

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC DÂN LẬP HẢI PHÒNG**
.....

ĐOÀN VĂN LONG

**TÍNH TOÁN ỔN ĐỊNH CỦA KHUNG CỐ XÉT ĐẾN
BIẾN DẠNG TRƯỢT NGANG BẰNG PHƯƠNG PHÁP
PHẦN TỬ HỮU HẠN**

LUẬN VĂN THẠC SĨ KỸ THUẬT

**CHUYÊN NGÀNH: KỸ THUẬT XÂY DỰNG CÔNG TRÌNH DÂN DỤNG
VÀ CÔNG NGHIỆP**

MÃ SỐ: 60.58.02.08

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

PGS. TS. ĐOÀN VĂN DUẤN

Hải Phòng, 11 năm 2018

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đề tài “**Tính toán ổn định của khung có xét đến biến dạng trượt ngang bằng phương pháp phần tử hữu hạn**” là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các số liệu, kết quả trong luận văn là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Tác giả luận văn

Đoàn Văn Long

LỜI CẢM ƠN

Qua quá trình học tập và nghiên cứu, được sự giúp đỡ, của các cán bộ, giáo viên của Khoa xây dựng, Phòng đào tạo Đại học và Sau đại học - trường Đại học Dân lập Hải phòng, tôi đã hoàn thành chương trình học tập và nghiên cứu luận văn với đề tài ***“Tính toán ổn định của khung có xét đến biến dạng trượt ngang bằng phương pháp phần tử hữu hạn”***.

Tôi xin trân trọng cảm ơn PGS.TS. Đoàn Văn Duẩn đã tạo điều kiện và tận tình giúp đỡ tôi trong quá trình nghiên cứu đề tài và cho nhiều chỉ dẫn khoa học có giá trị cũng như thường xuyên động viên, tạo mọi điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu hoàn thành luận văn.

Bên cạnh đó, tôi xin chân thành gửi lời cảm ơn đến các bạn bè, đồng nghiệp đã giúp đỡ tôi tìm hiểu và nghiên cứu các tài liệu liên quan trong quá trình hoàn thành bài luận văn tốt nghiệp.

Mặc dù đã nỗ lực cố gắng để hoàn thành bài luận văn nhưng vì thời gian và kiến thức còn hạn chế nên luận văn không tránh khỏi những mặt tồn tại nhất định. Tôi rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến từ quý Thầy Cô để hoàn thiện tốt hơn luận văn này.

Xin trân trọng cảm ơn!

Hải Phòng, ngày tháng năm 2018

Tác giả

Đoàn Văn Long

MỤC LỤC

Mở đầu	Error! Bookmark not defined.
CHƯƠNG 1: TỔNG QUAN VỀ LÝ THUYẾT ỔN ĐỊNH CÔNG TRÌNH	3
1.1. Khái niệm về ổn định	3
1.2. Lịch sử phát triển và tình hình nghiên cứu ổn định công trình trên Thế giới và Việt nam	4
1.2.1. Lịch sử phát triển.....	4
1.2.2. Tình hình nghiên cứu ổn định kết cấu công trình trên Thế giới.....	4
1.2.3. Tình hình nghiên cứu ổn định kết cấu công trình tại Việt nam.....	5
1.3. Ý nghĩa và tầm quan trọng của việc nghiên cứu ổn định công trình.....	6
1.3.1 Ý nghĩa của việc nghiên cứu ổn định công trình	6
1.3.2 Tầm quan trọng của việc nghiên cứu ổn định công trình.....	6
1.4. Các phương pháp nghiên cứu ổn định công trình	8
1.4.1. Phương pháp tĩnh (Phương pháp Euler)	8
1.4.2. Phương pháp năng lượng.....	9
1.4.3 Phương pháp động lực học	10
1.5. Bài toán ổn định uốn dọc của thanh và phương pháp giải	10
1.6. Thuật toán đơn giản để giải phương trình đa thức	15
CHƯƠNG 2. PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN	19
2.1. Phương pháp phần tử hữu hạn	19
2.2. Nội dung phương pháp phần tử hữu hạn theo mô hình chuyển vị	20
2.2.1. Rời rạc hoá kết cấu:	20
2.2.2. Hàm chuyển vị:	21
2. PTHH bậc hai	22
2.2.4. Chuyển hệ trục tọa độ.....	27
2.2.5. Ghép nối ma trận độ cứng và vectơ tải trọng nút của toàn hệ.....	29
2.2.6. Xử lý điều kiện biên	31
2.2.7. Tìm phản lực tại các gối	32

2.2.8. Trường hợp biết trước một số chuyển vị	33
2.3. Cách xây dựng ma trận độ cứng của phần tử chịu uốn	34
2.4. Cách xây dựng ma trận độ cứng tổng thể của kết cấu.....	37
CHƯƠNG 3: TÍNH TOÁN ỔN ĐỊNH CỦA KHUNG CÓ XÉT ĐẾN BIẾN DẠNG TRƯỢT NGANG BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN	41
3.1. Lý thuyết dầm có xét biến dạng trượt ngang	41
3.2. Bài toán ổn định của thanh chịu nén có xét biến dạng trượt ngang	47
3.3. Phương pháp chuyển vị cưỡng bức	50
3.4. Xác định lực tới hạn của thanh chịu nén.....	51
3.5. Tính ổn định của khung chịu nén có xét đến biến dạng trượt ngang theo phương pháp phần tử hữu hạn.	52
3.5.1. Ma trận độ cứng phần tử.....	53
3.5.2. Bài toán ổn định tĩnh	56
KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ	68
KẾT LUẬN:	68
Danh mục tài liệu tham khảo.....	69

MỞ ĐẦU

Bài toán ổn định của kết cấu đã được giải quyết theo nhiều hướng khác nhau, phần lớn xuất phát từ nguyên lý năng lượng mà theo đó kết quả phụ thuộc rất nhiều vào cách chọn dạng của hệ ở trạng thái lệch khỏi dạng cân bằng ban đầu. Trong những công trình xây dựng hiện nay, người ta thường dùng các thanh có chiều dài lớn, tầm - vô chịu nén và do đó điều kiện ổn định trong miền đàn hồi có tầm quan trọng đặc biệt, đòi hỏi phải nghiên cứu đầy đủ cả về mặt lý thuyết và thực nghiệm.

Cho đến nay, các đường lối xây dựng bài toán ổn định của kết cấu chịu uốn thường không kể đến ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang hoặc có kể đến nhưng do cách đặt vấn đề và cách chọn ẩn chưa thật chính xác nên đã gặp rất nhiều khó khăn mà không tìm được kết quả của bài toán một cách chính xác và đầy đủ.

Phương pháp phân tử hữu hạn chia công trình thành những phần nhỏ được gọi là các phân tử, tính toán công trình được dẫn về tính toán những phân tử nhỏ sau đó kết nối các phân tử đó lại với nhau ta lại được lời giải của một công trình hoàn chỉnh. Phương pháp này được ứng dụng rộng rãi trong lĩnh vực khoa học kỹ thuật nói chung và tính toán kết cấu xây dựng nói riêng.

Đối tượng, phương pháp và phạm vi nghiên cứu của luận văn

Trong luận văn này, tác giả sử dụng phương pháp Phần tử hữu hạn để tính toán ổn định đàn hồi của khung có xét đến biến dạng trượt ngang.

Do sự cần thiết của việc nghiên cứu ổn định của kết cấu khung có xét đến biến dạng trượt ngang, mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu của luận văn này là:

Mục đích nghiên cứu của luận văn

*“Nghiên cứu ổn định đàn hồi của khung
có xét đến biến dạng trượt ngang”*

Nhiệm vụ nghiên cứu của luận văn

1. Trình bày tổng quan về lý thuyết ổn định công trình
2. Trình bày phương pháp phần tử hữu hạn đối với các bài toán cơ học kết cấu
3. Trình bày lý thuyết xét biến dạng trượt đối với bài toán ổn định đàn hồi của kết cấu thanh với việc dùng hai hàm chưa biết là hàm độ võng y và hàm lực cắt Q . Dùng phương pháp phần tử hữu hạn và phương pháp chuyển vị cưỡng bức để giải bài toán ổn định của khung có xét đến biến dạng trượt, chịu tác dụng của tải trọng tĩnh.
4. Lập chương trình máy tính điện tử cho các bài toán nêu trên.

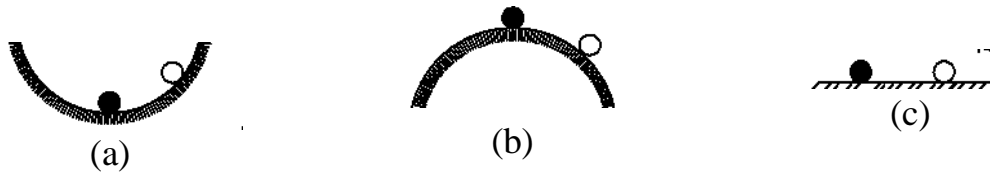
CHƯƠNG 1

TỔNG QUAN VỀ LÝ THUYẾT ỔN ĐỊNH CÔNG TRÌNH

Trong chương này bàn về lý thuyết ổn định công trình và các phương pháp nghiên cứu ổn định công trình và các phương pháp giải bài toán ổn định công trình.

1.1. Khái niệm về ổn định

Một cách hình dung tốt nhất về khái niệm ổn định là ta xét các trường hợp viên bi cứng trên các mặt cầu cứng lõm và lồi, Hình 1.1.



Hình 1.1. Các trường hợp mất ổn định

Rõ ràng là trong trường hợp (a), mặt cầu lõm, sự cân bằng của viên bi là ổn định bởi vì kích nó ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu (đáy cầu) rồi thả ra thì nó sẽ trở về vị trí đáy cầu hoặc lân cận với vị trí đó (nếu có ma sát). Trong trường hợp (b), mặt cầu lồi, sự cân bằng là không ổn định, bởi vì kích viên bi ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu rồi thả bi ra thì viên bi sẽ không trở lại vị trí ban đầu nữa. Trong trường hợp (c), kích viên bi ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu thì nó lăn trên mặt phẳng ngang đến khi ngừng chuyển động, nó có vị trí cân bằng mới khác với trạng thái cân bằng ban đầu. Trong trường hợp này ta nói rằng trạng thái cân bằng ban đầu là phiếm định (không phân biệt).

Ở trên ta đã nói đến trạng thái cân bằng của viên bi. Suy rộng ra ta cũng có thể nói như vậy đối với các trạng thái cân bằng của cơ hệ phức tạp, ví dụ như trạng thái ứng suất và biến dạng, trạng thái nội lực và chuyển vị hoặc là trạng thái năng lượng.

Trở lại hình 1.1a. Khi lệch ra khỏi vị trí cân bằng, trọng tâm của viên bi lên cao, thế năng của nó tăng. Trạng thái cân bằng ổn định là trạng thái có thể

năng tối thiểu. Ở hình 1.1b, khi lệch với trị số nhỏ, trọng tâm của viên bi giảm, thế năng của nó giảm. Trạng thái cân bằng không ổn định ứng với thế năng lớn. Hình 1.1c, khi lệch ra khỏi vị trí cân bằng, trọng tâm của viên bi không thay đổi, trạng thái cân bằng là phiếm định hoặc không phân biệt.

Như hình 1.1, để biết được trạng thái cân bằng của cơ hệ có ổn định hay không thì ta phải kích nó ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu. Phương pháp chung để đánh giá sự mất ổn định của cơ hệ là:

Đưa hệ ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu của nó và kiểm tra xem nó có tồn tại trạng thái cân bằng mới không. Nếu như tìm được trạng thái cân bằng mới khác với trạng thái cân bằng ban đầu thì hệ là mất ổn định và lực giữ cho hệ ở trạng thái cân bằng mới này gọi là lực tới hạn, trường hợp ngược lại hệ là ổn định.

1.2. Lịch sử phát triển và tình hình nghiên cứu ổn định công trình trên

Thế giới và Việt nam

1.2.1. Lịch sử phát triển

Vấn đề ổn định kết cấu được bắt đầu từ công trình nghiên cứu bằng thực nghiệm do Piter Musschenbroek công bố năm 1729, đã đi đến kết luận rằng “lực tới hạn tỷ lệ nghịch với bình phương chiều dài thanh”. Người đặt nền móng cho việc nghiên cứu lý thuyết bài toán ổn định là Leonhard Euler qua công trình công bố đầu tiên vào năm 1744. Tuy nhiên, cho mãi đến cuối thế kỷ XIX vấn đề công trình mới được phát triển mạnh mẽ qua những công hiến của các nhà khoa học như Giáo sư F.s. Iaxinski, Viện sỹ A. N. Đinnik, Viện sỹ V. G. Galerkin... Cho đến nay, đã có rất nhiều công trình nghiên cứu về lĩnh vực này và đã giải quyết tốt những yêu cầu cơ bản của thực tế. Mặc dù vậy, cũng tồn tại nhiều vấn đề chưa được giải quyết đến cùng và còn tiếp tục lôi cuốn sự quan tâm của các nhà nghiên cứu.

1.2.2. Tình hình nghiên cứu ổn định kết cấu công trình trên Thế giới

Cách đây khoảng gần 300 năm, Euler đã tìm ra công thức xác định lực

tới hạn và đã giải những bài toán đầu tiên về hiện tượng mất ổn định xảy ra khi uốn dọc các thanh chịu nén và trong một thời gian dài nó là đề tài của các cuộc thảo luận. Các cuộc tranh luận kéo dài gần 70 năm. Một trong những nguyên nhân chính của các cuộc tranh luận là trong một số trường hợp công thức Euler không được thí nghiệm xác nhận. Điều đó có thể giải thích là khi xác định công thức xác định lực tới hạn Euler đã giả thiết là vật liệu làm việc trong miền đàn hồi và tuân theo định luật Hook.

Trong trường hợp thanh làm việc ngoài miền đàn hồi, việc xác định ứng suất tới hạn bằng lý thuyết vô cùng phức tạp. Vì vậy người ta phải tiến hành các nghiên cứu thực nghiệm. Trên cơ sở các kết quả thực nghiệm F.s. Iasinski đã đưa ra công thức thực nghiệm để xác định ứng suất tới hạn cho trường hợp này.

Ngoài L.Euler, F. S. Iasinski nghiên cứu ổn định cho thanh chịu nén làm việc trong và ngoài miền đàn hồi còn có A. M. Liapunov cũng đưa ra định nghĩa toán học về ổn định chuyển động được xem là tổng quát và bao trùm cho mọi lĩnh vực.

Euler- Lagrange đưa ra định nghĩa về ổn định công trình, độc lập với định nghĩa về ổn định chuyển động của Liapunov và cũng đủ để giải quyết phần lớn các bài toán ổn định công trình. Chúng ta đặc biệt quan tâm đến định nghĩa về ổn định chuyển động của Liapunov khi gặp các bài toán ổn định của hệ không bảo toàn, ổn định động và ổn định không đàn hồi.

1.2.3. Tình hình nghiên cứu ổn định kết cấu công trình tại Việt nam

Trước đây do nền kinh tế còn nghèo nàn nên các công trình xây dựng khi đó chủ yếu được xây dựng bằng các loại vật liệu như gỗ, đá vì cường độ của những loại vật liệu này tương đối thấp, các cấu kiện cần phải có tiết diện lớn nên việc tính toán ổn định chưa phải là vấn đề cấp thiết đối với người kỹ sư thiết kế và chưa thu hút được sự quan tâm của các nhà nghiên cứu.

Ngày nay, các cán bộ khoa học nghiên cứu và giảng dạy động lực học,

dao động và ổn định công trình, các kỹ sư cơ khí, xây dựng, giao thông vận tải công tác ở các viện nghiên cứu, các nhà máy lớn đã tích cực tham gia các hoạt động khoa học trong lĩnh vực dao động và ổn định.

1.3. Ý nghĩa và tầm quan trọng của việc nghiên cứu ổn định công trình

1.3.1 Ý nghĩa của việc nghiên cứu ổn định công trình

Thực tế cho thấy, công trình chỉ làm việc an toàn khi đồng thời thoả mãn ba điều kiện: Điều kiện bền, điều kiện cứng và điều kiện ổn định. Do vậy, bài toán ổn định và phân tích ổn định của kết cấu luôn luôn có ý nghĩa rất lớn và đóng vai trò rất quan trọng trong lĩnh vực nghiên cứu, phân tích kết cấu và thiết kế. Tuỳ thuộc vào những đặc tính của vật liệu, môi trường làm việc, phương pháp và quá trình chất tải, ... mà người nghiên cứu đặt ra các bài toán ổn định sau :

- Ổn định của kết cấu vật liệu đàn hồi
- Ổn định của kết cấu vật liệu đàn - dẻo
- Ổn định của kết cấu vật liệu từ biến

Trong bài toán ổn định đàn hồi, cần tìm tải trọng tới hạn, mà khi tải trọng bé hơn tải trọng tới hạn thì hệ luôn ổn định. Các phương pháp nghiên cứu ổn định của hệ đàn hồi đã được nhiều tác giả nghiên cứu theo các hướng khác nhau. Có thể phân loại theo các hướng khác nhau, chẳng hạn phân loại theo toán học (phương pháp giải tích, phương pháp nửa giải tích, phương pháp số) hoặc phân loại theo trạng thái trước khi hệ mất ổn định (có xét đến sự lệch ban đầu và xét hệ lý tưởng chịu các kích động v.v...)

1.3.2 Tầm quan trọng của việc nghiên cứu ổn định công trình

Nếu công thức của Euler đơn thuần mang tính hàn lâm, thì vấn đề mất ổn định của cấu kiện chịu nén có tầm quan trọng to lớn trong thực tế đối với kết cấu công trình (từ khoảng năm 1880) của rất nhiều cầu đường sắt. Việc sử dụng thép tất yếu dẫn đến các cấu kiện thành mỏng chịu nén, tấm và vỏ mỏng. Nhiều công trình bị sập đổ và những tai nạn khủng khiếp đã xảy ra (từ chiếc

cầu đường sắt đầu tiên ở Kevđa (Nga) là cầu dàn hờ đã bị phá huỷ năm 1875 do hệ thanh biên trên bị mất ổn định, cầu Menkhienxtain ở Thụy sĩ bị phá huỷ năm 1891 do mất ổn định, Cầu dàn Quebec ở Canada 1907, bể chứa khí ở Hamburg 1907, cầu dàn Mojur ở Nga 1925 bị phá huỷ do thanh ghép chịu nén bị mất ổn định cho đến sự phá huỷ của 24 chiếc cầu ở Pháp cũng do nguyên nhân mất ổn định) cho thấy vấn đề mất ổn định khó mà tầm quan trọng của nó lớn dần hàng năm, sự mất ổn định có mặt ở mọi nơi, từ cột hay vòm sụp đổ do uốn trong mặt phẳng của nó, đến dầm và vòm bị sụp đổ bởi mất ổn định xoắn ngang ra ngoài mặt phẳng của chúng. Trong những trường hợp vỏ mỏng, tầm quan trọng về quân sự của nó hiển nhiên là to lớn, sự phân tích tuyến tính lúc ban đầu cho kết quả thực tế có thể chấp nhận được .

Theo năm tháng tầm quan trọng tăng lên của ổn định công trình có được là nhờ một vài yếu tố phụ giúp :

- Sự tăng ứng suất cho phép
 - Sự giảm chiều dày do sử dụng các loại thép cường độ cao hay hợp kim nhôm
 - Sự tăng cường sử dụng tấm đặc biệt trong cầu thay cho thép hình cán sẵn
- Tầm quan trọng hiện nay của ổn định công trình được thể hiện bằng ba yếu tố:
- Số công trình khoa học dành cho lĩnh vực này mở rộng theo hàm số mũ
 - Các kỹ sư kết cấu không còn thoả mãn với các mô hình phân nhánh đàn hồi của thời kỳ 1744-1930 hay với công thức thực nghiệm về mất ổn định của cột nữa. Họ sử dụng toàn bộ những khả năng của máy tính điện tử để xác lập những giá trị thực tế của ứng suất tới hạn của cấu kiện hay kết cấu bị ảnh hưởng bởi sự khiếm khuyết về hình học và cấu trúc.
 - Những tổ chức khác nhau của các quốc gia và quốc tế phát triển nhanh chóng (Hội đồng nghiên cứu ổn định kết cấu Mỹ, uỷ ban về ổn định của các quy ước Châu Âu cho kết cấu thép (1955), uỷ ban nghiên cứu cột của Nhật

Bản). Ba uỷ ban này cộng với uỷ ban thứ tư đại diện cho các nước khối Comecom tổ chức từ tháng 9/76 đến 10/77 cuộc “hội đàm du lịch”. Đó là nỗ lực nghiên cứu đầu tiên được thể hiện phổ biến trên toàn thế giới trong lĩnh vực ổn định Công trình [31].

1.4. Các phương pháp nghiên cứu ổn định công trình

1.4.1. Phương pháp tĩnh (Phương pháp Euler)

Theo phương pháp này tải trọng tới hạn sẽ là tải trọng nhỏ nhất để xảy ra phân nhánh dạng cân bằng, tức là bên cạnh dạng cân bằng ban đầu tồn tại dạng cân bằng lân cận. Để xác định tải trọng này chỉ cần nghiên cứu sự cân bằng của hệ ở trạng thái lân cận khi cho hệ chuyển vị bé và đi tìm tải trọng bé nhất tương ứng với dạng cân bằng lân cận đó.

Khảo sát cân bằng của một hệ ở trạng thái lệch khỏi dạng cân bằng ban đầu. Tính giá trị của lực ở trạng thái lệch để đối chiếu với giá trị của lực đã cho ở trạng thái cân bằng ban đầu.

Giả sử: P là lực đã cho ở trạng thái cân bằng ban đầu

P^* là lực ứng với trạng thái lệch khỏi dạng cân bằng ban đầu (lực cần có để giữ hệ ở trạng thái lệch).

- Nếu $P < P^*$ thì hệ cân bằng ổn định
- Nếu $P = P^*$ thì hệ cân bằng phiếm định
- Nếu $P > P^*$ thì hệ cân bằng không ổn định

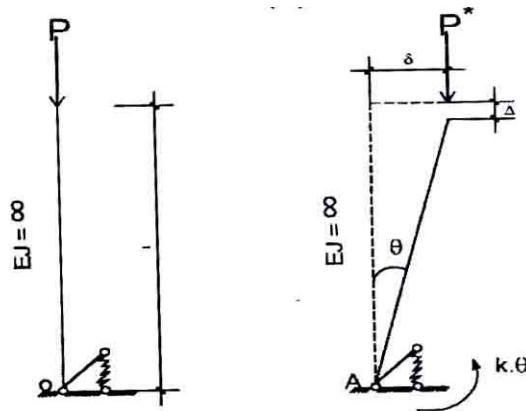
Xét hệ một bậc tự do, một đầu ngàm đàn hồi, một đầu tự do

Sau khi khảo sát cân bằng của hệ ở trạng thái cân lệch ta có:

$$P = \frac{k}{l} \text{ do đó:}$$

- Với $P < \frac{k}{l}$ thì hệ cân bằng ổn định
- Với $P = \frac{k}{l}$ thì hệ cân bằng phiếm định

- Với $P = \frac{k}{l}$ hệ cân bằng không ổn định



Hình 1.2.

1.4.2. Phương pháp năng lượng

Phương pháp này dựa trên việc nghiên cứu năng lượng toàn phần của hệ. Khi nó đạt cực tiểu thì hệ ở trạng thái cân bằng ổn định. Sự lệch khỏi trạng thái cân bằng ổn định sẽ làm tăng năng lượng. Tải trọng tới hạn ứng với năng lượng cực tiểu.

Nguyên lý Larange - Dirichlet:

“ Nếu hệ ở trạng thái cân bằng ổn định thì thế năng toàn phần đạt cực tiểu so với tất cả các vị trí lân cận vô cùng bé kể từ trạng thái cân bằng đó.

Nếu hệ ở trạng thái cân bằng không ổn định thì thế năng toàn phần đạt cực đại so với tất cả các vị trí lân cận vô cùng bé kể từ trạng thái cân bằng đó.

Nếu hệ ở trạng thái cân bằng phiếm định thì thế năng toàn phần không đổi”.

Thế năng toàn phần U^* của hệ ở trạng thái biến dạng gồm:

- Thế năng biến dạng của nội lực u
- Thế năng của ngoại lực $U_P = -T$ (trái dấu với công của ngoại lực T)

$$U^* = U + U_P = U - T$$

Độ biến thiên δU^* của thế năng toàn phần của hệ khi chuyển từ trạng thái đang xét sang trạng thái lân cận sẽ là

$$\delta U^* = \delta U - \delta T$$

Trong đó: δU^* - biến thiên của thế năng toàn phần

δU - độ biến thiên của thế năng biến dạng δT - độ biến thiên của công các ngoại lực . Như vậy, theo nguyên lý Lagrange - Dirichlet:

Nếu $\delta U > \delta T$ thì hệ ở trạng thái cân bằng ổn định. Nếu $\delta U < \delta T$ thì hệ ở trạng thái cân bằng không ổn định. Nếu $\delta U = \delta T$ thì hệ ở trạng thái cân bằng phiếm định

1.4.3 Phương pháp động lực học

Đây là phương pháp chung nhất, dựa trên việc nghiên cứu chuyển động của hệ sau khi có kích động ban đầu. Nếu chuyển động là dao động có biên độ tăng không ngừng theo thời gian thì dạng cân bằng ban đầu là không ổn định. Ngược lại, nếu hệ luôn dao động bé quanh trạng thái cân bằng ban đầu hoặc tắt dần thì đó là dạng cân bằng ổn định.

1.5. Bài toán ổn định uốn dọc của thanh và phương pháp giải

Phương trình cân bằng của thanh thẳng có tiết diện không đổi chịu tác dụng của lực P đặt ở đầu thanh có thể được viết như :

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} + P \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (1.1)$$

Phương trình trên là phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất (không có vế phải). Phương trình dao động tự do của thanh được trình bày ở chương 3 cũng thuộc loại phương trình này. Vì vậy, để tổng quát ở đây trình bày phương pháp chung tìm

nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính bậc n thuần nhất có các hệ số là hằng số [29, trg. 269-270]:

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n y = 0 \quad (a_0 \neq 0) \quad (1.2)$$

Để giải phương trình vi phân trên thì giải phương trình đặc tính của nó là:

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0 \quad (1.3)$$

a) Trường hợp phương trình đặc tính có n nghiệm phân biệt thì nghiệm của phương trình vi phân (a) viết dưới dạng sau:

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x} \quad (1.4)$$

Các hệ số c_i được xác định từ điều kiện biên của bài toán

b) Nếu như một nghiệm r_k nào đó có nghiệm lặp lại m_k lần thì thành phần tương ứng trong nghiệm trên được thay bằng

$$(c_k + c_{k1}x + c_{k2}x^2 + \dots + c_{k(m_k-1)}x^{m_k-1})e^{r_k x} \quad (1.5)$$

Trong trường hợp có hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\varphi_{j1} \left(\frac{d}{dx}\right) y_1 + \varphi_{j2} \left(\frac{d}{dx}\right) y_2 + \dots + \varphi_{jn} \left(\frac{d}{dx}\right) y_n = 0 \quad (j=1, 2, 3, \dots, n) \quad (1.6)$$

Ở đây $\varphi_{jk} \left(\frac{d}{dx}\right)$ là đa thức của $\left(\frac{d}{dx}\right)$. Mỗi hàm $y_k = y_k(x)$ ($k=1 \dots n$) đều có dạng (1.46) và (1.47), còn các số mũ r_1 sẽ là nghiệm của hệ các phương trình đặc tính

$$D(r) \equiv \det[\varphi_{jk}(r)] = 0 \quad (1.7)$$

Đây là hệ phương trình đặc trưng của hệ phương trình vi phân. Từ phương trình (1.49) tìm được r_{jk} , đưa các nghiệm y dạng (1.46) và (1.47) vào hệ phương trình (1.48) sẽ xác định được các tương quan của các hệ số, các hệ số tự do được xác định từ các điều kiện biên. Đó là phương pháp chung để giải phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất có hệ số là hằng số.

Trở lại phương trình uôn dọc của thanh. Phương trình (1.43) hoàn toàn giải được bằng cách giải phương trình đặc tính (1.45), tìm nghiệm theo (1.46) và (1.47), các hệ số c của (1.46) và (1.47) xác định từ các điều kiện biên của thanh. Tuy nhiên, một cách giải ngắn gọn hơn khi viết hàm độ võng y của thanh dưới dạng sau

$$y = a \sin(kx) + b \cos(kx) + cx + d \quad (1.8)$$

$$k = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$$

Thật vậy, đưa hàm (1.8) vào phương trình (1.1) ta thấy phương trình (1.1) được thỏa mãn. Vấn đề còn lại là xác định các hệ số a, b, c, d . Bốn hệ số a, b, c, d của hàm y được xác định tùy theo 4 điều kiện biên y, y', y'', y''' tại hai đầu cuối thanh. Dưới đây trình bày các lời giải thanh có các điều kiện biên khác nhau.

Thanh khớp-khớp

Các điều kiện biên tại liên kết khớp là chuyển vị và momen uốn bằng không. Ta có

$$y(x=0) = 0; \frac{d^2 y}{dx^2}(x=0) = 0 ; y(x=l) = 0; \frac{d^2 y}{dx^2}(x=l) = 0$$

Đưa 4 điều kiện trên vào (1.8), nhận được 4 phương trình sau

$$b + d = 0; b = 0; a \sin(kl) + cl = 0; ak^2 \sin(kl) = 0$$

Ta có $b = c = d = 0, a \sin(kl) = 0$

Nếu $a = 0$ thì $y = 0$, đó là nghiệm tầm thường của (1.1). Để có được nghiệm không tầm thường ($y \neq 0$), ta cho

$$\sin(kl) = 0 \text{ hay } kl = n\pi, \dots (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Thay k vào phương trình (1.8) ta có

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{l^2} \quad (1.9)$$

Với các giá trị P xác định trên, thanh có trạng thái cân bằng mới, trạng

thái uốn dọc với $y = a \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$ (1.10)

khác với trạng thái ban đầu là trạng thái nén, thanh thẳng. Ta nói thanh mất ổn định và lực P là lực tới hạn Euler. Chú ý rằng với P tới hạn xác định theo (1.9), độ võng (1.10) của thanh vẫn hữu hạn. Tuy nhiên, theo lí thuyết dầm-

cột trình bày ở trên, độ võng của thanh với lực P xác định theo (1.9) sẽ tăng lên vô cùng, nên (1.10) là biểu thức xác định lực tới hạn của thanh. Kixelov cho rằng lực P tới hạn (1.52) vẫn nằm trong miền ổn định.

Để thỏa mãn 4 điều kiện biên y, y', y'', y''' của phương trình (1.1) ta có thể dùng 4 thông số chuyển vị, góc xoay, momen uốn và lực cắt chưa biết tại hai đầu thanh làm ẩn thay cho các hệ số a, b, c, d của phương trình (1.8). Ta có phương pháp thông số ban đầu được giáo sư Kixelov sử dụng trong giáo trình động lực học và ổn định công trình của mình.

Thanh ngàm-ngàm :

Cả hai đầu thanh là ngàm do đó các điều kiện biên tại liên kết ngàm là chuyển vị và góc xoay bằng không. Ta có

$$y(x=0) = 0; \frac{dy}{dx}(x=0) = 0; y(x=l) = 0; \frac{dy}{dx}(x=l) = 0$$

Đưa 4 điều kiện trên vào (1.50), nhận được 4 phương trình sau

$$\left. \begin{aligned} b + d = 0; ak + c = 0 \\ a \sin(kl) + b \cos(kl) + cl + d = 0 \\ ak \cos(kl) - bk \sin(kl) + c = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

Để tìm các hệ số a, b, c, d ta cho định thức các hệ số của hệ bốn phương trình trên bằng không. Từ đó rút ra : $2(\cos kl - 1) + kl \sin(kl) = 0$

(1.12)

Với chú ý rằng : $\sin(kl) = 2 \sin(kl/2) \cos(kl/2)$; $\cos(kl) = 1 - 2 \sin^2(kl/2)$

Ta có thể viết phương trình (1.54) dưới dạng : $\sin\left(\frac{kl}{2}\right) \left(\frac{kl}{2} \cos \frac{kl}{2} - \sin \frac{kl}{2}\right) = 0$

Một lời giải của phương trình này là: $\sin\left(\frac{kl}{2}\right) = 0 \Rightarrow kl = 2n\pi \Rightarrow P_{th} = \frac{4n^2 \pi^2 EJ}{l^2}$

Chú ý rằng $\sin(kl) = 0$ và $\cos(kl) = 0$ khi $\sin\left(\frac{kl}{2}\right) = 0$, từ phương trình (1.11)

ta xác định được các hằng số : $a = c = 0; b = -d$

Thay vào (i) ta có phương trình đường độ võng là: $y = b \left(\cos \frac{2n\pi x}{l} - 1 \right)$

Với $n=1$ ta nhận được lực tới hạn nhỏ nhất: $P_{th} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}$

Thanh ngàm-khớp :

Trong trường hợp này, đầu dưới của thanh là ngàm, đầu trên của thanh là khớp do đó các điều kiện biên tại liên kết ngàm là chuyển vị và góc xoay bằng không, tại đầu liên kết khớp là chuyển vị và mômen uốn bằng không.

$$y(x=0) = 0; \frac{dy}{dx}(x=0) = 0; \quad y(x=l) = 0; \frac{d^2y}{dx^2}(x=l) = 0$$

Đưa 4 điều kiện trên vào (i), nhận được 4 phương trình sau

$$b + d = 0; ak + c = 0; cl + d = 0; a \sin(kl) + b \cos(kl) = 0 \quad (1.13)$$

Cả 4 phương trình sẽ được xác định bằng cách lấy $a = b = c = d = 0$, thay giá trị của a, b, c và d vào y ta nhận đường độ võng của thanh là dạng cân bằng thẳng ban đầu (đây là các nghiệm tầm thường vì thanh chưa bị mất ổn định). Trường hợp thứ hai ta tìm a và b từ 3 phương trình đầu của (1.55) và thay vào phương trình cuối cùng ta nhận được

$$-b \frac{\sin kl}{kl} + b \cos kl = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} kl = kl \quad (1.14)$$

Giải phương trình (1.14) ta nhận được : $kl = 4.493 \Rightarrow P_{th} = \frac{\pi^2 EJ}{(0.7l)^2}$

Thanh đầu ngàm-đầu tự do :

Trong trường hợp này, đầu dưới của thanh là ngàm, đầu trên của thanh tự do. Do đó các điều kiện biên tại liên kết ngàm là chuyển vị và góc xoay bằng không, tại đầu tự do là mômen uốn và lực cắt bằng không. Ta có

$$y(x=0) = 0; \frac{dy}{dx}(x=0) = 0; \quad \frac{d^2y}{dx^2}(x=l) = 0; \frac{d^3y}{dx^3} + k^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

Đưa 4 điều kiện trên vào (i), nhận được 4 phương trình sau

$$b + d = 0; ak + c = 0; a \sin(kl) + b \cos(kl) = 0; c = 0 \quad (1.15)$$

Từ phương trình thứ 2 và phương trình thứ 4 ta rút ra được $c = a = 0$ và

$$\cos kl = 0 \Leftrightarrow kl = \frac{(2n-1)\pi}{2} \quad (1.16)$$

Giải phương trình (1.58) ta nhận được lực tới hạn nhỏ nhất ứng với ($n=1$) là

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}$$

1.6. Thuật toán đơn giản để giải phương trình đa thức

Bài toán trị riêng và véc tơ riêng phải dẫn về giải phương trình (1.16).

Ở đây trình bày cách giải phương trình đó.

Trước tiên xét ta xét trường hợp giải phương trình đa thức đặc trưng.

$$f(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^{n-1} + (-1)^n z^n = 0 \quad (1.17)$$

khí $n \leq 4$ thì lời giải của phương trình có thể biểu diễn dưới dạng các công thức. Với các trường hợp khác thì phải dùng các phương pháp lặp để giải:

a) Phương pháp lặp Newton

Cho một nghiệm ban đầu Z_0 . Nghiệm gần đúng của bước sau ($j+1$) theo phương pháp Lặp Newton được xác định theo công thức sau:

$$z^{[j+1]} = z^{[j]} - \frac{f(z^{[j]})}{f'(z^{[j]})} \quad (1.18)$$

Nếu như $z^{[j+1]} - z^{[j]}$ đủ nhỏ thì có thể xem $z^{[j+1]}$ chính là nghiệm của phương trình.

b) Phương pháp Cát tuyến

Để tìm nghiệm thực của các phương trình có hệ số thực, đầu tiên chọn hai giá trị ban đầu và xây dựng các chuỗi gần đúng sau:

$$z^{[j+1]} = \frac{z^{[j]} - z^{[k]}}{f(z^{[j]}) - f(z^{[k]})} f(z^{[j]}) \quad (j=0, 1, 2, \dots, k < j) \quad (1.19)$$

các $z^{[j]}$, $z^{[k]}$ thường được chọn sao cho $f(z^{[j]})$ và $f(z^{[k]})$ có dấu ngược nhau để cho nghiệm nằm giữa $z^{[j]}$ và $z^{[k]}$.

Ví dụ: Tìm trị riêng của ma trận sau:

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 5-2\lambda & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6-2\lambda & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6-\lambda & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Trước tiên ta cần biến đổi ma trận

$$p(\lambda) = (5-2\lambda) \det \begin{bmatrix} 6-2\lambda & -4 & 1 \\ -4 & 6-\lambda & -4 \\ 1 & -4 & 5-\lambda \end{bmatrix} + (4) \det \begin{bmatrix} -4 & -4 & 1 \\ 1 & 6-\lambda & -4 \\ 0 & -4 & 5-\lambda \end{bmatrix} + (1) \det \begin{bmatrix} -4 & 6-2\lambda & 1 \\ 1 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

Hay:

$$p(\lambda) = (5-2\lambda)\{(6-2\lambda)[(6-\lambda)(5-\lambda)-16]+4[-4(5-\lambda)+4]+16-(6-\lambda)\} + 4\{-4[(6-\lambda)(5-\lambda)-16]+4(5-\lambda)-4\} + \{-4[(-4)(5-\lambda)+4]-(6-2\lambda)(5-\lambda)+1\}$$

Rút gọn biểu thức ta có: $p(\lambda) = 4\lambda^4 - 66\lambda^3 + 276\lambda^2 - 285\lambda + 25$ ($f(z) = p(\lambda)$;

$z=\lambda$)

Bây giờ ta dùng phương pháp lặp Newton để giải bài toán này. Các bước thực hiện như sau:

Bước 1: Cho λ một giá trị bất kỳ nào đó.

Bước 2: Tính λ bước (j+1) theo phương pháp lặp Newton:

$$z^{[j+1]} = z^{[j]} - \frac{f(z^{[j]})}{f'(z^{[j]})}$$

Bước 3: Tính: $r = \left| \frac{\lambda^{[j+1]} - \lambda^{[j]}}{\lambda^{[j]}} \right|$

Bước 4: Nếu $r > \text{eps}$ (eps là một số nhỏ bất kỳ tùy ý cho trước. Nếu $r > \text{eps}$ thì gán $\lambda^{[j+1]}$ cho $\lambda^{[j]}$ ($\lambda^{[j]} \leftarrow \lambda^{[j+1]}$) và quay lại bước 2. Nếu $r < \text{eps}$ thì thực hiện bước 5

Bước 5: $\lambda^{[j+1]}$ là nghiệm của bài toán và gán nó cho (c) ($c \leftarrow \lambda^{[j+1]}$)

Bước 6: Để tìm các nghiệm khác thì ta chia hàm $P(\lambda)$ đã có cho $(\lambda - c)$ thì ta sẽ được một đa thức bậc thấp hơn và quay lại bước 1.

Nếu đa thức bậc n ta làm lần lượt n lần như vậy ta sẽ nhận được n nghiệm.

Sau đây giới thiệu đoạn chương trình sử dụng phương pháp lặp Newton để giải bài toán trên. (ngôn ngữ lập trình MATLAB)

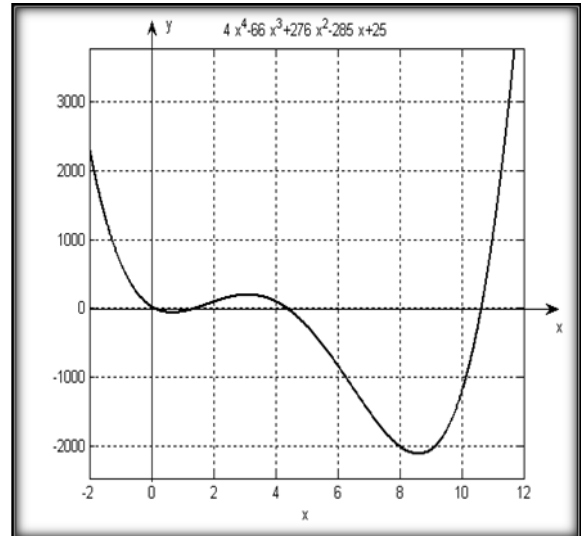
```
syms x;
y=4*x^4-66*x^3+276*x^2-285*x+25;
y2=y;
for n=1:4
    y1=y2;
    y1x=diff(y1,x);
    z1=0.1;
    eps=1;
    while eps >= 0.000001
        s1=subs(y1,x,z1);
        s2=subs(y1x,x,z1);
        z2=z1-s1/s2;
        s3=z2-z1;
        r=abs(s3/z1);
        z1=z2;
        eps=r;
    end
    c(n)=z1;
    z1
    f(n)=subs(y,x,z1);
    y2=y1/(x-z1);
end
r1=[c' f'];
digits(7)
vpa(r1)
ezplot(y,[-2 12]);
```

grid

Kết quả

```
[ .9653733e-1, 0.]  
[ 1.391465, -.2052047e-  
10]  
[ 4.373550, .5732090e-  
9]  
[ 10.63845, .1136868e-  
10]
```

Trong Matlab phương pháp giải phương trình đại số dựa trên phương pháp lặp Newton và phương pháp cát tuyến với thuật toán hoàn thiện hơn cho nên trong luận án sau này khi giải các phương trình đại số sẽ dùng các hàm có sẵn của Matlab.



Hình 1.3. Đồ thị nghiệm PT đa thức

CHƯƠNG 2.

PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

2.1. Phương pháp phần tử hữu hạn

Phương pháp phần tử hữu hạn là một phương pháp số đặc biệt có hiệu quả để tìm dạng gần đúng của một hàm chưa biết trong miền xác định V của nó. Tuy nhiên phương pháp phần tử hữu hạn không tìm dạng xấp xỉ của hàm cần tìm trên toàn miền V mà chỉ trong từng miền con V_e (phần tử) thuộc miền xác định V . Do đó phương pháp này rất thích hợp với hàng loạt bài toán vật lý và kỹ thuật trong đó hàm cần tìm được xác định trên các miền phức tạp gồm nhiều vùng nhỏ có đặc tính hình học, vật lý khác nhau, chịu những điều kiện biên khác nhau. Phương pháp ra đời từ trực quan phân tích kết cấu, rồi được phát biểu một cách chặt chẽ và tổng quát như một phương pháp biến phân hay phương pháp dư có trọng nhưng được xấp xỉ trên mỗi phần tử.

Trong phương pháp phần tử hữu hạn chia kết cấu công trình thành một số hữu hạn các phần tử. Các phần tử này được nối với nhau tại các điểm định trước thường tại đỉnh phần tử (thậm trí tại các điểm trên biên phần tử) gọi là nút. Như vậy việc tính toán kết cấu công trình được đưa về tính toán trên các phần tử của kết cấu sau đó kết nối các phần tử này lại với nhau ta được lời giải của một kết cấu công trình hoàn chỉnh. Tương tự như phương pháp sai phân hữu hạn cũng chia công trình thành các đoạn nhỏ (phần tử) và các trạng thái chuyển vị (trường chuyển vị) v.v... được xác định tại các điểm nút sai phân. Sự khác biệt của hai phương pháp là Phương pháp sai phân hữu hạn sau khi tìm được các chuyển vị tại các nút của sai phân còn các điểm nằm giữa hai nút được xác định bằng nội suy tuyến tính, còn phương pháp phần tử hữu hạn sau khi xác định được chuyển vị tại các nút của phần tử thì các điểm bên trong được xác định bằng hàm nội suy (hàm dạng).

Với bài toán cơ học vật rắn biến dạng, tùy theo ý nghĩa vật lý của hàm nội suy có thể phân tích bài toán theo 3 loại mô hình sau:

- Mô hình chuyển vị: Xem chuyển vị là đại lượng cần tìm và hàm nội suy biểu diễn gần đúng dạng phân bố của chuyển vị trong phần tử.
- Mô hình cân bằng: Hàm nội suy biểu diễn gần đúng dạng phân bố của ứng suất hay nội lực trong phần tử.

- Mô hình hỗn hợp: Coi các đại lượng chuyển vị và ứng suất là 2 yếu tố độc lập riêng biệt. Các hàm nội suy biểu diễn gần đúng dạng phân bố của cả chuyển vị lẫn ứng suất trong phần tử.

Hiện nay, khi áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn để giải các bài toán cơ học thường sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn theo mô hình chuyển vị. Sau đây luận văn trình bày nội dung phương pháp phần tử hữu hạn theo mô hình chuyển vị.

2.2. Nội dung phương pháp phần tử hữu hạn theo mô hình chuyển vị

Trong phương pháp phần tử hữu hạn - mô hình chuyển vị, thành phần chuyển vị được xem là đại lượng cần tìm. Chuyển vị được lấy xấp xỉ trong dạng một hàm đơn giản gọi là hàm nội suy (hay còn gọi là hàm chuyển vị). Trình tự phân tích bài toán theo phương pháp phần tử hữu hạn - mô hình chuyển vị có nội dung sau:

2.2.1. Rời rạc hoá kết cấu:

Trong phương pháp PTHH, người ta rời rạc hoá bằng cách chọn kết cấu liên tục thành một số hữu hạn các miền con có kích thước càng nhỏ càng tốt nhưng phải hữu hạn. Các miền hoặc kết cấu con được gọi là PTHH, chúng có thể có dạng hình học và kích thước khác nhau, tính chất vật liệu được giả thiết không thay đổi trong mỗi phần tử nhưng có thể thay đổi từ phần tử này sang phần tử khác.

Kích thước hình học và số lượng các phần tử không những phụ thuộc vào kích thước hình học và tính chất chịu lực của kết cấu mà còn phụ thuộc vào độ chính xác của bài toán.

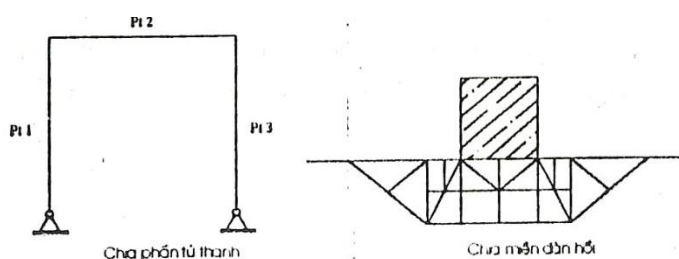
Với hệ thanh dùng các phương trình thanh, kết cấu tám sử dụng phương trình tám tam giác, chữ nhật, với vật thể khối dùng các phương trình hình chóp, hình hộp...

Khi rời rạc hoá kết cấu liên tục các PTHH được giả thiết nối với nhau tại một số điểm quy định gọi là các nút, toàn bộ tập hợp các phương trình rời rạc lưới PTHH. Lưới càng mau, nghĩa là số lượng phương trình càng lớn hay

kích thước phương trình càng nhỏ thì mức độ chính xác của kết cấu càng tăng.

Khi rời rạc cần chú ý tại những nơi chuyển vị biến thiên nhanh thì chọn các phương trình có kích thước nhỏ, càng ra xa kích thước của phương trình có thể tăng lên để giảm số lượng phương trình hay số ẩn của bài toán mà vẫn đảm bảo độ chính xác. Miền được phân chia phải chọn sao cho tại biên các chuyển vị coi như đã tắt. Khi chia thành các phần tử thì các kích thước trong mỗi một phần tử không chênh lệch quá lớn làm giảm độ chính xác của bài toán. Để xác định được kích thước phù hợp cho phương trình với mỗi bài toán cần quy định kích thước ban đầu, sau đó lấy kích thước nhỏ đi hai lần, nếu kết quả của bài toán đạt độ chính xác như cũ thì kích thước của phương trình giả định coi như chấp nhận được.

Nhưng đối với hệ thanh thì khi chia nhỏ một thanh (phương nối hai nút) độ chính xác không tăng. Cho nên với hệ thanh kích thước của phương trình lấy với kích thước lớn nhất có thể tức là phương trình nối hai nút của kết cấu.



Hình 3.1.

2.2.2. Hàm chuyển vị:

Việc chọn trước các hàm chuyển vị tại một thời điểm bất kỳ trong PTHH nhằm xác định sự liên hệ giữa chuyển vị nút với chuyển vị của mọi điểm trong phạm vi của PTHH.

Gọi trường chuyển vị là vector các hàm chuyển vị tại điểm bất kỳ có tọa độ (x, y, z) của PTHH không gian và tọa độ (x, y) của PTHH phẳng.

$$U_x(x, y, z); U_y(x, y, z); U_z(x, y, z)$$

và $U_x(x, y); U_y(x, y)$

Các hàm chuyển vị thường được chọn dưới dạng hàm đa thức. Bậc của hàm và số thành phần phụ thuộc vào hình dạng, bậc của loại PTHH tương ứng.

Ví dụ trong bài toán phẳng của ứng suất hay biến dạng, đối với loại phần tử tuyến tính, hàm chuyển vị là đa thức bậc nhất và số thành phần bằng số nút quy định của phương trình. Đối với PTHH bậc hai, hàm chuyển vị là đa thức bậc hai, số thành phần chứa trong mỗi hàm bằng mỗi nút của phần tử. Dưới đây là một số hàm chuyển vị được dùng trong lý thuyết đàn hồi.

1. PTHH tuyến tính:

a. PTHH tam giác:

$$U_x(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2.x + \alpha_3.y + \alpha_4.x^2 + \alpha_5.xy + \alpha_6.y^2$$

$$U_y(x, y) = \alpha_4 + \alpha_5.x + \alpha_6.y$$

b. PTHH chữ nhật:

$$U_x(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2.x + \alpha_3.y + \alpha_4.xy$$

$$U_y(x, y) = \alpha_5 + \alpha_6.x + \alpha_7.y + \alpha_8.xy$$

c. PTHH hình chóp:

$$U_x(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2.x + \alpha_3.y + \alpha_4.z$$

$$U_y(x, y, z) = \alpha_5 + \alpha_6.x + \alpha_7.y + \alpha_8.z$$

$$U_z(x, y, z) = \alpha_9 + \alpha_{10}.x + \alpha_{11}.y + \alpha_{12}.z$$

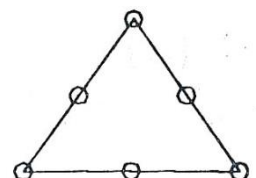
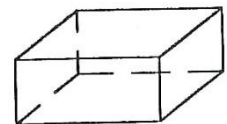
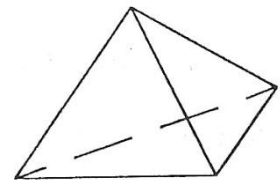
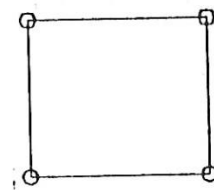
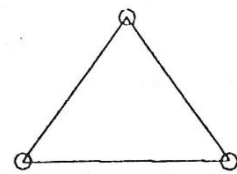
d. PTHH hình hộp:

$$U_x(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2.x + \alpha_3.y + \alpha_4.z + \alpha_5.xy + \alpha_6.yz + \alpha_7.zx + \alpha_8.xyz$$

$$U_y(x, y, z) = \alpha_9 + \alpha_{10}.x + \alpha_{11}.y + \alpha_{12}.z + \alpha_{13}.xy + \alpha_{14}.yz + \alpha_{15}.zx + \alpha_{16}.xyz$$

$$U_z(x, y, z) = \alpha_{17} + \alpha_{18}.x + \alpha_{19}.y + \alpha_{20}.z + \alpha_{21}.xy + \alpha_{22}.yz + \alpha_{23}.zx + \alpha_{24}.xyz$$

2. PTHH bậc hai



a. PTHH tam giác:

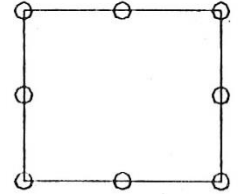
$$U_x(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2.x + \alpha_3.y + \alpha_4.x^2 + \alpha_5.xy + \alpha_6.y^2$$

$$U_y(x, y) = \alpha_7 + \alpha_8.x + \alpha_9.y + \alpha_{10}.x^2 + \alpha_{11}.xy + \alpha_{12}.y^2$$

b. PTHH chữ nhật:

$$U_x(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2.x + \alpha_3.y + \alpha_4.x^2 + \alpha_5.xy + \alpha_6.y^2 + \alpha_7.x^2y + \alpha_8.xy^2$$

$$U_y(x, y) = \alpha_9 + \alpha_{10}.x + \alpha_{11}.y + \alpha_{12}.x^2 + \alpha_{13}.xy + \alpha_{14}.y^2 + \alpha_{15}.x^2y + \alpha_{16}.xy^2$$



2.2.3. Phương trình cơ bản của phương pháp phần tử hữu hạn

Để thiết lập phương trình cơ bản của phương pháp PTHH có thể sử dụng các nguyên lý khác nhau, tuy nhiên thông thường người ta sử dụng nguyên lý công khả dĩ.

Theo nguyên lý công khả dĩ ta có công thức:

$$\int_V \{\sigma\}^T \cdot \{\delta\varepsilon\} dv = \int_V \{g\}^T \cdot \{\delta u\} dv + \int_S \{p\}^T \cdot \{\delta\varepsilon\} ds \quad (2.1)$$

Phương trình trên biểu thị điều kiện cân bằng của hệ đàn hồi tuyến tính.

Nếu chuyển trí của cả hai về theo phương pháp thông thường ta có:

$$\int_V \{\delta\varepsilon\}^T \cdot \{\delta\} dv = \int_V \{\delta u\}^T \cdot \{g\} dv + \int_S \{\delta u\}^T \cdot \{p\} ds \quad (2.2)$$

Theo định luật Hooke: $\{\delta\} = [D]\{\varepsilon\}$. thay vào vế phải nhận được:

$$\int_V \{\delta\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dv = \int_V \{\delta u\}^T \{g\} dv + \int_S \{\delta u\}^T \cdot \{p\} ds \quad (2.3)$$

Trong phương trình trên còn thiếu điều kiện liên tục, điều kiện này được đưa vào bằng một trường chuyển vị xấp xỉ (hàm chuyển vị) thỏa mãn các điều kiện tương thích.

Ta chọn một hàm chuyển vị phù hợp với loại và bậc của một phần tử mẫu (PTHH):

- Với bài toán không gian:

$$\{U(x, y, z)\} = [P(x, y, z)]\{\alpha\} \quad (2.4)$$

- Với bài toán phẳng:

$$\{U(x, y)\} = [P(x, y)]\{\alpha\} \quad (2.5)$$

Trong đó:

$\{U$ - vectơ chuyển vị của một điểm

$[P]$ - ma trận các biến của trường chuyển vị.

$\{\alpha\}$ - ma trận hệ số của hàm chuyển vị

Ví dụ với phần tử tam giác:

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

$$\rightarrow \{u\} = [P]\{\alpha\}$$

Nếu tính chuyển vị của các nút trong một phần tử ta có:

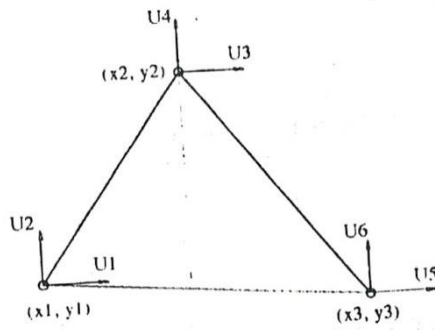
$$\{u\}_e = [A]_e \cdot \{\alpha\} \quad (2.7)$$

$\{u\}_e$ - vectơ chuyển vị của các nút của phần tử.

$[A]_e$ - ma trận được xác định theo $[P]$ và tọa độ của các nút.

$\{\alpha\}$ - ma trận hệ số.

Ví dụ với phần tử tam giác:



$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{u}_5 \\ \mathbf{u}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\rightarrow \{\mathbf{u}\}_e = [\mathbf{A}]_e \cdot \{\alpha\} \quad (2.9)$$

Trong công thức trên giá trị của $[\mathbf{A}]_e$ hoàn toàn xác định. Nếu biết được $\{\mathbf{u}\}_e$ ta sẽ xác định được $\{\alpha\}$, ta có:

$$\{\alpha\} = [\mathbf{A}]_e^{-1} \cdot \{\mathbf{u}\}_e \quad (2.10)$$

Khi đó chuyển vị tại một điểm bất kỳ được xác định theo chuẩn vị của các nút của phần tử:

$$\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{P}][\mathbf{A}]_e^{-1} \cdot \{\mathbf{u}\}_e \quad (2.11)$$

Mặt khác ta có quan hệ giữa chuyển vị và biến dạng:

$$\{\varepsilon\} = [\nabla] \cdot \{\mathbf{u}\} \quad (2.12)$$

$[\nabla]$ - ma trận toán tử vi phân;

$\{\varepsilon\}$ - vectơ biến dạng

Thay giá trị của $\{\mathbf{u}\}$ ta có công thức biến dạng:

$$\{\varepsilon\} = [\nabla][\mathbf{p}][\mathbf{A}]_e^{-1} \cdot \{\mathbf{u}\}_e \quad (2.13)$$

Đặt:

$$[\mathbf{N}] = [\mathbf{p}][\mathbf{A}]_e^{-1} \quad (2.14)$$

$$[B] = [\nabla][N] \quad (2.15)$$

Trong đó:

$[N]$ - ma trận hàm dạng

$[B]$ - ma trận biến đổi của hàm dạng

Như vậy biến dạng có thể biến đổi lại như sau:

$$\{\varepsilon\} = [\nabla][N]\{u\}_e \text{ hoặc } \{\varepsilon\} = [B]\{u\}_e, \text{ đồng thời}$$

$$\{u\} = [N]\{u\}_e$$

Nếu cho các nút một chuyển vị khả dĩ khi đó ta có biến dạng khả dĩ.

$$\{\delta\varepsilon\} = [B]\{\delta u\}_e$$

$$\{\delta u\} = [N]\{\delta u\}_e \quad (2.16)$$

Thực hiện phép chuyển trí phương trình trên ta có:

$$\{\delta\varepsilon\}^T = \{\delta u\}_e^T [B]^T$$

$$\{\delta u\}^T = \{\delta u\}_e^T [N]^T \quad (2.17)$$

Thay $\{\delta\varepsilon\}^T$ vào phương trình cân bằng của nguyên lý công khả dĩ ta được

$$\int_V \{\delta u\}_e^T [B]^T [D][B]\{u\}_e dv = \int_V \{\delta u\}_e^T [N]^T \{g\} dv + \int_S \{\delta u\}_e^T [N]\{p\} ds \quad (2.18)$$

Ta dùng chuyển vị tương thích được chọn (Hàm CV) không những thoả mãn điều kiện bên trong và cả trên biên PTHH. Trong công thức trên đại lượng $\{\delta u\}_e$ không phụ thuộc vào phép tích phân nên có thể đưa ra ngoài dấu tích phân:

$$\{\delta u\}_e^{T0} \int_V [B]^T [D][B]\{u\}_e dv = \{\delta u\}_e^T \int_V [N]^T \{g\} dv + \{\delta u\}_e^T \int_S [N]\{p\} ds$$

Do chuyển vị khả dĩ khác 0 nên:

$$\int_V [B]^T [D][B]\{u\}_e dv = \int_V [N]^T \{g\} dv + \int_S [N]\{p\} ds \quad (2.19)$$

Nếu ký hiệu:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{K}]_e &= \int_v [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dv \\
\{\mathbf{F}\}_e &= \int_v [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{g}\} dv + \int_s [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{p}\} ds
\end{aligned}
\tag{2.20}$$

Ta có:

$$[\mathbf{K}]_e \{\mathbf{u}\}_e = \{\mathbf{F}\}_e
\tag{2.21}$$

Đây là phương trình cơ bản của PTHH, trong đó:

$[\mathbf{K}]_e$ - ma trận độ cứng của PTHH (ma trận đối xứng);

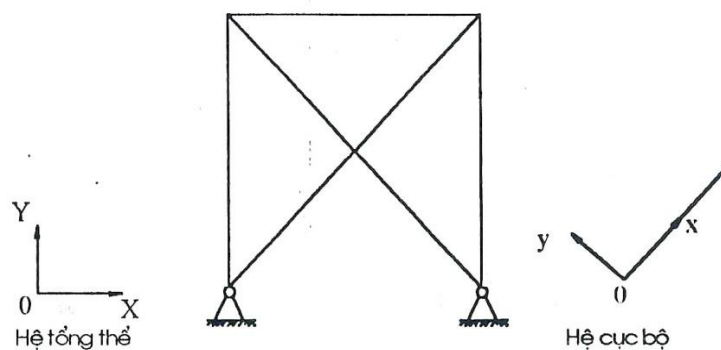
$\{\mathbf{u}\}_e$ - vectơ chuyển vị nút;

$\{\mathbf{F}\}_e$ - vectơ lực nút của phần tử, gọi là lực nút tương đương của PTHH

Ấn của phương trình trên là chuyển vị của các nút. Còn đại lượng $[\mathbf{K}]_e$ và $\{\mathbf{F}\}_e$ đều xác định được dựa vào đặc trưng hình học, vật liệu của phần tử và tải trọng tác động vào nó. Tuy nhiên phương trình trên mới chỉ là phương trình cân bằng của một phần tử, trong khi đó một kết cấu bao gồm nhiều phần tử tạo nên. Dựa vào phương trình cân bằng của một phần tử, thực hiện ghép nối để tạo nên phương trình cân bằng của hệ kết cấu, từ đó xác định được chuyển vị của các nút, trước khi ghép nối đôi khi cần chuyển hệ trục tọa độ (từ hệ tọa độ cục bộ sang hệ tọa độ tổng thể).

2.2.4. Chuyển hệ trục tọa độ

Để thuận tiện cho việc nhập số liệu tải trọng và xem nội lực, trên mỗi một phần tử có một hệ tọa độ riêng gọi là hệ tọa độ cục bộ. Trong khi đó tọa độ của các nút và chuyển vị được tính theo hệ tọa độ chung, gọi là hệ tọa độ tổng thể.



Hình 3.2

Khi ghép nối ma trận độ cứng và vectơ lực, và chuyển vị cần chuyển cả đại lượng này từ hệ tọa độ cục bộ về tổng thể, từ phương trình của hệ tọa độ cục bộ:

$$[K]_e \cdot \{u\}_e = \{F\}_e$$

Ta có:

$$[T][k]_e [T]^{-1} [T]\{u\}_e = [T]\{F\}_e$$

Trong đó $[T]$ là ma trận chuyển trục tọa độ:
$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

Đặt:

$$[K]_e' = [T][K]_e [T]^{-1} = [T][K]_e [T]^T \text{ do } [T]^T = [T]^{-1} \text{ (ma trận trực giao)}$$

$$\{F\}_e' = [T]\{F\}_e$$

$$\{u\}_e' = [T]\{u\}_e$$

Trong đó:

$[K]_e'$ - ma trận độ cứng của phương trình tử trong hệ tọa độ tổng thể.

$\{F\}_e'$ - vectơ lực nút trong hệ tọa độ tổng thể.

$\{u\}_e'$ - vectơ chuyển vị nút trong hệ tọa độ tổng thể.

Khi xác định được các chuyển vị nút của hệ trong tọa độ tổng thể thì chuyển vị của các nút của phương trình trong hệ tọa độ cục bộ là:

$$\{u\}_e = [T]^{-1} \cdot \{u\}'_e \text{ hoặc } \{u\}'_e = [T]^T \cdot \{u\}_e$$

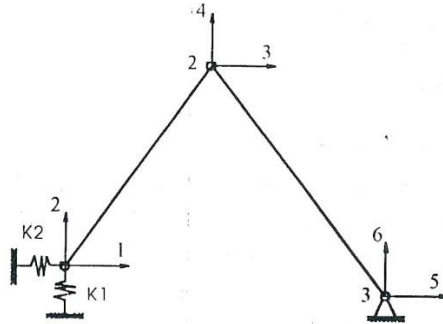
Phương trình cân bằng của phần tử trong hệ tọa độ tổng thể:

$$[K]'_e \cdot \{u\}'_e = \{F\}'_e \quad (2.22)$$

2.2.5. Ghép nối ma trận độ cứng và vector tải trọng của toàn hệ

Dựa vào đặc trưng hình học và cơ học của phần tử ta xác định được $[K]_e$ và $\{F\}'_e$ theo sơ đồ liên kết của các phần tử thành lập bảng liên kết sau đó xác định ma trận độ cứng và vector tải trọng của hệ, các bước thực hiện như sau:

a. Đánh chỉ số nút và chuyển vị



Hình 2.4

Hệ có ba nút, 2 phần tử giàn và 6 chuyển vị. Như vậy, ma trận độ cứng của 1 phần tử có kích thước 4×4 .

Bảng liên kết phần tử

Phần tử	Nút đầu		Nút cuối	
	u (1)	v (2)	u (3)	v (4)
1	1	2	3	4
2	3	4	5	6

b. Ma trận độ cứng

Sau khi đã chuyển về hệ tọa độ tổng thể ta có ma trận độ cứng của các phương trình tương đương với các chuyển vị:

$$\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 3 & 4 \\
\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} & & & \\
1 & 2 & 3 & 4
\end{array}
\quad
\begin{array}{cccc}
3 & 4 & 5 & 6 \\
\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} & & & \\
3 & 4 & 5 & 6
\end{array}$$

Do hệ có 6 chuyển vị nên ma trận độ cứng của hệ $[K]_s$ có kích thước 6*6 tương ứng với các chuyển vị:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
\begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix} & & & & & \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6
\end{array}$$

Các giá trị được xác định bằng cách cộng dồn từ $[K]_1$ và $[K]_2$. Duyệt từng giá trị của $[K]_1$ chuyển vào $[K]_s$ theo đúng chỉ số, tiếp tục với $[K]_2$ nhưng cộng thêm.

c. Vector lực của toàn hệ

Từ số chuyển vị của hệ ta có vector lực tương ứng.

$$\{F\}'_1 = \begin{Bmatrix} * \\ * \\ * \\ * \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}, \quad \{F\}'_2 = \begin{Bmatrix} * \\ * \\ * \\ * \end{Bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}; \quad \{F\}_s = \begin{Bmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

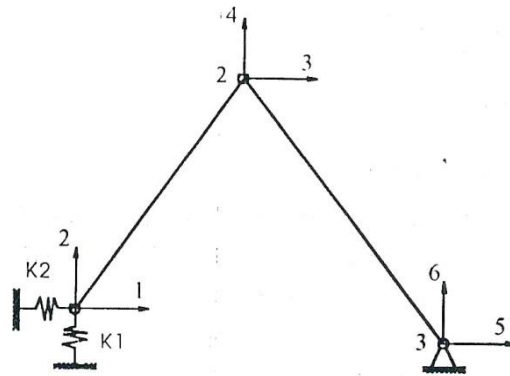
Từ các vector lực của mỗi phần tử đã được xác định, ta duyệt từng giá trị của $\{F\}'_1$ đưa vào vị trí của $\{F\}_s$ sao cho có cùng chỉ số. Tiếp tục làm như

vậy với $\{F\}_2^i$ nhưng phải cộng thêm vào. Cuối cùng ta có hệ phương trình của hệ kết cấu:

$$[K]_s \{u\}_s = \{F\}_s \quad (2.23)$$

d. Trường hợp gối đàn hồi tại nút

Với một số loại kết cấu tại gối có các liên kết đàn hồi, với mỗi liên kết ta có một lò xo với độ cứng cho trước, khi đó độ cứng của lò xo sẽ được cộng thêm vào ma trận độ cứng của hệ tại vị trí trên đường chéo chính với số chỉ tương ứng



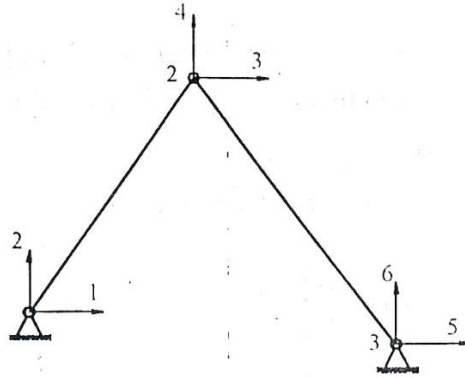
Hình 2.5

Ví dụ: k_1 thêm vào k_{11} , k_2 thêm vào k_{22} .

2.2.6. Xử lý điều kiện biên

Muốn tìm chuyển vị của các nút ta cần giải hệ phương trình: $[K]_s \cdot \{u\}_s = \{F\}_s$ tuy nhiên ma trận độ cứng của hệ được thành lập khi chưa tính đến các liên kết của kết cấu với môi trường, do đó $\det[K]_s = 0$ hay nói cách khác hệ suy biến. Để giải hệ phương trình này cần đưa các điều kiện biên vào. Đó là chuyển vị bị chặn (chuyển vị = 0) tại các chuyển vị này sẽ có phản lực.

Ví dụ: $u_1 = u_2 = u_5 = u_6 = 0$



Hình 2.6

Cách đưa các điều kiện biên vào như sau: với một chuyển vị nào đó $u_i = 0$ ta xoá cột i và dòng i của ma trận $[K]_s$ và $\{F\}_s$. Làm như vậy với tất cả các chuyển vị ta nhận được một hệ phương trình mới không suy biến và giải được bằng các phương pháp: khử Gause, Choleski, lặp: $[K]_s \{u\}'_s = \{F\}'_s$ ví dụ

$$\begin{array}{cccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} (0) \\ 0 \\ * \\ * \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} (* \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{bmatrix} \\
 & [K]_s & & \{u\}'_s & & \{F\}'_s
 \end{array}$$

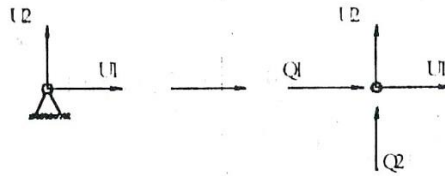
Sau khi xoá ta có hệ phương trình:

$$\begin{bmatrix} k_{33} & k_{34} \\ k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

Giải phương trình tìm u_3, u_4

2.2.7. Tìm phản lực tại các gối

Phản lực tại các gối xuất hiện khi chuyển vị tại đó bị chặn ($u_i = 0$). Nếu ta bỏ phần chặn và thay vào đó bằng phản lực (theo đúng phương của chuyển vị) theo mô hình sau:



Trong đó Q_1, Q_2 là phản lực, để tìm phản lực Q_1 tương ứng với $u_i = 0$ ta lấy dòng của hệ phương trình.

$$[K]_s \cdot \{u\}_s = \{F\}_s$$

Ví dụ u_5 khi đó ta có:

$$\begin{array}{c}
 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \\
 \begin{array}{c}
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 4 \\
 5 \\
 6
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 * \\
 * \\
 * \\
 * \\
 * \\
 *
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 * \\
 * \\
 * \\
 * \\
 * \\
 *
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 * \\
 * \\
 * \\
 * \\
 * \\
 *
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 * \\
 * \\
 * \\
 * \\
 * \\
 *
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 * \\
 * \\
 * \\
 * \\
 * \\
 *
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 0 \\
 0 \\
 * \\
 * \\
 0 \\
 0
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 * \\
 * \\
 * \\
 * \\
 * \\
 *
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 * \\
 * \\
 * \\
 * \\
 * \\
 *
 \end{array}
 \end{array}$$

$[K]_s \quad \{u\}_s \quad \{F\}_s \quad \{Q\}_s$

$$\rightarrow Q_5 = u_3 k_{53} + u_4 k_{54} - F_5 \quad (2.25)$$

Trong đó u_3 và u_4 tìm được từ việc giải hệ $[K]_s \cdot \{u\}_s = \{F\}_s$ tương tự như vậy đối với Q_1, Q_2, Q_6 . Chiều dương của lực Q_i là chiều trùng với chiều dương của hệ toạ độ tổng thể.

2.2.8. Trường hợp biết trước một số chuyển vị

Giả sử cho trước một số chuyển vị $\{u\}_i = \{a\}_i$ khi đó cách khử u_i được thực hiện như sau: thay u_i vào các dòng tại vị trí i chuyển tích các $k_{ii}u_i$ sang bên phải và xoá dòng i ta có hệ phương trình mới.

Ví dụ cho $u_2 = a_2$

$$\begin{array}{c}
 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \\
 \begin{bmatrix} * & k_{12} & * & * & * & * \\ * & k_{22} & * & * & * & * \\ * & k_{32} & * & * & * & * \\ * & k_{42} & * & * & * & * \\ * & k_{52} & * & * & * & * \\ * & k_{62} & * & * & * & * \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} * \\ a \\ * \\ * \\ * \\ * \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{Bmatrix}
 \end{array}
 \quad \text{xoá dòng } i = 2.$$

$[K]_s \qquad \{u\}_s \quad \{F\}_s$

$$\begin{array}{c}
 1 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \\
 \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{Bmatrix} - a_2 \cdot \begin{Bmatrix} k_{12} \\ k_{32} \\ k_{42} \\ k_{52} \\ k_{62} \end{Bmatrix}
 \end{array}$$

$[K]_s \qquad \{u\}'_s \quad \{F\}'_s$

Giải hệ này tìm được các $\{u\}'_s$

Phản lực tại các chuyên vị cho trước xác định như sau:

Thay các chuyên vị tìm được vào dòng i, ta có:

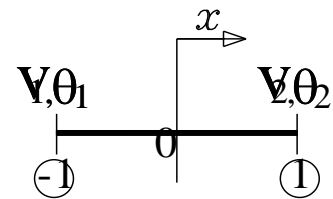
$$k_{21}u_1 + k_{22}u_2 + k_{23}u_3 + k_{24}u_4 + k_{25}u_5 + k_{26}u_6 = F_2 + Q_2 \quad (2.26)$$

$$\Rightarrow Q_2 - k_{21}u_1 + k_{22}u_2 + k_{23}u_3 + k_{24}u_4 + k_{25}u_5 + k_{26}u_6 - F_2$$

Tương tự như vậy với trường hợp các chuyên vị cho trước khác.

2.3. Cách xây dựng ma trận độ cứng của phần tử chịu uốn

Xét phần tử dầm có hai nút, mỗi nút có hai bậc tự do là chuyên vị và góc xoay và dầm có diện tích mặt cắt ngang là A; mô men quán tính của mặt cắt ngang là I; mô đun đàn hồi của vật liệu E (hình 2.7)



Hình 2.7. Phần tử hai nút

Để tính toán được tổng quát, chiều dài phần tử lấy bằng hai đơn vị, gốc tọa độ nằm ở giữa phần tử. Như vậy, nếu biết được các bậc tự do tại các nút phần tử là $v_1, \theta_1, v_2, \theta_2$ thì chuyển vị tại điểm bất kỳ trong phần tử tại tọa độ x được xác định như sau:

$$v = N_1 \cdot v_1 + N_2 \cdot \theta_1 + N_3 \cdot v_2 + N_4 \cdot \theta_2 \quad (2.27)$$

Trong đó : N_1, N_2, N_3, N_4 : là các hàm dạng và được xác định như sau:

$$N_1 = \frac{1}{4}(2 - 3x + x^3); \quad N_2 = \frac{1}{4}(1 - x - x^2 + x^3);$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(2 + 3x - x^3); \quad N_4 = \frac{1}{4}(-1 - x + x^2 + x^3).$$

Theo công thức trên ta thấy:

$$v|_{x=-1} = v_1; \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=-1} = \theta_1; \quad v|_{x=1} = v_2; \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=1} = \theta_2. \quad (2.28)$$

Như vậy, mỗi phần tử có 4 bậc tự do $X = \{v_1, \theta_1, v_2, \theta_2\}$ cần xác định. Nếu biết được X thì ta có biết được chuyển vị trong phần tử cũng như biến dạng uốn và mô men theo công thức sau:

$$\chi = -\frac{d^2v}{dx^2} = -\left[\frac{d^2N_1}{dx^2} \quad \frac{d^2N_2}{dx^2} \quad \frac{d^2N_3}{dx^2} \quad \frac{d^2N_4}{dx^2} \right] \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\}^T; \quad (2.29a)$$

$$M = EI \cdot \chi = -EI \left[\frac{d^2N_1}{dx^2} \quad \frac{d^2N_2}{dx^2} \quad \frac{d^2N_3}{dx^2} \quad \frac{d^2N_4}{dx^2} \right] \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\}^T \quad (2.30a)$$

Công thức trên là tính toán cho phần tử có chiều dài bằng 2, nếu phần tử có chiều dài là Δx thì biến dạng uốn và mô men được tính như sau:

$$\chi = -\frac{d^2v}{dx^2} \left(\frac{2}{\Delta x} \right)^2 = -\left(\frac{2}{\Delta x} \right)^2 \left[\frac{d^2N_1}{dx^2} \quad \frac{d^2N_2}{dx^2} \quad \frac{d^2N_3}{dx^2} \quad \frac{d^2N_4}{dx^2} \right] \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\}^T \quad (2.29b)$$

$$M = EI \cdot \chi = -EI \cdot \left(\frac{2}{\Delta x} \right)^2 \left[\frac{d^2N_1}{dx^2} \quad \frac{d^2N_2}{dx^2} \quad \frac{d^2N_3}{dx^2} \quad \frac{d^2N_4}{dx^2} \right] \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\}^T \quad (2.30b)$$

Xét phần tử có các tải trọng tập trung $F = \{P_1, P_2, M_1, M_2\}^T$ tác dụng tại các nút của phần tử. Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, lượng ràng buộc đối với bài toán tĩnh viết cho phần tử như sau:

$$Z = \frac{\Delta x}{2} \int_{-1}^1 M[\chi] dx - \sum_{i=1}^4 F_i X_i \rightarrow \min \quad (2.31)$$

Điều kiện dừng của (2.31) được viết lại như sau:

$$\delta Z = \frac{\Delta x}{2} \int_{-1}^1 M\delta[\chi] dx - \sum_{i=1}^4 F_i \delta X_i = 0 \quad (2.32)$$

hay:

$$\left(\frac{2}{\Delta x}\right)^3 \cdot EJ \cdot \begin{bmatrix} \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_4}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} dx \\ \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_4}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} dx \\ \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_4}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} dx \\ \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_4}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_4}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_4}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_4}{dx^2} \frac{d^2 N_4}{dx^2} dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$[K]\{X\} = \{F\} \quad (2.34)$$

trong đó: $[K]$: ma trận độ cứng của phần tử; $\{F\}$: véc tơ tải trọng tác dụng nút; $\{X\}$: véc tơ chuyển vị nút của phần tử.

Tính tích phân các hệ số trong $[K]$ ta có thể tính bằng phương pháp chính xác (bằng hàm int(fx,a,b) có sẵn trong matlab) hoặc tính bằng phương pháp tích phân số của Gauss và kết quả độ cứng của phần tử chịu uốn ngang phẳng như sau:

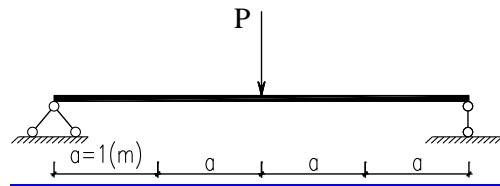
$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{\Delta x^3} & \frac{6EI}{\Delta x^2} & -\frac{12EI}{\Delta x^3} & \frac{6EI}{\Delta x^2} \\ \frac{6EI}{\Delta x^2} & 4EI & -\frac{6EI}{\Delta x^2} & 2EI \\ -\frac{12EI}{\Delta x^3} & -\frac{6EI}{\Delta x^2} & \frac{12EI}{\Delta x^3} & -\frac{6EI}{\Delta x^2} \\ \frac{6EI}{\Delta x^2} & 2EI & -\frac{6EI}{\Delta x^2} & 4EI \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Biết được ma trận độ cứng phần tử thì ta dễ dàng xây dựng được ma trận độ cứng của toàn thanh. Nếu thanh chỉ có một phần tử thì ma trận của phần tử cũng chính là ma trận độ cứng của thanh. Trong phần tử nếu bậc tự do nào không có thì trong ma trận độ cứng của phần tử đó ta bỏ đi hàng và cột tương ứng với bậc tự do đó.

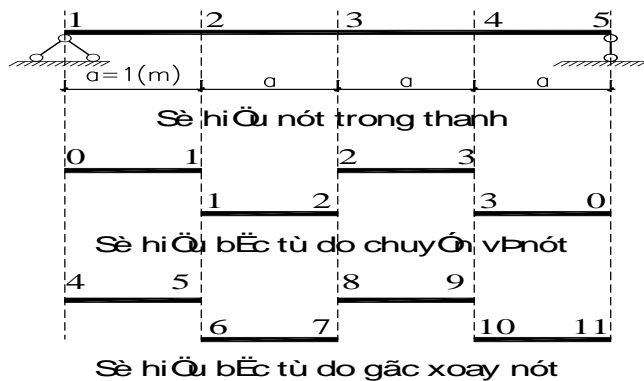
2.4. Cách xây dựng ma trận độ cứng tổng thể của kết cấu

Để trình bày cách xây dựng ma trận độ cứng tổng thể của kết cấu trong phương pháp phần tử hữu hạn, luận văn xin được trình bày thông qua ví dụ giải bài toán dầm chịu uốn dưới tác dụng của tải trọng tĩnh cụ thể sau (còn các bài toán khác thì cách xây dựng ma trận độ cứng tổng thể cũng làm tương tự):

Ví dụ 2.1: Tính toán kết cấu dầm chịu lực như (hình 2.8). Biết dầm có độ cứng $EI = 10^8 \text{ (kN.cm}^2\text{)}$ không đổi và $P=10 \text{ (kN)}$. Xác định chuyển vị tại giữa dầm.



Hình 2.8. Hình ví dụ 2.1



Hình 2.9. Rời rạc hóa thanh thành các phần tử

Chia thanh ra thành n_{pt} phần tử. Các nút của phần tử phải trùng với vị trí đặt lực tập trung, chiều dài các phần tử có thể khác nhau. Mỗi phần tử có 4 bậc tự do, như vậy nếu n_{pt} phần tử rời rạc thì tổng cộng có $4 n_{pt}$ bậc tự do. Nhưng vì cần đảm bảo liên tục giữa các chuyển vị là chuyển vị của nút cuối phần tử thứ e bằng chuyển vị của nút đầu phần tử thứ $(e + 1)$ nên số bậc tự do của thanh sẽ nhỏ hơn $4 n_{pt}$. Khi giải ta chỉ cần đảm bảo điều kiện liên tục của chuyển vị còn điều kiện liên tục về góc xoay được xét bằng cách đưa vào

các điều kiện ràng buộc. Ví dụ dầm trong (ví dụ 3.1) ta chia thành 4 phần tử (hình 2.9)

Như vậy, tổng cộng số ản là 11 ản $< 4 \times 4 = 16$ ản. Gọi ma trận n_w là ma trận chuyển vị có kích thước $n_w(n_{pt}, 2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ản số là chuyển vị tại nút của các phần tử (hình 2.8)

$$n_w(1,:) = [0 \ 1]; n_w(2,:) = [1 \ 2]; n_w(3,:) = [2 \ 3]; n_w(4,:) = [3 \ 0]$$

$$n_w = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Gọi ma trận n_θ là ma trận chuyển vị có kích thước $n_\theta(n_{pt}, 2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ản số là góc xoay tại nút của các phần tử (hình 3.5).

$$n_\theta(1,:) = [4 \ 5]; n_\theta(2,:) = [6 \ 7]; n_\theta(3,:) = [8 \ 9]; n_\theta(4,:) = [10 \ 11]$$

$$n_\theta = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 & 10 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \end{bmatrix}^T$$

Sau khi biết ản số thực của các thanh ta có thể xây dựng độ cứng tổng thể của thanh (có rất nhiều cách ghép nối phần tử khác nhau, tùy vào trình độ lập trình của mỗi người nên tác giả không trình bày chi tiết cách ghép nối các phần tử lại để được ma trận độ cứng của toàn thanh và có thể xem trong code mô đun chương trình của tác giả)

Nếu bài toán có n_{cv} ản số chuyển vị và n_{gx} ản số góc xoay thì ma trận độ cứng của thanh là K có kích thước $(n \times n)$, $K(n, n)$ với $n = (n_{cv} + n_{gx})$. Như ở ví dụ 3.1, $n = 11$. Bây giờ xét điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử.

Điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử được viết như sau:

$$\left(\frac{dy_i}{dx} \Big|_{nut2} \right) - \left(\frac{dy_{i+1}}{dx} \Big|_{nut1} \right) = 0 \quad (2.36)$$

$$\text{hay:} \quad \delta\lambda_1 \left[\left(\frac{dy_1}{dx} \Big|_{nut2} \right) - \left(\frac{dy_2}{dx} \Big|_{nut1} \right) \right] = 0 \quad (2.37a)$$

$$\delta\lambda_2 \left[\left(\frac{dy_2}{dx} \Big|_{nut2} \right) - \left(\frac{dy_3}{dx} \Big|_{nut1} \right) \right] = 0 \quad (2.37b)$$

$$\delta\lambda_3 \left[\left(\frac{dy_3}{dx} \Big|_{\text{nút2}} \right) - \left(\frac{dy_4}{dx} \Big|_{\text{nút1}} \right) \right] = 0 \quad (2.37c)$$

Trong đó λ_i cũng là ẩn số của bài toán (có k ẩn số), do đó tổng số ẩn số của bài toán lúc là $(n+k)$ do đó ma trận độ cứng của phần tử lúc này cũng phải thêm k dòng và k cột như vậy kích thước của ma trận độ cứng là $K(n+k, n+k)$. Gọi k_1 là góc xoay tại nút 2 của phần tử trước, k_2 là góc xoay tại nút 1 của phần tử sau thì ta có các hệ số trong ma trận độ cứng K :

$$k(n+i, k_1) = \frac{2}{\Delta x}; \quad k(n+i, k_2) = -\frac{2}{\Delta x} \quad (i=1 \div k) \quad (2.38a)$$

$$k(k_1, n+i) = \frac{2}{\Delta x}; \quad k(k_2, n+i) = -\frac{2}{\Delta x} \quad (i=1 \div k) \quad (2.38b)$$

Nếu có hai phần tử thì có một điều kiện về góc xoay, có n_{pt} phần tử thì có $(2n_{pt} - 1)$ điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử. Như vậy cuối cùng ta sẽ thiết lập được phương trình:

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{X}\} = \{\mathbf{F}\}$$

trong đó: $\{\mathbf{F}\} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ $\left. \begin{array}{l} \text{so - hang} = n \\ \text{so - hang} = k \end{array} \right\}$; $\{\mathbf{X}\} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix}$ là ẩn số của bài toán

Trong ví dụ 3.1 khi chia thành ra thành 4 phần tử. Kết quả ma trận độ cứng của thanh:

$$[K] = 10^3 \begin{bmatrix} 2.4 & -1.2 & 0 & -1.2 & -1.2 & 1.2 & 1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.2 & 2.4 & -1.2 & 0 & 0 & -1.2 & -1.2 & 1.2 & 1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.2 & 2.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.2 & -1.2 & 1.2 & 1.2 & 0 & 0 & 0 \\ -1.2 & 0 & 0 & 1.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.2 & 0 & 0 & 0.8 & 1.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.10^{-5} & 0 & 0 \\ 1.2 & -1.2 & 0 & 0 & 0 & 1.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.10^{-5} & 0 & 0 \\ 1.2 & -1.2 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 1.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.10^{-5} & 0 \\ 0 & 1.2 & -1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & -2.10^{-5} & 0 \\ 0 & 1.2 & -1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 1.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.10^{-5} \\ 0 & 0 & 1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.6 & 0.8 & 0 & 0 & -2.10^{-5} \\ 0 & 0 & 1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 1.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.10^{-5} & -2.10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.10^{-5} & -2.10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.10^{-5} & -2.10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kết quả chuyển vị, góc xoay tại các nút:

$$\begin{bmatrix} w_2; w_3; w_4; \\ \varphi_1; \varphi_2; \varphi_3; \varphi_4; \varphi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.09166667(\text{cm}); 0.13333333(\text{cm}); 0.09166667(\text{cm}); \\ 0.05(\text{rad}); 0.0375(\text{rad}); 0; -0.0375(\text{rad}); -0.05(\text{rad}) \end{bmatrix}$$

Ta thấy kết quả trên so với kết quả giải chính xác theo phương pháp giải tích rất đúng ví dụ như chuyển vị tại nút 3 tính theo phương pháp giải tích:

$$w_3 = \frac{Pl^3}{48EI} = 0,13333333(\text{cm})$$

CHƯƠNG 3

TÍNH TOÁN ỔN ĐỊNH CỦA KHUNG CÓ XÉT ĐẾN BIẾN DẠNG TRƯỢT NGANG BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Trong chương này trình bày lý thuyết dầm có xét biến dạng trượt ngang, sau đó trình bày phương pháp chuyển vị cưỡng bức, cuối cùng sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn xây dựng bài toán xác định tải trọng tới hạn của khung có xét biến dạng trượt ngang.

3.1. Lý thuyết dầm có xét biến dạng trượt ngang

Lý thuyết xét biến dạng trượt trong dầm do Timoshenko đưa ra và thường được gọi là lý thuyết dầm Timoshenko. Khi xây dựng lý thuyết này vẫn sử dụng giả thiết tiết diện phẳng của lý thuyết dầm thông thường, tuy nhiên do có biến dạng trượt, trục dầm sẽ xoay đi một góc và không còn thẳng góc với tiết diện dầm nữa.

Lý thuyết xét biến dạng trượt được dùng phổ biến trong phương pháp phần tử hữu hạn hiện nay là dùng hàm độ võng y và hàm góc xoay θ do momen uốn gây ra là hai hàm chưa biết. Trong trường hợp này biến dạng trượt tại trục trung hòa được xác định như sau, ví dụ như [36, trg 5].

$$\begin{aligned} & \gamma \\ &= \frac{dy}{dx} - \theta \end{aligned} \quad (3.1)$$

Từ đó ta có các công thức xác định M và Q

$$\begin{aligned} M &= -EJ \left(\frac{d\theta}{dx} \right) \\ Q &= \frac{GF}{\alpha} \left[-\frac{dy}{dx} + \theta \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

Trong các công thức trên EJ là độ cứng uốn, GF là độ cứng cắt của tiết diện, G là môđun trượt của vật liệu, F là diện tích tiết diện, α là hệ số xét sự phân bố không đều của ứng suất tiếp $\tau_{\text{r}^{\text{a}}\text{n}}$ chiều cao tiết diện.

Các tác giả [36, trg 5] cho rằng khi môđun trượt $G \rightarrow \infty$ thì từ (3.2) suy ra

$$\theta = \frac{dy}{dx} \quad (3.3)$$

nghĩa là trở về lý thuyết dầm không xét biến dạng trượt: Góc xoay của đường độ võng là do mômen gây ra. Theo nghiên cứu sinh lập luận trên không đúng bởi vì khi thỏa mãn phương trình (3.3) thì từ phương trình (3.2) suy ra lực cắt $Q=0$, dẫn về trường hợp uốn thuần túy của dầm. Vì lý do đó nên lý thuyết xét biến dạng trượt dùng y và θ làm ẩn không hội tụ về lý thuyết dầm thông thường và khi áp dụng vào bài toán tấm, nó cũng không hội tụ về lý thuyết tấm thông thường (lý thuyết tấm Kierchhoff, [36, trg 71], [33, trg 404]. Phương hướng chung để khắc phục thiếu sót vừa nêu là bổ sung thêm các nút xét lực cắt Q trong các phần tử dầm hoặc phần tử tấm [33, 34, 36] hoặc dùng phần tử có hàm dạng là đa thức bậc thấp (bậc nhất) [39, trg 126]. Vấn đề tìm phần tử có hàm dạng không bị hiện tượng biến dạng trượt bị khóa, shear locking, vẫn đang được tiếp tục nghiên cứu, [40]. Tình hình chung hiện nay về lý thuyết xét biến dạng trượt trong dầm và tấm là như trên.

Khác với các tác giả khác, trong [27, 28] lý thuyết xét biến dạng trượt được xây dựng trên cơ sở hai hàm chưa biết là hàm độ võng y và hàm lực cắt Q . Trong trường hợp này biến dạng trượt xác định theo

$$\gamma = \frac{\alpha Q}{GF} \quad (3.4)$$

α là hệ số xét sự phân bố không đều của ứng suất cắt tại trục dầm.

Góc xoay do momen uốn sinh ra bằng hiệu giữa góc xoay đường độ võng với góc xoay do lực cắt gây ra.

$$\theta = \frac{dy}{dx} - \gamma = \frac{dy}{dx} - \frac{\alpha Q}{GF} \quad (3.5)$$

Momen uốn sẽ bằng

$$M = -EJ \frac{d\theta}{dx} = EJ \left(-\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right) \quad (3.6)$$

Biến dạng uốn χ

$$\chi = -\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \quad (3.7)$$

Dựa trên lý thuyết này ta sẽ xây dựng phương trình cân bằng và các điều kiện biên của dầm như sau. Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss ta viết phiếm hàm lượng cường bức (chuyển động) như sau: (giả sử dầm có lực phân bố đều q).

$$Z = \int_0^l M \chi dx + \int_0^l Q \gamma dx - \int_0^l q y dx$$

$$\rightarrow \min \quad (3.8)$$

Các hàm độ võng y , hàm biến dạng trượt γ và hàm biến dạng uốn χ là các đại lượng biến phân, nghĩa là điều kiện cần và đủ để hệ ở trạng thái cân bằng là

$$\delta Z = \int_0^l M \delta \chi dx + \int_0^l Q \delta \gamma dx - \int_0^l q \delta y dx = 0$$

Hay

$$\delta Z = \int_0^l M \delta \left[-\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right] dx + \int_0^l Q \delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] dx - \int_0^l q \delta [y] dx$$

$$= 0 \quad (3.9)$$

Trong phương trình tích phân (3.9) hai đại lượng cần tìm là $y(x)$ và $Q(x)$ do đó có thể tách ra thành hai phương trình sau:

$$\int_0^l M \delta \left[-\frac{d^2 y}{dx^2} \right] dx - \int_0^l q \delta[y] dx = 0 \quad (3.10)$$

$$\int_0^l M \delta \left[\frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right] dx + \int_0^l Q \delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] dx = 0 \quad (3.11)$$

Lấy tích phân từng phần phương trình (3.10)

$$\begin{aligned} \int_0^l M \delta \left[-\frac{d^2 y}{dx^2} \right] dx &= - \int_0^l M d \left(\delta \left[\frac{dy}{dx} \right] \right) dx \\ &= -M \delta \left[\frac{dy}{dx} \right] \Big|_0^l + \int_0^l \frac{dM}{dx} \delta \left[\frac{dy}{dx} \right] dx \end{aligned}$$

Tích phân từng phần thành phần cuối của biểu thức trên ta có

$$\int_0^l M \delta \left[-\frac{d^2 y}{dx^2} \right] dx = -M \delta \left[\frac{dy}{dx} \right] \Big|_0^l + \frac{dM}{dx} \delta[y] \Big|_0^l - \int_0^l \frac{d^2 M}{dx^2} \delta[y] dx$$

Phương trình (3.10) sau khi lấy tích phân từng phần có dạng

$$\begin{aligned} -M \delta \left[\frac{dy}{dx} \right] \Big|_0^l + \frac{dM}{dx} \delta[y] \Big|_0^l \\ - \int_0^l \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) \delta[y] dx = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Bởi vì các đại lượng $\delta[y]$ và $\delta \left[\frac{dy}{dx} \right]$ là nhỏ và bất kỳ nên từ (3.12) ta có

$$\begin{aligned} \frac{d^2 M}{dx^2} + q \\ = 0 \end{aligned} \quad (3.12a)$$

$$\begin{aligned}
& -M\delta \left[\frac{dy}{dx} \right] \Big|_0^l \\
& = 0
\end{aligned} \tag{3.12b}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{dM}{dx} \delta[y] \Big|_0^l \\
& = 0
\end{aligned} \tag{3.12c}$$

Tích phân từng phần phương trình (3.11):

$$\begin{aligned}
\int_0^l M\delta \left[\frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right] dx &= \int_0^l M d \left(\delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] \right) dx \\
&= M \left(\delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] \right) \Big|_0^l - \int_0^l \frac{dM}{dx} \delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] dx
\end{aligned}$$

Sau khi lấy tích phân từng phần

$$\begin{aligned}
M \left(\delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] \right) \Big|_0^l + \int_0^l \left(-\frac{dM}{dx} + Q \right) \delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] dx \\
= 0
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Bởi vì biến phân $\delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right]$ là nhỏ và bất kỳ nên từ (2.13) ta có

$$\begin{aligned}
& -\frac{dM}{dx} + Q \\
& = 0
\end{aligned} \tag{3.13a}$$

$$\begin{aligned}
& M\delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] \Big|_0^l \\
& = 0
\end{aligned} \tag{3.13b}$$

Sử dụng công thức (3.6), hai phương trình vi phân cân bằng của dầm (2.12a) và (3.13a) có dạng.

$$\begin{aligned}
& EJ \left[\frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{\alpha}{GF} \frac{d^3 Q}{dx^3} \right] \\
& = q
\end{aligned} \tag{3.14a}$$

$$EJ \left[\frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{\alpha}{GF} \frac{d^2 Q}{dx^2} \right] = Q \quad (3.15a)$$

Phương trình (3.14a) và (3.15a) có thể viết lại dưới dạng

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{\alpha h^2}{6} \frac{d^3 Q}{dx^3} = q \quad (3.14b)$$

$$EJ \frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{\alpha h^2}{6} \frac{d^2 Q}{dx^2} = Q \quad (3.15b)$$

Để nhận được các điều kiện biên của dầm thì kết hợp (3.12b) và (3.13b) ta có

$$M\delta \left[-\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha Q}{GF} \right] \Big|_0^l = 0 \quad (3.16)$$

Chú ý tới phương trình (3.13a), phương trình (3.12c) viết lại như sau

$$Q\delta[y] \Big|_0^l = 0 \quad (3.17)$$

Tóm lại, lý thuyết xét biến dạng trượt cho ta hai phương trình vi phân (3.14) và (3.15) đối với hai hàm y và Q : phương trình (3.14) là phương trình vi phân cân bằng giữa nội lực và ngoại lực, phương trình (3.15) là phương trình liên hệ giữa mômen uốn và lực cắt. Các phương trình (3.16) và (3.17) là các điều kiện biên ở hai đầu thanh.

Ta xét điều kiện biên (3.16)

Nếu như tại $x=0$ hoặc $x=l$, góc xoay θ do mômen uốn gây ra có biến phân

$$\delta\theta = \delta \left[-\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha Q}{GF} \right] \Big|_0^l \neq 0 \quad \text{thì } M|_0^l = 0 \\ \rightarrow \text{liên kết khớp} \quad (3.18a)$$

Nếu như góc xoay θ không có biến phân

$$\delta\theta = \delta \left[-\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha Q}{GF} \right] \Big|_0^l = 0 \quad \text{thì } M|_0^l \text{ bất kỳ}$$

$$\rightarrow \text{liên kết ngàm} \quad (3.18b)$$

Đối với điều kiện (3.17), nếu như chuyển vị y tại $x=0$ hoặc $x=l$ có biến phân.

$$\delta[y]|_0^l \neq 0 \quad \text{thì } Q|_0^l = 0,$$

$$\rightarrow \text{không có gối tựa} \quad (3.18c)$$

Nếu như $\delta[y]|_0^l = 0$ thì $Q|_0^l$ bất kỳ, \rightarrow
liên kết gối tựa $(3.18d)$

Khi không xét biến dạng trượt, $G \rightarrow \infty$ hoặc $h \rightarrow 0$ thì các phương trình (3.14) và (3.15) cũng như các phương trình về điều kiện biên (3.16) và (3.17) hoặc (3.18) đều dẫn về lý thuyết dầm Euler- Bernoulli. Cho nên có thể nói lý thuyết xét biến dạng trượt nêu trên (xem hàm y và hàm Q là hai hàm chưa biết) là lý thuyết đầy đủ về dầm.

Cuối cùng cần lưu ý rằng khi xét tính liên tục về góc xoay giữa hai đoạn dầm là nói đến tính liên tục của góc xoay do mômen gây ra xác định theo công thức (3.5), không phải liên tục của góc xoay $\frac{dy}{dx}$.

Hệ số α

Hệ số α là hệ số tập trung ứng suất cắt tại trục dầm.

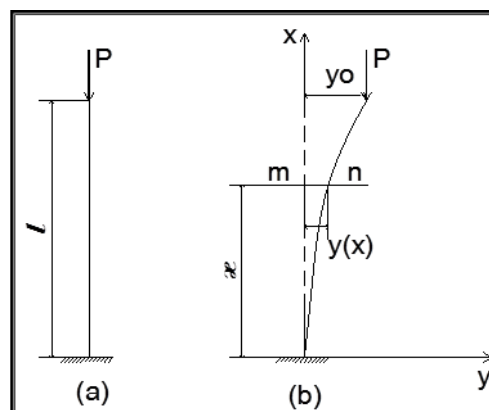
Đối với tiết diện chữ nhật $\alpha=1.5$, đối với tiết diện tròn $\alpha=4/3$. Tuy nhiên khi xét biến dạng trượt các trị trên thay đổi tương ứng bằng 1.2 và 1.11 [31, trg 132, 60, trg 492]. Trong tính toán sau này tác giả dùng hệ số $\alpha=1.2$ đối với tiết diện chữ nhật. Phương pháp chung để xác định hệ số α là cân bằng tổng theo chiều cao dầm công của ứng suất cắt thực hiện trên biến dạng trượt tương ứng với công lực cắt thực hiện trên biến dạng trượt tại trục dầm, vấn đề này đã được nhiều tác giả nghiên cứu [31] [33, trg 400].

3.2. Bài toán ổn định của thanh chịu nén có xét biến dạng trượt ngang

Phương pháp chung để đánh giá sự mất ổn định của cơ hệ là đưa hệ ra

khỏi vị trí cân bằng ban đầu của nó và kiểm tra xem nó có tồn tại trạng thái cân bằng mới không. Nếu như tìm được trạng thái cân bằng mới khác với trạng thái cân bằng ban đầu thì có thể xem hệ là mất ổn định và lực giữ cho hệ ở trạng thái cân bằng mới này gọi là lực tới hạn, trường hợp ngược lại hệ là ổn định.

Để đơn giản trình bày mà không mất đi tính tổng quát của phương pháp, ta xét thanh chịu nén một đầu ngàm một đầu tự do, chịu lực như (hình 3.1a). Thanh có trạng thái cân bằng ban đầu là trạng thái chịu nén thẳng đứng. Ở trạng thái cân bằng này thanh bị co ngắn lại một đoạn là $\Delta = Pl/EF$, EF là độ cứng kéo nén của thanh, E là mô đun đàn hồi của vật liệu, l là chiều dài ban đầu của thanh, P là lực tác dụng.



Hình 3.1. Thanh ngàm – Tự do

Để xét trạng thái cân bằng này của thanh có ổn định hay không ta cho một điểm bất kỳ trên thanh lệch ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu một đoạn y_0 nào đó. Khi đó thanh sẽ bị chuyển vị theo đường đàn hồi $y(x)$ và lực P ngoài tác dụng nén còn gây ra mômen uốn $M_p = P(y-y_0)$. Bây giờ trong thanh có nội lực mômen uốn M và lực cắt Q khác với trạng thái ban đầu chỉ chịu nén (hình 3.1b) và momen ngoại lực M_p . Độ co ngắn Δ của thanh thường là nhỏ so với chiều dài thanh cho nên để đơn giản ta xem chiều dài thanh sau biến dạng vẫn bằng l .

Biến dạng uốn của thanh χ xác định theo (3.7), biến dạng trượt γ xác định theo (3.4). Lượng cưỡng bức theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss của bài toán này được viết như sau:

$$Z = \int_l (M - M_p) \chi dx + \int_l Q \gamma dx \rightarrow \min \quad (3.19)$$

Chú ý momen nội lực và momen ngoại lực luôn khác dấu nhau. Trong (3.19), χ và γ là hai đại lượng biến phân, do đó điều kiện cần và đủ để thanh ở trạng thái cân bằng là

$$\delta Z = \int_l (M - M_p) \delta \chi dx + \int_l Q \delta \gamma dx = 0 \quad (3.20)$$

$$\text{Hay } \delta Z = \int_l (M - M_p) \delta \left(-\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right) dx + \int_l Q \delta \left(\frac{\alpha Q}{GF} \right) dx = 0$$

(3.20a)

Sử dụng phép tính biến phân đối với phương trình (3.20a) nhận được hai phương trình cân bằng sau

$$-\frac{d^2 (M - M_p)}{dx^2} = 0 \quad (3.21a)$$

$$\left(-\frac{d(M - M_p)}{dx} + Q \right) \frac{\alpha}{GF} = 0 \quad (3.21b)$$

Thay M xác định theo (3.6) vào hai phương trình (3.21) ta có

$$EJ \left(\frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{\alpha}{GF} \frac{d^3 Q}{dx^3} \right) + P \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (3.22a)$$

$$EJ \left(\frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{\alpha}{GF} \frac{d^2 Q}{dx^2} \right) + P \frac{dy}{dx} + Q = 0 \quad (3.22b)$$

Hai phương trình (3.22) là hai phương trình vi phân cân bằng của thanh chịu uốn dọc bởi lực P đặt ở đầu thanh có xét đến biến dạng trượt. Đó là hai phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất (không có vế phải) mà phương pháp giải chúng cùng với các điều kiện biên ở hai đầu thanh đã được trình bày ở chương 1.

Dưới đây trình bày phương pháp chuyển vị cưỡng bức giải hệ phương trình (3.22).

3.3. Phương pháp chuyển vị cưỡng bức

Phương pháp chuyển vị cưỡng bức nhằm đưa phương trình (3.22a) là phương trình cân bằng giữa nội lực và ngoại lực về phương trình có vế phải bằng cách cho một điểm nào đó trong thanh, ví dụ điểm $x=x_1$, một chuyển vị y_0 :

$$g = y_{x=x_1} - y_0 = 0 \quad (3.23)$$

Đưa bài toán tìm cực trị của (3.19) với điều kiện ràng buộc (3.23) về bài toán cực trị không ràng buộc bằng cách xây dựng phiếm hàm mở rộng Lagrange F như sau:

$$F = Z + \lambda g \rightarrow \min$$

$$F = \int_l (M - M_p) \chi dx + \int_l Q \gamma dx + \lambda (y_{x=x_1} - y_0) \rightarrow \min \quad (3.24)$$

Trong đó λ là thừa số Lagrange và cũng là ẩn của bài toán. Từ điều kiện

$$\delta F = \int_l (M - M_p) \delta \chi dx + \int_l Q \delta \gamma dx + \delta(\lambda g) = 0$$

nhận được hai phương trình sau:

$$EJ \left(\frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{\alpha}{GF} \frac{d^3 Q}{dx^3} \right) + P \frac{d^2 y}{dx^2} = \begin{cases} -\lambda & \text{khi } x = x_1 \\ 0 & \text{khi } x \neq x_1 \end{cases}$$

(3.25a)

$$EJ \left(\frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{\alpha}{GF} \frac{d^2 Q}{dx^2} \right) + P \frac{dy}{dx} + Q = 0$$

(3.25b)

cùng với phương trình (3.23).

Phương trình (3.25a) là phương trình có vế phải. Để nó trở thành phương trình uốn dọc (3.22a) của thanh thì

$$\lambda = 0 \quad (3.26)$$

Về mặt toán học, phương trình (3.26) là phương trình đa thức xác định các trị riêng của hệ (3.22) bởi vì nghiệm của nó cũng là nghiệm của (3.22). Về

cơ học, λ có thứ nguyên là lực. Đó là lực giữ để cho thanh có chuyển vị y_0 tại điểm $x=x_1$. Lực giữ phải bằng không, suy ra phương trình (3.26). Trị riêng của (3.22) phụ thuộc vào thông số P , suy ra λ cũng là hàm của P . Cho nên giải phương trình (3.26) theo P , sẽ nhận được các lực tới hạn của thanh bị uốn dọc.

3.4. Xác định lực tới hạn của thanh chịu nén.

Như đã trình bày ở trên, bài toán ổn định của thanh chịu nén bởi lực dọc trục P đặt ở đầu thanh dẫn về tìm cực trị của (3.19), viết lại dưới đây.

$$Z = \int_l (M - M_p) \chi dx + \int_l Q \gamma dx \rightarrow \min \quad (3.27)$$

$$M_p = P(y - y_0) \quad (3.28)$$

y_0 là chuyển vị của đầu thanh có lực P . Nếu đầu thanh có liên kết cố định thì y_0 bằng không. Các đại lượng M , χ và γ xác định theo các biểu thức (3.5), (3.6) và (3.7). Có hai phương pháp chung giải bài toán (3.27): giải các phương trình vi phân cân bằng (các phương trình Euler) của phiếm hàm hoặc giải trực tiếp trên phiếm hàm (3.27). Phương pháp giải trực tiếp có ưu điểm ở chỗ sử dụng được các phương pháp của quy hoạch toán. Khi giải trực tiếp thì cần xấp xỉ hai hàm y và Q theo dạng hàm lượng giác hoặc dạng hàm đa thức. Bài toán (3.27) không còn là bài toán biến phân nữa mà trở thành bài toán tối ưu thông số.

Để giải bài toán ổn định uốn dọc của thanh ta sử dụng phương pháp chuyển vị cưỡng bức bằng cách đưa thêm ràng buộc (3.23), viết lại dưới đây

$$g = y_{x=x_1} - y_0 = 0 \quad (3.29)$$

Tóm lại, bài toán ổn định của thanh dẫn về tìm cực trị của (3.27) với các đại lượng biến phân là y , χ và γ và ràng buộc (3.29). Các hàm xấp xỉ của y và Q phải thỏa mãn các điều kiện biên ở hai đầu thanh (các điều kiện

(3.18)). Trường hợp các hàm y và Q chưa thỏa mãn một trong các điều kiện (3.18) thì có thể đưa thêm điều kiện đó vào ràng buộc.

3.5. Tính ổn định của khung chịu nén có xét đến biến dạng trượt ngang theo phương pháp phần tử hữu hạn.

Bài toán ổn định của hệ thanh thẳng là bài toán phức tạp và khá lý thú. Trong [] tác giả đã xây dựng phương pháp mới để giải bài toán ổn định của thanh thẳng chịu tác dụng của tải trọng tĩnh có xét biến dạng trượt ngang và đưa ra kết quả tính lực tới hạn đối với các thanh có điều kiện biên khác nhau, với việc dùng hàm xấp xỉ độ võng và lực cắt là các đa thức. Trong mục này, tác giả cũng dùng phương pháp phần tử hữu hạn để xây dựng và giải các bài toán ổn định của hệ thanh thẳng chịu tác dụng của tải trọng tĩnh có xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang. Khi nghiên cứu ổn định của hệ thanh ta chấp nhận các giả thiết dưới đây nhằm đơn giản hóa việc xác định tải trọng tới hạn:

1. Vật liệu của hệ thanh làm việc trong giới hạn đàn hồi
2. Các nút của hệ xem như tuyệt đối cứng. Do đó, chuyển vị tại các đầu thanh quy tụ vào một nút sẽ như nhau.
3. Các thanh của hệ xem như không co dãn. Trước và sau biến dạng, khoảng cách theo phương ban đầu giữa các nút của hệ không thay đổi.
4. Khi xác định chuyển vị trong hệ, không những xét đến ảnh hưởng của biến dạng uốn do mômen uốn gây ra mà còn xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt do lực cắt gây ra.
5. Tải trọng tác dụng trên hệ chỉ đặt ở các nút. Những tải trọng này chỉ gây ra kéo hoặc nén mà không gây ra uốn ngang trong các thanh khi hệ chưa mất ổn định.

Phương pháp phần tử hữu hạn chia công trình thành những phần nhỏ được gọi là các phần tử, tính toán công trình được dẫn về tính toán những phần tử nhỏ sau đó kết nối các phần tử đó lại với nhau ta lại được lời giải của một công trình hoàn chỉnh. Tương tự, phương pháp sai phân hữu hạn cũng chia công trình thành những đoạn nhỏ và trạng thái chuyển vị...được xác định tại mỗi điểm sai phân. Sự khác nhau giữa hai phương pháp nằm ở chỗ đối với

sai phân hữu hạn trạng thái chuyển vị của các điểm thuộc đoạn nằm giữa hai nút thường được tính theo phương pháp nội suy tuyến tính còn phương pháp phân tử hữu hạn các trạng thái chuyển vị giữa hai điểm được xác định bằng các hàm dạng đã cho. Ưu điểm chủ yếu của phương pháp phân tử hữu hạn là nhờ chia công trình thành các đoạn nhỏ thì dễ dàng mô tả được các hình dạng phức tạp của công trình, đặc biệt là vì các đoạn nhỏ cho nên mô tả trạng thái chuyển vị bằng các đa thức bậc thấp. Ví dụ nếu chọn hàm xấp xỉ là đa thức thì phải chọn đa thức bậc 9 để mô tả đường độ võng của dầm nhưng khi dùng phân tử hữu hạn thì ta có thể dùng các đa thức bậc thấp 2, 3 hoặc 4 để mô tả chuyển vị của mỗi phân tử. Sở dĩ như vậy là do trạng thái ứng suất trong mỗi phân tử nhỏ thì khác nhau rất ít. Thông thường đối với phân tử dầm chịu uốn thì dùng đa thức bậc 3 để mô tả chuyển vị.

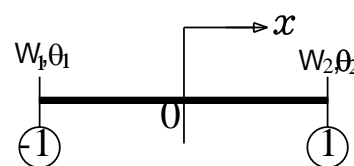
$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

Ta thấy có 4 thông số cần xác định. Tuy nhiên để tiện dùng ta thay 4 thông số a_0, a_1, a_2, a_3 bằng chuyển vị, góc xoay của phân tử hai nút như hình 3.2.

Do dùng hàm bậc 3 cho nên các lực tác dụng lên phân tử đều phải quy về nút kể cả lực quán tính trong bài toán động.

3.5.1. Ma trận độ cứng phân tử

Đối với phân tử chịu uốn như dầm thường dùng đa thức bậc ba để tính chuyển vị của nó, do đó có bốn thông số cần xác định. Có thể chọn phân tử hai nút, mỗi nút có hai thông số là chuyển vị W và góc xoay θ tại nút đó, hình 3.2.



Hình 3.2. Phân tử hai nút

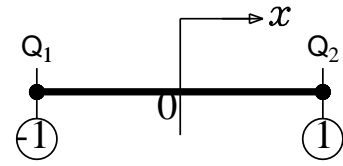
Để tính toán được tổng quát, chiều dài phân tử lấy bằng hai đơn vị (phần tử đẳng thông số), gốc tọa độ đặt ở giữa. Như vậy, nếu biết được các thông số $W_1, \theta_1, W_2, \theta_2$ thì chuyển vị mỗi điểm nằm trong phân tử xác định theo đa thức bậc ba sau đây.

$$W(x) = f_1W_1 + f_2\theta_1 + f_3W_2 + f_4\theta_2 \quad (3.27)$$

trong đó: $f_1 = 1/4(x-1)^2(x+2)$; $f_2 = 1/4(x-1)^2(x+1)$;

$$f_3 = 1/4(x+1)^2(-x+2)$$
; $f_4 = 1/4(x+1)^2(x-1)$;

Từ các công thức trên ta thấy chuyển vị của nút 1 (có tọa độ $x = -1$) bằng W_1 , chuyển vị tại nút 2 (có tọa độ $x=1$) bằng W_2 . Lấy đạo hàm $W(x)$ theo x và ta lại có góc xoay tại nút 1 ($x = -1$) là θ_1 , góc xoay tại nút 2 ($x = 1$) là θ_2 .



Hình 3.3. Phần tử hai nút

Ta cũng dùng đa thức bậc ba để xấp xỉ hàm lực cắt của phần tử, ở đây phần tử lực cắt cũng chứa hai nút (Hình 3.3), mỗi nút có một thông số chưa biết Q_i là lực cắt phần tử tại vị trí đó.

Chiều dài phần tử lấy bằng hai đơn vị, gốc tọa độ đặt ở giữa phần tử. Nếu biết các lực cắt Q_1, Q_2 tại hai nút thì lực cắt V tại điểm bất kỳ của phần tử tính theo công thức.

$$V = Q_1 f_5 + Q_2 f_6 \quad (3.28)$$

trong đó: $f_5=1/2(1-x)$; $f_6=1/2(1+x)$;

Đưa vào (3.28) các giá trị x sau

$$x = -1 \quad \text{ta có lực cắt } V = Q_1$$

$$x = 1 \quad \text{ta có lực cắt } V = Q_2$$

Như vậy, mỗi phần tử có hai chuyển vị nút W_1, W_2 hai góc xoay θ_1, θ_2 và hai lực cắt nút Q_1, Q_2 , tổng cộng có sáu thông số (6 ẩn) cần xác định.

Gọi X là véc tơ cột chứa sáu ẩn của phần tử theo thứ tự sau.

$$X = [W_1, \theta_1, W_2, \theta_2, Q_1, Q_2] \quad (3.29)$$

thì có thể viết lại các biểu thức (3.27) và (3.28) dưới dạng ma trận như sau.

$$W = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]X; \quad V = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ f_5 \ f_6]X \quad (3.30)$$

Sau khi đã biết các hàm chuyển vị và hàm lực cắt thì dễ dàng tính được biến dạng uốn χ_x , nội lực mômen M_x , biến dạng trượt γ_x , góc xoay φ (do mômen gây ra) của phần tử như sau.

$$\chi_x = \left[-\frac{d^2 W}{dx^2} \beta^2 + \frac{\alpha}{GF} \frac{dV}{dx} \beta \right] \quad (3.31)$$

$$M_x = EJ\chi_x \quad (3.32)$$

$$\gamma_x = \frac{\alpha}{GF} [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ f_5 \ f_6]X \quad (3.33)$$

$$\phi = \left[-\frac{dW}{dx} \beta + \frac{\alpha}{GF} V \right] \quad (3.34)$$

Trong các công thức trên $\beta = 2/\Delta x$ là hệ số đưa chiều dài hai đơn vị của phần tử về chiều dài thật Δx của nó.

Biết được hàm độ võng, hàm lực cắt của phần tử thì dễ dàng tính được ma trận độ cứng phần tử. Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss ta viết lượng cưỡng bức đối với bài toán tĩnh như sau.

$$Z = \int_{-1}^1 M_x [\chi_x] dx + \int_{-1}^1 V [\gamma_x] dx \rightarrow \text{Min} \quad (3.35)$$

χ_x và γ_x là các biểu thức chứa các ẩn $X(i)$ cho nên điều kiện dừng của (3.35) được viết lại như sau.

$$\delta Z = \int_{-1}^1 M_x \delta[\chi_x] dx + \int_{-1}^1 V \delta[\gamma_x] dx = 0$$

$$\text{Hay} \quad \delta Z = \frac{1}{\beta} \left(\int_{-1}^1 M_x \left[\frac{\partial \chi_x}{\partial X(i)} \right] dx + \int_{-1}^1 V \left[\frac{\partial \gamma_x}{\partial X(i)} \right] dx \right) = 0 \quad (3.36)$$

Hệ số $1/\beta = \Delta x/2$ để đưa tích phân từ (-1) đến (1) về tích phân theo chiều dài phần tử. Có sáu ẩn ta có được sáu phương trình và có dạng sau.

$$A_e X = B \quad (3.37)$$

trong đó: B - véc tơ tải trọng.

Các tích phân trong (3.36) có thể tính chính xác hoặc tính theo các tích phân gần đúng (tích phân số) của Gauss (không trình bày ở đây). Sau khi tính, với trường hợp chia dầm thành bốn phần tử, nhận được $A_e[6 \times 6]$ như sau.

$$[A]_e = \begin{bmatrix} 768 & -768 & 96 & 96 & 0 & 0 \\ -768 & 768 & -96 & -96 & 0 & 0 \\ 96 & -96 & 16 & 8 & -0.0001 & 0.0001 \\ 96 & -96 & 8 & 16 & 0.0001 & -0.0001 \\ 0 & 0 & -0.0001 & 0.0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0001 & -0.0001 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ma trận A_e gọi là ma trận độ cứng phần tử, dx là độ dài một phần tử. Bởi vì hàm độ võng của phần tử là đa thức bậc ba nên các lực tác dụng cũng như lực quán tính của các phần tử đều phải phân bố về nút của nó.

Nếu như tại nút (1) có lực tác dụng P thì vế phải B(1)=P...

Biết được ma trận độ cứng phần tử thì dễ dàng xây dựng được ma trận độ cứng của toàn dầm. Giả sử dầm chỉ có một phần tử thì ma trận Ae chính là ma trận độ cứng tổng thể của dầm. Giả sử chuyển vị tại nút (1) bằng không thì ta bỏ dòng 1, cột 1 của ma trận Ae, giả sử lực cắt tại nút 2, $Q_2=0$ thì ta bỏ tiếp cột 6, dòng 6 của Ae bởi vì chúng ta không có hai ẩn này.

Chú ý ngoài các ẩn chuyển vị, góc xoay, lực cắt của dầm còn phải xét thêm các ẩn là các thừa số Lagrange λ của các điều kiện liên kết ở hai đầu dầm.

Ngoài ra còn cần đưa thêm các điều kiện liên tục về góc xoay tại điểm tiếp giáp giữa hai phần tử (3.34).

3.5.2. Bài toán ổn định tĩnh

Để thấy rõ được nội dung của phương pháp đối với các bài toán ổn định của hệ thanh thẳng đàn hồi tuyến tính, có xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang tác giả trình bày qua các bài toán cụ thể sau đây.

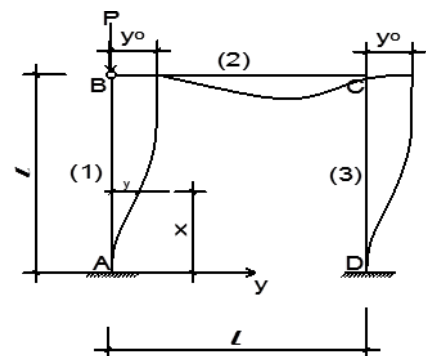
Ví dụ. 3.1: Khung siêu tĩnh bậc hai

Xác định lực tới hạn P_{th} cho khung chịu lực như (hình 3.2). Biết độ cứng uốn của các thanh $EJ=const$.

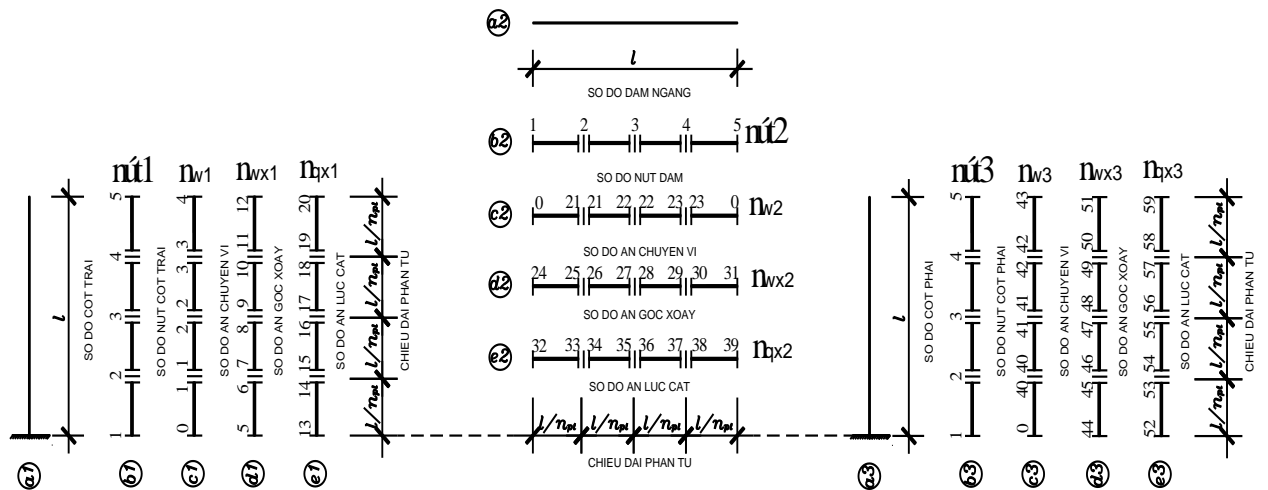
Chia cột và dầm của khung ra làm npt phần tử (hình 3.3). Khi lệch ra khỏi vị trí cân bằng, lực P gây ra mômen uốn M_p trong cột (1) là.

$$M_p = P(y_1 - W_0)$$

W_0 là chuyển vị ngang tại nút ở đầu tự do của dầm.



Hình 3.2. Khung siêu tĩnh bậc hai



Hình 3.3. Đánh số nút, số ẩn

Đối với mỗi phần tử i của cột 1 (cột có lực nén dọc trục P đặt tại đầu thanh) ta có

$$M_{pi} = P[WX_i - W_0] \quad (a)$$

X_i là thông số chuyển vị của phần tử i . Mômen M_{pi} gây ra biến dạng uốn χ_i cho nên trong thành phần lượng cưỡng bức ta viết thêm

$$\sum M_P \delta \chi_i dx = \sum_{i=1}^{npt} \frac{\Delta x}{2} \int_{-1}^1 P W X_i \delta \chi_i dx - \sum_{i=1}^{npt} \frac{\Delta x}{2} \int_{-1}^1 P W_0 X_i \delta \chi_i dx \quad (b)$$

Đối với mỗi phần tử dầm ngang (2) và cột (3)

$$M_{pi} = P w_{xi} \quad \text{với } (i=1 \div npt) \quad (c)$$

Lượng cưỡng bức của bài toán đối với dầm 2 và cột 3 được viết như sau

$$Z = \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{npt} \int_{-1}^1 (M_i) [\chi_i] dx - \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{npt} \int_{-1}^1 V \cdot [\gamma_i] dx \rightarrow \min \quad (d)$$

Lượng cưỡng bức của bài toán đối với cột 1 được viết như sau

$$Z_1 = \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{npt} \int_{-1}^1 (M_i - M_{Pi}) [\chi_i] dx - \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{npt} \int_{-1}^1 V \cdot [\gamma_i] dx \rightarrow \min \quad (e)$$

Điều kiện dừng của phiếm hàm lượng cưỡng bức (d) là:

$$\delta Z = \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{npt} \int_{-1}^1 (M_i) \delta [\chi_i] dx - \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{npt} \int_{-1}^1 V \delta \cdot [\gamma_i] dx = 0$$

$$\text{hay } \delta Z = \frac{\Delta x}{2} \left(\sum_{i=1}^{npt} \int_{-1}^1 (M_i) \left[\frac{\partial \chi_i}{\partial X_i} \right] dx - \sum_{i=1}^{npt} \int_{-1}^1 V \cdot \left[\frac{\partial \gamma_i}{\partial X_i} \right] dx \right) = 0 \quad (d')$$

Điều kiện dừng của phiếm hàm lượng cưỡng bức (e) là:

$$\delta Z = \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{npt} \int_{-1}^1 (M_i - M_{Pi}) \delta[\chi_i] dx - \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{npt} \int_{-1}^1 V \delta[\gamma_i] dx = 0$$

$$\text{hay } \delta Z = \frac{\Delta x}{2} \left(\sum_{i=1}^{npt} \int_{-1}^1 (M_i - M_{Pi}) \left[\frac{\partial \chi_i}{\partial X_i} \right] dx - \sum_{i=1}^{npt} \int_{-1}^1 V \cdot \left[\frac{\partial \gamma_i}{\partial X_i} \right] dx \right) = 0 \quad (e')$$

Gọi nw1, nw2 và nw3 là số thông số chuyển vị tại các nút của cột 1, dầm 2 và cột 3 có chuyển vị; nwx1, nwx2, nwx3 là số thông số góc xoay tại các nút của dầm có góc xoay, nqx1, nqx2, nqx3, là số thông số lực cắt. Dựa vào điều kiện này ta sẽ xây dựng được ma trận độ cứng của khung có bậc:

nxn ($n = nw123 + nwx123 + nqx123$), trong bài toán này $n = 59$ (sau khi bỏ đi những hàng và cột tương ứng có chuyển vị hoặc góc xoay bằng không).

Bây giờ xét các điều kiện liên kết tại hai chân cột 1, 3 dầm, liên kết tại nút khớp, nút cứng của khung và các điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử.

Chân cột 1 và 3 là ngàm nên góc xoay bằng không, trong phiếm hàm mở rộng điều kiện ràng buộc này được viết như sau

$$\lambda_1 \left(\frac{dy_1}{dx} - \frac{\alpha}{GF} Q_1 \right) \Big|_{x=0} = 0$$

$$\lambda_2 \left(\frac{dy_3}{dx} - \frac{\alpha}{GF} Q_3 \right) \Big|_{x=0} = 0$$

Điều kiện mômen uốn tại đầu trên cột 1 và đầu trái dầm 2 bằng không, trong phiếm hàm mở rộng điều kiện ràng buộc này được viết như sau

$$\delta \lambda_3 \left[\left(-\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_1}{dx} \right) \Big|_{x=l} \right] = 0$$

Điều kiện góc xoay tại đầu trên cột 3 và đầu phải dầm 2 bằng nhau, trong phiếm hàm mở rộng điều kiện ràng buộc này được viết như sau

$$\lambda_4 \left[\left(\frac{dy_2}{dx} - \frac{\alpha}{GF} Q_2 \right) \Big|_{x=l} - \left(\frac{dy_3}{dx} - \frac{\alpha}{GF} Q_3 \right) \Big|_{x=l} \right] = 0$$

Điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử của cột 1, 3 và dầm 2 được viết như sau

$$\delta\lambda_i \left[\left(\frac{dy}{dx} - \frac{\alpha}{GF} Q \right) \Big|_{\text{nút 2 phantu truooc}} - \left(\frac{dy}{dx} - \frac{\alpha}{GF} Q \right) \Big|_{\text{nút 1 phantu sau}} \right] = 0$$

với $[i=3(\text{npt}-1)]$, trong ví dụ này ta chia hai cột 1, 3 và dầm 2 thành 4 phần tử nên số điều kiện liên tục về góc tại các nút giữa các phần tử là $[i=3(4-1)=9]$, ứng với $\lambda_{5\div}, \lambda_{13}$.

Theo phương pháp chuyển vị cưỡng bức tại một vị trí (nút) nào đó của dầm, ta cho lệch khỏi vị trí cân bằng một chuyển vị y_0 . Chẳng hạn tại nút thứ k ta cho một chuyển vị cưỡng bức y_0 ta có:

$$w|_{xk} - y_0 = 0 \quad (f)$$

Điều kiện chuyển vị tại vị trí bất kỳ trên cột 1 bằng y_0 , trong phiếm hàm mở rộng điều kiện ràng buộc này được viết như sau

$$\delta\lambda_{14} (w|_{xk} - y_0) = 0$$

$\lambda_{1\div}\lambda_{14}$ là thừa số Lagrange và là hai ẩn của bài toán. Như vậy, ma trận a bây giờ có kích thước $(n+14) \times (n+14)$ hay $[(59+14) \times (59+14)]$. Vậy ta có ma trận độ cứng tổng thể của toàn khung $[A]=[73 \times 73]$.

Ma trận vế phải B lúc này có bậc: $[73 \times 1]$ với giá trị hệ số $[B(73)=y_0]$ còn các hệ số còn lại bằng không.

Giải phương trình $[A]X=B$ ta sẽ tìm được các ẩn số là các chuyển vị tại các nút của phần tử và các thừa số Lagrange. Tiếp theo, ta cho thừa số Lagrange tương ứng với chuyển vị cưỡng bức bằng không, trong trường hợp này là λ_{14} , ta sẽ tìm được giá trị lực P tương ứng là các giá trị tới hạn của lực nén lên khung.

Khi chia cột, dầm thành bốn phần tử như hình 3.3, ta nhận được $\lambda_{14}(P)$ là đa thức bậc 8 của P , giải phương trình $\lambda_{14}(P) = 0$ theo ẩn số P ta sẽ tìm được 8 giá trị lực tới hạn P_{th} , ở đây đưa ra 5 lực tới hạn đầu tiên lần lượt là:

**Bảng 3.1. Lực tới hạn của khung tĩnh cho hai trường hợp h/l.
Mỗi thanh trong khung có 4 phần tử, phần tử lực cắt 2 nút.**

Tỷ lệ h/l	Dãy các lực tới hạn P_{th}				
	P_{1th}	P_{2th}	P_{3th}	P_{4th}	P_{5th}
1/100	$7,770 \frac{EJ}{l^2}$	$31,948 \frac{EJ}{l^2}$	$74,956 \frac{EJ}{l^2}$	$138,677 \frac{EJ}{l^2}$	$262,756 \frac{EJ}{l^2}$
1/5	$5,795 \frac{EJ}{l^2}$	$27,687 \frac{EJ}{l^2}$	$70,156 \frac{EJ}{l^2}$	$135,504 \frac{EJ}{l^2}$	$261,197 \frac{EJ}{l^2}$
Sai số %	25,48	15,39	6,4%	2,29%	0,59%

Ta thấy các kết quả trên đúng với kết quả phân tích theo giải tích với một lực tới hạn đầu tiên và kết quả thay đổi rất lớn khi h/l thay đổi, khi h/l=1/5 thì lực tới hạn đầu tiên giảm tới 25,48%.

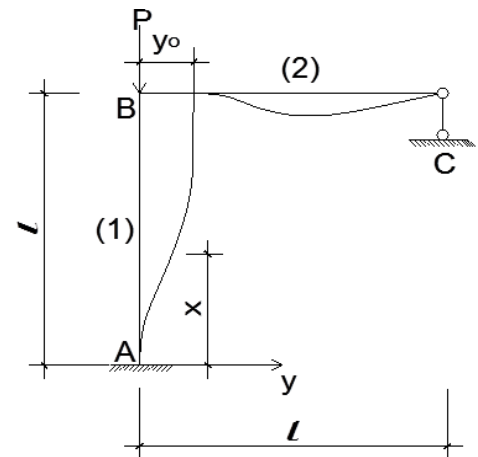
Ví dụ. 3.2: Khung siêu tĩnh bậc một

Xác định lực tới hạn P_{th} cho khung chịu lực như (hình 3.4). Biết độ cứng uốn của các thanh $EJ=const$.

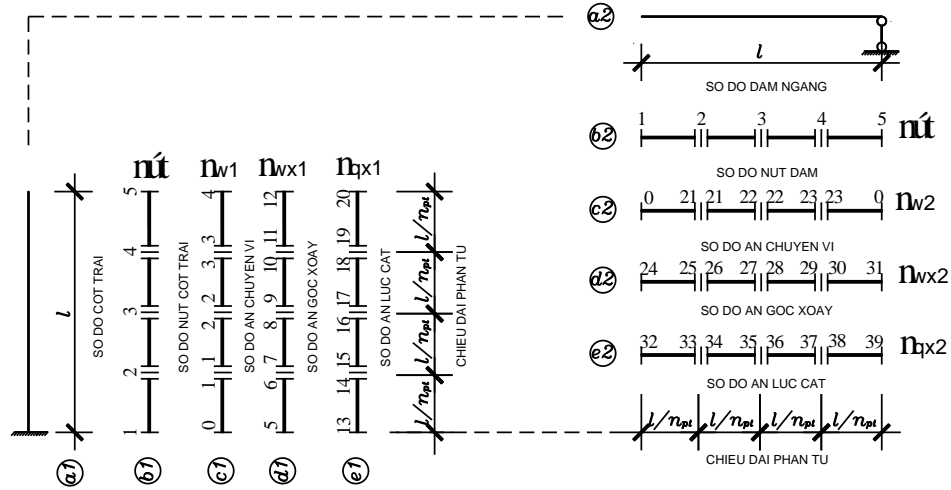
Chia cột và dầm của khung ra làm npt phần tử (hình 3.4). Khi lệch ra khỏi vị trí cân bằng, lực P gây ra mômen uốn M_p trong cột (2) là.

$$M_p = P(y_2 - W_0)$$

W_0 là chuyển vị ngang tại nút ở đầu của cột.



Hình 3.4. Khung siêu tĩnh bậc một



Hình 3.5. Đánh số nút, số ẩn

Đối với mỗi phần tử i của cột 1 (cột có lực nén dọc trục P đặt tại đầu thanh) ta có

$$M_{pi} = P[WX_i - W_0] \quad (a)$$

X_i là thông số chuyển vị của phần tử i . Mômen M_{pi} gây ra biến dạng uốn χ_i cho nên trong thành phần lượng cưỡng bức ta viết thêm

$$\sum M_P \delta \chi_i dx = \sum_{i=1}^{npt} \frac{\Delta x}{2} \int_{-1}^1 P W X_i \delta \chi_i dx - \sum_{i=1}^{npt} \frac{\Delta x}{2} \int_{-1}^1 P W_0 X_i \delta \chi_i dx \quad (b)$$

Đối với mỗi phần tử dầm ngang (2) ta có

$$M_{pi} = P w_{xi} \quad \text{với } (i=1 \div npt) \quad (c)$$

Lượng cưỡng bức của bài toán đối với dầm 2 được viết như sau

$$Z = \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{npt} \int_{-1}^1 (M_i) [\chi_i] dx - \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{npt} \int_{-1}^1 V \cdot [\gamma_i] dx \rightarrow \min \quad (d)$$

Lượng cưỡng bức của bài toán đối với cột 1 được viết như sau

$$Z_1 = \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{npt} \int_{-1}^1 (M_i - M_{Pi}) [\chi_i] dx - \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{npt} \int_{-1}^1 V \cdot [\gamma_i] dx \rightarrow \min \quad (e)$$

Điều kiện dừng của phiếm hàm lượng cưỡng bức (d) là:

$$\delta Z = \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{npt} \int_{-1}^1 (M_i) \delta [\chi_i] dx - \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{npt} \int_{-1}^1 V \delta \cdot [\gamma_i] dx = 0$$

$$\text{hay } \delta Z = \frac{\Delta x}{2} \left(\sum_{i=1}^{npt} \int_{-1}^1 (M_i) \left[\frac{\partial \chi_i}{\partial X_i} \right] dx - \sum_{i=1}^{npt} \int_{-1}^1 V \cdot \left[\frac{\partial \gamma_i}{\partial X_i} \right] dx \right) = 0 \quad (d')$$

Điều kiện dừng của phiếm hàm lượng cưỡng bức (e) là:

$$\delta Z = \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{npt-1} \int (M_i - M_{pi}) \delta[\chi_i] dx - \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{npt-1} \int V \delta[\gamma_i] dx = 0$$

$$\text{hay } \delta Z = \frac{\Delta x}{2} \left(\sum_{i=1}^{npt-1} \int (M_i - M_{pi}) \left[\frac{\partial \chi_i}{\partial X_i} \right] dx - \sum_{i=1}^{npt-1} \int V \cdot \left[\frac{\partial \gamma_i}{\partial X_i} \right] dx \right) = 0 \quad (e')$$

Gọi nw1, nw2 là số thông số chuyển vị tại các nút của cột 1, dầm 2 có chuyển vị; nwx1, nwx2, là số thông số góc xoay tại các nút của dầm có góc xoay, nqx1, nqx2, là số thông số lực cắt. Dựa vào điều kiện này ta sẽ xây dựng được ma trận độ cứng của khung có bậc:

nxn (n=nw12+nwx12+nqx12), trong bài toán này n=39 (sau khi bỏ đi những hàng và cột tương ứng có chuyển vị hoặc góc xoay bằng không).

Bây giờ xét các điều kiện liên kết tại chân cột 1, đầu bên phải dầm, liên kết tại nút cứng của khung và các điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử.

Chân cột 1 là ngàm nên góc xoay bằng không, trong phiếm hàm mở rộng điều kiện ràng buộc này được viết như sau

$$\lambda_1 \left(\frac{dy_1}{dx} - \frac{\alpha}{GF} Q_1 \right) \Big|_{x=0} = 0$$

Điều kiện góc xoay tại đầu trên cột 1 và đầu trái dầm 2 bằng nhau, trong phiếm hàm mở rộng điều kiện ràng buộc này được viết như sau

$$\lambda_2 \left[\left(\frac{dy_1}{dx} - \frac{\alpha}{GF} Q_1 \right) \Big|_{x=l} - \left(\frac{dy_2}{dx} - \frac{\alpha}{GF} Q_2 \right) \Big|_{x=0} \right] = 0$$

Điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử của cột 1 và dầm 2 được viết như sau

$$\delta \lambda_i \left[\left(\frac{dy}{dx} - \frac{\alpha}{GF} Q \right) \Big|_{\text{nút 2 phantu truooc}} - \left(\frac{dy}{dx} - \frac{\alpha}{GF} Q \right) \Big|_{\text{nút 1 phantu sau}} \right] = 0$$

với [i=2(npt-1)], trong ví dụ này ta chia cột 1 và dầm 2 thành 4 phần tử nên số điều kiện liên tục về góc tại các nút giữa các phần tử là [i=2(4-1)=6], ứng với $\lambda_{3\div}, \lambda_8$.

Theo phương pháp chuyển vị cưỡng bức tại một vị trí (nút) nào đó của dầm, ta cho lệch khỏi vị trí cân bằng một chuyển vị y_0 . Chẳng hạn tại nút thứ k ta cho một chuyển vị cưỡng bức y_0 ta có:

$$w|_{xk} - y_0 = 0 \quad (f)$$

Điều kiện chuyển vị tại vị trí bất kỳ trên cột 1 bằng y_0 , trong phiếm hàm mở rộng điều kiện ràng buộc này được viết như sau

$$\delta \lambda_9 (w|_{xk} - y_0) = 0$$

$\lambda_1 + \lambda_9$ là thừa số Lagrange và là hai ẩn của bài toán. Như vậy, ma trận a bây giờ có kích thước $(n+9) \times (n+9)$ hay $[(39+9) \times (39+9)]$. Vậy ta có ma trận độ cứng tổng thể của toàn khung $[A] = [48 \times 48]$.

Ma trận vế phải B lúc này có bậc: $[48 \times 1]$ với giá trị hệ số $[B(48) = y_0]$ còn các hệ số còn lại bằng không.

Giải phương trình $[A]X = B$ ta sẽ tìm được các ẩn số là các chuyển vị tại các nút của phần tử và các thừa số Lagrange. Tiếp theo, ta cho thừa số Lagrange tương ứng với chuyển vị cưỡng bức bằng không, trong trường hợp này là λ_9 , ta sẽ tìm được giá trị lực P tương ứng là các giá trị tới hạn của lực nén lên khung.

Khi chia cột, dầm thành bốn phần tử như hình 3.5, ta nhận được $\lambda_9(P)$ là đa thức bậc 8 của P, giải phương trình $\lambda_9(P) = 0$ theo ẩn số P ta sẽ tìm được 8 giá trị lực tới hạn P_{th} , ở đây đưa ra 5 lực tới hạn đầu tiên lần lượt là:

Bảng 3.1. Lực tới hạn của khung tính cho hai trường hợp h/l.

Mỗi thanh trong khung có 4 phần tử, phần tử lực cắt 2 nút.

Tỷ lệ h/l	Dãy các lực tới hạn P_{th}				
	P_{1th}	P_{2th}	P_{3th}	P_{4th}	P_{5th}
1/100	$6,030 \frac{EJ}{l^2}$	$27,467 \frac{EJ}{l^2}$	$68,511 \frac{EJ}{l^2}$	$132,590 \frac{EJ}{l^2}$	$248,385 \frac{EJ}{l^2}$
1/5	$5,901 \frac{EJ}{l^2}$	$27,201 \frac{EJ}{l^2}$	$68,182 \frac{EJ}{l^2}$	$132,295 \frac{EJ}{l^2}$	$247,688 \frac{EJ}{l^2}$
Sai số %	2,14	0,97	0,48	0,22	0,28

Ta thấy các kết quả trên đúng với kết quả phân tích theo giải tích với ba lực tới hạn đầu tiên và kết quả thay đổi rất nhỏ khi h/l thay đổi, khi $h/l = 1/3$ thì lực tới hạn đầu tiên giảm lớn nhất 2,14%.

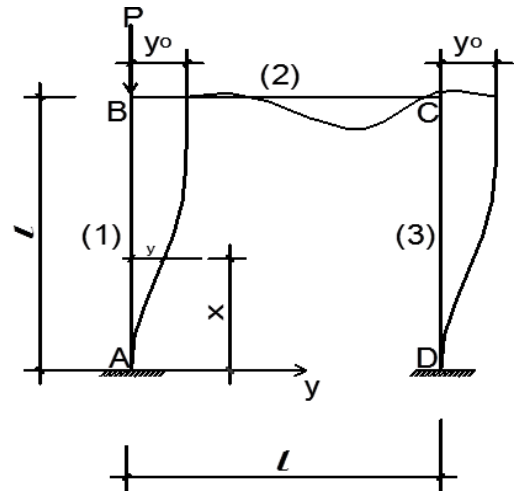
Ví dụ. 3.1: Khung siêu tĩnh bậc ba

Xác định lực tới hạn P_{th} cho khung chịu lực như (hình 3.6). Biết độ cứng uốn của các thanh $EJ=const$.

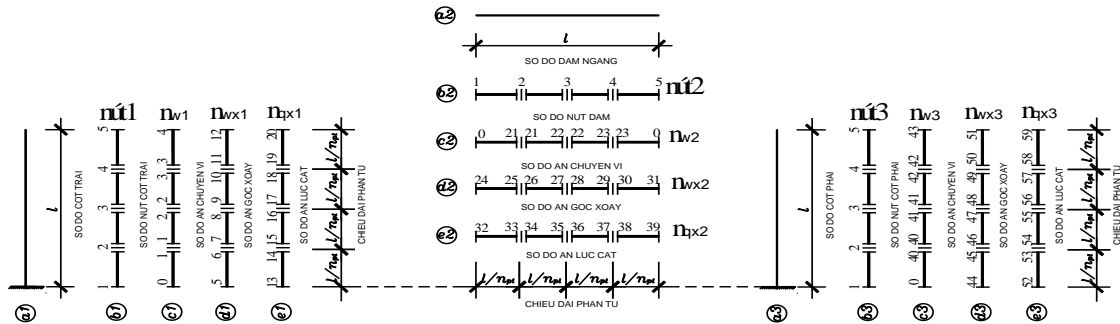
Chia cột và dầm của khung ra làm npt phần tử (hình 3.7). Khi lệch ra khỏi vị trí cân bằng, lực P gây ra mômen uốn M_p trong cột (1) là.

$$M_p = P(y_1 - W_0)$$

W_0 là chuyển vị ngang tại nút ở đầu của cột 1



Hình 3.6. Khung siêu tĩnh bậc ba



Hình 3.7. Đánh số nút, số ẩn

Đối với mỗi phần tử i của cột 1 (cột có lực nén dọc trục P đặt tại đầu thanh) ta có

$$M_{pi} = P[WX_i - W_0] \tag{a}$$

X_i là thông số chuyển vị của phần tử i . Mômen M_{pi} gây ra biến dạng uốn χ_i cho nên trong thành phần lượng cưỡng bức ta viết thêm

$$\sum M_p \delta \chi_i dx = \sum_{i=1}^{npt} \frac{\Delta x}{2} \int_{-1}^1 P W X_i \delta \chi_i dx - \sum_{i=1}^{npt} \frac{\Delta x}{2} \int_{-1}^1 P W_0 X_i \delta \chi_i dx \tag{b}$$

Đối với mỗi phần tử dầm ngang (2) và cột (3)

$$M_{pi} = P w_{xi} \text{ với } (i=1 \div npt) \tag{c}$$

Lượng cưỡng bức của bài toán đối với dầm 2 và cột 3 được viết như sau

$$Z = \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{npt} \int_{-1}^1 (M_i)[\chi_i] dx - \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{npt} \int_{-1}^1 V.[\gamma_i] dx \rightarrow \min \tag{d}$$

Lượng cưỡng bức của bài toán đối với cột 1 được viết như sau

$$Z_1 = \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{npt} \int_{-1}^1 (M_i - M_{Pi}) [\chi_i] dx - \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{npt} \int_{-1}^1 V \cdot [\gamma_i] dx \rightarrow \min \quad (e)$$

Điều kiện dừng của phiếm hàm lượng cưỡng bức (d) là:

$$\begin{aligned} \delta Z &= \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{npt} \int_{-1}^1 (M_i) \delta [\chi_i] dx - \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{npt} \int_{-1}^1 V \delta \cdot [\gamma_i] dx = 0 \\ \text{hay } \delta Z &= \frac{\Delta x}{2} \left(\sum_{i=1}^{npt} \int_{-1}^1 (M_i) \left[\frac{\partial \chi_i}{\partial X_i} \right] dx - \sum_{i=1}^{npt} \int_{-1}^1 V \cdot \left[\frac{\partial \gamma_i}{\partial X_i} \right] dx \right) = 0 \end{aligned} \quad (d')$$

Điều kiện dừng của phiếm hàm lượng cưỡng bức (e) là:

$$\begin{aligned} \delta Z &= \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{npt} \int_{-1}^1 (M_i - M_{Pi}) \delta [\chi_i] dx - \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{npt} \int_{-1}^1 V \delta \cdot [\gamma_i] dx = 0 \\ \text{hay } \delta Z &= \frac{\Delta x}{2} \left(\sum_{i=1}^{npt} \int_{-1}^1 (M_i - M_{Pi}) \left[\frac{\partial \chi_i}{\partial X_i} \right] dx - \sum_{i=1}^{npt} \int_{-1}^1 V \cdot \left[\frac{\partial \gamma_i}{\partial X_i} \right] dx \right) = 0 \end{aligned} \quad (e')$$

Gọi nw1, nw2 và nw3 là số thông số chuyển vị tại các nút của cột 1, dầm 2 và cột 3 có chuyển vị; nwx1, nwx2, nwx3 là số thông số góc xoay tại các nút của dầm có góc xoay, nqx1, nqx2, nqx3, là số thông số lực cắt. Dựa vào điều kiện này ta sẽ xây dựng được ma trận độ cứng của khung có bậc:

nxn ($n=nw123+nwx123+nqx123$), trong bài toán này $n=59$ (sau khi bỏ đi những hàng và cột tương ứng có chuyển vị hoặc góc xoay bằng không).

Bây giờ xét các điều kiện liên kết tại hai chân cột 1, 3 dầm, liên kết tại nút khớp, nút cứng của khung và các điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử.

Chân cột 1 và 3 là ngàm nên góc xoay bằng không, trong phiếm hàm mở rộng điều kiện ràng buộc này được viết như sau

$$\begin{aligned} \lambda_1 \left(\frac{dy_1}{dx} - \frac{\alpha}{GF} Q_1 \right) \Big|_{x=0} &= 0 \\ \lambda_2 \left(\frac{dy_3}{dx} - \frac{\alpha}{GF} Q_3 \right) \Big|_{x=0} &= 0 \end{aligned}$$

Điều kiện góc xoay tại đầu trên cột 1 và đầu trái dầm 2 bằng không, trong phiếm hàm mở rộng điều kiện ràng buộc này được viết như sau

$$\lambda_3 \left[\left(\frac{dy_1}{dx} - \frac{\alpha}{GF} Q_1 \right) \Big|_{x=l} - \left(\frac{dy_2}{dx} - \frac{\alpha}{GF} Q_2 \right) \Big|_{x=0} \right] = 0$$

Điều kiện góc xoay tại đầu trên cột 3 và đầu phải dầm 2 bằng nhau, trong phiếm hàm mở rộng điều kiện ràng buộc này được viết như sau

$$\lambda_4 \left[\left(\frac{dy_2}{dx} - \frac{\alpha}{GF} Q_2 \right) \Big|_{x=l} - \left(\frac{dy_3}{dx} - \frac{\alpha}{GF} Q_3 \right) \Big|_{x=l} \right] = 0$$

Điều kiện góc chuyển vị ngang tại đầu trên cột 1 và 3 bằng nhau, trong phiếm hàm mở rộng điều kiện ràng buộc này được viết như sau

$$\lambda_5 [(y_1)_{x=l} - (y_3)_{x=l}] = 0$$

Điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử của cột 1, 3 và dầm 2 được viết như sau

$$\delta \lambda_i \left[\left(\frac{dy}{dx} - \frac{\alpha}{GF} Q \right) \Big|_{\text{nút 2 phantu truooc}} - \left(\frac{dy}{dx} - \frac{\alpha}{GF} Q \right) \Big|_{\text{nút 1 phantu sau}} \right] = 0$$

với $[i=3(npt-1)]$, trong ví dụ này ta chia hai cột 1, 3 và dầm 2 thành 4 phần tử nên số điều kiện liên tục về góc tại các nút giữa các phần tử là $[i=3(4-1)=9]$, ứng với $\lambda_{6\div}, \lambda_{14}$.

Theo phương pháp chuyển vị cưỡng bức tại một vị trí (nút) nào đó của dầm, ta cho lệch khỏi vị trí cân bằng một chuyển vị y_0 . Chẳng hạn tại nút thứ k ta cho một chuyển vị cưỡng bức y_0 ta có:

$$w|_{xk} - y_0 = 0 \quad (f)$$

Điều kiện chuyển vị tại vị trí bất kỳ trên cột 1 bằng y_0 , trong phiếm hàm mở rộng điều kiện ràng buộc này được viết như sau

$$\delta \lambda_{15} (w|_{xk} - y_0) = 0$$

$\lambda_{1\div} \lambda_{15}$ là thừa số Lagrange và là hai ẩn của bài toán. Như vậy, ma trận a bây giờ có kích thước $(n+15) \times (n+15)$ hay $[(59+15) \times (59+15)]$. Vậy ta có ma trận độ cứng tổng thể của toàn khung $[A]=[74 \times 74]$.

Ma trận về phải B lúc này có bậc: $[74 \times 1]$ với giá trị hệ số $[B(74)=y_0]$ còn các hệ số còn lại bằng không.

Giải phương trình $[A]X=B$ ta sẽ tìm được các ẩn số là các chuyển vị tại các nút của phần tử và các thừa số Lagrange. Tiếp theo, ta cho thừa số Lagrange tương ứng với chuyển vị cưỡng bức bằng không, trong trường hợp này là λ_{15} , ta sẽ tìm được giá trị lực P tương ứng là các giá trị tới hạn của lực nén lên khung.

Khi chia cột, dầm thành bốn phần tử như hình 3.7, ta nhận được $\lambda_{15}(P)$ là đa thức bậc 12 của P, giải phương trình $\lambda_{15}(P)=0$ theo ẩn số P ta sẽ tìm được 12 giá trị lực tới hạn P_{th} , ở đây đưa ra 5 lực tới hạn đầu tiên lần lượt là:

Bảng 3.1. Lực tới hạn của khung tính cho hai trường hợp h/l.

Mỗi thanh trong khung có 4 phần tử, phần tử lực cắt 2 nút.

Tỷ lệ h/l	Dãy các lực tới hạn P_{th}				
	P_{1th}	P_{2th}	P_{3th}	P_{4th}	P_{5th}
1/100	$14,592 \frac{EJ}{l^2}$	$27,877 \frac{EJ}{l^2}$	$70,934 \frac{EJ}{l^2}$	$133,062 \frac{EJ}{l^2}$	$250,952 \frac{EJ}{l^2}$
1/3	$13,455 \frac{EJ}{l^2}$	$27,369 \frac{EJ}{l^2}$	$70,800 \frac{EJ}{l^2}$	$132,358 \frac{EJ}{l^2}$	$250,707 \frac{EJ}{l^2}$
Sai số %	7,79	1,82	0,19	0,53	0,09

Ta thấy các kết quả trên đúng với kết quả phân tích theo giải tích với ba lực tới hạn đầu tiên và kết quả thay đáng kể khi h/l thay đổi, khi h/l=1/3 thì lực tới hạn đầu tiên giảm tới 7,79%.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

KẾT LUẬN:

Qua kết quả nghiên cứu tác giả rút ra một số kết luận sau:

1. Tác giả đã áp dụng thành công phương pháp phân tử hữu hạn và phương pháp chuyển vị cưỡng bức đối với bài toán khung chịu uốn dọc, có xét đến biến dạng trượt ngang.
2. Khi chia mỗi thanh của khung thành bốn phần tử đã nhận được ba lực tới hạn đầu tiên hoàn toàn chính xác so với kết quả giải bằng các phương pháp truyền thống. Nếu muốn tìm được nhiều kết quả chính xác hơn ta chia thanh thành nhiều phần tử hơn.
3. Những nghiên cứu về ổn định của khung, có tiết diện không đổi cho thấy: Lực tới hạn Euler của khung khi xét biến dạng trượt ngang (trường hợp $h/l=1/3; 1/5...$) thường nhỏ thua so với trường hợp không xét biến dạng trượt ngang (trường hợp $h/l=1/100$) . Lực tới hạn nhận được của khung trong hai trường hợp có xét và không xét biến dạng trượt sai khác nhau đáng kể, có trường hợp lên tới 25%.

KIẾN NGHỊ:

Có thể dùng kết quả nghiên cứu của luận văn làm tài liệu tham khảo, nghiên cứu và học tập, cũng như ứng dụng trong thực tế tính toán kết cấu công trình

DANH MỤC TÀI LIỆU THAM KHẢO

I. Tiếng Việt

Hà Huy Cương (2005), *Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss*, Tạp chí Khoa học và kỹ thuật, IV/ Tr. 112 ÷118.

[1] Nguyễn Văn Liên, Nguyễn Phương Thành, Đinh Trọng Bằng (2003), *Giáo trình Sức bền vật liệu*, Nhà xuất bản xây dựng, tái bản lần thứ 3, 330 trang.

[2] Nguyễn Phương Thành (2002), *Nghiên cứu trạng thái ứng suất-biến dạng tấm nhiều lớp chịu tải trọng động có xét lực ma sát ở các mặt tiếp xúc*, Luận án tiến sỹ kỹ thuật.

[3] Vương Ngọc Lưu (2002), *Nghiên cứu trạng thái ứng suất - biến dạng của tấm sàn Sandwich chịu tải trọng tĩnh và động*, Luận án tiến sỹ kỹ thuật.

[4] Trần Hữu Hà (2006), *Nghiên cứu bài toán tương tác giữa cọc và nền dưới tác dụng của tải trọng*, Luận án tiến sỹ kỹ thuật.

[5] Phạm Văn Trung (2006), *Phương pháp mới Tính toán hệ dầm và mái treo*, Luận án Tiến sỹ kỹ thuật.

[6] Vũ Hoàng Hiệp (2007), *Nghiên cứu trạng thái ứng suất - biến dạng của dầm nhiều lớp chịu tải tĩnh và động*, Luận án tiến sỹ kỹ thuật, Hà nội.

[7] Nguyễn Văn Đạo (2001), *Cơ học giải tích*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà nội, 337 trang.

[8] Nguyễn Văn Đạo, Trần Kim Chi, Nguyễn Dũng (2005), *Nhập môn Động lực học phi tuyến và chuyển động hỗn độn*. Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà nội.

[9] Lều Thọ Trình, Đỗ Văn Bình(2006), *Giáo trình ổn định công trình*, Nhà xuất bản Khoa học kỹ thuật.

[10] Vũ Hoàng Hiệp (2008), *Tính kết cấu có xét biến dạng trượt*, Tạp chí xây dựng số 7.

[11] Đoàn Văn Duân, Nguyễn Phương Thành (2007), *Phương pháp mới tính toán ổn định của thanh*, Tạp chí Xây dựng số 12 (Tr41-Tr44).

- [12] Đoàn Văn Duẩn (2007), *Phương pháp nguyên lý Cực trị Gauss đối với các bài toán ổn định công trình*, Luận văn thạc sỹ kỹ thuật.
- [13] Đoàn Văn Duẩn (2008), *Phương pháp mới tính toán ổn định của khung*, Tạp chí Xây dựng số 01 (Tr35-Tr37).
- [14] Đoàn Văn Duẩn (2008), *Nghiên cứu ổn định uốn dọc của thanh có xét biến dạng trượt*, Tạp chí Xây dựng số 12 (Tr33-Tr37).
- [15] Đoàn Văn Duẩn (2009), *Phương pháp nghiên cứu ổn định tổng thể của dàn*, Tạp chí Xây dựng số 03 (Tr86-Tr89).
- [16] Đoàn Văn Duẩn (2010), *Phương pháp phân tử hữu hạn nghiên cứu ổn định uốn dọc của thanh*, Tạp chí kết cấu và Công nghệ xây dựng, số 05, Quý IV(Tr30-Tr36).
- [17] Đoàn Văn Duẩn (2011), *Nghiên cứu ổn định đàn hồi của thanh và hệ thanh*, Luận án Tiến sỹ kỹ thuật.
- [18] Đoàn Văn Duẩn (2012), *Phương pháp mới tính toán dây mềm*, Tạp chí kết cấu và công nghệ Xây dựng số 09, Quý II (Tr56-Tr61).
- [19] Đoàn Văn Duẩn (2014), *Phương pháp chuyển vị cưỡng bức giải bài toán trị riêng và véc tơ riêng*, Tạp chí Xây dựng số 11 (Tr82-Tr84).
- [20] Đoàn Văn Duẩn (2015), *Phương pháp mới nghiên cứu ổn định động lực học của thanh*, Tạp chí Xây dựng số 01 (Tr86-Tr88).
- [21] Đoàn Văn Duẩn (2015), *Bài toán cơ học kết cấu dưới dạng tổng quát*, Tạp chí Xây dựng số 02 (Tr59-Tr61).
- [22] Đoàn Văn Duẩn (2015), *Phương pháp so sánh nghiên cứu nội lực và chuyển vị của hệ dầm*, Tạp chí Xây dựng số 11 (Tr56-Tr58).
- [23] Đoàn Văn Duẩn (2015), *Tính toán kết cấu khung chịu uốn bằng phương pháp so sánh*, Tạp chí Xây dựng số 12 (Tr62-Tr64).
- [24] Trần Thị Kim Huệ (2005), *Phương pháp nguyên lý Cực trị Gauss đối với các bài toán cơ học kết cấu*, Luận văn thạc sỹ kỹ thuật.

[25] Nguyễn Thị Liên (2006), *Phương pháp nguyên lý Cực trị Gauss đối với các bài toán động lực học công trình*, Luận văn thạc sỹ kỹ thuật.

[26] Vũ Thanh Thủy (2009), *Xây dựng bài toán dầm khi xét đầy đủ hai thành phần nội lực momen và lực cắt*. Tạp chí Xây dựng số 4.

[27] Vũ Thanh Thủy (2009), *Dao động tự do của dầm khi xét ảnh hưởng của lực cắt*. Tạp chí Xây dựng, số 7.

[28] Timoshenko C.P, Voinópki- Krige X, (1971), *Tám và Vô*. Người dịch, Phạm Hồng Giang, Vũ Thành Hải, Đoàn Hữu Quang, Nxb Khoa học và kỹ thuật, Hà Nội.

II. Tiếng Pháp

[29] Robert L’Hermite (1974), *Flambage et Stabilité - Le flambage élastique des pièces droites*, édition Eyrolles, Paris.

III. Tiếng Anh

[30] Stephen P.Timoshenko-Jame M.Gere (1961), *Theory of elastic stability*, McGraw-Hill Book Company, Inc, New york – Toronto – London, 541 Tr.

[31] William T.Thomson (1998), *Theory of Vibration with Applications* (Tái bản lần thứ 5). Stanley Thornes (Publishers) Ltd, 546 trang.

[32] Klaus – Jurgen Bathe (1996), *Finite Element procedures*. Part one, Prentice – Hall International, Inc, 484 trang.

[33] Klaus – Jurgen Bathe (1996), *Finite Element procedures*. Part two, Prentice – Hall International, Inc, 553 trang.

[34] Ray W.Clough, Joseph Penzien(1993), *Dynamics of Structures* (Tái bản lần thứ 2), McGraw-Hill Book Company, Inc, 738 trang.

[35] O.C. Zienkiewicz-R.L. Taylor (1991), *The finite element method* (four edition) Volume 2, McGraw-Hill Book Company, Inc, 807 trang.

- [36] G.Korn-T.Korn (1961), *Mathematical Handbook for scientists and Engineers*, McGraw-Hill, New York (Bản dịch tiếng Nga, I.Bramovich chủ biên, Nhà xuất bản Nauka-Moscow, 1964).
- [37] Stephen P.Timoshenko-J. Goodier (1970), *Theory of elasticity*, McGraw-Hill, New York (Bản dịch tiếng Nga, G. Shapiro chủ biên, Nhà xuất bản Nauka-Moscow, 1979), 560 trang.
- [38] D.R.J. Owen, E.Hinton (1986), *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*, Pineridge Press Lt.
- [39] Lars Olovsson, Kjell Simonsson, Mattias Unosson (2006), *Shear locking reduction in eight-node tri-linear solid finite elements*, J. ‘Computers @ Structures’, 84, trg 476-484.
- [40] C.A.Brebbia, J.C.F.Telles, L.C.Wrobel(1984), *Boundary Element Techniques. Theory and Applications in Engineering*. Nxb Springer – Verlag.(Bản dịch tiếng Nga, 1987).
- [41] Chopra Anil K (1995). *Dynamics of structures*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New – Jersey 07632.
- [42] Wilson Edward L. Professor Emeritus of structural Engineering University of California at Berkeley (2002). *Three – Dimensional Static and Dynamic Analysis of structures*, Inc. Berkeley, California, USA. Third edition, Reprint January.
- [43] Wilson, E. L., R. L. Taylor, W. P. Doherty and J. Ghaboussi (1971). “*Incompatible Displacement Models*”, Proceedings, ORN Symposium on “Numerical and Computer Method in Structural Mechanics”. University of Illinois, Urbana. September. Academic Press.
- [44] Strang, G (1972). “*Variational Crimes in the Finite Element Method*” in “The Mathematical Foundations of the Finite Element Method”. P.689 -710 (ed. A.K. Aziz). Academic Press.

- [45] Irons, B. M. and O. C. Zienkiewicz (1968). “*The isoparametric Finite Element System – A New Concept in Finite Element Analysis*”, Proc. Conf. “Recent Advances in Stress Analysis”. Royal Aeronautical Society. London.
- [46] Kolousek Vladimir, DSC Professor, Technical University, Pargue (1973). *Dynamics in engineering structures*. Butter worths London.
- [47] Felippa Carlos A (2004). *Introduction of finite element methods*. Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures University of Colorado Boulder, Colorado 80309-0429, USA, Last updated Fall.
- [48] Wang C.M, Reddy J.N, Lee K.H.(2000), *Shear deformable beams and plates – Relationships with Classical Solutions*. ELSEVIER, Amsterdam – Lausanne- New York – Oxford –Shannon – Singapore – Tokyo.
- [49] Barbero Ever J, Department of Mechanics & Aerospace Engineering, West Virginia University, USA (1999), *Introduction to Composite Materials Design*. Taylor and Francis.
- [50] Decolon C (2002). *Analysis of Composite Structures*. Hermes Penton, Ltd, UK.
- [51] Fu-le Li, ZHI-zhong Sun, Corresponding author, Department of Mathematics, Shoutheast University, Nanjing 210096, PR China (2007). *A finite difference scheme for solving the Timoshenko beam equations with boundary feedback*. Journal of Computational and applied Mathematics 200, 606 – 627, Elsevier press. Available online at www.sciencedirect.com.
- [52] Khaji N., Corresponding author, Shafiei M., Civil Engineering Department Tarbiat Modares University, P. O. Box 14155-4838, Tehran, Iran ((2009)). *Closed - form solutions for crack detection problem of Timoshenko beams with various boundary conditions*. International Journal of Mechanical Sciences 51, 667-681. Contents lists available at Science Direct journal homepage: www.elsevier.com/locate/ijmecsci.

- [53] Antes H. Institute of Applied Mechanics, University Carolo Wilhelmina, D-38023 Braunschweig, Germany (2003). *Fundamental solution and integralequations for Timoshenko beams*. Computers and Structures 81, 383-396. Pergamon press. Available online at www.sciencedirect.com.
- [54] Nguyen Dinh Kien (2007). *Free Vibration of prestress Timoshenko beams resting on elastic foundation*. Viet nam Journal of Mechanics, VAST, Vol.29, No. 1, pp. 1-12.
- [55] Grawford F (1974). *Waves*, Berkeley physics course, volume 3. McGraw – hill Book Company.