chuyển vị của dầm siêu tĩnh đầu ngàm – đầu khớp chiều dài nhịp  $l$ , độ cứng uốn  $EJ$ , chịu tải trọng phân bố đều  $q$ , hình 3.4. Tiết diện dầm chữ nhật, có chiều cao  $h$ , hệ số ứng suất trượt  $\alpha = 1.2$



**Hình 3.4. Dầm đầu ngàm-đầu khớp**

Giả thiết đường độ võng  $y_1$  và đường lực cắt  $Q_1$  của dầm có dạng đa thức sau:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \\ Q_1 &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Trong đó:  $a_i(i=1\div 4)$ ,  $b_i(i=0\div 4)$ , là các ẩn của bài toán. Theo các biểu thức từ (3.4) đến (3.7) tính được: Biến dạng trượt  $\gamma$ ; góc xoay  $\theta$ ; biến dạng uốn  $\chi$  và momen uốn  $M$ , cụ thể là:

$$\gamma_1 = \frac{\alpha Q_1}{GF}; \quad \theta_1 = \frac{dy_1}{dx} - \gamma_1 = \frac{dy_1}{dx} - \frac{\alpha Q_1}{GF};$$

$$\chi_1 = -\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_1}{dx}; \quad M_{x1} = -EJ\chi_1 = EJ \left( -\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_1}{dx} \right)$$

Trong đó:  $\alpha$  là hệ số xét sự phân bố không đều của ứng suất cắt tại trục dầm;  $GF$  là độ cứng cắt của dầm

$$GF = \frac{E}{2} F = \frac{6EJ}{h^2}$$

Lượng cưỡng bức theo (3.8) được viết như sau:

$$Z = \int_0^l M_{x1} \chi_1 dx + \int_0^l Q_1 \gamma_1 dx - \int_0^l q y_1 dx \rightarrow Min \quad (b)$$

Hàm độ võng  $y$  thoả mãn điều kiện chuyển vị bằng không tại  $x=0$ , phải xét thêm các điều kiện: Góc xoay tại đầu dầm (tại  $x=0$ ) bằng không; chuyển vị bằng không tại gối phải của dầm (tại  $x=l$ ) và Momen tại cuối dầm (tại  $x=l$ ) bằng không:

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= \theta_1 = \frac{dy_1}{dx} - \gamma_1 = \frac{dy_1}{dx} - \frac{\alpha Q_1}{GF} \Big|_{x=0} = 0 \\ g_2 &= y_1 \Big|_{x=l} = 0; \\ g_3 &= EJ \left( -\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_1}{dx} \right) \Big|_{x=l} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

ở đây còn phải xét thêm điều kiện góc xoay bằng không tại ngàm ( tại  $x=0$ ). *Nói góc xoay của kết cấu chịu uốn là nói về góc xoay do mo-men uốn gây ra.* Trong trường hợp xét lực cắt thì góc xoay do mo-men gây ra xác định theo (3.5). Như vậy, so với ví dụ dầm tĩnh định, trong ví dụ này cần xét thêm ràng buộc là góc xoay bằng không tại ngàm (tại  $x=0$ ), không phải là  $dy/dx = 0$ , mà là

$$\frac{dy_1}{dx} - \alpha \frac{Q_1}{GF} = 0$$

Như vậy, do xét biến dạng trượt, đường đàn hồi tại ngàm được phép xoay một góc  $\alpha_{Q_1}/GF$ , ngược chiều với góc xoay của ngàm nói trên. Thêm ràng buộc cũng có nghĩa là thêm một ẩn là thừa số Lagrange. Phương pháp giải giống như ở ví dụ 3.1. Kết quả tính trình bày ngắn gọn như sau:

**Bảng 2: Độ võng lớn nhất, mômen tại đầu ngàm và lực cắt tại hai đầu dầm**

Tỉ số $h/l$	$Q_1$	$y_{1max}$	$M_{ngàm}$
1/100	$0.625ql - qx$	$0.0054ql^4/EJ$	$-0.125ql^2$
1/10	$0.6243ql - qx$	$0.00557ql^4/EJ$	$-0.1243ql^2$
1/5	$0.6221ql - qx$	$0.0066ql^4/EJ$	$-0.1221ql^2$
1/3	$0.61726ql - qx$	$0.0086ql^4/EJ$	$-0.1172ql^2$
1/2	$0.6087ql - qx$	$0.0125ql^4/EJ$	$-0.1087ql^2$

Từ kết quả tính ví dụ này thấy rằng xét biến dạng trượt không làm thay đổi đáng kể độ võng và nội lực của dầm có tỉ lệ  $h/l \leq 1/10$ . Khi tỉ lệ  $h/l$  lớn hơn thì xét biến dạng trượt làm thay đổi độ võng và nội lực của dầm theo xu hướng sau: độ võng  $y_{max}$  tại tọa độ  $x = 0.575 \cdot l$ , lớn nhất khoảng hai, ba lần so với trường hợp không xét biến dạng trượt, làm giảm (giá trị tuyệt đối) lực cắt và mô-men  $M_{ng}$  tại ngàm, làm tăng phản lực gối tựa khớp. Riêng mô-men  $m_{ng}$  tại ngàm có thể giảm trên 10%.

Tính ví dụ này nếu không dùng điều kiện (3.5) mà dùng điều kiện góc xoay tại ngàm bằng không như thường biết ( $dy/dx = 0$ ), cho kết quả sau

$$h = l/2 \quad Q = 0.718750ql - qx \quad y_{max} = 0.071614ql^4/EJ \quad m_{ng} = -0.21875ql^2$$

Ta thấy không những độ võng ở giữa nhịp tăng mạnh (có thể đạt hơn 10 lần) mà lực cắt và mô-men âm tại ngàm đều lớn hơn nhiều các giá trị của chúng khi không xét biến dạng trượt, phản lực gối tựa phải giảm. Xu hướng thay đổi nội lực này ngược với kết quả nhận được ở trên. Khó có thể nói kết quả này là hợp lý và đúng và sẽ dĩ có kết quả này là vì ở đây, tại ngàm dầm không có biến dạng xoay so với ngàm như trường hợp trên.

**Khi không xét biến dạng trượt (cho  $h/l=1/1000$ ), ta có:**

- Hàm đường độ võng của dầm cần tính



$$y(x) = \frac{6250003}{5000003000000} \frac{ql^3}{EJ} x + \frac{ql^2}{16EJ} x^2 - \frac{5ql}{48EJ} x^3 + \frac{q}{24EJ} x^4$$

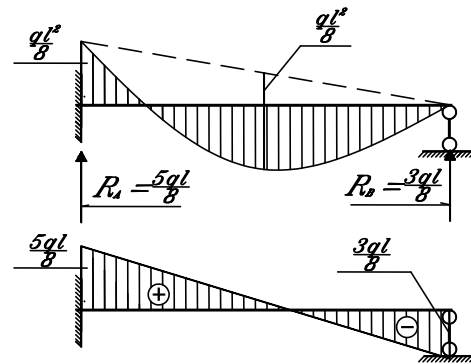
- Tại  $x=0.575*l$  có:  $y(x)_{\max} = \frac{1}{185} \frac{ql^4}{EJ}$

- Hàm momen uốn và hàm lực cắt của dầm

$$M(x) = -\frac{ql^2}{8} + \frac{5ql}{8}x - \frac{q}{2}x^2,$$

$$Q(x) = \frac{5ql}{8} - qx$$

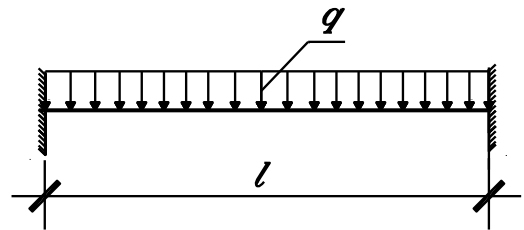
- Biểu đồ mômen uốn và lực cắt trong trường hợp không xét biến dạng trượt có dạng như, hình 3.5.



**Hình 3.5. Biểu đồ M và Q của dầm đầu ngàm – đầu khớp**

**Ví dụ 3.3: Dầm hai đầu ngàm**

Xác định nội lực và chuyển vị của dầm siêu tĩnh hai đầu ngàm, chiều dài nhịp  $l$ , độ cứng uốn  $EJ$ , chịu tải trọng phân bố đều  $q$ , hình 3.6. Tiết diện dầm chữ nhật, có chiều cao  $h$ , hệ số ứng suất trượt  $\alpha = 1.2$ .



**Hình 3.6. Dầm hai đầu ngàm**

Giả thiết đường độ võng  $y_1$  và đường lực cắt  $Q_1$  của dầm có dạng đa thức sau:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \\ Q_1 &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Trong đó:  $a_i(i=1\div 4)$ ,  $b_i(i=0\div 4)$ , là các ẩn của bài toán. Theo các biểu thức từ (3.4) đến (3.7) tính được: Biến dạng trượt  $\gamma$ ; góc xoay  $\theta$ ; biến dạng uốn  $\chi$  và momen uốn  $M$ , cụ thể là:

$$\gamma_1 = \frac{\alpha Q_1}{GF}; \quad \theta_1 = \frac{dy_1}{dx} - \gamma_1 = \frac{dy_1}{dx} - \frac{\alpha Q_1}{GF};$$

$$\chi_1 = -\frac{d^2y_1}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_1}{dx}; \quad M_{x1} = -EJ\chi_1 = EJ \left( -\frac{d^2y_1}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_1}{dx} \right)$$

Trong đó:  $\alpha$  là hệ số xét sự phân bố không đều của ứng suất cắt tại trục dầm;  
 $GF$  là độ cứng cắt của dầm

$$GF = \frac{E}{2} F = \frac{6EJ}{h^2}$$

Lượng cưỡng bức theo (3.8) được viết như sau:

$$Z = \int_0^l M_{x1} \chi_1 dx + \int_0^l Q_1 \gamma_1 dx - \int_0^l q y_1 dx \rightarrow \text{Min} \quad (\text{b})$$

Hàm độ võng  $y$  thoả mãn điều kiện chuyển vị bằng không tại  $x=0$ , phải xét thêm các điều kiện: Góc xoay tại hai đầu dầm (tại  $x=0$  và  $x=l$ ) bằng không; chuyển vị bằng không tại gối phải của dầm (tại  $x=l$ ):

$$\left. \begin{aligned} g_1 = \theta_1 = \frac{dy_1}{dx} - \gamma_1 = \frac{dy_1}{dx} - \frac{\alpha Q_1}{GF} \Big|_{x=0} &= 0 \\ g_2 = y_1 \Big|_{x=l} &= 0; \\ g_3 = \theta_1 = \frac{dy_1}{dx} - \gamma_1 = \frac{dy_1}{dx} - \frac{\alpha Q_1}{GF} \Big|_{x=l} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{c})$$

Bài toán tính ví dụ này dẫn về tìm cực tiểu của lượng cưỡng bức  $Z$  (biểu thức (b)) thoả mãn ba ràng buộc của biểu thức (c). Kết quả tính được như sau :

$$\underline{h/l = 1/100}$$

$$y_1 = \frac{1}{100000} \frac{ql^3 x}{EJ} + \frac{1}{24} \frac{ql^2 x^2}{EJ} - \frac{1}{12} \frac{qlx^3}{EJ} + \frac{1}{24} \frac{qx^4}{EJ}$$

$$Q = \frac{1}{2} ql - qx, \quad y_{1\max} = 0.0026 \frac{ql^4}{EJ}, \quad M_{\max} = \frac{1}{24} ql^2, \quad M_{ng} = -\frac{1}{12} ql^2$$

$$\underline{h/l = 1/10}$$

$$y = \frac{1}{1000} \frac{ql^3 x}{EJ} + \frac{61}{1500} \frac{ql^2 x^2}{EJ} - \frac{1}{12} \frac{qlx^3}{EJ} + \frac{1}{24} \frac{qx^4}{EJ}$$

$$Q = \frac{1}{2} ql - qx, \quad y_{1\max} = 0.0029 \frac{ql^4}{EJ}, \quad M_{\max} = \frac{1}{24} ql^2, \quad M_{ng} = -\frac{1}{12} ql^2$$

$$\underline{h/l = 1/5}$$

$$y = \frac{1}{250} \frac{ql^3 x}{EJ} + \frac{113}{3000} \frac{ql^2 x^2}{EJ} - \frac{1}{12} \frac{qlx^3}{EJ} + \frac{1}{24} \frac{qx^4}{EJ}$$

$$Q = \frac{1}{2}ql - qx, \quad y_{1\max} = 0.0036 \frac{ql^4}{EJ}, \quad M_{\max} = \frac{1}{24}ql^2, \quad M_{ng} = -\frac{1}{12}ql^2$$

$$\underline{h/l = 1/3}$$

$$y_1 = \frac{1}{90} \frac{ql^3x}{EJ} + \frac{11}{360} \frac{ql^2x^2}{EJ} - \frac{1}{12} \frac{qlx^3}{EJ} + \frac{1}{24} \frac{qx^4}{EJ}$$

$$Q = \frac{1}{2}ql - qx, \quad y_{1\max} = 0.0054 \frac{ql^4}{EJ}, \quad M_{\max} = \frac{1}{24}ql^2, \quad M_{ng} = -\frac{1}{12}ql^2$$

Kết quả tính cho thấy độ võng  $y_{1\max}$  ở giữa nhịp tăng khi tỉ lệ  $h/l$  của dầm tăng và có thể đạt hơn hai lần giá trị của nó khi không xét biến dạng trượt, nhưng lực cắt và mô-men uốn trong dầm lại không thay đổi. Không có sự phân bố lại của nội lực là do nội lực trong dầm ngàm hai đầu chịu lực phân bố đều có phân bố đối xứng (lực mô-men) hoặc phản đối xứng (lực cắt) qua điểm giữa của dầm.

**Bảng 3: Độ võng lớn nhất tại giữa dầm, mômen tại hai đầu ngàm, mômen lớn nhất tại giữa dầm và lực cắt tại hai đầu dầm**

Tỉ số $h/l$	$y_{1\max}$	$M_{\max}$	$M_{ng\grave{a}m}$	$Q_{ng\grave{a}m}$
1/100	$0.0026 \frac{ql^4}{EJ}$	$\frac{1}{24} ql^2$	$-\frac{1}{12} ql^2$	$\frac{1}{2} ql - qx$
1/10	$0.0029 \frac{ql^4}{EJ}$	$\frac{1}{24} ql^2$	$-\frac{1}{12} ql^2$	$\frac{1}{2} ql - qx$
1/5	$0.0036 \frac{ql^4}{EJ}$	$\frac{1}{24} ql^2$	$-\frac{1}{12} ql^2$	$\frac{1}{2} ql - qx$
1/3	$0.0054 \frac{ql^4}{EJ}$	$\frac{1}{24} ql^2$	$-\frac{1}{12} ql^2$	$\frac{1}{2} ql - qx$

Từ kết quả tính ví dụ này thấy rằng xét biến dạng trượt không làm thay đổi đáng kể độ võng và nội lực của dầm có tỉ lệ  $h/l \leq 1/10$ .

**Khi không xét biến dạng trượt (cho  $h/l=1/1000$ ), ta có:**

- Hàm đường độ võng của dầm cần tính

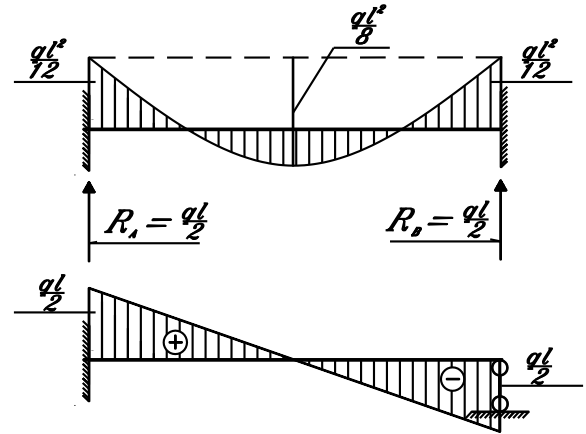
$$y(x) = \frac{1}{10000000} \frac{ql^3}{EJ} x + \frac{ql^2}{24EJ} x^2 - \frac{ql}{12EJ} x^3 + \frac{q}{24EJ} x^4$$

- Tại  $x=0.5*l$  có:  $y(x)_{\max} = \frac{ql^4}{384EJ}$
- Hàm momen uốn và hàm lực cắt của dầm

$$M(x) = -\frac{ql^2}{12} + \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2;$$

$$Q(x) = \frac{ql}{2} - qx$$

- Biểu đồ mômen uốn và lực cắt trong trường hợp không xét biến dạng trượt có dạng như, hình 3.7.

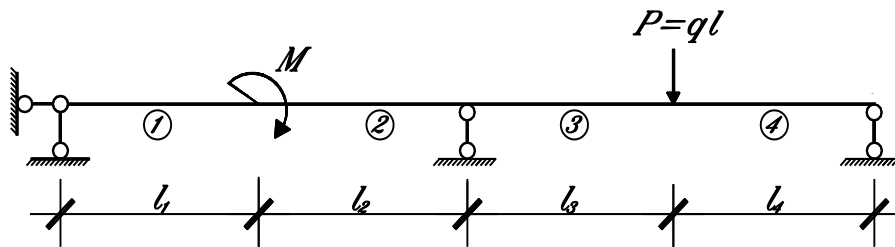


**Hình 3.7. Biểu đồ M và Q của dầm hai đầu ngàm**

### 3.3.2. Tính toán dầm liên tục

#### Ví dụ 3.4: Dầm liên tục hai nhịp

Xác định nội lực và chuyển vị của dầm liên tục hai nhịp, độ cứng uốn  $EJ=Const$ , chịu tải M và P như hình 3.8. Tiết diện dầm chữ nhật, có chiều cao  $h$ , hệ số ứng suất trượt  $\alpha = 1.2$ .



**Hình 3.8. Dầm liên tục hai nhịp**

Chia dầm thành bốn đoạn với các đoạn có chiều dài tương ứng là  $l_1=l_2=l_3=l_4=l/2$

Giả thiết đường độ võng  $y_1, y_2, y_3, y_4$  và đường lực cắt  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ , của dầm có dạng đa thức như sau:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4; & Q_1 &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 \\ y_2 &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4; & Q_2 &= d_0 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3 + d_4x^4 \\ y_3 &= e_1x + e_2x^2 + e_3x^3 + e_4x^4; & Q_3 &= i_0 + i_1x + i_2x^2 + i_3x^3 + i_4x^4 \\ y_4 &= v_0 + v_1x + v_2x^2 + v_3x^3 + v_4x^4; & Q_4 &= w_0 + w_1x + w_2x^2 + w_3x^3 + w_4x^4 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Trong đó:  $a_i(i=1\div 4)$ ,  $b_i(i=0\div 4)$ ,  $c_i(i=0\div 4)$ ,  $d_i(i=0\div 4)$ ,  $e_i(i=1\div 4)$ ,  $i_i(i=0\div 4)$ ,  $v_i(i=0\div 4)$ ,  $w_i(i=0\div 4)$ , là các ẩn của bài toán. Theo các biểu thức từ (3.4) đến (3.7) tính được: Biến dạng trượt  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ ; góc xoay  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ ; biến dạng uốn  $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$ , và momen uốn  $M_{x1}, M_{x2}, M_{x3}, M_{x4}$ , tương ứng với các đoạn 1, 2, 3 và 4, cụ thể là:

$$\gamma_i = \frac{\alpha Q_i}{GF}; \quad \theta_i = \frac{dy_i}{dx} - \gamma_i = \frac{dy_i}{dx} - \frac{\alpha Q_i}{GF}; \quad \text{với } (i=1\div 4)$$

$$\chi_i = -\frac{d^2 y_i}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_i}{dx}; \quad M_{xi} = -EJ\chi_i = EJ \left( -\frac{d^2 y_i}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_i}{dx} \right)$$

Trong đó:  $\alpha$  là hệ số xét sự phân bố không đều của ứng suất cắt tại trục dầm;  $GF$  là độ cứng cắt của dầm

$$GF = \frac{E}{2} F = \frac{6EJ}{h^2}$$

Lượng cưỡng bức theo (3.8) được viết như sau:

$$Z = \left\{ \begin{array}{l} \int_0^h M_{x1} \chi_1 dx + \int_0^h Q_1 \gamma_1 dx - M\theta_{1(x=l_1)} + \int_0^{l_2} M_{x2} \chi_2 dx + \int_0^{l_2} Q_2 \gamma_2 dx + \\ + \int_0^{l_3} M_{x3} \chi_3 dx + \int_0^{l_3} Q_3 \gamma_3 dx - Py_{3(x=l_3)} + \int_0^{l_4} M_{x4} \chi_4 dx + \int_0^{l_4} Q_4 \gamma_4 dx \end{array} \right\} \rightarrow Min \quad (b)$$

Hàm độ võng  $y_i$  phải thoả mãn các điều kiện ràng buộc sau:

$$\left. \begin{array}{l} g_1 = EJ \left( -\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_1}{dx} \right) \Big|_{x=0} = 0; \quad g_2 = \left( \frac{dy_1}{dx} - \frac{\alpha Q_1}{GF} \right) \Big|_{x=l_1} = \left( \frac{dy_2}{dx} - \frac{\alpha Q_2}{GF} \right) \Big|_{x=0} \\ g_3 = y_1 \Big|_{x=l_1} = y_2 \Big|_{x=0}; \quad g_4 = y_2 \Big|_{x=l_2} = 0; \quad g_5 = \left( \frac{dy_2}{dx} - \frac{\alpha Q_2}{GF} \right) \Big|_{x=l_2} = \left( \frac{dy_3}{dx} - \frac{\alpha Q_3}{GF} \right) \Big|_{x=0} \\ g_6 = \left( \frac{dy_3}{dx} - \frac{\alpha Q_3}{GF} \right) \Big|_{x=l_3} = \left( \frac{dy_4}{dx} - \frac{\alpha Q_4}{GF} \right) \Big|_{x=0}; \quad g_7 = y_3 \Big|_{x=l_3} = y_4 \Big|_{x=0}; \quad g_8 = y_4 \Big|_{x=l_4} = 0 \\ g_9 = EJ \left( -\frac{d^2 y_4}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_4}{dx} \right) \Big|_{x=l_4} = 0 \end{array} \right\} \quad (c)$$

Đưa bài toán tìm cực trị (b) với các ràng buộc (c) về bài toán cực trị không ràng buộc bằng cách xây dựng phiếm hàm mở rộng Lagrange F như sau:

$$F = Z + \sum_{k=1}^9 \lambda_k g_k \rightarrow \text{Min} \quad (\text{d})$$

với  $\lambda_k (k=1 \div 9)$  là các thừa số Lagrange cũng là các ẩn của bài toán. Như vậy có tổng cộng 47 ẩn (4 hệ số  $a_i$ , 5 hệ số  $b_i$ , 5 hệ số  $c_i$ , 5 hệ số  $d_i$ , 4 hệ số  $e_i$ , 5 hệ số  $i_i$ , 5 hệ số  $v_i$ , 5 hệ số  $w_i$  và 9 thừa số  $\lambda_i$ ). Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss xem các biến dạng uốn là độc lập với mômen tác dụng cho nên điều kiện cực trị của phiếm hàm mở rộng F là:

$$\left. \begin{aligned} h_i &= \int_0^{l_1} [M_{x1}] \frac{\partial}{\partial a_i} (\chi_1) dx + \frac{\partial}{\partial a_i} \sum_{k=1}^9 (g_k \lambda_k) - M \frac{\partial}{\partial a_i} (\theta_1) \Big|_{x=l_1} = 0; \quad a_i (i=1, 2, 3, 4) \\ f_i &= \int_0^{l_1} [M_{x1}] \frac{\partial}{\partial b_i} (\chi_1) dx + \frac{\partial}{\partial b_i} \sum_{k=1}^9 (g_k \lambda_k) + \int_0^{l_1} [Q_1] \frac{\partial}{\partial b_i} (\gamma_1) dx - M \frac{\partial}{\partial b_i} (\theta_1) \Big|_{x=l_1} = 0; \\ & b_i (i=0, 1, 2, 3, 4) \\ k_i &= \int_0^{l_2} [M_{x2}] \frac{\partial}{\partial c_i} (\chi_2) dx + \frac{\partial}{\partial c_i} \sum_{k=1}^9 (g_k \lambda_k) = 0; \quad c_i (i=0, 1, 2, 3, 4) \\ t_i &= \int_0^{l_2} [M_{x2}] \frac{\partial}{\partial d_i} (\chi_2) dx + \frac{\partial}{\partial d_i} \sum_{k=1}^9 (g_k \lambda_k) + \int_0^{l_2} [Q_2] \frac{\partial}{\partial d_i} (\gamma_2) dx = 0; \quad d_i (i=0, 1, 2, 3, 4) \end{aligned} \right\} \quad (\text{d1})$$

$$\left. \begin{aligned} h_{3i} &= \int_0^{l_3} [M_{x3}] \frac{\partial}{\partial e_i} (\chi_3) dx + \frac{\partial}{\partial e_i} \sum_{k=1}^9 (g_k \lambda_k) - P \frac{\partial}{\partial e_i} (y_3) \Big|_{x=l_3} = 0; \quad e_i (i=1, 2, 3, 4) \\ f_{3i} &= \int_0^{l_3} [M_{x3}] \frac{\partial}{\partial i_i} (\chi_3) dx + \frac{\partial}{\partial i_i} \sum_{k=1}^9 (g_k \lambda_k) + \int_0^{l_3} [Q_3] \frac{\partial}{\partial i_i} (\gamma_3) dx = 0; \quad i_i (i=0, 1, 2, 3, 4) \\ k_{4i} &= \int_0^{l_4} [M_{x4}] \frac{\partial}{\partial v_i} (\chi_4) dx + \frac{\partial}{\partial v_i} \sum_{k=1}^9 (g_k \lambda_k) = 0; \quad v_i (i=0, 1, 2, 3, 4) \\ t_{4i} &= \int_0^{l_4} [M_{x4}] \frac{\partial}{\partial w_i} (\chi_4) dx + \frac{\partial}{\partial w_i} \sum_{k=1}^9 (g_k \lambda_k) + \int_0^{l_4} [Q_4] \frac{\partial}{\partial w_i} (\gamma_4) dx = 0; \\ & w_i (i=0, 1, 2, 3, 4) \end{aligned} \right\} \quad (\text{d2})$$

nhận được 47 phương trình bậc nhất để xác định 47 ẩn số. Giải các phương trình trên ta nhận được kết quả tính đường độ võng  $y_i$  và lực cắt  $Q_i$  với 5 tỉ lệ  $\frac{h}{l}$  như sau:

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{100}$$

$$y_1 = -0.067 \frac{ql^3}{EJ} x + 0.1927 \frac{ql}{EJ} x^3$$

$$y_2 = -0.0098 \frac{ql^4}{EJ} + 0.0768 \frac{ql^3}{EJ} x - 0.2109 \frac{ql^2}{EJ} x^2 + 0.1927 \frac{ql}{EJ} x^3$$

$$y_3 = 0.0104 \frac{ql^3}{EJ} x + 0.0781 \frac{ql^2}{EJ} x^2 - 0.1094 \frac{ql}{EJ} x^3$$

$$y_4 = 0.0111 \frac{ql^4}{EJ} + 0.0065 \frac{ql^3}{EJ} x - 0.0859 \frac{ql^2}{EJ} x^2 + 0.0573 \frac{ql}{EJ} x^3$$

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{10}$$

$$y_1 = -0.0671 \frac{ql^3}{EJ} x + 0.1921 \frac{ql}{EJ} x^3$$

$$y_2 = -0.0095 \frac{ql^4}{EJ} + 0.077 \frac{ql^3}{EJ} x - 0.2119 \frac{ql^2}{EJ} x^2 + 0.1921 \frac{ql}{EJ} x^3$$

$$y_3 = 0.0127 \frac{ql^3}{EJ} x + 0.0762 \frac{ql^2}{EJ} x^2 - 0.1087 \frac{ql}{EJ} x^3$$

$$y_4 = 0.0118 \frac{ql^4}{EJ} + 0.0053 \frac{ql^3}{EJ} x - 0.0869 \frac{ql^2}{EJ} x^2 + 0.0579 \frac{ql}{EJ} x^3$$

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{5}$$

$$y_1 = -0.0651 \frac{ql^3}{EJ} x - 0.1901 \frac{ql}{EJ} x^3$$

$$y_2 = -0.0088 \frac{ql^4}{EJ} + 0.075 \frac{ql^3}{EJ} x - 0.2148 \frac{ql^2}{EJ} x^2 + 0.1901 \frac{ql}{EJ} x^3$$

$$y_3 = 0.0195 \frac{ql^3}{EJ} x + 0.0704 \frac{ql^2}{EJ} x^2 - 0.1068 \frac{ql}{EJ} x^3$$

$$y_4 = 0.014 \frac{ql^4}{EJ} + 0.0019 \frac{ql^3}{EJ} x - 0.0898 \frac{ql^2}{EJ} x^2 + 0.0599 \frac{ql}{EJ} x^3$$

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{3}$$

$$y_1 = -0.0609 \frac{ql^3}{EJ} x - 0.1859 \frac{ql}{EJ} x^3$$

$$y_2 = -0.0072 \frac{ql^4}{EJ} + 0.0785 \frac{ql^3}{EJ} x - 0.2212 \frac{ql^2}{EJ} x^2 + 0.1859 \frac{ql}{EJ} x^3$$

$$y_3 = 0.0352 \frac{ql^3}{EJ} x + 0.0576 \frac{ql^2}{EJ} x^2 - 0.1025 \frac{ql}{EJ} x^3$$

$$y_4 = 0.0192 \frac{ql^4}{EJ} - 0.0063 \frac{ql^3}{EJ} x - 0.0962 \frac{ql^2}{EJ} x^2 + 0.0641 \frac{ql}{EJ} x^3$$

**Bảng 4: Chuyển vị tại giữa nhịp một và nhịp hai**

Tỉ số h/l	$y_{12}$	$y_{32}$
1/100	$-0.0098 \frac{ql^4}{EJ}$	$0.0111 \frac{ql^4}{EJ}$
1/10	$-0.0095 \frac{ql^4}{EJ}$	$0.0118 \frac{ql^4}{EJ}$
1/5	$-0.0088 \frac{ql^4}{EJ}$	$0.0140 \frac{ql^4}{EJ}$
1/3	$-0.0072 \frac{ql^4}{EJ}$	$0.0192 \frac{ql^4}{EJ}$

**Bảng 5: Mô men uốn tại các đầu thanh**

Tỉ số h/l	$M_{11} = M_{42}$	$M_{12}$	$M_{21}$	$M_{22} = M_{31}$	$M_{32} = M_{41}$
1/100	0	$-0.5781ql^2$	$0.4219ql^2$	$-0.1562ql^2$	$0.1719ql^2$
1/10	0	$-0.5762ql^2$	$0.4238ql^2$	$-0.1523ql^2$	$0.1738ql^2$
1/5	0	$-0.5704ql^2$	$0.4296ql^2$	$-0.1409ql^2$	$0.1796ql^2$
1/3	0	$-0.5576ql^2$	$0.4424ql^2$	$-0.1152ql^2$	$0.1924ql^2$

**Bảng 6: Lực cắt tại các đầu thanh**

Tỉ số h/l	$Q_{11} = Q_{12} = Q_{21} = Q_{22}$	$Q_{31} = Q_{32}$	$Q_{42} = Q_{41}$
1/100	$-1.1562ql$	$0.6562ql$	$-0.3438ql$
1/10	$-1.1523ql$	$0.6523ql$	$-0.3477ql$
1/5	$-1.1409ql$	$0.6409ql$	$-0.3591ql$
1/3	$-1.1152ql$	$0.6152ql$	$-0.3848ql$



Khi không xét biến dạng trượt (cho  $h/l=1/1000$ ), ta có:

**Bảng 7: Chuyển vị tại giữa nhịp một và nhịp hai**

Tỉ số $h/l$	$y_{12}$	$y_{32}$
1/1000	$-0.0098 \frac{ql^4}{EJ}$	$0.0111 \frac{ql^4}{EJ}$

**Bảng 8: Mô men uốn tại các đầu thanh**

Tỉ số $h/l$	$M_{11} = M_{42}$	$M_{12}$	$M_{21}$	$M_{22} = M_{31}$	$M_{32} = M_{41}$
1/1000	0	$-0.5781ql^2$	$0.4219ql^2$	$-0.1562ql^2$	$0.1719ql^2$

**Bảng 9: Lực cắt tại các đầu thanh**

Tỉ số $h/l$	$Q_{11} = Q_{12} = Q_{21} = Q_{22}$	$Q_{31} = Q_{32}$	$Q_{42} = Q_{41}$
1/100	$-1.1562ql$	$0.6562ql$	$-0.3438ql$

**Bảng 10: So sánh độ võng lớn nhất của dầm liên tục hai nhịp trong hai trường hợp: không kể và có kể tới ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang.**

Tỉ số $h/l$	$y_{\max}$ của dầm khi không kể tới ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang	$y_{\max}$ của dầm khi có kể tới ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang	Chênh lệch độ võng (%)
1/100	$0.0111 \frac{ql^4}{EJ}$	$0.0111 \frac{ql^4}{EJ}$	0
1/10	$0.0111 \frac{ql^4}{EJ}$	$0.0118 \frac{ql^4}{EJ}$	5.9322

1/5	$0.0111 \frac{ql^4}{EJ}$	$0.0140 \frac{ql^4}{EJ}$	20.7142
1/3	$0.0111 \frac{ql^4}{EJ}$	$0.0192 \frac{ql^4}{EJ}$	42.1875

**Bảng 11: So sánh mô men nhỏ nhất (trên gối giữa) của dầm liên tục hai nhịp trong hai trường hợp: không kể và có kể tới ảnh hưởng của biến dạng trượt.**

Tỉ số h/l	$M_{\min}$ của dầm khi không kể tới ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang	$M_{\min}$ của dầm khi có kể tới ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang	Chênh lệch mô men gối (%)
1/100	$-0.1562ql^2$	$-0.1562ql^2$	0
1/10	$-0.1562ql^2$	$-0.1523ql^2$	2.4967
1/5	$-0.1562ql^2$	$-0.1409ql^2$	9.7951
1/3	$-0.1562ql^2$	$-0.1152ql^2$	26.2483

**Bảng 12: So sánh lực cắt lớn nhất (trên gối giữa) của dầm liên tục hai nhịp trong hai trường hợp: không kể và có kể tới ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang.**

Tỉ số h/l	$Q_{G\max}$ của dầm khi không kể tới ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang	$Q_{G\max}$ của dầm khi có kể tới ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang	Chênh lệch Lực cắt trên gối giữa (%)
1/100	$0.6562ql$	$0.6562ql$	0
1/10	$0.6562ql$	$0.6523ql$	0.5943
1/5	$0.6562ql$	$0.6409ql$	2.3316
1/3	$0.6562ql$	$0.6152ql$	6.2481

**Bảng 13: So sánh lực cắt lớn nhất (dưới nhịp thứ 2) của dầm liên tục hai nhịp trong hai trường hợp: không kể và có kể tới ảnh hưởng của biến dạng trượt.**

Tỉ số h/l	$Q_{G\max}$ của dầm khi không kể tới ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang	$Q_{G\max}$ của dầm khi có kể tới ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang	Chênh lệch Lực cắt trên gối giữa (%)
1/100	$0.6562ql$	$0.6562ql$	0
1/10	$0.6562ql$	$0.6523ql$	0.5943
1/5	$0.6562ql$	$0.6409ql$	2.3316
1/3	$0.6562ql$	$0.6152ql$	6.2481

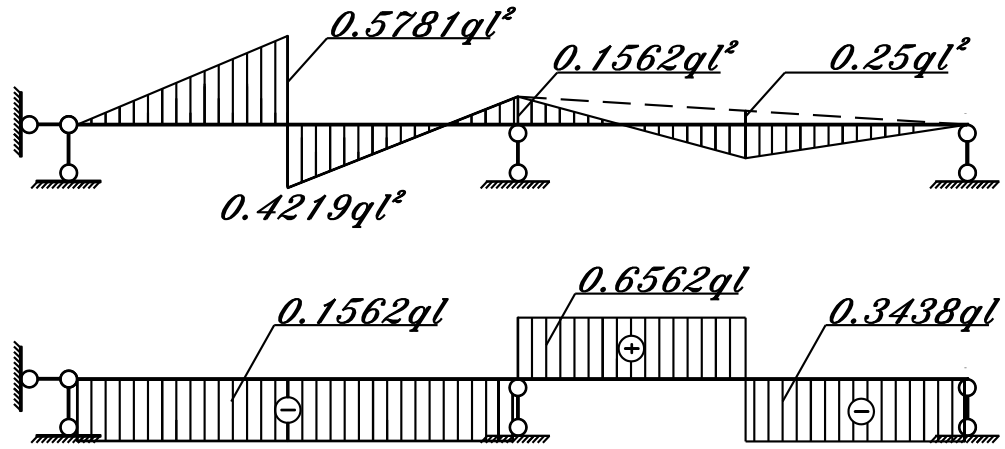
1/100	$-0.3438ql$	$-0.3438ql$	0
1/10	$-0.3438ql$	$-0.3477ql$	1.1216
1/5	$-0.3438ql$	$-0.3591ql$	4.2606
1/3	$-0.3438ql$	$-0.3848ql$	10.6548

**Bảng 14: So sánh lực cắt nhỏ nhất (dưới nhịp thứ 1) của dầm liên tục hai nhịp trong hai trường hợp: không kể và có kể tới ảnh hưởng của biến dạng trượt.**

Tỉ số h/l	$Q_{G_{max}}$ của dầm khi không kể tới ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang	$Q_{G_{max}}$ của dầm khi có kể tới ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang	Chênh lệch Lực cắt trên gối giữa (%)
1/100	$-1.1562ql$	$-1.1562ql$	0
1/10	$-1.1562ql$	$-1.1523ql$	0.3373
1/5	$-1.1562ql$	$-1.1409ql$	1.3233
1/3	$-1.1562ql$	$-1.1152ql$	3.5461

Từ kết quả tính thấy rằng Mô men uốn trên gối giữa giảm (theo giá trị tuyệt đối) tương đối lớn, từ 2.49% đến 26.24% và lực cắt giảm từ 0.33% đến 3.5% tương ứng khi ta thay đổi tỉ lệ h/l từ 1/10 đến 1/5. Cũng với tỉ lệ h/l như vậy, độ võng lớn nhất  $y_{max}$  ở giữa nhịp tăng lên rất lớn, từ 5.9% đến 42.1%.

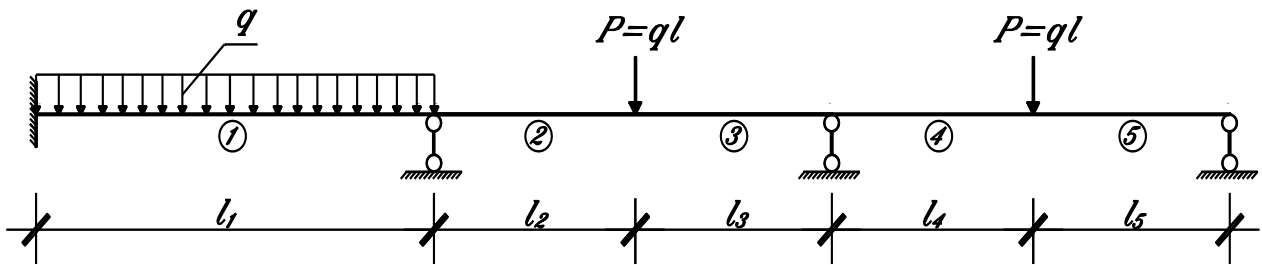
- Biểu đồ moomen uốn và lực cắt trong trường hợp không xét biến dạng trượt có dạng như, hình 3.9.



Hình 3.9. Biểu đồ M và Q

**Ví dụ 3.5: Dầm liên tục ba nhịp**

Xác định nội lực và chuyển vị của dầm liên tục ba nhịp, độ cứng uốn  $EJ=Const$ , chịu tải phân bố đều  $q$  và tải trọng tập trung  $P$  như hình 3.10. Tiết diện dầm chữ nhật, có chiều cao  $h$ , hệ số ứng suất trượt  $\alpha = 1.2$



Hình 3.10. Dầm liên tục ba nhịp

Chia dầm thành năm đoạn với các đoạn có chiều dài tương ứng là

$$l_1=l, l_2=l_3=l_4= l_5=l/2.$$

Giả thiết đường độ võng  $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ , và đường lực cắt  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5$ , của dầm có dạng đa thức như sau:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4; & Q_1 &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 \\ y_2 &= c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4; & Q_2 &= d_0 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3 + d_4x^4 \\ y_3 &= e_0 + e_1x + e_2x^2 + e_3x^3 + e_4x^4; & Q_3 &= n_0 + n_1x + n_2x^2 + n_3x^3 + n_4x^4 \\ y_4 &= j_1x + j_2x^2 + j_3x^3 + j_4x^4; & Q_4 &= w_0 + w_1x + w_2x^2 + w_3x^3 + w_4x^4 \\ y_5 &= i_0 + i_1x + i_2x^2 + i_3x^3 + i_4x^4; & Q_5 &= v_0 + v_1x + v_2x^2 + v_3x^3 + v_4x^4 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Trong đó:  $a_i(i=1\div 4)$ ,  $b_i(i=0\div 4)$ ,  $c_i(i=1\div 4)$ ,  $d_i(i=0\div 4)$ ,  $e_i(i=1\div 4)$ ,  $n_i(i=0\div 4)$ ,  $j_i(i=1\div 4)$ ,  $w_i(i=0\div 4)$ ,  $i_i(i=0\div 4)$ ,  $v_i(i=0\div 4)$ , là các ẩn của bài toán. Theo các biểu thức từ (3.4) đến (3.7) tính được: Biên dạng trượt  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$ ; góc xoay  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$ ; biên dạng uốn  $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5$ , và momen uốn  $M_{x1}, M_{x2}, M_{x3}, M_{x4}, M_{x5}$ , tương ứng với các đoạn 1, 2, 3, 4 và 5, cụ thể là:

$$\gamma_i = \frac{\alpha Q_i}{GF}; \quad \theta_i = \frac{dy_i}{dx} - \gamma_i = \frac{dy_i}{dx} - \frac{\alpha Q_i}{GF}; \quad \text{với } (i=1\div 5)$$

$$\chi_i = -\frac{d^2 y_i}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_i}{dx}; \quad M_{xi} = -EJ\chi_i = EJ \left( -\frac{d^2 y_i}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_i}{dx} \right)$$

Trong đó:  $\alpha$  là hệ số xét sự phân bố không đều của ứng suất cắt tại trục dầm;  
 $GF$  là độ cứng cắt của dầm

$$GF = \frac{E}{2} F = \frac{6EJ}{h^2}$$

Lượng cưỡng bức theo (3.8) được viết như sau:

$$Z = \left\{ \begin{aligned} & \int_0^{l_1} M_{x1} \chi_1 dx + \int_0^{l_1} Q_1 \gamma_1 dx - \int_0^{l_1} q y_1 dx + \int_0^{l_2} M_{x2} \chi_2 dx + \int_0^{l_2} Q_2 \gamma_2 dx - P y_2 \Big|_{x=l_2} + \\ & + \int_0^{l_3} M_{x3} \chi_3 dx + \int_0^{l_3} Q_3 \gamma_3 dx + \int_0^{l_4} M_{x4} \chi_4 dx + \int_0^{l_4} Q_4 \gamma_4 dx - P y_{4(x=l_4)} \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Min} \quad (b)$$

Hàm độ võng  $y_i$  phải thoả mãn các điều kiện ràng buộc sau:

$$\left. \begin{aligned}
g_1 &= \left( \frac{dy_1}{dx} - \frac{\alpha Q_1}{GF} \right) \Big|_{x=0} ; & g_2 &= y_1 \Big|_{x=l_1} ; & g_3 &= \left( \frac{dy_1}{dx} - \frac{\alpha Q_1}{GF} \right) \Big|_{x=l_1} = \left( \frac{dy_2}{dx} - \frac{\alpha Q_2}{GF} \right) \Big|_{x=0} \\
g_4 &= \left( \frac{dy_2}{dx} - \frac{\alpha Q_2}{GF} \right) \Big|_{x=l_2} = \left( \frac{dy_3}{dx} - \frac{\alpha Q_3}{GF} \right) \Big|_{x=0} ; & g_5 &= y_2 \Big|_{x=l_2} = y_3 \Big|_{x=0} ; & g_6 &= y_3 \Big|_{x=l_3} \\
g_7 &= \left( \frac{dy_3}{dx} - \frac{\alpha Q_3}{GF} \right) \Big|_{x=l_3} = \left( \frac{dy_4}{dx} - \frac{\alpha Q_4}{GF} \right) \Big|_{x=0} ; & g_8 &= \left( \frac{dy_4}{dx} - \frac{\alpha Q_4}{GF} \right) \Big|_{x=l_4} = \left( \frac{dy_5}{dx} - \frac{\alpha Q_5}{GF} \right) \Big|_{x=0} ; \\
g_9 &= y_4 \Big|_{x=l_4} = y_5 \Big|_{x=0} ; & g_{10} &= y_5 \Big|_{x=l_5} ; & g_{11} &= EJ \left( -\frac{d^2 y_5}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_5}{dx} \right) \Big|_{x=l_5} = 0
\end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Đưa bài toán tìm cực trị (b) với các ràng buộc (c) về bài toán cực trị không ràng buộc bằng cách xây dựng phiếm hàm mở rộng Lagrange F như sau:

$$F = Z + \sum_{k=1}^{11} \lambda_k g_k \rightarrow \text{Min} \quad (d)$$

với  $\lambda_k (k=1 \div 11)$  là các thừa số Lagrange cũng là các ẩn của bài toán. Như vậy có tổng cộng 58 ẩn  $a_i (i=1 \div 4)$ ,  $b_i (i=0 \div 4)$ ,  $c_i (i=1 \div 4)$ ,  $d_i (i=0 \div 4)$ ,  $e_i (i=1 \div 4)$ ,  $n_i (i=0 \div 4)$ ,  $j_i (i=1 \div 4)$ ,  $w_i (i=0 \div 4)$ ,  $i_i (i=0 \div 4)$ ,  $v_i (i=0 \div 4)$ , và 11 thừa số  $\lambda_i$ ). Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss xem các biến dạng uốn là độc lập với mômen tác dụng cho nên điều kiện cực trị của phiếm hàm mở rộng F là:

$$\left. \begin{aligned}
h_i &= \int_0^{l_1} [M_{x1}] \frac{\partial}{\partial a_i} (\chi_1) dx + \frac{\partial}{\partial a_i} \sum_{k=1}^{11} (g_k \lambda_k) - \int_0^{l_1} [q] \frac{\partial}{\partial a_i} (y_1) dx = 0; & a_i (i=1, 2, 3, 4) \\
f_i &= \int_0^{l_1} [M_{x1}] \frac{\partial}{\partial b_i} (\chi_1) dx + \frac{\partial}{\partial b_i} \sum_{k=1}^{11} (g_k \lambda_k) + \int_0^{l_1} [Q_1] \frac{\partial}{\partial b_i} (\gamma_1) dx = 0; & b_i (i=0, 1, 2, 3, 4) \\
h_{2i} &= \int_0^{l_2} [M_{x2}] \frac{\partial}{\partial c_i} (\chi_2) dx + \frac{\partial}{\partial c_i} \sum_{k=1}^{11} (g_k \lambda_k) - P \frac{\partial}{\partial c_i} (y_2)_{x=l_2} = 0; & c_i (i=1, 2, 3, 4) \\
f_{2i} &= \int_0^{l_2} [M_{x2}] \frac{\partial}{\partial d_i} (\chi_2) dx + \frac{\partial}{\partial d_i} \sum_{k=1}^{11} (g_k \lambda_k) + \int_0^{l_2} [Q_2] \frac{\partial}{\partial d_i} (\gamma_2) dx = 0; & d_i (i=0, 1, 2, 3, 4) \\
k_{3i} &= \int_0^{l_3} [M_{x3}] \frac{\partial}{\partial e_i} (\chi_3) dx + \frac{\partial}{\partial e_i} \sum_{k=1}^{11} (g_k \lambda_k) = 0; & e_i (i=0, 1, 2, 3, 4) \\
t_{3i} &= \int_0^{l_3} [M_{x3}] \frac{\partial}{\partial n_i} (\chi_3) dx + \frac{\partial}{\partial n_i} \sum_{k=1}^{11} (g_k \lambda_k) + \int_0^{l_3} [Q_3] \frac{\partial}{\partial n_i} (\gamma_3) dx = 0; & n_i (i=0, 1, 2, 3, 4)
\end{aligned} \right\} \quad (d1)$$

$$\left. \begin{aligned}
 h_{4i} &= \int_0^{l_4} [M_{x4}] \frac{\partial}{\partial j_i} (\chi_4) dx + \frac{\partial}{\partial j_i} \sum_{k=1}^{11} (g_k \lambda_k) - P \frac{\partial}{\partial j_i} (y_4) \Big|_{x=l_4} = 0; \quad j_i (i=1, 2, 3, 4) \\
 f_{4i} &= \int_0^{l_4} [M_{x4}] \frac{\partial}{\partial w_i} (\chi_4) dx + \frac{\partial}{\partial w_i} \sum_{k=1}^{11} (g_k \lambda_k) + \int_0^{l_4} [Q_4] \frac{\partial}{\partial w_i} (\gamma_4) dx = 0; \quad i_i (i=0, 1, 2, 3, 4) \\
 k_{5i} &= \int_0^{l_5} [M_{x5}] \frac{\partial}{\partial i_i} (\chi_5) dx + \frac{\partial}{\partial i_i} \sum_{k=1}^{11} (g_k \lambda_k) = 0; \quad i_i (i=0, 1, 2, 3, 4) \\
 t_{5i} &= \int_0^{l_5} [M_{x5}] \frac{\partial}{\partial v_i} (\chi_5) dx + \frac{\partial}{\partial v_i} \sum_{k=1}^{11} (g_k \lambda_k) + \int_0^{l_5} [Q_5] \frac{\partial}{\partial v_i} (\gamma_5) dx = 0; \\
 w_i &(i=0, 1, 2, 3, 4)
 \end{aligned} \right\} \quad (d2)$$

nhận được 58 phương trình bậc nhất để xác định 58 ẩn số. Giải các phương trình trên ta nhận được kết quả tính đường độ võng  $y_i$  và lực cắt  $Q_i$  với 5 tỉ lệ  $\frac{h}{l}$  như sau:

**Bảng 15: Chuyển vị tại giữa nhịp một, hai và ba**

Tỉ số $h/l$	$y_{1/2}$	$y_{22}$	$y_{42}$
1/100	$0.0022 \frac{ql^4}{EJ}$	$0.0046 \frac{ql^4}{EJ}$	$0.0106 \frac{ql^4}{EJ}$
1/10	$0.0024 \frac{ql^4}{EJ}$	$0.0051 \frac{ql^4}{EJ}$	$0.0112 \frac{ql^4}{EJ}$
1/5	$0.0031 \frac{ql^4}{EJ}$	$0.0067 \frac{ql^4}{EJ}$	$0.0128 \frac{ql^4}{EJ}$
1/3	$0.0048 \frac{ql^4}{EJ}$	$0.0105 \frac{ql^4}{EJ}$	$0.0167 \frac{ql^4}{EJ}$

**Bảng 16: Mô men uốn tại các đầu thanh**

Tỉ số	$M_{11}$	$M_{1/2}$	$M_{12} = M_{21}$	$M_{22} = M_{31}$	$M_{32} = M_{41}$	$M_{42} = M_{51}$
-------	----------	-----------	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------

<b>h/l</b>						
1/100	$-0.0769ql^2$	$0.0385ql^2$	$-0.0962ql^2$	$0.1202ql^2$	$-0.1635ql^2$	$0.1683ql^2$
1/10	$-0.0769ql^2$	$0.0383ql^2$	$-0.0965ql^2$	$0.1204ql^2$	$-0.1627ql^2$	$0.1687ql^2$
1/5	$-0.0768ql^2$	$0.0379ql^2$	$-0.0975ql^2$	$0.1210ql^2$	$-0.1605ql^2$	$0.1698ql^2$

**Bảng 17: Lực cắt tại các đầu thanh**

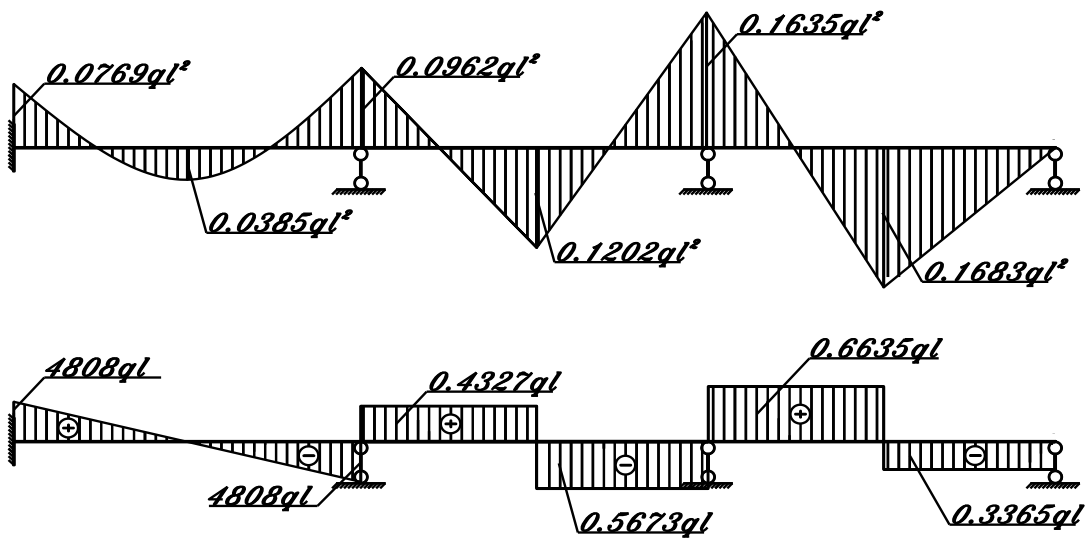
<b>Tỉ số h/l</b>	$Q_{11}$	$Q_{12}$	$Q_{21} = Q_{22}$	$Q_{31} = Q_{32}$	$Q_{41} = Q_{42}$	$Q_{52} = Q_{51}$
1/100	$0.4808ql$	$-0.4808ql$	$0.4327ql$	$-0.5673ql$	$0.6635ql$	$-0.3365ql$
1/10	$0.4804ql$	$-0.4804ql$	$0.4338ql$	$-0.5662ql$	$0.6627ql$	$-0.3373ql$
1/5	$0.4793ql$	$-0.4793ql$	$0.4370ql$	$-0.5630ql$	$0.6605ql$	$-0.3395ql$
1/3	$0.4776ql$	$-0.4776ql$	$0.4436ql$	$-0.5564ql$	$0.6556ql$	$-0.3444ql$

**Bảng 18: So sánh độ võng lớn nhất tại điểm giữa nhịp giữa của dầm liên tục ba nhịp trong hai trường hợp: không kể và có kể tới ảnh hưởng của biến dạng ngang.**

<b>Tỉ số h/l</b>	$y_{\max}$ của dầm khi không kể tới ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang	$y_{\max}$ của dầm khi có kể tới ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang	Chênh lệch độ võng (%)
1/100	$0.0046 \frac{ql^4}{EJ}$	$0.0046 \frac{ql^4}{EJ}$	0
1/10	$0.0046 \frac{ql^4}{EJ}$	$0.0051 \frac{ql^4}{EJ}$	9.8039
1/5	$0.0046 \frac{ql^4}{EJ}$	$0.0067 \frac{ql^4}{EJ}$	31.3432
1/3	$0.0046 \frac{ql^4}{EJ}$	$0.0105 \frac{ql^4}{EJ}$	56.1904



Từ kết quả tính thấy rằng mô men uốn và lực cắt trong trường hợp này thay đổi không đáng kể khi ta thay đổi tỉ lệ  $h/l$  của tiết diện,  $M$  và  $Q$  chỉ thay đổi khoảng từ 3% đến 5%. Đối với ví dụ tính là dầm liên tục chịu tải tương đối đồng đều ở các nhịp, xét biến dạng trượt không làm thay đổi nhiều nội lực mô-men và lực cắt, chỉ làm thay đổi đường độ võng của dầm từ 9.8% đến 56.1% tương ứng với các tỉ lệ  $h/l=1/10$  đến  $h/l=1/3$ . Độ võng lớn nhất  $y_{\max}$  ở giữa nhịp có thể tăng 1.5 lần khi chiều cao dầm lớn. Khi không xét biến dạng trượt (cho  $h/l=1/100$ ), ta có biểu đồ mô men uốn và lực cắt của dầm liên tục ba nhịp như sau:



**Hình 3.11. Biểu đồ M và Q**

### KẾT LUẬN

Qua kết quả nghiên cứu từ các chương, chương 1 đến chương 3 đối với bài toán dầm chịu uốn (bài toán tĩnh). Tác giả đã áp dụng được lý thuyết dầm đầy đủ về tính toán nội lực và chuyển vị của hệ dầm phẳng đàn hồi chịu uốn có xét đến biến dạng trượt ngang:

1. Với việc dùng hàm độ võng  $y$ , hàm lực cắt  $Q$  là hai hàm ẩn và áp dụng Phương pháp Nguyên lý cực trị Gauss tác giả đã áp dụng được lý thuyết dầm đầy đủ để tính toán nội lực và chuyển vị của hệ dầm phẳng đàn hồi chịu uốn có xét đến biến dạng trượt ngang. Từ đó nhận được hệ hai phương trình:

$$\left. \begin{aligned} EJ \left( \frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{\alpha}{GF} \frac{d^3 Q}{dx^3} \right) &= q \\ EJ \left( \frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{\alpha}{GF} \frac{d^2 Q}{dx^2} \right) &= Q \end{aligned} \right\}$$

Hai phương trình trên là hai phương trình vi phân cân bằng của dầm chịu uốn có xét đến biến dạng trượt. Khi không xét đến biến dạng trượt, ( $G \rightarrow \infty$  hoặc  $h \rightarrow 0$ ) thì các phương trình trên đều dẫn về phương trình cân bằng của dầm chịu uốn được xây dựng theo lý thuyết dầm Euler- Bernoulli mà không gặp phải hiện tượng lực cắt bị khóa.

2. Khi kể tới ảnh hưởng của biến dạng trượt, tại tiết diện sát liên kết ngàm, dầm vẫn bị xoay một góc bằng góc trượt do lực cắt gây ra. Hay nói cách khác liên kết ngàm chỉ cản trở góc xoay do mômen gây ra mà không cản trở góc trượt do lực cắt gây ra.

3. Khi kể tới ảnh hưởng của biến dạng trượt, nội lực và chuyển vị của dầm chịu uốn đã có sự thay đổi đáng kể. Lượng thay đổi này phụ thuộc vào tỉ số chiều cao tiết diện/chiều dài dầm, phụ thuộc vào hình thức liên kết và cách đặt tải trọng. Dầm có bậc siêu tĩnh càng lớn, có tỉ lệ  $h/l$  càng lớn thì nội lực và chuyển vị thay đổi càng nhiều. Các dầm đặt tải không đối xứng, liên kết không giống nhau tại hai đầu thì chịu ảnh hưởng của biến dạng trượt nhiều hơn các dầm chịu tải trọng đối xứng và có liên kết đối xứng.

4. Đã xác định được đường đàn hồi cho hệ dầm và hệ khung có các điều kiện biên khác nhau. Từ đó xác định được nội lực mômen uốn, lực cắt của hệ dầm khi có kể đến biến dạng trượt ngang. Trong trường hợp không xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang (trường hợp tỉ số  $h/l=1/1000$ ), kết quả về nội lực và chuyển vị đều trùng khớp với kết quả nhận được khi giải bằng các phương pháp hiện có.

5. Mô men uốn và lực cắt của hệ dầm khi xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt có thể tăng hoặc giảm so với khi không xét biến dạng trượt phụ thuộc vào vị trí tiết diện, từng loại bài toán, điều kiện biên và tải trọng cũng như tỉ lệ  $h/l$ , nội lực trong dầm tĩnh định không thay đổi khi xét và không xét ảnh hưởng của biến dạng trượt.

Độ võng của dầm trong hai trường hợp có xét và không xét biến dạng trượt ngang thay đổi rất lớn, có trường hợp độ võng của dầm khi xét biến dạng trượt tăng từ 9.8% đến 56.1% so với khi không xét biến dạng trượt tương ứng với các tỉ lệ  $h/l=1/10$  đến  $h/l=1/3$ .

### **KIẾN NGHỊ VỀ NHỮNG NGHIÊN CỨU TIẾP THEO**

1. Dùng lý thuyết đầy đủ về dầm, dầm có xét biến dạng trượt với hai hàm ẩn là hàm độ võng  $y$  và hàm lực cắt  $Q$  đã trình bày trong đề tài làm cơ sở để xây dựng và giải các bài toán kết cấu chịu uốn khác như kết cấu tấm, vỏ.
2. Dùng các kết quả tính toán nội lực và chuyển vị, theo lý thuyết dầm có xét biến dạng trượt để đưa vào thiết kế các công trình.
3. Qua kết quả nghiên cứu thấy rằng, với việc sử dụng lý thuyết đầy đủ về dầm và dùng phương pháp Nguyên lý cực trị Gauss có thể xây dựng bài toán cơ học kết cấu một cách dễ dàng. Vì vậy, nên xét biến dạng trượt trong mọi trường hợp.

### **Danh mục tài liệu tham khảo**

#### **I. TIẾNG VIỆT**

- [1] Hồ Huy Cường (2005), *Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss*, Tập chí Khoa học kỹ thuật, IV/ Tr. 112 ÷ 118.
- [2] Nguyễn Văn Liên, Nguyễn Phương Thịnh, Sinh Trạng Bằng (2003), *Giáo trình Sức bền vật liệu*, Nhà xuất bản Xây dựng, tập 1, phần 3, 330 trang.

- [3] Nguyễn Ph--ng Thụnh (2002), *Nghi<sup>a</sup>n cøu tr<sup>1</sup>ng th<sup>1</sup>i øng suÊt biÕn d<sup>1</sup>ng tÊm nhiÒu líp chĐu t¶i trǎng ®éng cǎ xĐt lúc ma s<sup>1</sup>t ẽ c<sup>1</sup>c mÆt tiÕp xóc*, LuËn ,n tiÕn sũ kü thuËt.
- [4] V--ng Ngác L-u (2002), *Nghi<sup>a</sup>n cøu tr<sup>1</sup>ng th<sup>1</sup>i øng suÊt biÕn d<sup>1</sup>ng cña tÊm sụn Sandwich chĐu t¶i trǎng tÛnh vµ ®éng*, LuËn ,n tiÕn sũ kü thuËt.
- [5] TrÇn H÷u Hụ (2006), *Nghi<sup>a</sup>n cøu búi to,n t--ng t<sup>1</sup>c gi÷a cǎc vµ nÒn d-íi t<sup>1</sup>c dõng cña t¶i trǎng*, LuËn ,n tiÕn sũ kü thuËt.
- [6] Ph<sup>1</sup>m V<sup>1</sup>n Trung (2006), *Ph--ng ph.p míi TÝnh to,n hÖ d©y vµ m<sup>1</sup>i treo*, LuËn ,n TiÕn sũ kü thuËt.
- [7] Vò Hoạng HiÖp (2007), *Nghi<sup>a</sup>n cøu tr<sup>1</sup>ng th<sup>1</sup>i øng suÊt - biÕn d<sup>1</sup>ng cña dÇm nhiÒu líp chĐu t¶i tÛnh vµ ®éng*, LuËn ,n tiÕn sũ kü thuËt, Hụ néi.
- [8] Nguyễn V<sup>1</sup>n §<sup>1</sup>o (2001), *C- hǎc gi¶i tÝch*, Nhự xuÊt b¶n §<sup>1</sup>i hǎc Quèc gia Hụ néi, 337 trang.
- [9] Nguyễn V<sup>1</sup>n §<sup>1</sup>o, TrÇn Kim Chi, Nguyễn Dòng (2005), *NhËp m«n §éng lúc hǎc phi tuyÕn vµ chuyón ®éng hçn ®én*. Nhự xuÊt b¶n §<sup>1</sup>i hǎc Quèc gia Hụ néi.
- [10] Lòu Thǎ Tr×nh, §ç V<sup>1</sup>n B×nh(2006), *Gi.o tr×nh æn ®Đnh c«ng tr×nh*, Nhự xuÊt b¶n Khoa hǎc kü thuËt.
- [11] Vò Hoạng HiÖp (2008), *TÝnh kÕt cÊu cǎ xĐt biÕn d<sup>1</sup>ng tr-ít*, T<sup>1</sup>p chÝ XD sè 7.
- [12] Sọn V<sup>1</sup>n DuÈn, Nguyễn Ph--ng Thụnh (2007), *Ph--ng ph.p míi tÝnh to,n æn ®Đnh cña thanh*, T<sup>1</sup>p chÝ X©y dùng sè 12 (Tr41-Tr44).
- [13] Sọn V<sup>1</sup>n DuÈn (2007), *Ph--ng ph.p nguy<sup>a</sup>n lý Cùc trĐ Gauss ®èi víi c<sup>1</sup>c búi to,n æn ®Đnh c«ng tr×nh*, LuËn v<sup>1</sup>n th<sup>1</sup>c sũ kü thuËt.

- [14] Sọun V`n DuÈn (2008), *Ph--ng ph,p míi tYnh to,n æn ÒÐnh cña khung*, T<sup>1</sup>p chÝ X©y dùng sè 01 (Tr35-Tr37).
- [15] Sọun V`n DuÈn (2008), *Nghi<sup>a</sup>n cøu æn ÒÐnh uèn dác cña thanh cã xÐt biÕn d<sup>1</sup>ng tr-ít*, T<sup>1</sup>p chÝ X©y dùng sè 12 (Tr33-Tr37).
- [16] Sọun V`n DuÈn (2009), *Ph--ng ph,p nghi<sup>a</sup>n cøu æn ÒÐnh tæng thó cña dµn*, T<sup>1</sup>p chÝ X©y dùng sè 03 (Tr86-Tr89).
- [17] Sọun V`n DuÈn (2010), *Ph--ng ph,p phÇn tö h÷u h<sup>1</sup>n nghi<sup>a</sup>n cøu æn ÒÐnh uèn dác cña thanh*, T<sup>1</sup>p chÝ kÕt cÊu vụ C«ng nghö x©y dùng, sè 05, Qóy IV(Tr30-Tr36).
- [18] Sọun V`n DuÈn (2011), *Nghi<sup>a</sup>n cøu æn ÒÐnh Òµn hải cña thanh vụ hõ thanh*, LuÈn ,n TiÕn sù kü thuËt.
- [19] Sọun V`n DuÈn (2012), *Ph--ng ph,p míi tYnh to,n d©y mòm*, T<sup>1</sup>p chÝ kÕt cÊu vụ c«ng nghö X©y dùng sè 09, Qóy II (Tr56-Tr61).
- [20] Sọun V`n DuÈn (2014), *Ph--ng ph,p chuyón vÐ c-ìng bøc gi¶i bụi to,n trÐ ri<sup>a</sup>ng vụ vÐc t- ri<sup>a</sup>ng*, T<sup>1</sup>p chÝ X©y dùng sè 11 (Tr82-Tr84).
- [21] Sọun V`n DuÈn (2015), *Ph--ng ph,p míi nghi<sup>a</sup>n cøu æn ÒÐnh Óéng lúc hác cña thanh*, T<sup>1</sup>p chÝ X©y dùng sè 01 (Tr86-Tr88).
- [22] Sọun V`n DuÈn (2015), *Bụi to,n c- hác kÕt cÊu d-ii d<sup>1</sup>ng tæng qu,t*, T<sup>1</sup>p chÝ X©y dùng sè 02 (Tr59-Tr61).
- [23] Sọun V`n DuÈn (2015), *Ph--ng ph,p so s,nh nghi<sup>a</sup>n cøu néi lúc vụ chuyón vÐ cña hõ dÇm*, T<sup>1</sup>p chÝ X©y dùng sè 11 (Tr56-Tr58).
- [24] Sọun V`n DuÈn (2015), *TYnh to,n kÕt cÊu khung chÐu uèn b»ng ph--ng ph,p so s,nh*, T<sup>1</sup>p chÝ X©y dùng sè 12 (Tr62-Tr64).

[25] Trần Thế Kim Huõ (2005), *Ph--ng ph,p nguy<sup>a</sup>n lý Cùc trĐ Gauss Òèi víi c,c búi to,n c- hác kÕt cÊu*, LuËn v"n th<sup>1</sup>c sũ kü thuËt.

[26] Nguyễn Thế Li<sup>a</sup>n (2006), *Ph--ng ph,p nguy<sup>a</sup>n lý Cùc trĐ Gauss Òèi víi c,c búi to,n Òéng lúc hác c«ng tr×nh*, LuËn v"n th<sup>1</sup>c sũ kü thuËt.

[27] Võ Thanh Thỹ (2009), *X©y dùng búi to,n dÇm khi xĐt ÒÇy Òñ hai thụng phÇn néi lúc momen vù lúc c<sup>3</sup>t*. T<sup>1</sup>p chÝ X©y dùng sè 4.

[28] Võ Thanh Thỹ (2009), *Dao Òéng tù do cña dÇm khi xĐt ¶nh h-ëng cña lúc c<sup>3</sup>t*. T<sup>1</sup>p chÝ X©y dùng, sè 7.

[29] Timoshenko C.P, Voinãpki- Krige X, (1971), *TÊm vù Vá. Ng-êi dĐch, Ph<sup>1</sup>m Hằng Giang, Võ Thụng H¶i, Sọn H÷u Quang, Nxb Khoa hác vù kü thuËt, Hù Néi*.

## **II. TIÕNG PH,P**

[30] Robert L'Hermite (1974), *Flambage et Stabilité Le flambage Élastique des piÈces droites*, Édition Eyrolles, Paris.

## **III. TIÕNG ANH**

[31] Stephen P.Timoshenko-Jame M.Gere (1961), *Theory of elastic stability*, McGraw-Hill Book Company, Inc, New york - Toronto - London, 541 Tr.

[32] William T.Thomson (1998), *Theory of Vibration with Applications* (T,i b¶n lÇn thø 5). Stanley Thornes (Publishers) Ltd, 546 trang.

- [33] Klaus - Jurgen Bathe (1996), *Finite Element procedures*. Part one, Prentice - Hall International, Inc, 484 trang.
- [34] Klaus - Jurgen Bathe (1996), *Finite Element procedures*. Part two, Prentice - Hall International, Inc, 553 trang.
- [35] Ray W.Clough, Joseph Penzien(1993), *Dynamics of Structures* (T,i b¶n lÇn thø 2), McGraw-Hill Book Company, Inc, 738 trang.
- [36] O.C. Zienkiewicz-R.L. Taylor (1991), *The finite element method* (four edition) Volume 2, McGraw-Hill Book Company, Inc, 807 trang.
- [37] G.Korn-T.Korn (1961), *Mathematical Handbook for scientists and Engineers*, McGraw-Hill, New york (B¶n d¶ch tiÕng Nga, I.Bramovich chñ bi<sup>a</sup>n, Nhự xuÊt b¶n Nauka-Moscow, 1964).
- [38] Stephen P.Timoshenko-J. Goodier (1970), *Theory of elasticity*, McGraw-Hill, New york (B¶n d¶ch tiÕng Nga, G. Shapiro chñ bi<sup>a</sup>n, Nhự xuÊt b¶n Nauka-Moscow, 1979), 560 trang.
- [39] D.R.J. Owen, E.Hinton (1986), *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*, Pineridge Press Lt.
- [40] Lars Olovsson, Kjell Simonsson, Mattias Unosson (2006), *Shear locking reduction in eight-node trilinear solid finite elements*, J. 'Computers @ Structures', 84, trg 476-484.
- [41] C.A.Brebbia, J.C.F.Telles, L.C.Wrobel(1984), *Boundary Element Techniques. Theory and Applications in*

*Engineering*. Nxb Springer - Verlag. (Bản dịch tiếng Nga, 1987).

[42] Chopra Anil K (1995). *Dynamics of structures*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New - Jersey 07632.

[43] Wilson Edward L. Professor Emeritus of structural Engineering University of California at Berkeley (2002). *Three Dimensional Static and Dynamic Analysis of structures*, Inc. Berkeley, California, USA. Third edition, Reprint January.

[44] Wilson, E. L., R. L. Taylor, W. P. Doherty and J. Ghaboussi (1971). "Incompatible Displacement Models, Proceedings, ORN Symposium on "Numerical and Computer Method in Structural Mechanics". University of Illinois, Urbana. September. Academic Press.

[45] Strang, G (1972). *Variational Crimes in the Finite Element Method* in "The Mathematical Foundations of the Finite Element Method". P.689 -710 (ed. A.K. Aziz). Academic Press.

[46] Irons, B. M. and O. C. Zienkiewicz (1968). *The isoparametric Finite Element System A New Concept in Finite Element Analysis*, Proc. Conf. "Recent Advances in Stress Analysis". Royal Aeronautical Society. London.

[47] Kolousek Vladimir, DSC Professor, Technical University, Pargue (1973). *Dynamics in engineering structures*. Butter worths London.

[48] Felippa Carlos A (2004). *Introduction of finite element methods*. Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures University



of Colorado Boulder, Colorado 80309-0429, USA, Last updated Fall.

[49] Wang C.M, Reddy J.N, Lee K.H.( 2000), *Shear deformable beams and plates Relationships with Classical Solutions*. ELSEVIER, Amsterdam - Lausanne - New York - Oxford - Shannon - Singapore - Tokyo.

[50] Barbero Ever J, Department of Mechanics & Aerospace Engineering, West Virginia University, USA (1999), *Introduction to Composite Materials Design*. Taylor and Francis.

[51] Decolon C (2002). *Analysis of Composite Structures*. Hermes Penton, Ltd, UK.

[52] Fu-le Li, ZHI-zhong Sun, Corresponding author, Department of Mathematics, Shoutheast University, Nanjing 210096, PR China (2007). *A finite difference scheme for solving the Timoshenko beam equations with boundary feedback*. Journal of Computational and applied Mathematics 200, 606 - 627, Elsevier press. Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com).

[53] Khaji N., Corresponding author, Shafiei M., Civil Engineering Department Tarbiat Modares University, P. O. Box 14155-4838, Tehran, Iran ((2009)). *Closed - form solutions for crack detection problem of Timoshenko beams with various boundary conditions*. International Journal of Mechanical Sciences 51, 667-681. Contents lists available at Science Direct journal homepage: [www.elsevier.com/locate/ijmecsci](http://www.elsevier.com/locate/ijmecsci).

[54] Antes H. Institute of Applied Mechanics, University Carolo Wilhelmina, D-38023 Braunschweig, Germany (2003).

*Fundamental solution and integralequations for Timoshenko beams.* Computers and Structures 81, 383-396. Pergamon press. Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com).

[55] Nguyen Dinh Kien (2007). *Free Vibration of prestress Timoshenko beams resting on elastic foundation.* Viet nam Journal of Mechanics, VAST, Vol.29, No. 1, pp. 1-12.

[56] Grawford F (1974). *Waves,* Berkeley physics course, volume 3. McGraw - hill Book Company.

#### **Iv. TIÕNG nga**

[57] М. А. Айзерман (1980), *КлассиЧеская механика, Москва.*

[58] Киселев В. А (1969). *Строительная механика - Специальный курс. Стройздат, Москва.*

[59] П. С. Полак (1959), *Вариационные принципы механики, Москва.*

[60] Киселев В. А (1980). *Строительная механика - Специальный курс. Стройздат, Москва.*

[61] А. А. Чирас (1989), *Строительная механика, Стройздат, Москва.*

[62] Г. КАУДЕРЕР (1961), *НЕЛИНЕЙНАЯ МЕХАНИКА, МОСКВА.*

