

LỜI CẢM ƠN

Trước hết, em xin chân thành cảm ơn thầy giáo PGS.TS Ngô Quốc Tạo đã tận tình hướng dẫn, chỉ dạy giúp đỡ tận tình và tạo mọi điều thuận lợi để em hoàn thành báo cáo tốt nghiệp của mình.

Em cũng xin chân thành cảm ơn trung tâm nghiên cứu và phát triển công nghệ phần mềm, nơi đã tạo điều kiện tốt trong suốt thời gian thực tập.

Em cũng xin chân thành cảm ơn quý thầy cô khoa công nghệ thông tin trường đại học dân lập Hải Phòng đã tận tình giảng dạy, trang bị cho chúng em những kiến thức cần thiết trong suốt quá trình học tập.

Và em cũng xin gửi lòng biết ơn đến gia đình, cha, mẹ, bạn bè đã ủng hộ, giúp đỡ và động viên em trong những lúc khó khăn.

Dù đã hết sức cố gắng hoàn thành đề tài nhưng chắc chắn sẽ không thể tránh khỏi những thiếu sót nhất định. Rất mong nhận được sự thông cảm và đóng góp những ý kiến vô cùng quý báu của các thầy cô, bạn bè, nhằm tạo tiền đề thuận lợi cho việc phát triển đề tài trong tương lai.

Hải Phòng, tháng 07 năm 2009

Sinh viên thực hiện

Vũ Thế Huy

LỜI NÓI ĐẦU

Tại sao môn hình học được xem là "khô cứng" và "lạnh lẽo"? Một trong lý do cơ bản nhất là vì nó không thể mô tả được thế giới tự nhiên xung quanh chúng ta. Những đám mây trôi lơ lửng không phải là những quả cầu, những ngọn núi nhấp nhô không phải là những chóp nón, những bờ biển thơ mộng không phải là những đường tròn. Từ cảm nhận trực quan này, nhà toán học thiên tài Mandelbrot nảy sinh ra ý tưởng về sự tồn tại của một môn "Hình học của tự nhiên", Fractal Geometry. Từ đây, tôi và bạn có thể mô tả một đám mây một cách chính xác như một kiến trúc sư thiết kế căn nhà của họ.

Fractal Geometry mở ra một lãnh vực mới của toán học và có những tiến bộ đặc biệt trong vài chục năm gần đây, là môn khoa học trẻ được rất nhiều nhà khoa học quan tâm ở trên thế giới cũng như ở Việt Nam. Nhờ vào công cụ chính là máy tính có sự phát triển nhanh chóng về tốc độ mà việc biểu diễn Fractal trở nên dễ dàng hơn nên hình học Fractal đã được đông đảo mọi người chú ý và thích thú nghiên cứu, các hình Fractal được sinh bởi máy tính có hình ảnh khá đẹp và rất thú vị. Với một người tình cờ quan sát màu sắc của cấu trúc Fractal sẽ bị lôi cuốn bởi hình thức đẹp hơn nhiều lần so với các đối tượng toán học đã từng được biết đến

MỤC LỤC

NỘI DUNG	TRANG
LỜI CẢM ƠN	4
LỜI NÓI ĐẦU	5
CHƯƠNG 1. TÌM HIỂU VỀ FRACTAL	9
1.1. Sự hình thành và phát triển của Fractal	10
1.2. Các ứng dụng tổng quát của hình học Fractal	11
1.3. Các kiến thức toán học cơ bản	13
1.3.1. Không gian Metric	13
1.3.2. Không gian Hausdorff($H(X),h$)	15
1.3.3. Ánh xạ co	17
1.3.4. Định lý cắt dán (COLLAGE)	17
1.4. Số chiều Fractal	19
1.5. Các hệ hàm lặp IFS (ITERATED FUNCTION SYSTEM)	19
1.6. Đặc trưng phổ biến của hình học Fractal.....	20
1.6.1. Tự đồng dạng.....	20
1.6.2.Thứ nguyên phân số.....	20
CHƯƠNG 2. MỘT SỐ ĐƯỜNG FRACTAL CƠ BẢN	21
2.1. Họ đường Vonckock.....	22
2.1.1. Đường hoa tuyết VoncKock – Nowflake	22
2.1.2. Đường VoncKock – Gosper	23
2.1.3. Đường VoncKock bậc hai 3-đoạn	25
2.2. Họ đường Peano	26
2.2.1. Đường Peano nguyên thủy	26
2.2.2. Đường Peano cải tiến	27
2.2.3. Tam giác Cesaro	28
2.3. Đường Sierpinski	29
2.4. Cây Fractal.....	30
2.4.1. Các cây thực tế	30
2.4.2. Biểu diễn toán học của cây	30
2.5. Hệ thống hàm lặp(IFS)	32
2.5.1. Các phép biến đổi Affine trong không gian R^2	32
2.5.2. IFS của các phép biến đổi Affine trong không gian R^2	33
2.5.3. Giải thuật lặp ngẫu nhiên	33
2.6. Tập Mandelbrot.....	35
2.6.1. Đặt vấn đề	35
2.6.2. Công thức toán học	36
2.6.3. Xây dựng thuật toán	36
2.7. Tập Julia.....	38
2.7.1. Đặt vấn đề	38
2.7.2. Công thức toán học	38

2.7.3. Xây dựng thuật toán	39
2.8. Họ các đường cong Phonix.....	40
2.9. Kết luận.....	42
CHƯƠNG 3. CHƯƠNG TRÌNH CÀI ĐẶT THỬ	44
3.1. Kết quả cài đặt	45
3.1.1. Giao diện chính của chương trình	45
3.1.2. Kết quả một số đường và mặt cài đặt	45
3.2. Hạn chế	46
TÀI LIỆU THAM KHẢO	47

Việc phát hiện ra các hiện tượng hỗn độn hay các fractal, đã tạo ra một “khoa học mới”, khoa học về các hệ thống phức tạp, và nhìn trước rằng đó sẽ là khoa học của thế kỷ 21. Thế giới tự nhiên và xã hội hiện ra trước mắt ta phức tạp hơn rất nhiều những gì mà “khoa học” đã hình dung trước đó, đầy những hỗn tạp thiên nhiên và cát bụi trần thế, và hình như chính trong những hỗn tạp và cát bụi đó mà con người tìm ra được vẻ đẹp chân thực của cuộc sống và lẽ sống cao quý của mình. Rồi sau những cảm nhận ban đầu như vậy, người ta đã nghiêm túc nghĩ đến việc phải xây dựng một khoa học mới, khoa học về cái phức tạp, hay về các hệ thống phức tạp, để làm cơ sở chung cho những nhận thức mới của mình.

*– trích lời của **GS. Phan Đình Diệu** đăng trên báo xaluan.com*

Chương 1 :

TÌM HIỂU VỀ FRACTAL

1.1. SỰ HÌNH THÀNH VÀ PHÁT TRIỂN CỦA FRACTAL

“Khoa học hiện đại” vốn được phát triển từ kỷ nguyên Khai sáng (Enlightenment) ở thế kỷ 17, khởi đầu bởi những phát minh của Kepler, Galilei và Newton về các định luật của vận động vật chất và bởi sự thúc đẩy mạnh mẽ của cuộc cách mạng công nghiệp. Với những phát minh đó, lần đầu tiên con người tìm được một cách nhận thức thế giới bằng “phương pháp khoa học” mà không cần dựa vào một sức mạnh thần thánh nào hay phải viện đến những liên cảm huyền bí nào giữa trí tuệ con người với một tinh thần hay linh hồn của tự nhiên. Và cũng do đó, “khoa học” đã được phát triển trước hết và mạnh mẽ ở các lĩnh vực nghiên cứu tự nhiên như cơ học, vật lý học, thiên văn học, v.v... Cuối thế kỷ mười chín các nhà vật lý đã coi vật lý là lĩnh vực đóng kín và đầy đủ. Mọi sự việc, hiện tượng có tầm quan trọng trong lĩnh vực vật lý đều đã được phát hiện. Do đó chỉ cần làm rõ những sự kiện thiếu chặt chẽ sau đó đánh dấu "hoàn chỉnh". Vì thế trong khi sắp xếp một số sự kiện **không chặt chẽ** Schrodinger đã phát minh ra cơ học lượng tử và Einstein đã tạo ra thuyết tương đối. Do đó các nhà vật lý rất hoang mang vì xuất hiện nhiều vấn đề cần giải quyết hơn trước. Đối với Whitehead nhà toán học và triết học Mỹ thì một trong những khía cạnh có ý nghĩa nhất của tiền bộ này là quan điểm triết học về vật lý “tự nhiên không đến với ta sạch sẽ như ta nghĩ về nó”, và khoa học, trong tinh thần qui giản của cơ giới luận, với việc làm sạch tự nhiên đó đã “hắt đổ cả đũa bé cùng với chậu nước tắm” . Ta trở lại đối mặt với một tự nhiên và cuộc đời như nó vốn có, đầy cát bụi trần gian, lô nhô khúc khuỷu, gãy vỡ quanh co, chứ đâu có thẳng băng, tròn trịa như các hình vẽ của khoa học hình thức. Ta nhận ra điều đó cả từ trong chính bản thân phần cốt lõi tri thức của khoa học, cả từ những lĩnh vực ứng dụng khoa học đang có nhiều hứa hẹn thành công.

Nền tảng đầu tiên của Fractal đã được nhà toán học và vật lý học Leibniz đưa ra cùng khoảng thời gian đó là *self-similarity* (tính tự tương tự) mặc dù chưa hoàn chỉnh nhưng đã mở ra bước tiến đầu tiên. Nhưng nó chỉ được biết đến với cái tên hình học Fractal đầu tiên vào năm 1872 khi Karl Weierstrass đưa ra một ví dụ với chức năng không trực quan của thuộc tính hiện thân khắp nơi liên tục mà không phụ thuộc vào không gian. Vào 1904, volt Helge Koch không hài lòng với kết luận của Weierstrass, đưa ra một định nghĩa hình học cao hơn về chức năng tương tự, mà bây giờ được gọi là *đường cong Koch*. Dựa trên thành quả đó , Waclaw Sierpinski đã xây dựng với tam giác vào năm 1915 mà sau nay gọi là *tam giác Sierpinski*. Ban đầu các Fractal hình học đã được mô tả như là những đường cong hơn là hình 2D mà ta được biết đến như là trong các công trình hiện đại ngày nay. Vào 1918, Bertrand Russell đã

đoán nhận về một " vẻ đẹp tối cao " bên trong nảy sinh trong toán học Fractal. Ý tưởng của các đường đồng dạng được cầm xa hơn nữa bởi Pierre Lévy Paul, người mà, trong 1938 đã đưa ra kiến giả về một đường cong fractal mới, *đường cong C Lévy*. Georg Cantor cũng đã cung cấp các ví dụ về các tập con cầu thuộc tính bất thường thực sự phù hợp – *tập Cantor* bây giờ cũng được công nhận là fractals. Những hàm lặp trong mặt phẳng phức được điều tra vào cuối thế kỉ 19 - đầu thế kỉ 20 bởi Henry Poincaré, Felix Klein, Pierre Fatou và Gaston Julian. Tuy nhiên, không có sự giúp đỡ của đồ họa máy tính hiện đại, họ thiếu những phương tiện để làm cho trực quan về đẹp của nhiều đối tượng mà họ khám phá. Vào những năm 1960, Benoit Mandelbrot bắt đầu điều tra *self-similarity* (tính tự tương tự), mà trước đó được xây dựng trên công việc của Lewis Fry Richardson. Cuối cùng, vào 1975 Mandelbrot đưa ra từ "Fractal" để biểu thị một đối tượng mà có miền Hausdorff- Besicovitch là lớn hơn so với các miền trước đây. Ông ta minh họa định nghĩa toán học này bởi máy tính những trực quan hóa. Những ảnh này bắt đầu trở lên nổi tiếng dựa vào phép đệ quy, dẫn tới hình thành thuật ngữ "Fractal" ngày nay.

1.2. CÁC ỨNG DỤNG TỔNG QUÁT CỦA HÌNH HỌC FRACTAL

Hiện nay có 3 hướng ứng dụng lớn của lý thuyết hình học phân hình, bao gồm:

- Ứng dụng trong vấn đề tạo ảnh trên máy tính.
- Ứng dụng trong công nghệ nén ảnh.
- Ứng dụng trong nghiên cứu khoa học cơ bản.

□ ỨNG DỤNG TRONG VẤN ĐỀ TẠO ẢNH TRÊN MÁY TÍNH:

Cùng với sự phát triển vượt bậc của máy tính cá nhân trong những năm gần đây, công nghệ giải trí trên máy tính bao gồm các lĩnh vực như trò chơi, animation video... nhanh chóng đạt đỉnh cao của nó. Công nghệ này đòi hỏi sự mô tả các hình ảnh của máy PC với sự phong phú về chi tiết và màu sắc với sự tốn kém rất lớn về thời gian và công sức. Gánh nặng đó hiện nay đã được giảm nhẹ đáng kể nhờ các mô tả đơn giản nhưng đầy đủ của lý thuyết Fractal về các đối tượng tự nhiên. Với hình học phân hình khoa học máy tính có trong tay một công cụ mô tả tự nhiên vô cùng mạnh mẽ.

Ngoài các ứng dụng trong lĩnh vực giải trí, hình học phân hình còn có mặt trong các ứng dụng tạo ra các hệ đồ họa trên máy tính. Các hệ này cho phép người sử dụng tạo lập và chỉnh sửa hình ảnh, đồng thời cho phép tạo các hiệu ứng vẽ rất tự nhiên hết sức hoàn hảo và phong phú, ví dụ hệ phần mềm thương mại Fractal Design Painter của công ty Fractal

Design. Hệ này cho phép xem các hình ảnh dưới dạng hình hoạ vécto cũng như sử dụng các ảnh bitmap như các đối tượng. Như đã biết, các ảnh bitmap hiển thị hết sức nhanh chóng, thích hợp cho các ứng mang tính tốc độ, các ảnh véctor mất nhiều thời gian hơn để trình bày trên màn hình (vì phải được tạo ra bằng cách vẽ lại) nhưng đòi hỏi rất ít vùng nhớ làm việc. Do đó ý tưởng kết hợp ưu điểm của hai loại đối tượng này sẽ giúp tiết kiệm nhiều thời gian cho người sử dụng các hệ phần mềm này trong việc tạo và hiển thị các ảnh có độ phức tạp cao.

□ **ỨNG DỤNG TRONG CÔNG NGHỆ NÉN ẢNH:**

Một trong những mục tiêu quan trọng hàng đầu của công nghệ xử lý hình ảnh hiện nay là sự thể hiện hình ảnh thế giới thực với đầy đủ tính phong phú và sống động trên máy tính. Vấn đề nan giải trong lĩnh vực này chủ yếu do yêu cầu về không gian lưu trữ thông tin vượt quá khả năng lưu trữ của các thiết bị thông thường. Có thể đơn cử một ví dụ đơn giản: 1 ảnh có chất lượng gần như chụp đòi hỏi vùng nhớ 24 bit cho 1 điểm ảnh, nên để hiện ảnh đó trên màn hình máy tính có độ phân giải tương đối cao như 1024x768 cần xấp xỉ 2.25Mb. Với các ảnh “thực” 24 bit này, để thể hiện được một hoạt cảnh trong thời gian 10 giây đòi hỏi xấp xỉ 700Mb dữ liệu, tức là bằng sức chứa của một đĩa CD-ROM. Như vậy khó có thể đưa công nghệ multimedia lên PC vì nó đòi hỏi một cơ sở dữ liệu ảnh và âm thanh khổng lồ.

Đứng trước bài toán này, khoa học máy tính đã giải quyết bằng những cải tiến vượt bậc cả về phần cứng lẫn phần mềm. Tất cả các cải tiến đó dựa trên ý tưởng nén thông tin hình ảnh trùng lặp. Tuy nhiên cho đến gần đây, các phương pháp nén thông tin hình ảnh đều có 1 trong 2 yếu điểm sau:

- Cho tỉ lệ nén không cao. Đây là trường hợp của các phương pháp nén không mất thông tin.
- Cho tỉ lệ nén tương đối cao nhưng chất lượng ảnh nén quá kém so với ảnh ban đầu. Đây là trường hợp của các phương pháp nén mất thông tin, ví dụ chuẩn nén JPEG.

Các nghiên cứu lý thuyết cho thấy để đạt một tỷ lệ nén hiệu quả (kích thước dữ liệu nén giảm so với ban đầu ít nhất hàng trăm lần), phương pháp nén mất thông tin là bắt buộc. Tuy nhiên một vấn đề đặt ra là làm thế nào có được một phương pháp nén kết hợp cả tính hiệu quả về tỷ lệ nén lẫn chất lượng ảnh so với ảnh ban đầu? Phương pháp nén ảnh phân hình được áp dụng gần đây bởi Iterated System đáp ứng được yêu cầu này.

Kết quả nén cho bởi quá trình này rất cao, có thể đạt tỷ lệ 10000: 1 hoặc cao hơn. Một ứng dụng thương mại cụ thể của kỹ thuật nén phân hình là bộ bách khoa toàn thư multimedia với tên gọi “Microsoft Encarta” được đưa ra vào tháng 12/1992. Bộ bách khoa này bao gồm hơn 7 giờ âm thanh, 100 hoạt cảnh, 800 bản đồ màu cùng với 7000 ảnh chụp cây cối, hoa quả, con người, phong cảnh, động vật,... Tất cả được mã hoá dưới dạng các dữ liệu fractal và chỉ chiếm xấp xỉ 600Mb trên một đĩa compact.

□ **ỨNG DỤNG TRONG KHOA HỌC CƠ BẢN:**

Có thể nói cùng với lý thuyết topo, hình học phân hình Fractal đã cung cấp cho khoa học một công cụ khảo sát tự nhiên vô cùng mạnh mẽ như đã trình bày trong phần I.1, vật lý học và toán học thế kỷ XX đối đầu với sự xuất hiện của tính hỗn độn trong nhiều quá trình có tính quy luật của tự nhiên. Từ sự đối đầu đó, trong những thập niên tiếp theo đã hình thành một lý thuyết mới chuyên nghiên cứu về các hệ phi tuyến, gọi là lý thuyết hỗn độn. Sự khảo sát các bài toán phi tuyến đòi hỏi rất nhiều công sức trong việc tính toán và thể hiện các quan sát một cách trực quan, do đó sự phát triển của lý thuyết này bị hạn chế rất nhiều. Chỉ gần đây với sự ra đời của lý thuyết fractal và sự hỗ trợ đắc lực của máy tính, các nghiên cứu chi tiết về sự hỗn độn mới được đẩy mạnh. Vai trò của hình học phân hình trong lĩnh vực này thể hiện một cách trực quan các cư xử kỳ dị của các tiến trình được khảo sát, qua đó tìm ra được các đặc trưng hoặc các cấu trúc tương tự nhau trong các ngành khoa học khác nhau. Hình học phân hình đã được áp dụng vào nghiên cứu lý thuyết từ tính, lý thuyết các phức chất trong hoá học, lý thuyết tái định chuẩn và phương trình Yang & Lee của vật lý, các nghiệm của các hệ phương trình phi tuyến được giải dựa trên phương pháp xấp xỉ liên tiếp của Newton trong giải tích số,... Các kết quả thu được giữ vai trò rất quan trọng trong các lĩnh vực tương ứng.

1.3. CÁC KIẾN THỨC TOÁN HỌC CƠ BẢN

1.3.1. Không gian Metric :

a, Không gian

Định nghĩa 1:

Không gian X là một tập mà các điểm của không gian là các phần tử của tập đó.

Định nghĩa 2: (không gian Metric) :

Không gian (X, d) là một không gian metric nếu hàm $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn các điều kiện sau với d là khoảng cách giữa 2 điểm $x, y \in X$:

$$* d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$$

$$* 0 < d(x, y) < \infty \quad \forall x, y \in X, x \neq y$$

$$* d(x, x) = 0 \quad \forall x \in X$$

$$* d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X$$

hàm d được gọi là metric .

Định nghĩa 3:

Hai metric d_1 và d_2 được gọi là tương đương trên X nếu tồn tại các hằng số $0 < c_1, c_2 < \infty$ sao cho:

$$c_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y) \quad \forall (x, y) \in X \times X$$

Định nghĩa 4:

Hai không gian Metric (X_1, d_1) và (X_2, d_2) là tương đương nếu tồn tại hàm $h: X_1 \rightarrow X_2$ là song ánh sao cho metric \tilde{d}_1 trên X_1 được định nghĩa bởi công thức:

$$\tilde{d}_1(x, y) = d_2(h(x), h(y)) \quad \forall (x, y) \in X_1$$

là tương đương với d_1 .

Định nghĩa 5:

Hàm $f: X_1 \rightarrow X_2$ từ không gian metric (X_1, d_1) và không gian metric (X_2, d_2) là hàm liên tục nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ và $x \in X_1$ $\exists \delta > 0$ sao cho:

$$d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

b) *Dãy Cauchy, tập đóng, không gian metric đầy đủ:*

Định nghĩa 1:

Dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ các điểm trên không gian metric (X, d) được gọi là dãy Cauchy nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ là số tự nhiên sao cho:

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m > N$$

Định nghĩa 2:

Dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ các điểm của không gian metric (X, d) được gọi là hội tụ tới điểm $x \in X$ nếu với mọi $\varepsilon > 0, \exists N$ là số tự nhiên sao cho:

$$d(x_n, x) < \varepsilon, \quad \forall n > N$$

x được gọi là giới hạn của dãy và: $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

Định lý:

Nếu dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ trong không gian metric (X, d) hội tụ tới điểm $x \in X$ thì dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy Cauchy.

Định nghĩa 3:

Không gian metric (X, d) là đầy đủ nếu mọi dãy Cauchy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ trong X có giới hạn $x \in X$.

Ví dụ: các không gian sau là không gian metric đầy đủ:

=====

(\mathbb{R}, d) (\mathbb{R}^2, d) , với d là metric Ôclit.

Định nghĩa 4:

$S \subset X$ là tập con của không gian metric. Điểm $x \in X$ là điểm giới hạn của S nếu tồn tại dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ các điểm $x_n \in S \setminus \{x\}$ sao cho: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

Định nghĩa 5:

$S \subset X$ là tập con của không gian metric (X, d) . Bao đóng của S (ký hiệu: \bar{S}) được định nghĩa như sau:

$$\bar{S} = S \cup \{\text{các điểm giới hạn của } S\}$$

S là tập đóng nếu nó chứa mọi điểm giới hạn của nó : $S = \bar{S}$

Ví dụ: $S = \{x=1/n; n=1, 2, \dots\}$ là tập đóng trên $([0, 1], d)$, d là metric Ôcolit.

c) Tập compact, tập giới nội, tập mở

Định nghĩa 1:

$S \subset X$ là tập con của không gian metric (X, d) . Tập S là compact nếu mọi dãy vô hạn $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ trong S đều chứa dãy con hội tụ trong S .

Định nghĩa 2:

$S \subset X$ là tập con của không gian metric (X, d) . S là tập giới nội nếu tồn tại điểm $a \in X$ và số $R > 0$ sao cho:

$$d(a, x) < R \quad \forall x \in S$$

Định nghĩa 3:

$S \subset X$ là tập con của không gian metric (X, d) . S là giới nội toàn phần nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại tập hữu hạn các điểm $\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \subset S$ sao cho khi $x \in S$ thì

$$d(x, y_i) < \varepsilon \quad \text{với } y_i \in \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$$

Định lý:

(X, d) là không gian metric đầy đủ $S \subset X$. S là tập compact và đầy đủ nếu nó đóng và giới nội toàn phần.

Định nghĩa 4:

$S \subset X$ là tập con của không gian metric (X, d) . S được gọi là tập mở nếu với mỗi $s \in S \exists \varepsilon > 0$ sao cho $\mathbf{B}(s, \varepsilon) = \{y \in X : d(s, y) < \varepsilon\} \subset S$.

1.3.2. Không gian Hausdorff $(H(X), h)$:

Phần này trình bày một số khái niệm về không gian Hausdorff là cơ sở để xây dựng fractal.

Định nghĩa 1:

(X, d) là không gian metric đầy đủ. Ký hiệu $H(X)$ là tập các tập compact của X .

Định nghĩa 2:

(X, d) là không gian metric đầy đủ, $x \in X$ và $B \in H(X)$. Khi đó khoảng cách từ điểm x tới tập B được xác định như sau:

$$d(x, B) = \text{Min}\{d(x, y) : y \in B\}.$$

Định nghĩa 3:

(X, d) là không gian metric đầy đủ $A, B \in H(X)$ khi đó khoảng cách từ tập A tới tập B được xác định như sau:

$$d(A, B) = \text{Max}\{d(x, B) : x \in A\}.$$

Định nghĩa 4:

(X, d) là không gian metric đầy đủ. Khoảng cách Hausdorff giữa các điểm $A, B \in H(X)$ được xác định như sau:

$$h(A, B) = d(A, B) \vee d(B, A)$$

Định nghĩa 5:

$S \subset X$ và $\Gamma > 0$ thì $S + \Gamma = \{y \in X : d(x, y) \leq \Gamma \text{ với } x \in S\}$. Ta gọi $S + \Gamma$ được gọi là dao động của S bởi hình cầu bán kính Γ .

Bổ đề 1:

Cho $A, B \in H(X)$, (X, d) là không gian metric, $\varepsilon > 0$. Khi đó ta có khẳng định: $h(A, B) \leq \varepsilon \Leftrightarrow A \subset B + \varepsilon$ và $B \subset A + \varepsilon$.

Bổ đề 2: (bổ đề mở rộng)

(X, d) là không gian metric, $\{A_n : n = 1, 2, \dots, \infty\}$ là dãy Cauchy, các điểm trong $(H(X), h)$, $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ là dãy vô hạn các số nguyên $0 < n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

Giả sử có dãy Cauchy $\{x_{n_j} \in A_{n_j} ; j=1, 2, \dots\}$ trong (X, d) thì tồn tại dãy Cauchy $\{x_n \in A_n ; n \geq 1\}$ sao cho

$$\tilde{x}_{n_j} = x_{n_j} \quad \forall j = 1, 2, 3, \dots$$

Định lý: (Về tính đầy đủ của không gian fractal)

(X, d) là không gian metric đầy đủ thì $(H(X), h)$ cũng là không gian metric đầy đủ. Hơn nữa nếu $\{A_n \in H(X)\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy Cauchy thì $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \in H(X)$.

Có thể mô tả giới hạn của dãy như sau:

$$A = \{x \in X : \{x_n \in A_n\} \text{ là dãy Cauchy hội tụ đến } x\}$$

Định lý :

(X, d) là không gian metric, $\{x_n\}$ là dãy Cauchy hội tụ tới $x \in X$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = 0$). nếu hàm $f : X \rightarrow X$ liên tục thì $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$.

1.3.3. Ánh xạ co**Định nghĩa 1:**

Biến đổi $f: X \rightarrow X$ trên không gian metric (X, d) được gọi là co hay ánh xạ co nếu tồn tại hằng số $0 \leq s < 1$ sao cho:

$$d(f(x), f(y)) \leq s \cdot d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Khi đó s được gọi là hệ số co của f .

Định lý: (định lý ánh xạ co)

$f: X \rightarrow X$ là ánh xạ co trên không gian metric đầy đủ (X, d) . Thì f có điểm cố định duy nhất $x_f \in X$, $\forall x \in X$ dãy $\{f^{(n)}(x) : n=0, 1, 2, \dots\}$ hội tụ tới x_f tức là:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(x) = x_f \quad \text{đối với mỗi } x \in X.$$

Bổ đề 1:

Cho không gian metric (X, d) và ánh xạ w từ X lên chính nó. Nếu $w: X \rightarrow X$ là ánh xạ co trên (X, d) thì w liên tục.

Bổ đề 2:

$w: X \rightarrow X$ là ánh xạ liên tục trên không gian metric (X, d) thì w là ánh xạ từ $H(X)$ vào $H(X)$.

Bổ đề 3:

$w: X \rightarrow X$ là ánh xạ co trên không gian metric (X, d) với hệ số co s . Ta xác định biến đổi $w: H(X) \rightarrow H(X)$ như sau:

$$w(B) = \{w(x) : x \in B\} \quad \forall B \in H(X).$$

Khi đó w là ánh xạ co trên $(H(X), h(d))$ với hệ số co s .

Bổ đề 4:

Cho (X, d) là không gian metric. Nếu h là metric hausdorff thì

$$h(B \cup C, D \cup E) \leq h(B, D) \vee h(C, E) \quad \forall B, C, D, E \in H(X)$$

Bổ đề 5:

(X, d) là không gian metric, $\{w_n : n=1, 2, \dots, N\}$ là các ánh xạ co trên $(H(X), h)$ với hệ số co tương ứng của w_n là s_n . Ánh xạ $W: H(X) \rightarrow H(X)$ được xác định bởi:

$$W(B) = w_1(B) \cup w_2(B) \dots \cup w_n(B) = \bigcup_{n=1}^N w_n(B)$$

với mỗi $B \in H(X)$ thì W là ánh xạ co với hệ số co $s = \text{Max}\{s_n : n=1, 2, \dots, N\}$.

1.3.4. Định lý cắt dán (COLLAGE)

Định nghĩa 1:

Cho (X, d) là không gian metric, biến đổi $w_0:H(X) \rightarrow H(X)$ được xác định $w_0(B)=C$ với mọi $B \in H(X)$. Thì w_0 được gọi là biến đổi cô đọng và C được gọi là tập cô đọng.

Định nghĩa 2:

Cho $\{X; w_n, n=1, 2, \dots, N\}$ là hệ hàm lặp hyperbol với hệ số co $0 \leq s < 1$. Nếu $w_0:H(X) \rightarrow H(X)$ là một biến đổi cô đọng thì $\{X; w_n, n=0, 1, 2, \dots, N\}$ là hệ hàm lặp hyperbol cô đọng với hệ số co s .

Định lý:

Cho $\{X; w_n, n=0, 1, 2, \dots, N\}$ là hệ hàm lặp hyperbol cô đọng với hệ số co s thì biến đổi $W:H(X) \rightarrow H(X)$ được xác định như sau:

$$W(B) = \bigcup_{n=0}^N w_n(B) \quad \forall B \in H(X)$$

là ánh xạ co trên không gian metric đầy đủ $(H(X), h(d))$ với hệ số co s . Khi đó:

$$h(W(B), W(C)) \leq s \cdot h(B, C) \quad \forall B, C \in H(X)$$

điểm cố định duy nhất $A \in H(X)$ thỏa mãn:

$$A = W(A) = \bigcup_{n=0}^N w_n(A) \text{ trong đó } A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^{on}(B) \quad \text{với } B \in H(X).$$

Định lý(collage) :

Cho (X, d) là không gian metric đầy đủ. Cho tập $L \in H(X)$, và số $\varepsilon > 0$. Chọn IFS $\{X; w_n, n=1, 2, \dots, N\}$ (hoặc IFS cô đọng) với hệ số co $0 \leq s < 1$ sao cho

$$h\left(L, \bigcup_{n=1(n=0)}^N w_n(L)\right) \leq \varepsilon \quad \text{với } h(d) \text{ là metric Hausdorff}$$

thì

$$h(L, A) \leq \varepsilon / (1 - s) \quad \text{với } A \text{ là tập hút của IFS}$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n(L)$$

$$A = L \cup w(L) \cup w^2(L) \cup \dots = w^n(L)$$

tức là :

$$h(L, A) \leq (1 - s)^{-1} h\left(L, \bigcup_{n=1(n=0)}^N w_n(L)\right) \quad \forall L \in H(X).$$

Tập A và A_0 cho trước $A, A_0 \in H(X)$, hệ w_0, w_1, \dots, w_n tạo thành hệ IFS hyperbol thì: $h(A, w(A_0) \cup w^2(A_0) \cup \dots) \leq \varepsilon / (1 - s)$ Nếu đầu tiên tập

xuất phát A_0 khác tập cho trước A là ε thì sau lần lặp sẽ khác là $\varepsilon/(1-s)$. Ý nghĩa của định lý cắt dán nhằm đánh giá sự hội tụ của thuật toán lặp.

1.4. SỐ CHIỀU FRACTAL

Giả sử rằng chúng ta bắt đầu với bộ khởi tạo dạng hình học đơn giản gồm một số đoạn thẳng liên thông. Nó có thể là tam giác, hình vuông hay thậm chí đường thẳng. Chúng ta hãy xác định một bộ tạo sinh gồm N đoạn thẳng, mỗi đoạn thẳng có độ dài r , ở đây r là một phần của đoạn thẳng đang được thay thế. Việc sắp xếp N đoạn thẳng sao cho khoảng cách từ tạo sinh tới điểm cuối của nó giống như độ dài của đoạn thẳng đang được thay thế lặp lại vô hạn lần và mỗi lần thay thế mỗi đoạn thẳng của trước bởi đoạn thẳng của bộ tạo sinh có co dãn tỉ lệ. Điều đó có thể thước Hausdorff-Besivitch của đường cong fractal là:

$$D = \log N / \log (1/r)$$

Việc so sánh số chiều này với số chiều Ocolit cho chúng ta một số tính chất của fractal. Chẳng hạn, D có giá trị 1.0 chỉ là đoạn thẳng thông thường, còn D có giá trị 2 có nghĩa là đường cong phủ hoàn toàn mặt phẳng.

1.5 CÁC HỆ HÀM LẶP IFS(ITERATED FUNCTION SYSTEM)

Định nghĩa 1:

Một hệ hàm lặp gồm một không gian metric đầy đủ (X, d) và một bộ hữu hạn các ánh xạ co w_n với hệ số co tương ứng s_n , $n = 1, 2, \dots, N$. Ta ký hiệu IFS thay cho cụm từ hàm lặp. Một IFS được ký hiệu bởi $[X; w_n, n = 1, 2, \dots, N]$ và hệ số co $s = \max_{1 \leq n \leq N} s_n$

Định lý sau tóm tắt các kết quả chính của một IFS:

Định lý IFS:

Xét một IFS $\{X; w_n, n = 1, 2, \dots, N\}$ với hệ số co s . Khi đó phép biến đổi $W : H(X) \rightarrow H(X)$ xác định bởi:

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^N w_n(B)$$

trong đó $B \in H(X)$ là một ánh xạ co trên không gian metric đầy đủ $(H(X), h(d))$ với hệ số co s , tức là:

$$h(W(B), W(C)) \leq s \cdot h(B, C), \forall B, C \in H(X)$$

Ánh xạ này có duy nhất một điểm bất động $A \in H(X)$ với:

$$A = W(A) = \bigcup_{n=1}^N w_n(A)$$

và được cho trước bởi $A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^n(B)$ với bất kỳ $B \in H(X)$.

Định nghĩa 2:

Điểm bất động $A \in H(X)$ mô tả trong định lý IFS được gọi là hấp tử của IFS đó.

1.6 ĐẶC TRƯNG PHỔ BIẾN CỦA HÌNH HỌC FRACTAL**1.6.1. Tự đồng dạng**

Qua các hình đã xem xét như đường con von Koch và đường cong Minkowski, Tam giác Sierpinski, Bọt biển Menger, ... những hình mà Mandelbrot gọi là “hình Fractal”, chúng ta thấy đó là những hình rất khác lạ. Chúng rất khác với những hình cổ điển trong hình học Euclid (tam giác, đa giác, hình tròn, ...) Những hình Fractal có cấu trúc nhìn bề ngoài rất phức tạp, dù xét ở bộ phận nhỏ đến đâu cũng có những chi tiết hết sức tinh vi. Thế nhưng những hình phức tạp này lại hình thành bằng cách thực hiện lặp đi lặp lại “quy tắc sinh” khá đơn giản.

Đặc trưng phổ biến của nhiều hình Fractal là có thể phân tích ra thành những bộ phận nhỏ tùy ý, mà mỗi bộ phận này là một bản sao thu nhỏ của toàn thể Fractal. Mandelbrot gọi đó là tính *tự đồng dạng*.

1.6.2. Thứ nguyên phân số

Trong hình học Euclide ta coi điểm là đối tượng không có “kích thước”, không có chiều dài, chiều rộng lẫn chiều cao, điểm có số chiều là 0 (hay thứ nguyên 0). Đường thẳng chỉ có chiều dài, không có chiều rộng, không có chiều cao, đường thẳng có số chiều là 1 (thứ nguyên 1). Mặt phẳng có số chiều là 2 (thứ nguyên 2), vì chỉ có chiều dài và chiều rộng, không có chiều cao. Không gian có số chiều là 3 (thứ nguyên 3)

Thứ nguyên của một đối tượng hình học có thể hiểu theo một cách khác

Xét các hình: đoạn thẳng, hình vuông, hình lập phương. Có thể chia mỗi hình này ra N phần để cho mỗi phần đồng dạng với hình ban đầu. Gọi tỷ số đồng dạng là $1/k$ thì ta có $N=k$ đối với đoạn thẳng, $N=k^2$ đối với hình vuông và $N=k^3$ đối với hình lập phương.

Như vậy tổng quát $N=k^d$, d là số thứ nguyên

Từ $N=k^d \Rightarrow d = \log N / \log k$

Ví dụ: Đường cong Minkowski. Tập sinh của nó sau lần đầu tiên áp dụng quy tắc sinh gồm có 8 đoạn thẳng ($N=8$), mỗi đoạn thẳng đồng dạng với hình ban đầu theo tỷ số $1/4$ ($k=4$), do đó thứ nguyên của Đường cong Minkowski là

$$\log 8 / \log 4 = 1,5$$

Tam giác Sierpinski có thứ nguyên $d = \log 3 / \log 2 = 1,585...$ vì tập sinh gồm 3 phần ($N=3$), mỗi phần đồng dạng với tam giác ban đầu theo tỷ số $1/2$ ($k=2$)

Chương 2 :

MỘT SỐ ĐƯỜNG FRACTAL CƠ BẢN

2.1 HỌ ĐƯỜNG VONKOCK

Trong phần này chúng ta sẽ cùng nhau thảo luận các fractal được phát sinh bằng cách sử dụng đệ qui initiator / generator với kết quả là các hình tự đồng dạng hoàn toàn. Các hình này có số chiều tự đồng dạng, số chiều fractal và số chiều Hausdorff-Besicovitch bằng nhau.

Số chiều được tính theo công thức sau:

$$D = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{R}\right)}$$

Trong đó:

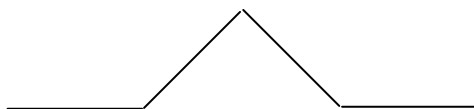
N: Là số đoạn thẳng.

R: Là số chiều dài của mỗi đoạn.

Chúng ta bắt đầu bằng một initiator, nó có thể là một đoạn thẳng hay một đa giác. Mỗi cạnh của initiator được thay thế bởi một generator, mà là tập liên thông của các đoạn thẳng tạo nên bằng cách đi từ điểm bắt đầu đến điểm cuối của đường thay thế (Thông thường các điểm của generator là một lưới vuông hay một lưới tạo bởi các tam giác đều). Sau đó mỗi đoạn thẳng của hình mới được thay thế bởi phiên bản nhỏ hơn của generator. Quá trình này tiếp tục không xác định được. Sau đây là một số đường Von Kock quan trọng:

2.1.1. Đường hoa tuyết Von Kock - Nowflake

Đường hoa tuyết được xây dựng bởi nhà toán học Helge Von Kock vào năm 1904. Ở đây chúng ta bắt đầu với initiator là một đoạn thẳng. Còn generator được phát sinh như sau:



Generator của đường von kock

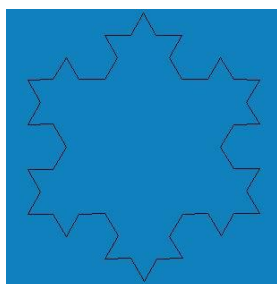
Chúng ta chia đoạn thẳng thành ba phần bằng nhau. Sau đó thay thế một phần ba đoạn giữa bằng tam giác đều và bỏ đi cạnh đáy của nó. Sau đó chúng ta lặp lại quá trình này cho mỗi đoạn thẳng mới. Nghĩa là chia đoạn thẳng mới thành ba phần bằng nhau và lặp lại các bước như trên.

Ta thấy quá trình xây dựng là tự đồng dạng, nghĩa là mỗi phần trong 4 phần ở bước thứ k là phiên bản nhỏ hơn 3 lần của toàn bộ đường cong ở bước thứ $(k-1)$.

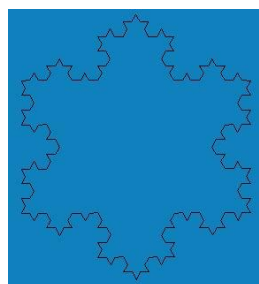
Như vậy mỗi đoạn thẳng của generator có chiều dài $R = 1/3$ (giả sử chiều dài đoạn thẳng ban đầu là 1) và số đoạn thẳng của generator $N = 4$. Do vậy số chiều fractal của đường hoa tuyết là:

$$D = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{R}\right)} = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1,2618$$

- Một số hình ảnh



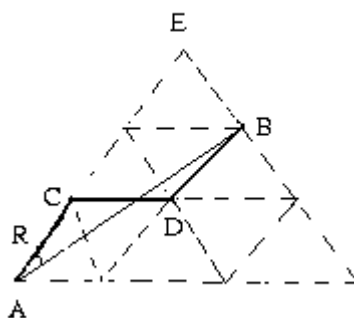
(Bậc 2)



(Bậc 3)

2.1.2. Đường Von Kock - Gosper

Một dạng khác của đường Von Kock được phát hiện bởi W.Gosper. Trong đường mới này, initiator là một lục giác đều và generator chứa ba đoạn nằm trên một lưới của các tam giác đều. Hình sau cho chúng ta thấy generator bố trí trên lưới.



Ta thấy đường này có chút khác biệt so với đường hoa tuyết ở chỗ đoạn thẳng được thay thế không nằm trên bất kỳ các đường nào của lưới.

Để tính số chiều fractal của đường Gosper trước hết ta tính chiều dài mỗi đoạn của generator. Giả sử chiều dài từ đầu mút của generator đến đầu mút khác là 1.

Đặt:

$$\begin{aligned} AC = R &\Rightarrow AE = 3AC = 3R \\ AB^2 &= AE^2 + EB^2 - 2AE \cdot EB \cdot \cos(60^\circ) \end{aligned}$$

Ta có:

$$\text{Mà } AB = 1, AE = 3R, EB = AC = R$$

$$\Rightarrow 1 = 9R^2 + R^2 - 2 \cdot 3R \cdot R / 2 = 7R^2$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$EB^2 = AE^2 + AB^2 - 2AEAB \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{AB^2 + AE^2 - EB^2}{2AEAB} = \frac{1 + 9R^2 - R^2}{2 \cdot 3R \cdot 1} = \frac{1 + 8R^2}{6R} = \frac{1 + 8 \cdot \frac{1}{7}}{6 \cdot \frac{1}{\sqrt{7}}} = \frac{5\sqrt{7}}{14}$$

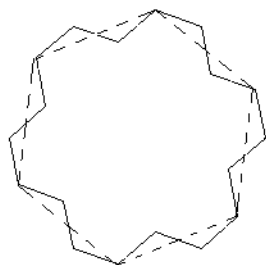
$$\approx 0.94491$$

$$\Rightarrow \alpha \approx 19^\circ 1'$$

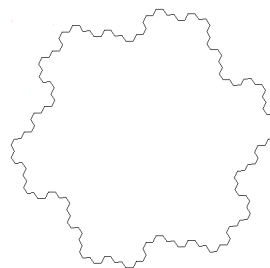
Vì $N = 3$ nên số chiều fractal của đường Gosper là:

$$D = \frac{\log 3}{\log \sqrt{7}} \approx 1.1291$$

• **Một số hình ảnh của đường**



(Mức 1)

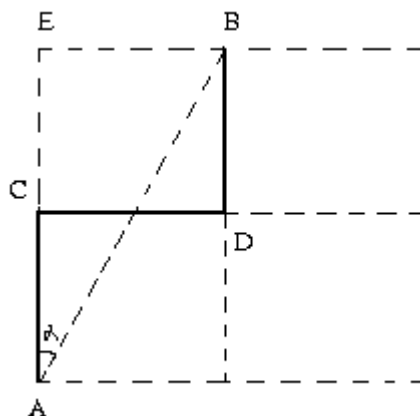


(Mức 2)

2.1.3 Đường Von Kock bậc hai 3-đoạn

Một vài đường cong kế tiếp được gọi là bậc hai (quadric) vì initiator là một hình vuông (Tuy nhiên điều này không có gì bí mật về initiator là hình vuông, nó có thể là một đa giác). Hơn nữa chúng ta sẽ tạo ra các generator trên lưới các hình vuông. Đối với đường cong đầu tiên này, một generator của 3-đoạn sẽ được sử dụng.

Hình sau sẽ cho chúng ta một generator:



Để tính số chiều fractal của đường này trước hết ta tính số chiều của mỗi đoạn của generator. Giả sử chiều dài từ đầu mút của generator đến đầu mút khác là 1:

Ta có:

$$\text{Đặt } AC = R$$

$$AB^2 = AE^2 + EB^2$$

$$\text{Mà } AB = 1, AE = 2AC = 2R, EB = R \Rightarrow 1 = 4R^2 + R^2$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$EB^2 = EA^2 + AB^2 - 2EA \cdot AB \cdot \cos\alpha$$

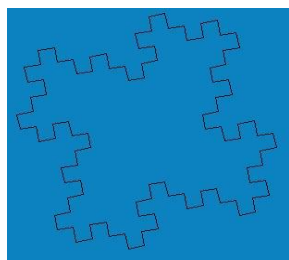
$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{EA^2 + AB^2 - EB^2}{2EA \cdot AB} = \frac{4R^2 + 1 - R^2}{2 \cdot 2R \cdot 1} = \frac{1 + 3R^2}{4R} = \frac{1 + 3 \cdot \frac{1}{5}}{4 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0.894427$$

$$\Rightarrow \alpha \approx 25^{\circ}56'$$

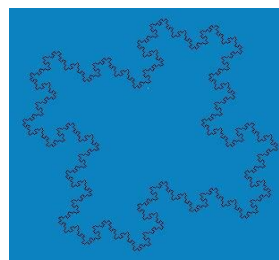
Vì $N = 3$ nên số chiều fractal là:

$$D = \frac{\log 3}{\log \sqrt{5}} \approx 1.3652$$

- **Một số hình ảnh của đường**



(Mức 3)

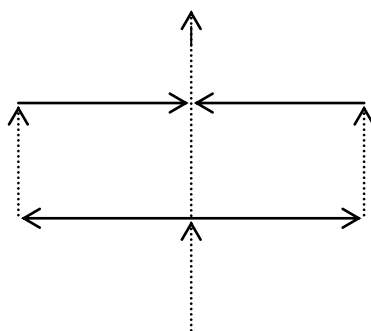


(Mức 5)

2.2.HỌ ĐƯỜNG PEANO

2.2.1 Đường Peano nguyên thủy

Hình sau cho chúng ta thấy generator của đường Peano nguyên thủy:



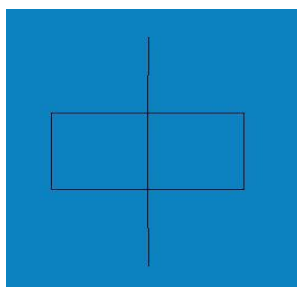
Ở đây initiator rất đơn giản. Nó chỉ là một đoạn thẳng. Thật không may, tất cả đều tự cắt, nên hầu như không thể xác định cách thức mà theo đó đường Peano được vẽ, ngay cả các mũi tên được thêm vào trong hình vẽ. Nhìn vào hình vẽ này chúng ta thấy generator được hình thành như sau:

Đầu tiên chúng ta dựng đoạn thẳng đứng về phía trên, rồi dựng đoạn thẳng ngang về bên trái, rồi dựng đoạn thẳng đứng về phía trên, rồi dựng dựng đoạn thẳng ngang về bên phải, rồi dựng đoạn thẳng đứng về phía dưới, rồi dựng đoạn thẳng ngang về bên phải, rồi dựng đoạn thẳng đứng về phía trên, rồi dựng đoạn thẳng ngang về phía trái, và cuối cùng dựng đoạn thẳng đứng về phía trên.

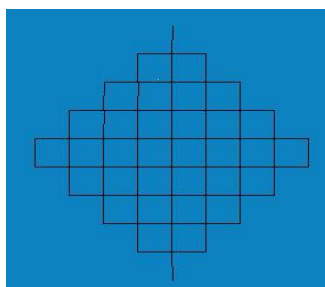
Như vậy generator chứa 9 đoạn thẳng (nghĩa là $N = 9$), chiều dài mỗi đoạn của generator là $R = 1/3$ (Giả sử chiều dài đoạn thẳng ban đầu là 1). Do đó số chiều fractal là:

$$D = \frac{\log 9}{\log 3} \Rightarrow D = 2$$

- **Một số hình ảnh của đường**



(Mức 1)



(Mức 3)

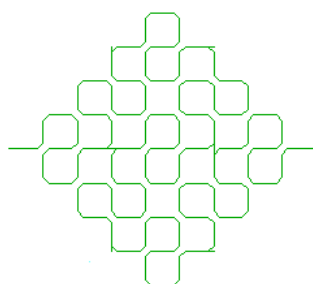
2.2.2. Đường Peano cải tiến

Nếu không có sự tự giao của generator đối với đường Peano thì việc đi theo vết của nó và quan sát cách thức vẽ sẽ dễ dàng hơn. Vì thế, đường Peano cải tiến được phát triển theo kiểu làm tròn các góc để tránh sự tự giao. Kết quả chúng ta được generator như hình sau:



Tuy nhiên, generator cập nhật này chỉ có thể sử dụng ở mức thấp nhất trước khi thực vẽ đường cong. Nếu sử dụng nó ở mức cao hơn, bằng kỹ thuật đệ quy chúng ta cố gắng thay thế generator đối với mỗi đường chéo được làm tròn ở một góc, cũng như đối với các đoạn thẳng đều. Do đó generator cho đường Peano nguyên thủy được sử dụng ở mức cao. Vì generator sử dụng lần đệ quy cuối cùng có độ dài ngắn hơn so với đường Peano nguyên thủy, ta có số chiều fractal D nhỏ hơn 2. Khi số lần đệ quy tăng lên, số chiều fractal sẽ thay đổi và tiến về 2.

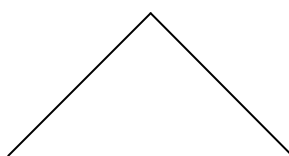
- **Một số hình ảnh của đường**



(Mức 2)

2.2.3. Tam giác Cesaro

Hình sau cho chúng ta xem một generator rất đơn giản (initiator là đoạn thẳng nằm ngang):



Generator chứa hai cạnh của một tam giác cân. Do đó, số đoạn thẳng là $N=2$ và chiều dài của mỗi đoạn là:

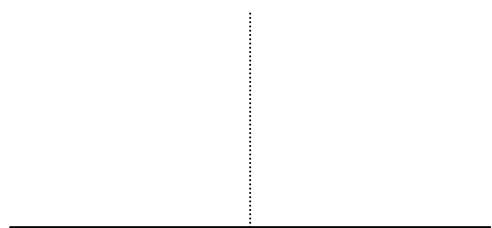
$$R = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Giả sử đoạn thẳng ban đầu có chiều dài là 1. Khi đó số chiều fractal là:

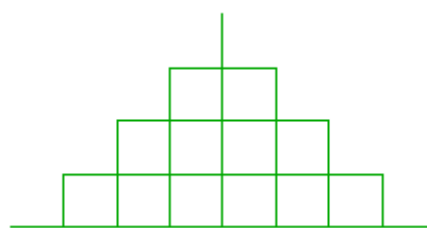
$$D = \frac{\log 2}{\log \sqrt{2}} \Rightarrow D = 2$$

Phụ thuộc vào các điều kiện cụ thể, generator này sẽ được đặt bên trái hoặc bên phải của mỗi đoạn thẳng mà nó thay thế. Nhiều đường cong khác nhau hoàn toàn có thể được sinh ra từ generator này. Các đường này được khám phá bởi Ernest Cesaro vào năm 1905.

Các hình sau là các mức khác nhau của tam giác Cesaro:



(Mức 1)



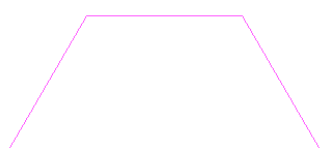
(Mức 5)

2.3. ĐƯỜNG SIERPINSKI

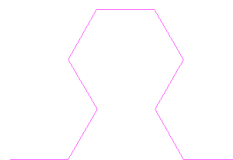
Đường Sierpinski được trình bày sau đây là một đường cong rất đặc biệt, bởi vì có rất nhiều cách phát sinh ra nó với các khởi động ban đầu hoàn toàn khác nhau nhưng lại kết thúc ở việc sinh ra một loại đường cong duy nhất.

Chúng ta đã quen với phương pháp đầu tiên để phát sinh ra tam giác Sierpinski bằng cách sử dụng kỹ thuật initiator / generator được mô tả ở các phần trước. Đối với đường này, initiator là một đoạn thẳng.

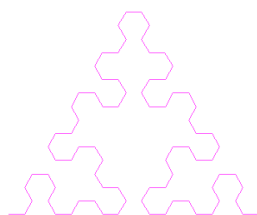
Generator đối với đường cong này và các đường được sinh ra ở mức 1, 2 và 3 được minh họa như sau:



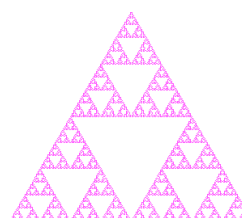
Mức 1



Mức 3



Mức 4



Mức 8

2.4. CÂY FRACTAL

Trong các phần trước, chúng ta đã tạo ra các đường fractal bằng cách thay thế một cách lặp lại của các đoạn thẳng với các mẫu thu nhỏ của một generator mẫu, kết quả là các đường có tính tự đồng dạng. Bây giờ, chúng ta sẽ tạo ra đường cong theo một hướng khác. Chúng ta sẽ bắt đầu với một thân cây tại đầu mút của nó chúng ta tách thân cây thành hai hướng và vẽ hai nhánh. Chúng ta sẽ lặp lại quá trình này tại các đầu mút của mỗi nhánh. Kết quả chúng ta sẽ được một cây. Trước khi chúng ta biểu diễn các cây tự nhiên, đầu tiên chúng ta thảo luận vài điều về các cây thực tế.

2.4.1. Các cây thực tế

Chúng ta phác thảo quá trình tạo cây được cho ở trên. Tại mỗi nút trong quá trình tạo cây, chúng ta tách làm hai hướng. Kết quả ta được một cây hai chiều. Chúng ta hy vọng nó có một số quan hệ với cây thực tế 3 chiều. Trước khi đi xa hơn, chúng ta quan sát một vài cây tự nhiên. Đầu tiên, có hai lớp cây là lớp cây rụng lá (deciduous) mỗi năm và lớp cây tùng bách (conifers). Hai lớp cây này hoàn toàn khác nhau. Cây tùng bách có khuynh hướng có các vòng của các nhánh ở tại các độ cao khác nhau vòng quanh trung tâm của thân cây. Điều này dường như không thích hợp với tất cả các quá trình rẽ nhánh nhị phân và chúng ta sẽ thấy các cây sau đây do chúng phát sinh không bao giờ giống với cây tùng bách thật sự.

Thứ hai, đối với cây rụng lá mặc dù sự xuất hiện của chúng rất gần với mô hình của chúng ta, thế nhưng vẫn còn rất nhiều phức tạp trong cấu trúc của chúng. Trong khi đó, việc rẽ nhánh nhị phân thường có qui luật và đơn giản hơn nhiều, chỉ ngoại trừ một vài thân cây có khả năng tách ra nhiều hơn hai nhánh.

2.4.2. Biểu diễn toán học của cây

Theo Leonardo da Vinci quan sát, kết quả đó là do tổng số các vùng cắt ngang của các nhánh cây ở một độ cao cho trước là hằng số. Điều này không gây ngạc nhiên vì cây đòi hỏi chuyển dinh dưỡng từ gốc đến lá và cho trước một lượng dinh dưỡng, một người nghĩ rằng thiết diện cần thiết cho sự vận chuyển sẽ không đổi bất kể chiều cao hay số ống dẫn. Khi chúng ta chuyển sự quan sát này vào các đường kính (hay các

$$D_0^\alpha = D_1^\alpha + D_2^\alpha$$

chiều rộng khi chúng ta vẽ thành cây hai chiều) thì chúng ta có được biểu thức sau:

Ở đây D_0, D_1, D_2 là đường kính của hai nhánh chia cây làm đôi, $\alpha = 2$ theo da Vinci. Do đó các dạng các dạng cấu trúc giống cây, mô hình đơn giản được cho ở trên có khả năng áp dụng cho các hệ thống sông tốt hơn các cây, vì thường có nhiều hơn hai con sông nhánh của một hệ thống sông sẽ nối với nhau ở cùng một nơi. Các cây khác được tìm thấy trong cơ thể con người là hệ thống động mạch và cuống phổi dùng để vận chuyển máu và oxy, trong đó α đối với hệ thống cuống phổi là 3 và đối với động mạch là 2.7.

Khi chúng ta xây dựng cây chúng ta sẽ sử dụng biểu thức:

$$B_{n+1} = 2^{\frac{-1}{\alpha}} B_n \quad (a)$$

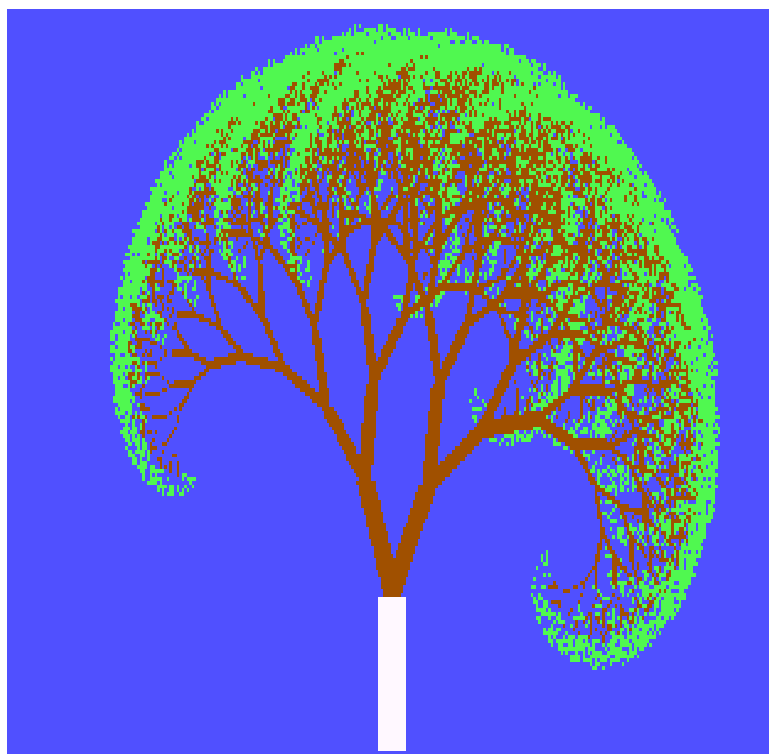
Ở đây B_n là đường kính của nhánh ở mức thấp hơn. B_{n+1} biểu diễn đường kính mỗi nhánh con khi B_n tách thành hai nhánh.

Chúng ta cũng cần xem xét chiều dài mỗi nhánh. McMahon nghiên cứu các loại cây kiêu mẫu khác nhau và đưa ra công thức như sau cho chiều dài:

$$L_{n+1} = 2^{\frac{-2}{3\alpha}} L_n \quad (b)$$

Với L_n là chiều dài của nhánh trước đó và L_{n+1} chiều dài của mỗi nhánh trong hai nhánh kế sau khi nhánh trước đó được tách ra làm hai.

Sau đây là hình minh họa một cây fractal với Level = 14, Height = 80, Width = 20, Left_Alpha = 2.0, Right_Alpha = 2.2, Left_Angle = 20, Right_Angle = 28.



2.5. HỆ THỐNG HÀM LẬP (IFS)

2.5.1. Các phép biến đổi Affine trong không gian R^2

Cho phép biến đổi $w: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ có dạng:

$$w(x, y) = (ax + by + e, cx + dy + f)$$

Ở đây a, b, c, d, e, f là các hệ số thực, được gọi là phép biến đổi affine (hai chiều).

Phép biến đổi có thể viết dưới dạng:

$$w \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = AX + T$$

Với:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Bằng cách biểu diễn phép biến đổi trên dưới dạng tách các phép quay và vị tự ma trận A có thể viết dưới dạng:

$$A = \begin{pmatrix} r \cos \theta & -s \sin \phi \\ r \sin \theta & s \cos \phi \end{pmatrix}$$

Với:

- r: hệ số vị tự trên trục x.
- s: hệ số vị tự trên trục y.
- θ : góc quay trên trục x.
- ϕ : góc quay trên trục y.
- e: hệ số tịnh tiến trên trục x.
- f: hệ số tịnh tiến trên trục y.

2.5.2. IFS của các phép biến đổi Affine trong không gian R^2

Một IFS là tập hợp các phép biến đổi affine co tức là:
 IFS $\{ \mathbb{R}^2 ; w_n : n = 1, 2, \dots, N \}$ với w_n là phép biến đổi affine.

Ví dụ:

Một IFS của ba phép biến đổi w_1, w_2, w_3 là IFS $\{ \mathbb{R}^2 ; w_1, w_2, w_3 \}$ với w_1, w_2, w_3 xác định bởi:

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

Trong đó mỗi phép biến đổi affine liên kết với một xác suất P_n quyết định độ quan trọng của nó so với phép biến đổi khác. Để ý rằng:

$$\sum_{n=1}^N P_n = 1, P_n > 0 (n = 1, \dots, N)$$

Ví dụ:

Mã IFS đối với tam giác Sierpinski

w	a	b	c	d	e	f	p
1	0.5	0	0	0.5	0	0	0.33
2	0.5	0	0	0.5	1	0	0.33
3	0.5	0	0	0.5	0.5	0.5	0.34

2.5.3. Giải thuật lặp ngẫu nhiên

Cho IFS $[\mathbb{R}^2 ; w_n : n = 1, 2, \dots, N]$, mỗi w_n liên kết với xác suất P_n .

Trước khi trình bày thuật toán, chúng ta tìm cách chọn các xác suất P_n thích hợp.

Khi chúng ta xác định các phép biến đổi, chúng ta cần chọn các xác suất cho chúng. Việc chọn các xác suất khác nhau sẽ không dẫn đến các hấp tử khác nhau, nhưng chúng ảnh hưởng đến tốc độ ở các miền khác nhau hay thuộc tính của hấp tử được làm đầy.

Mỗi phép biến đổi affine w_n tương ứng với hấp tử J là:

$$w_n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \end{pmatrix}, n = 1, 2, \dots, N$$

Số lần mà điểm nhảy một cách ngẫu nhiên dùng trong hấp tử con w_n xấp xỉ với:

$$\frac{S(w_n)}{S(J)}$$

Với $S(A)$: Diện tích của A

Nếu $\det A_n \neq 0$ thì việc chọn xác suất P_n như sau:

$$P_n = \frac{|\det A_n|}{\sum_{i=1}^N |\det A_i|} = \frac{|a_n d_n - b_n c_n|}{\sum_{i=1}^N |a_i d_i - b_i c_i|}$$

Nếu $\det A_n = 0$ thì P_n được gán cho một số nhỏ nhất và khá gần 0, ví dụ như 0.001. Sau đây là các bảng mã IFS:

★ Mã IFS cho lá dương xỉ:

W	A	b	C	d	E	f	p
1	0	0	0	0.16	0	0	0.01
2	0.2	-0.26	0.23	0.22	0	1.6	0.07
3	-0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.44	0.07
4	0.85	0.04	-0.04	0.85	0	1.6	0.85

Tương tự chúng ta áp dụng thuật toán này đối với IFS của phép biến đổi affine trong không gian ba chiều có dạng:

$$w \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by+cz+n \\ dx+ey+fz+q \\ gx+hy+mz+r \end{pmatrix}$$

★ Mã IFS cho lá dương xỉ ba chiều:

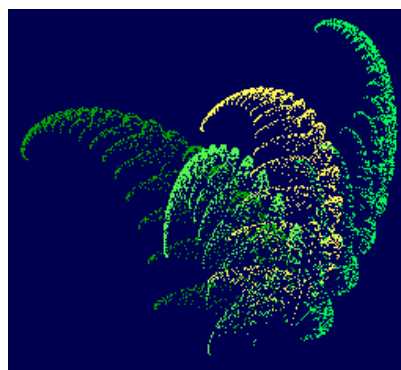
w	A	B	c	D	E	f	G	h	m	n	q	r	P
1	0	0	0	0	0.1 8	0	0	0	0	0	0	0	0.001
2	0.83	0	0	0	0.8 6	0.1	0	-0.12	0.84	0	1.62	0	0.901
3	0.22	-0.23	0	0.24	0.2 2	0	0	0	0.32	0	0.82	0	0.049
4	0.22	0.23	0	0.24	0.2 2	0	0	0	0.32	0	0.82	0	0.049

Sau đây là các hình vẽ minh họa giải thuật lặp ngẫu nhiên tương ứng với bảng mã IFS được trình bày ở phần trước:

Lá dương xỉ 2 chiều



Lá dương xỉ 3 chiều



2.6. TẬP MANDELBROT

2.6.1. Đặt vấn đề

Trong nhiều thập niên của thế kỷ XX, các nhà toán học đã đề tâm nghiên cứu đến một loại biểu thức phức tạp xác định bởi:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \text{ trong đó } z_i \in \mathbb{C}, \forall i \in \mathbb{N} \ \& \ c \in \mathbb{C} \quad (1)$$

Để đơn giản hoá vấn đề, trước hết ta xét trường hợp $c = 0$ và $z_0 \in \mathbb{R}$. Khi đó có 3 trường hợp sau:

- + $z_0 = 1$: khi đó $z_n = 1, \forall n \geq 1$.
- + $z_0 < 1$: khi đó $z_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$.
- + $z_0 > 1$: khi đó $z_n \rightarrow \infty$ khi $n \rightarrow \infty$.

Ở đây tốc độ tiến đến 0 hay tiến đến ∞ của dãy (z_n) được quyết định bởi giá trị ban đầu z_0 của dãy. Trong trường hợp $z_0 < 1$, giá trị z_0 càng nhỏ thì dãy (z_n) tiến đến 0 càng nhanh. Ngược lại khi $z_0 > 1$, giá trị z_0 càng lớn thì dãy (z_n) càng tiến nhanh ra ∞ .

Trong trường hợp tổng quát, dãy (z_n) được xác định bởi công thức (1) ở trên rất khó khảo sát về mặt lý thuyết. Chỉ đến năm 1979, Mandelbrot mới thành công trong việc quan sát dãy này với sự hỗ trợ của máy tính điện tử. Kết quả được Mandelbrot quan sát thấy là một trong những cấu trúc fractal phức tạp và đẹp. Nó đã được đặt tên Mandelbrot để ghi nhớ công lao của tác giả, người đã khai sinh ra lý thuyết hình học phân hình.

2.6.2. Công thức toán học

Ký hiệu $z_n = (x_n, y_n)$, $c = (p, q)$, trong đó:

$x_n = \text{Re}(z_n)$, $p = \text{Re}(c)$, $y_n = \text{Im}(z_n)$, $q = \text{Im}(c)$, $\forall n \geq 0$ thì hệ thức truy hồi xác định ở (1) có thể được viết lại theo dạng đơn giản hơn như sau:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n^2 - y_n^2 + p \\y_{n+1} &= 2x_n \cdot y_n + q\end{aligned}\quad (2)$$

Ngoài ra khi khảo sát dãy (z_n) ta tìm được tính chất sau:

Tính chất về sự hội tụ của dãy (z_n) :

- Nếu tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho $|z_k| > 2$ thì dãy (z_n) hội tụ đến vô cực.
- Nếu tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho $|z_t| < 2, \forall t : k \leq t \leq 1$, với 1 là hằng số hữu hạn thì cũng có $|z_n| < 2, \forall n \geq k$. (Ký hiệu $|z|$ chỉ modul của số phức z).

2.6.3. Xây dựng thuật toán

Tập Mandelbrot là hình ảnh của dãy (z_n) , với giá trị khởi đầu $z_0 = 0$. Khi đó màn hình máy tính sẽ chuyển đổi thành một mặt phẳng phức thu hẹp với:

+ Trục x biểu diễn phần thực của số phức c (giá trị p được nêu ở phần 2/).

+ Trục y biểu diễn phần ảo của số phức c (giá trị q được nêu ở phần 2/).

Từ tính chất về sự hội tụ của dãy (z_n) ở phần 2 chúng ta có thể chia tập các giá trị của c trên mặt phẳng phức thành 2 lớp:

Lớp 1:

Gồm các giá trị c làm cho dãy (z_n) không tiến ra vô cực mà được giới hạn trong một vòng tròn bán kính 2. Một cách cụ thể, đó là các giá trị c sao cho khi xuất phát từ chúng, ta luôn có $|z_i| < 2, \forall i = 1, 2, \dots, l$, trong đó l do ta chọn trước. Để ý là giá trị l càng lớn thì tính hội tụ của dãy (z_n) tương ứng với một giá trị cụ thể càng được kiểm tra chặt chẽ và chính xác. Tuy nhiên khi đó thời gian tính toán để xác định tính hội tụ sẽ tăng lên gấp nhiều lần.

Lớp 2:

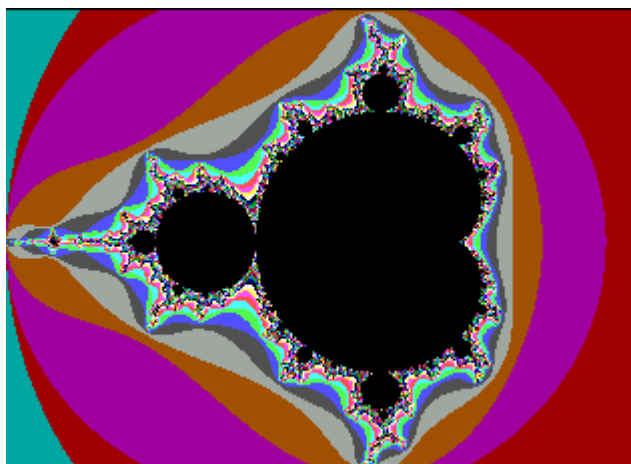
Gồm các giá trị phức c làm cho dãy (z_n) hội tụ về vô cực. Cụ thể đó là các giá trị c khởi đầu dẫn đến $|z_n| > 2$ ở một ngưỡng k hữu hạn nào đó.

Vấn đề đặt ra ở đây là cần quan sát tính hỗn độn của dãy (z_n) . Do đó chúng ta tập trung các quan sát vào các giá trị c thuộc lớp 2. Muốn như vậy các giá trị này phải được thực hiện một cách nổi bật trên màn hình máy tính bởi các màu khác nhau. Chúng ta sẽ tô màu mặt phẳng phức màn hình theo qui tắc sau:

+ Các giá trị c thuộc lớp 1 được tô màu đen vì không có tính chất gì đáng chú ý.

+ Các giá trị c thuộc lớp 2 được tô bằng các màu khác nhau ứng với các ngưỡng tiến ra vô hạn k khác nhau. Do số lượng màu có thể hiển thị trên một màn hình đồ họa là hữu hạn, việc tô màu các giá trị này sẽ được thực hiện theo kỹ thuật tô màu xoay vòng được chỉ ra ở các phần tiếp sau đây.

Tập Mandelbrot cổ điển với các giá trị khảo sát nằm trong vùng giới hạn bởi $X_{\min} = -2.0$, $Y_{\min} = -1.2$, $X_{\max} = 1.2$, $Y_{\max} = 1.2$ và $\text{Max_Iterations} = 512$, $\text{Max_Colors} = 1.6$.



2.7. TẬP JULIA

2.7.1. Đặt vấn đề

Đối với biểu thức $z_{n+1} = z_n^2 + c$, ngoài hướng đã khảo sát như đã trình bày trong phần tập Mandelbrot, còn có hướng khảo sát khác bằng cách cho c cố định và xem xét dãy (z_n) ứng với mỗi giá trị khác của z_0 . Theo hướng này chúng ta sẽ thu được 1 lớp các đối tượng fractal mới được gọi là tập Julia.

Tập Julia và tập Mandelbrot là hai lớp các đối tượng fractal có mối liên hệ rất chặt chẽ với nhau. Một tính chất đáng chú ý là tập Mandelbrot có thể xem như một loại “bản đồ” Mandelbrot có thể cho ra các dạng tập Julia đầy sức lôi cuốn. Các vị trí như vậy được quan sát thấy ở gần biên của tập Mandelbrot. Nhất là gần các chòm nhọn. Ngoài ra khi phóng to một phần của tập Mandelbrot, ta sẽ thu được một hình rất giống với tập Julia được tạo bởi giá trị của tâm phần được phóng to.

2.7.2. Công thức toán học

Để thể hiện tập Julia trên màn hình máy tính, ta vẫn sử dụng các công thức như trong phần tập Mandelbrot, như là:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n^2 - y_n^2 + p \\y_{n+1} &= 2x_n y_n + q\end{aligned}$$

Ngoài ra các tính chất đã nêu về giới hạn của dãy (z_0) vẫn được sử dụng cho tập Julia.

2.7.3. Xây dựng thuật toán

Điểm khác biệt so với tập Mandelbrot ở đây là giá trị p và q được giữ cố định, mặt phẳng màn hình biến đổi thành mặt phẳng phức thu hẹp biểu diễn các giá trị của x_0 với:

- Trục x biểu diễn phần thực của số phức z_0 .
- Trục y biểu diễn phần ảo của số phức z_0 .

Ngoài ra còn có sự phân lớp các giá trị của z_0 như sau:

Lớp 1:

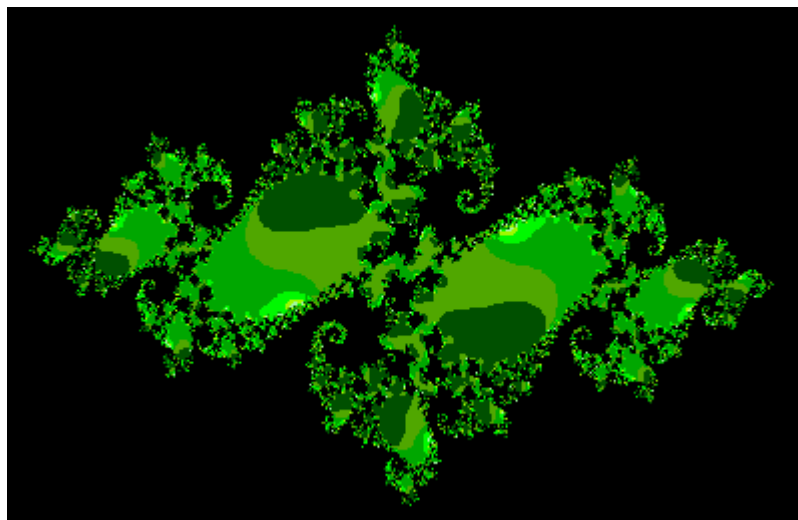
Bao gồm các giá trị (z_0) có $|z_k| < 2$, với $0 \leq k \leq N$ trong đó N là hằng số hữu hạn. Tức là lớp 1 gồm các giá trị z_0 làm cho dãy (z_0) không tiến ra vô cực.

Lớp 2:

Bao gồm các giá trị (z_0) có $|z_n| > 2$, với $n \geq k$, $k \in \mathbb{Z}^+$, tức là gồm các giá trị làm cho dãy (z_n) tiến ra vô cực.

Ngược lại với tập Mandelbrot, khi thể hiện tập Julia trên màn hình, chúng ta quan tâm đến các giá trị z_0 làm cho dãy (z_n) không hội tụ đến vô cực. Do đó kỹ thuật tô màu của tập Julia vẫn là kỹ thuật xoay vòng nhưng hoàn toàn ngược lại với kỹ thuật tô màu tập Mandelbrot. Trong kỹ thuật tô màu này:

- Các điểm ảnh tương ứng với các giá trị z_0 thuộc lớp 1, sẽ được gán màu tùy thuộc độ lớn của $|z_1|$ với l là ngưỡng quyết định hội tụ của dãy (z_n) đã nêu trong định nghĩa về lớp 1.
- Các điểm ảnh tương ứng với giá trị z_0 thuộc lớp 2 sẽ được gán màu trùng với màu nền của bảng màu đang sử dụng.



Hình minh họa tập Julia

2.8. HỌ CÁC ĐƯỜNG CONG PHOENIX

Họ các đường cong Phoenix do Shigehiro Ushiki ở trường đại học Kyoto tìm ra. Phương trình của đường cong được xác định bởi:

$$Z_{n+1} = z_n^2 + p + q \cdot z_{n-1}$$

Trong đó:

$$Z_i \in \mathbb{C} \quad \forall i, N.$$

$$p = (p, 0) \in \mathbb{C}.$$

$$q = (q, 0) \in \mathbb{C}.$$

Phương trình được khai triển thành các phần thực và ảo của z_n có dạng:

$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + p + q \cdot x_{n-1}$$

$$y_{n+1} = 2x_n \cdot y_n + q \cdot y_{n-1}$$

với: $x_{n+1} = \text{Re}(z_{n+1});$

$$y_{n+1} = \text{Im}(z_{n+1}).$$

Khi đó việc thể hiện đường cong này lên màn hình gần giống với việc thể hiện tập Julia. Tuy nhiên có hai điểm thay đổi quan trọng:

Thay đổi 1:

- Trục x của màn hình biểu thị phần ảo của số phức z_0 .
- Trục y của màn hình biểu thị phần thực của số phức z_0 .

Ở đây chúng ta đảo ngược các trục thực và ảo của mặt phẳng phức thông thường là để thể hiện hình ảnh theo chiều đứng chứ không phải chiều ngang. Hình 14.1 trình bày 1 loại đường cong loại này với yêu cầu rõ ràng là phải đổi vai trò của trục x và y để hình ảnh có thể được thể hiện tốt trên màn hình. Do đó tương ứng với một điểm ảnh (Col, Row) trên màn hình sẽ là số phức $z = (x, y)$ có dạng:

$$x = y_{\max} - \text{Row} * \Delta x;$$

$$y = y_{\min} - \text{Col} * \Delta y;$$

Với:

$$\Delta x = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{\text{Max_Row}}$$

$$\Delta y = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{\text{Max_Col}}$$

Thay đổi 2:

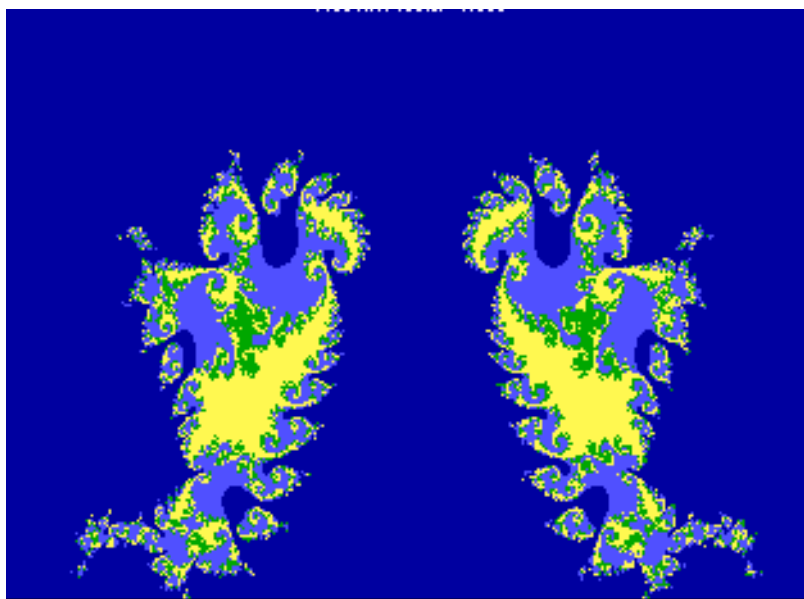
Thay đổi về thuật toán tô màu. Ở đây với các điểm thuộc lớp 1 (theo định nghĩa đã nêu ở phần về tập Julia) chúng ta sẽ sử dụng 3 loại màu tùy theo ngưỡng hội tụ:

Màu 1: được sử dụng để tô các điểm z_0 cho ra giá trị $|z_k| < 2$ với tối đa $k = 32$ lần lặp.

Màu 2: được sử dụng để tô các điểm z_0 cho ra giá trị $|z_k| < 2$ với số lần lặp từ 33 đến 64.

Màu 3: được sử dụng để tô các điểm z_0 cho ra giá trị $|z_k| < 2$ với số lần lặp vượt quá 64 lần.

Còn đối với các điểm thuộc lớp 2, chúng ta sẽ tô chúng bằng một màu khác với màu nền hiện tại.



Đường cong Phoenix

2.9. KẾT LUẬN

Hình học Fractal mới xuất hiện khoảng 1 thập kỷ nhưng đã nhanh chóng trở thành một công cụ nghiên cứu lý thú và có hiệu lực mạnh mẽ ở hầu hết các lĩnh vực khoa học, kỹ thuật, nghệ thuật: từ toán học, vật lý, thiên văn, sinh lý học, tâm lý học, ngôn ngữ học cho đến công nghệ thông tin và truyền thông, kinh tế tài chính, kiến trúc, xây dựng, ngay cả đến âm nhạc, hội họa, văn học cũng tìm thấy ở Fractal nhiều điểm tương đồng.

Hiện nay trên thế giới Fractal rất phát triển. Thị trường tranh fractal và phần mềm sáng tác fractal cũng không hề nhỏ, nó có giá trị gần 1 tỉ USD trong năm 2004. Tìm hiểu sâu hơn về fractal hãy truy cập những địa chỉ sau: www.les.stclair.btinternet.co.uk

www.biofractalevolution.com

www.fractalism.com



Còn muốn tạo ra những hình họa fractal nhanh chóng và dễ dàng nhất, hãy sử dụng các phần mềm miễn phí:

- Aros Fractals: Dung lượng chỉ 165 KB, tương thích với mọi môi trường Windows hiện hành, giải nén vào một thư mục rồi sử dụng ngay mà không cần cài đặt. Tải về từ địa chỉ www.arosmagic.com.

- Double Fractal: Của tác giả Joao Paulo Schwarz Schuler. Dung lượng 676 KB, không cần cài đặt, tải về từ địa chỉ www.schulers.com/fractal.



Chương 3 :

CHƯƠNG TRÌNH CÀI ĐẶT THỬ

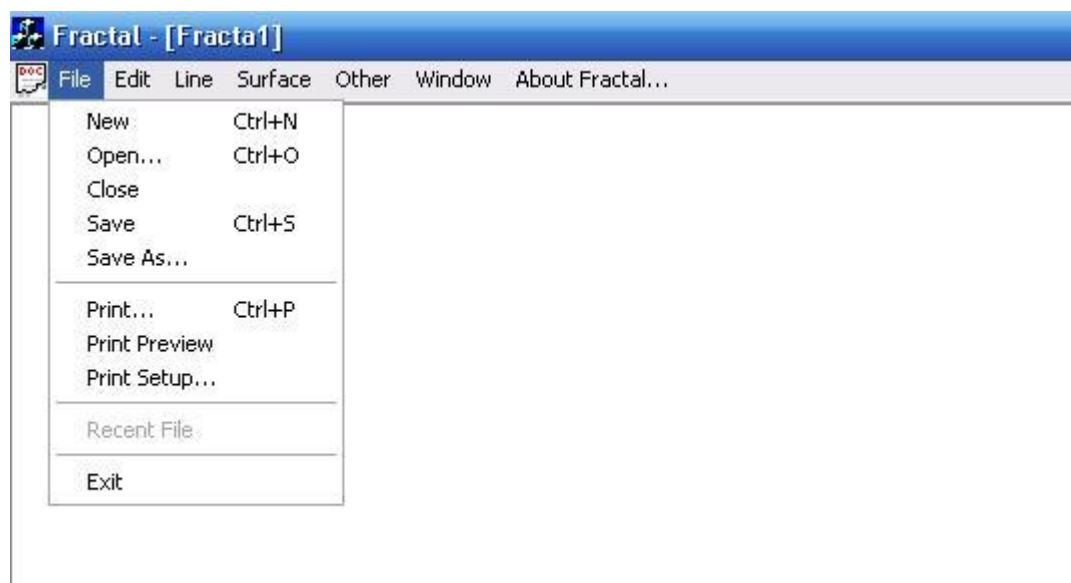
Để có thể cài đặt một số đường và mặt fractal chúng ta có thể sử dụng ngôn ngữ lập trình Visual C⁺⁺. Đây là một ngôn ngữ lập trình hỗ trợ khá mạnh cho đồ họa.

3.1. KẾT QUẢ CÀI ĐẶT

Trong phần này giới thiệu cách sử dụng các tác vụ trong việc thực hiện vẽ các đường và mặt Fractal.

3.1.1. Giao diện chính của chương trình

Giao diện chính của chương trình như sau:



3.1.2. Kết quả một số đường và mặt cài đặt được

- Các đường thuộc họ đường Von Kock như:
 - Đường hoa tuyệt Von Kock.
 - Đường Gosper.
 - Đường Von Kock bậc hai 3 đoạn.
- Các đường thuộc họ đường Peano như:
 - Đường Peano nguyên thủy.
 - Đường Peano cải tiến.
 - Tam giác Cesaro.
- Đường Sierpinski.
- Cây Fractal.
- Cây dương xỉ 2 chiều và cây dương xỉ 3 chiều.
- Tập Mandelbrot.
- Tập Julia.
- Đường cong Phoenix.

3.2. HẠN CHẾ

Hình học Fractal bao gồm rất nhiều cấu trúc đường và mặt khác nhau. Do thời gian có hạn nên chương trình vẫn còn một số đường và mặt vẫn chưa kịp cài đặt. Bên cạnh đó chương trình chưa thể hiện được các hiệu ứng như lửa mây v.v...

◆ **Hướng phát triển đề tài:**

Hình học Fractal có thể cài đặt thêm một số đường và mặt như sau:

- Tạo đường Hilbert.
- Tạo đường tròn Apolo.
- Tạo đường cong Dragon
- Tạo các hiệu ứng như lửa, mây...
- Tạo các dãy núi...

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Michale Barnsly. " *Fractal Everywhere* ", University of Wisconsin-Madison, 1998.
- [2] John C.Hart "*Fractal Image Compression and the Inverse Problem of Recurrent Iterated Function Systems*". School of EECS, 1995
- [3] Ngô Quốc Tạo, "*Các vấn đề cơ bản của hình học Fractal và ứng dụng trong nén ảnh*", .đề tài CS97-12, 1997.
- [4] <http://search.dmoz.org/cgi-bin/search?search=fractal>
- [5] http://chaos4.phy.ohiou.edu/~thomas/frac_frame.html.