BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC DÂN LẬP HẢI PHÒNG

TRỊNH HIẾU ĐÔNG

NGHIÊN CỨU NỘI LỰC VÀ CHUYỂN VỊ CỦA DẦM BẰNG PHƯƠNG PHÁP SAI PHÂN HỮU HẠN

Chuyên ngành: **Kỹ thuật Xây dựng Công trình Dân dụng & Công nghiệp**

Mã số: **60.58.02.08**

LUẬN VĂN THẠC SỸ KỸ THUẬT

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. PHẠM VĂN ĐẠT

Hải Phòng, 2018

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các số liệu, kết quả trong luận văn là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Tác giả luận văn

Trịnh Hiếu Đông

LỜI CẢM ƠN

Tác giả luận văn xin trân trọng bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất đối với TS. Phạm Văn Đạt đã tận tình giúp đỡ và cho nhiều chỉ dẫn khoa học có giá trị cũng như thường xuyên động viên, tạo mọi điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu hoàn thành luận văn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các nhà khoa học, các chuyên gia trong và ngoài trường Đại học Dân lập Hải phòng đã tạo điều kiện giúp đỡ, quan tâm góp ý cho bản luận văn được hoàn thiện hơn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn các cán bộ, giáo viên của Khoa xây dựng, Phòng đào tạo Đại học và Sau đại học - trường Đại học Dân lập Hải phòng, và các đồng nghiệp đã tạo điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tác giả trong quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tác giả luận văn

Trịnh Hiếu Đông

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

1. Lý do nghiên cứu đề tài

Trong lĩnh vực thiết kế kết cấu công trình, kết cấu máy v.v... kỹ thuật tính toán hiện đại tạo nên những khả năng mới về mặt chất lượng. Những khả năng này được tận dụng một cách đầy đủ nhất qua sử dụng các phương pháp rời rạc hóa hay là các phương pháp số trong cơ học kết cấu. Các phương pháp này cho phép lập chương trình tính toán bằng máy tính điện tử đối với các kết cấu chịu lực có mức độ phức tạp bất kỳ với các điều kiện biên và tải trọng bất kỳ. Theo một sơ đồ tính toán duy nhất thực hiện được sự nghiên cứu về tĩnh học, động học và ổn định của mọi kết cấu, kể đến một cách hiệu quả các đặc trưng phi tuyến của vật liệu, các đặc thù của kết cấu khi chuyển vị lớn cũng như dưới các tác động phức tạp do động đất, do nổ....

Trong cơ học kết cấu cổ điển mục đích chính là đi tìm các nghiệm liên tục, mà điều đó chỉ có thể thực hiện đối với một số rất hạn chế các bài toán. Do vậy, với mỗi bài toán lại vận dụng một phương pháp riêng để tìm lời giải cho chính nó. Khác với các phương pháp của cơ học kết cấu cổ điển, sự vận dụng một số loại phương pháp số theo một sơ đồ tương đối thống nhất dẫn đến các chương trình tính bằng máy tính điện tử với tính chất vạn năng.

Phương pháp sai phân hữu hạn là một trong hai phương pháp số cơ bản cùng với phương pháp phần tử hữu hạn mà ngày nay đang dùng phổ biến nhất không cần bàn cãi đối với các bài toán kỹ thuật nói chung và bài toán kết cấu công trình nói riêng.

Phương pháp sai phân hữu hạn giải hầu hết các bài toán cơ học kết cấu đều đưa về giải phương trình vi phân hoặc hệ phương trình vi phân. Nghiệm chính xác của các phương trình này có thể xác định được cho một số trường hợp riêng đơn giản với các đặc trưng vật lý và các điều kiện biên chọn trước của kết cấu. Thực tế ứng dụng rất đa dạng, mà nghiệm chính xác dưới dạng tường minh của phần lớn các bài toán kết cấu không có. Khi đó các phương pháp số tạo ra khả năng phong phú để tìm lời giải. Phương pháp sai phân là một dạng cổ điển theo hướng này.

2. Đối tượng, phương pháp và phạm vi nghiên cứu

Trong luận văn này, tác giả dùng phương pháp sai phân hữu hạn để nghiên cứu nội lực chuyển vị của dầm chịu tác dụng của tải trọng tĩnh.

3. Mục đích nghiên cứu

Mục đích nghiên cứu của đề tài là *"Tính toán nội lực và chuyển vị của dầm bằng phương pháp sai phân hữu hạn"*

4. Nội dung nghiên cứu

- Trình bày các nguyên lý biến phân thường dùng trong cơ học

- Trình bày lý thuyết dầm chịu uốn

- Trình bày phương pháp sai phân hữu hạn và ứng dụng để giải bài toán xác định nội lực và chuyển vị của dầm chịu tác dụng của tải trọng tĩnh

CHƯƠNG 1
CÁC NGUYÊN LÝ BIẾN PHÂN THƯỜNG DÙNG TRONG CƠ HỌC

Trong chương trình bày các nguyên lý biến phân thường dùng trong cơ học, ở đây sẽ lần lượt trình bày phép tính biến phân, nguyên lý thế năng biến dạng tối thiểu, nguyên lý công bù cực đại, nguyên lý chuyển vị ảo, nguyên lý cực trị Gauss và cuối cùng là phương pháp nguyên lý cực trị Gauss.

1.1. Phép tính biến phân [1, 2, 3]

Định nghĩa biên phân δy: Biến phân δy của hàm y(x) của biến độc lập x là hiệu của hàm mới Y(x) với hàm y(x)

$$\delta y = Y(x) - y(x) \tag{1.1}$$

Từ (1.1) ta thấy biến phân δy làm thay đổi quan hệ hàm của y(x) và do đó không nên nhầm số gia Δy khi có số gia Δx, Δy =y(x+Δx)-y(x). Trong trường hợp này quan hệ hàm y(x) không thay đổi.

Biến phân δy:' Nếu như hàm y và biến phân δy có đạo hàm theo x thì biến phân δy' khi có biến phân δy sẽ là:

$$\delta y' = \delta \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\delta y = Y'(x) - y'(x) \tag{1.2}$$

Trong (1.2) ký hiệu biến phân δ và ký hiệu đạo hàm $\frac{d}{dx}$ hoán đổi vị trí cho nhau (tính chất giao hoán).

Nếu như cho hàm

$F = F(y_1, y_2, y_3, \ldots y_n; x)$

thì số gia ΔF khi có các biến phân δy_i được xác định như sau

$$\Delta F = \begin{Bmatrix} F(y_1 + \delta y_1, y_2 + \delta y_2, y_3 + \delta y_{.3}, \ldots y_n + \\ \ldots \delta y_n \,; x) - F(y_1, y_2, y_3, \ldots y_n; x) \end{Bmatrix};$$

Nếu như cho hàm

$$F = F(y_1, y_2, y_3, \ldots y_n, y'_1, y'_2, y'_3, \ldots y'_n; x)$$

thì số gia ΔF khi có các biến phân δy_i, $\delta y'_i$ được xác định như sau

$$\Delta F =$$

$$F\left\{\begin{pmatrix} y_1+\delta y_1, y_2+\delta y_2, y_3+\delta y_{.3}, \dots . y_n+\delta y_n, {y'}_1 + \\ \delta {y'}_1, \dots {y'}_2+\delta {y'}_2, {y'}_3+\delta {y'}_3, \dots + {y'}_{n,\dots} + \delta {y'}_n; x \end{pmatrix} - \atop \left({y'}_1+\delta {y'}_1, {y'}_2+\delta {y'}_2, {y'}_3+\delta {y'}_3, \dots, {y'}_n+\delta {y'}_n; x\right)\right\} +$$

$$-F\{y_1, y_2, y_3, \dots y_n, {y'}_1, {y'}_2, {y'}_3, \dots {y'}_n; x\}$$

Nếu như hàm F liên tục đến đạo hàm bậc hai thi số gia ΔF có thể viết tương tự theo công thức Taylor đối với hàm $F = F(x_1, x_2, \dots x_n)$ với sự chú ý rằng ở đây đại lượng biến thiên là x_i còn trong trường hợp đang xét thì mỗi hàm y_i có hai đại lượng biến thiên là các biến phân δy_i , $\delta {y_i}'$. Ta có:

$$\Delta F = \sum_1^n\{\frac{\partial F}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial F}{\partial {y'}_i}\delta {y'}_i\} + \frac{1}{2}\{\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n\frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_k}\delta y_i \delta y_k +$$

$$+\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n\frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial {y'}_k}\delta y_i \delta {y'}_k + \sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n\frac{\partial^2 F}{\partial {y'}_i \partial {y'}_k}\delta {y'}_i \delta {y'}_k\} + \varepsilon(\rho^2)$$

(1.3)

Biểu thức $\varepsilon(\rho^2)$ là vô cùng bé bậc hai đối với ρ

$$\rho = \sqrt{\delta y_1^2 + \delta y_1'^2 + \delta y_2^2 + \delta y_2'^2 + \cdots \delta y_n^2 + \delta y_n'^2}$$

Thành phần có đạo hàm bậc nhất trong (1.3) được gọi là biến phân bậc nhất của F và ký hiệu δF, thành phần có đạo hàm bậc hai trong (1.3) khi không có hệ số ½ được gọi là biến phân bâc hai và ký hiệu là $\delta^2 F$. Như vậy, các biến phân δF, $\delta^2 F$ là các số gia của hàm F khi có các biến phân δy_i, $\delta {y'}_i$.

Phương trình Euler:

Tìm cực trị (giá trị min hoặc max) của phiếm hàm sau

$$Z = \int_{x1}^{x2} F(y, y', x)dx \qquad (1.4)$$

với hai cận của tích phân , x1 và x2, đã cho. Trong bài toán này các hàm y(x) và y'(x) là các hàm chưa biết , cần được tìm sao cho phiếm hàm Z đạt cực trị.

Theo qui tắc tìm cực trị thì số gia bậc nhất của Z phải bằng không hay $\delta Z = 0$. Đưa biến phân bậc nhất của Z lấy theo (1.3) vào (1.4), ta có:

$$\delta Z = \int_{x1}^{x2} \delta F\, dx = \int_{x1}^{x2} (\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y')dx = 0 \qquad (1.5)$$

Lấy tích phân từng phần tích phân thứ hai của phương trình (1.5), ta có:

$$\int_{x1}^{x2} \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx = \int_{x1}^{x2} \frac{\partial F}{\partial y'} d(\delta y) = \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y|_{x1}^{x2} - \int_{x1}^{x2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \delta y dx$$

Phương trình (1.5) bây giờ được viết lại như sau:

$$\frac{\partial F}{\partial y'} \delta(\partial y|_{x_1}^{x_2}) + \int_{x1}^{x2} (\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}) \delta y dx = 0 \qquad (1.6)$$

Bởi vì δy là đại lượng bất kỳ từ (1.6) ta có

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y\prime}) = 0 \qquad (1.7)$$

Phương trình (1.7) được gọi là phương trình Euler.

Thành phần đầu trong (6) là điều kiện tai cận trên và cận dưới x1 và x2.

Nếu như giá trị hàm tai x1 và x2 ,y(x1) và y(x2) đã biết thì $\delta y_{x1} = 0$ và $\delta y_{x2} = 0$ cho nên *phương trình Euler (1.7) là điều kiện cần dể phiếm hàm (1.4) có cực trị.*

Nếu như giá trị y(x1) hoặc y(x2) hoặc cả hai không xác định thì từ phương trình (1.6), ngoài phương trình Euler còn phải xét thêm hoăc một hoặc cả hai điều kiện sau

$$\frac{\partial F}{\partial y\prime_{x1}} = 0 \qquad (1.8)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y\prime_{x2}} = 0 \qquad (1.9)$$

Nếu như phiếm hàm (1.4) chứa các dạo hàm bậc cao , ví dụ bậc p:

$$Z = \int_{x1}^{x2} F\big(y, y', y'', \dots y^{(p)}, x\big) dx \qquad (1.10)$$

thì đưa δF từ (1.3) vào (1.10) và thực hiện tích phân từng phần nhiêu lần ta sẽ nhận được phương trình Euler của (1.10). Đối với phiếm hàm (1.10) ta có công thức tổng quát sau []

$$\sum_{p=0}^{p} (-1)^p \frac{\partial^p}{\partial x^p}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(p)}}\right) = 0 \qquad (1.11)$$

Khi hàm dưới dấu tích phân chứa nhiều hàm y_i với i=1,2,3,…n thì ứng với mỗi hàm.

y_i ta có một phương trình Euler dạng (1.7) hoặc (1.11).

Trong phép tính biến phân còn nghiên cứu trường hợp một hoặc cả hai cận tích phân x1 và x2 là các đại lượng di động [1, 2, 3].

Đối với các bài toán cơ học là các bài toán có ý nghĩa vật lý rõ ràng thì nếu như phương trình Euler được giải cùng với các điều kiện biên có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Phép tính biến phân cùng với nguyên lý chuyển vị ảo là các công cụ toán học rất hữu ích để xây dựng phương trình cân bằng hoặc phương trình chuyển động cũng như các điều kiện biên của các bài toán cơ học.

1.2. Nguyên lý thế năng biến dạng tối thiểu

Khi phương trình cân bằng được biểu thị qua ứng suất hoặc nội lực và do đó thế năng biến dạng cũng biểu thị qua ứng suất hoặc nội lực ta có nguyên lý thế năng biến dạng cực tiểu, nguyên lý Castiliano (1847-1884). Nguyên lý phát biểu như sau:

Trong tất cả các trạng thái cân bằng lực có thể thì trạng thái cân bằng thực xảy ra khi thế năng biến dạng là cực tiểu.

Trạng thái cân bằng lực có thể là trạng thái mà các lực tác dụng lên phân tố thỏa mãn các phương trình cân bằng. Ta viết nguyên lý dưới dạng sau:

$$\Pi(F) \rightarrow \min$$

Với ràng buộc là các phương trình cân bằng viết dưới dạng lực.

Đối với dầm ta có:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EJ}dx \quad \rightarrow min \tag{1.12}$$

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q \tag{1.13}$$

Nội lực cần tìm mômen uốn là hàm phân bố theo chiều dài dầm M(x) và phải thỏa mãn các điều kiện liên kết ở hai đầu thanh (được xác định ở hai đầu thanh). Đây là bài toán cực trị có ràng buộc. Bằng cách dùng thừa số Lagrange $\lambda(x)$ đưa về bài toán không ràng buộc sau:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EJ}dx + \int_0^l \lambda(x)\left[\frac{d^2M}{dx^2} + q\right]dx \rightarrow min \tag{1.14}$$

$\lambda(x)$ là thừa số Lagrange và cũng là ẩn của bài toán. Theo phép tính biến phân từ phiếm hàm (1.14) ta nhận được hai phương trình sau (phương trình Euler– Lagrange).

$$M = -EJ\frac{d^2\lambda}{dx^2} \tag{1.15}$$

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q \qquad (1.16)$$

$\lambda(x)$ có thứ nguyên là chuyển vị cho nên phương trình (1.15) biểu thị quan hệ giữa M và chuyển vị. Thế (1.15) vào (1.16) ta có:

$$EJ\frac{d^4\lambda}{dx^4} = q \qquad (1.17)$$

$\lambda(x)$ là độ võng của dầm và phương trình (1.17) là phương trình vi phân cân bằng của dầm viết theo chuyển vị nhận được ở trên.

1.3. Nguyên lý công bù cực đại

Khi dùng ẩn là các chuyển vị và biến dạng thì có nguyên lý công bù cực đại.

Trong tất cả các chuyển vị động học có thể (khả dĩ) thì chuyển vị thực là chuyển vị có công bù cực đại.

Chuyển vị động học có thể là chuyển vị thỏa mãn các phương trình liên hệ giữa chuyển vị và biến dạng và thỏa mãn các điều kiện biên. Công bù bằng tích của ngoại lực và chuyển vị trừ đi năng lượng biến dạng.

[Công ngoại lực – thế năng biến dạng]→max

Với ràng buộc là các phương trình liên hệ giữa chuyển vị và biến dạng.

Lấy ví dụ đối với dầm chịu uốn, ta có

$$\int_0^l qydx - \frac{1}{2}\int_0^l EJ\chi^2\,dx \to max \qquad (1.18)$$

Với ràng buộc:

$$\chi = -\frac{d^2y}{dx^2} \qquad (1.19)$$

χ là biến dạng uốn cũng là độ cong của đường độ võng. Tích phân thứ nhất trong (1.18) là công toàn phần của ngoại lực (không có hệ số ½), tích phân thứ hai là thế năng biến dạng biểu thị qua biến dạng uốn.

Thay χ từ (1.19) vào (1.18), ta có

$$\int_0^l qydx - \frac{1}{2}\int_0^l EJ\left(-\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx \to max \qquad (1.20)$$

Thay dấu của (1.20) ta có

$$\frac{1}{2}\int_0^l EJ\left(-\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx - \int_0^l qydx \to min \qquad (1.21)$$

Khi y có giá trị xác định tại hai đầu mút dầm thì điều kiện cần để biểu thức (1.21) cực tiểu là phương trình Euler sau

$$EJ\frac{d^4y}{dx^4} = q \qquad (1.22)$$

Phương trình (1.22) là phương trình vi phân cân bằng của dầm chịu uốn. Nguyên lý công bù cực đại dưới dạng biểu thức (1.21) được sử dụng rộng rãi trong tính toán công trình theo phương pháp phần tử hữu hạn.

1.4. Nguyên lý công ảo [4, 5]

Cho 3 phương trình sau

$$\sum \mathrm{X} = 0 \quad , \quad \sum \mathrm{X} = 0 \qquad \sum \mathrm{Z} = 0 \qquad (1.23)$$

Nếu như cho 3 dại lượng a,b và c không đồng thời bằng không (a,b,c độc lập tuyến tính đối với nhau) thì từ (2.1), ta có:

$$a\sum X + b\sum Y + c\sum Z = 0 \qquad (1.24)$$

Ngược lại, nếu như cho (1.24) thì ta lại nhận được (1.23).

Chú ý rằng các phương trình (1.23) và (1.24) là các phương trình được xây dựng trên cơ sở lập luận toán học thuần túy, các phương trình (1.23) và (1.24) cũng như các đại lượng a, b,c không nhất thiết phải có ý nghĩa vật lý cụ thể nào cả.

Bây giờ ta xem X, Y, Z là các hình chiếu của các lực tác dụng lên chất điểm lên các trục của hệ tọa độ vuông góc x, y,và z thì hệ phương trình (1.23) là hệ phương trình cân bằng lưc . Gọi r_x, r_y và r_z là các chuyển vị ảo theo chiều x,y và z, ta có

$$\sum X\delta r_x + \sum Y\delta r_y + \sum Z\delta r_z = 0 \qquad (1.25)$$

Chuyển vị ảo r_x, r_y và r_z là chuyển vị do một nguyên nhân bất kỳ nào đó gây ra, là hàm liên tục của tọa độ x,y,z. Các δr_x, δr_y và δr_z là các biến phân của chuyển vị ,là các đại lượng bé để cho chuyển vị là liên tục, cho nên từ (1.25) ta lại nhận được hệ phương trình cân bằng lực (1.23). Phương trình (1.25) thường được gọi là nguyên lý công ảo.

Nếu như các chuyển vị thực liên tục đến đạo hàm bậc nhất thì các biến phân δr_x, δr_y và δr_z cũng phải liên tuc đến dạo hàm bậc nhất .Nếu các chuyển vị thực liên tục đến đạo hàm bậc hai thì các biến phân δr_x, δr_y và

δr_z cũng phải liên tục đến đạo hàm bậc hai. Đó là các điều kiện đối với chuyển vị ảo.

Ta cũng có thể sử dụng các biến phân của chuyển vị thực và nếu như các chuyển vị thực thỏa mãn các điều kiên biên thì nguyên lý (1.25) được gọi là nguyên lý chuyển vị khả dĩ.

Bất đẳng thức Fourier:

Nguyên lý chuyển vị ảo (1.25) đúng với trường hợp liên kết giữ (liên kết hoàn lại,). Khi có liên kết không giữ ,ví dụ, khi hai chất điểm nối với nhau bằng một sợi dây thì chúng chỉ có thể chuyển động lại gần nhau, nhưng vì có sợi dây, chúng không thể chuyển động xa nhau hoặc một vật thể lăn trên bề mặt của vật cứng khác nhưng không thể 'lún' vào nhưng có thể chuyển động tách ra khỏi bề mặt đó thì trong trường hợp này nguyên lý chuyển vị ảo (1.25) có dạng

$$\sum X\delta r_x + \sum Y\delta r_y + \sum Z\delta r_z \leq 0 \qquad (1.26)$$

Bất đẳng thức (1.26) được gọi là bất đẳng thức Fourier [ ]. Gauss và nhà toán học người Nga Ostrogradsky M.B.(1801-1862) cũng nhận được bất đẳng này [ ]. Bất đẳng thức (1.26) chỉ ra rằng khi có liên kết không giữ thì công ảo là đại lượng không dương.

1.5. Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss

1.5.1.Nguyên lý Gauss

Nhà toán học người Đức Gauss Karl Friedrich (1777- 1855) có công trình về cơ học với tựa đề "Về nguyên lý mới, chung của cơ học' viết vào năm 1829. Công trình này được dịch sang tiếng Nga và in lại trong "Các nguyên lý biến phân của cơ học" với chú thích và chú giải cặn kẽ và lý thú của Gauss và của người biên tập [1].

Mở đầu công trình của mình, Gauss viết :"Như đã biết , nguyên lý vận tốc ảo đưa bài toán cơ học bất kỳ về vấn đề toán học thuần túy, còn nguyên lý D'Alembert đưa bài toán động lực học về bài toán tĩnh học". Gauss còn cho rằng các nguyên lý cơ bản khác của cơ học đều xuất phát từ hai nguyên lý nêu trên và đặt vấn đề tại sao ngay từ đầu lại không xét liên kết không giữ. Dựa trên các nhận xét trên Gauss đưa ra nguyên lý mới và chung của mình như sau:

"Chuyển động của hệ chất điểm giữa chúng có liên kết tùy ý, chịu tác dụng bất kỳ, ở mỗi thời điểm, trùng hoàn toàn nếu như có thể, với chuyển động của hệ đó khi hoàn toàn tự do, tức là chuyển động xảy ra với lượng cưỡng bức tối thiểu nếu như số đo lượng cưỡng bức lấy bằng tổng tích của khối lượng mỗi chất điểm với bình phương độ lệch vị trí khả dĩ của chất điểm khi có liên kết với vị trí chuyển động của chất điểm khi hoàn toàn tự do sau một thời đoạn vô cùng nhỏ".

Giả sử ở thời điểm *t* chất điểm m có vị trí A . Nếu như ở thời điểm này ta giải phóng các liên kêt thì do có vận tốc ban đầu và tác dụng của lực, sau thời đoạn vô cùng nhỏ *dt* chất điểm có vị tri B. Chất điểm khi có lực tác dụng và chịu ảnh hưởng của liên kết sau thới đoạn *dt* sẽ có vị trí C có thể nào đó. Chuyển động thực xảy ra khi lượng cưỡng bức Z của chất diểm viết đối với hệ nhiều chất diểm là tối thiểu :

$$Z = \sum_i m_i \overline{BC}_i^2 \quad \rightarrow \quad min \qquad (1.27)$$

Dựa vào bất đẳng thức (2.4) là bất đẳng thức cũng do ông đưa ra, Gauss trình bày các luận cứ chứng minh cho nguyên lý của mình.

Biểu thức giải tích của nguyên lý Gauss

Trong cơ hệ chất điểm nguyên lý được giải thích như sau [1].

Xét hệ chất điểm có tọa độ r và vận tốc $\dot{r}$ ở thời điểm t. Sau thời đoạn vô cùng nhỏ dt chất điểm chịu tác dụng của lực F và của vận tốc sẽ có vị trí

$$r(t+dt) = r+\dot{r}dt + \frac{1}{2}\ddot{r}dt^2 \qquad (a)$$

Nếu như tại thời điểm t ta giải phóng các liên kết nhưng vẫn giữ lực tác dụng, thì sau thời đoạn dt vị trí của chất diểm sẽ là

$$r(t+dt) = r+\dot{r}dt + \frac{1}{2}\frac{F}{m}dt^2 \qquad (b)$$

Hiệu của (b) và (a) là độ lệch vị tri chất điểm khi hoàn toàn tự do và khi có liên kết. Lượng cưỡng bức chuyển động theo của hệ chất điểm theo (1.1) bằng

$$Z = \frac{dt^2}{4}\sum_i m_i \left(\frac{F_i}{m_i} - \ddot{r}_i\right)^2$$

Nguyên lý Gauss đúng cho mỗi thời điểm cho nên có thể xem dt là hằng và ta có biểu thức sau

$Z = \sum_i m_i \left(\frac{F_i}{m_i} - \ddot{r}_i\right)^2 \rightarrow \ min$ (1.28) Hay: $Z = \sum_i \frac{1}{m_i}(F_i - m_i\ddot{r}_i)^2 \rightarrow \ min$ (1.28b)

Trong hệ tọa độ vuông góc x, y, z biểu thức (1.28) có các dạng

$$Z = \sum_i \{m_i(\frac{X_i}{m_i} - \ddot{x}_i)^2 + m_i\left(\frac{Y_i}{m_i} - \ddot{y}_i\right)^2 + m_i(\frac{Z_i}{m_i} - \ddot{z}_i)^2\} \rightarrow min \quad (1.29)$$

Trong (1.29) các đại lượng X,Y,Z lần lượt là hình chiếu trên các trục tọa độ x,y,z của lực F tác dụng lên chất điểm .

Các biểu thức (1.28) và (1.29) là các biểu thức giải tích của nguyên lý (1.27) .

Khối lượng chất điểm cũng như lực tác dụng lên nó đã biết cho nên trong (1.28) và (1.29) gia tốc là đaị lượng chưa biết. Khảo sát với các điều kiên liên kết khác nhau, các nhà nghiên cứu cho rằng đại lượng biến phân trong các biểu thức giải tích (1.28) hoặc (1.29) *chỉ có thể là gia tốc* [1, 2, 3].

Các tài liệu cơ học hiện nay khi bàn về nguyên lý cực trị Gauss, ví dụ xem [1, 2, 3, 4],đều giới thiệu biểu thức (1.28, 1.29), nhưng cần lưu ý rằng các biểu thức này không phải do Gauss mà do những nhà nghiên cứu nguyên lý Gauss đưa ra. Ngoài ra, trong [2] còn nêu nhận định rằng nguyên lý Gauss là một dạng đặc biệt của nguyên lý D'Alambert.

1.5.2. Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss

Như Gauss đã viết, nguyên lý của ông là nguyên lý chung của cơ học, nghĩa là có tính khái quát cao, nhưng với kết luận và nhận định trình bày ở trên, nguyên lý này hầu như không được sử dụng trong cơ học. Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss trình bày ở đây là phương pháp sử dụng trực tiếp nguyên lý Gauss để xây dựng các phương trình chuyển động và phương trình cân bằng của cơ hệ nhằm khẳng định phần nào tính khái quát của nguyên lý.

1.5.2.1. Cơ học chất điểm

Các biểu thức (1.28) và (1.29) trình bày ở trên là các biểu thức của lượng cưỡng bức viết cho hệ chất điểm khi có liên kết bất kỳ (liên kết giữ và liên kết không giữ). Trong trường hợp liên kết giữ, xem gia tốc là đại lượng biến phân, từ (1.28) ta nhận được phương trình cân bằng:

$$\sum_i \frac{1}{m_i}(F_i - m_i\ddot{r}_i)\delta\ddot{r}_i = 0 \quad (1.30)$$

Chú ý rằng thành phần trong ngoặc đơn của (1.30) biểu thị điều kiện cân bằng lưc tác dụng lên chất điểm, cho nên có thể xem $\ddot{r}_i$ là gia tốc ảo. Về mặt toán học , các đại lượng ảo là bất kỳ, nghĩa là có thể xem không chỉ gia tốc, mà cả vận tốc và chuyển vị cũng là các đại lượng ảo . Do đó ngoài (1.30), có thể viết thêm

$$\sum_i \frac{1}{m_i}(F_i - m_i\ddot{r}_i\ )\delta\dot{r}_i = 0 \qquad (1.31)$$

$$\sum_i \frac{1}{m_i}(F_i - m_i\ddot{r}_i\ )\delta r_i = 0 \qquad (1.32)$$

Phương trình (1.5) xem vận tốc là đại lượng biến phân, phương trình (1.32) xem chuyển vị là đại lượng biến phân. Như vậy, các đại lượng biến phân của nguyên lý cực trị Gauss (1.27) trong trường hợp liên kết giữ có thể là gia tốc, vận tốc hoặc chuyển vị

Tương tư, trong trường hợp liên kết giữ, từ biểu thức lượng bức (1.29) sẽ nhận được các phương trình

$$\sum_i m_i\{\left(\frac{X_i}{m_i} - \ddot{x}_i\right)\delta\ddot{x}_i + \left(\frac{Y_i}{m_i} - \ddot{y}_i\right)\delta\ddot{y}_i + (\frac{Z_i}{m_i} - \ddot{z}_i)\delta\ddot{z}_i\} = 0 \qquad (1.33)$$

$$\sum_i m_i\{\left(\frac{X_i}{m_i} - \ddot{x}_i\right)\delta\dot{x}_i + \left(\frac{Y_i}{m_i} - \ddot{y}_i\right)\delta\dot{y}_i + (\frac{Z_i}{m_i} - \ddot{z}_i)\delta\dot{z}_i\} = 0 \qquad (1.34)$$

$$\sum_i m_i\{\left(\frac{X}{m_i} - \ddot{x}\right)\delta x + \left(\frac{Y}{m_i} - \ddot{y}\right)\delta y + (\frac{Z}{m_i} - \ddot{z})\delta z\} = 0 \qquad (1.35)$$

Đại lượng biến phân trong (1.33) là gia tốc, trong (1.34) là vận tốc, trong (1.35) là chuyển vị.

Như vậy, trong trường hợp liên kết giữ, nguyên lý Gauss (1.27) được dẫn về nguyên lý công ảo (1.31 – 1.35).

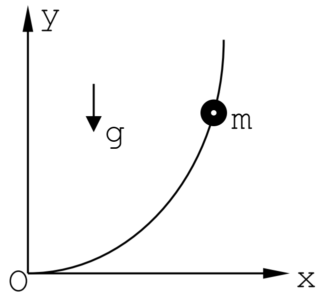
Ví dụ 1.1. Viết phương trình chuyển động của chất điểm có khối lượng m chuyển động không ma sát dưới tác dụng của lực trọng trường trên đường cong phẳng $y = bx^2$ (hình 2). Ví dụ này lấy từ [4].

Bài làm: Trong ví dụ này lực tác dụng lên chất điểm chiều x là X=0, chiều y là Y=mg. Các phương trình (1.33)-(1.35) với chú ý rằng lực quán tính mang dấu âm và chuyển động xảy ra trong mặt phẳng (x,y), được viết lại như sau

$$m(\ddot{x}\ )\delta\ddot{x} + m(\frac{mg}{m} + \ddot{y}\ )\delta\ddot{y} = 0 \qquad (a)$$

$$m(\ddot{x}\ )\delta\dot{x} + m(\frac{mg}{m} + \ddot{y}\ )\delta\dot{y} = 0 \qquad (b)$$

$$m(\ddot{x}\ )\delta x + m(\frac{mg}{m} + \ddot{y}\ )\delta y = 0 \qquad \text{(c)}$$



Hình 2. Minh họa cho ví dụ 1

Bây giờ ta tính các vận tốc và gia tốc của y theo vận tốc và gia tốc của x

$$y = bx^2\ ,\ \dot{y} = 2bx\dot{x}\ , \ddot{y} = 2b\dot{x}^2 + 2bx\ddot{x}$$

Ta tính các biến phân δy , $\delta\dot{y}$, $\delta\ddot{y}$ qua các biến phân $\delta x, \delta\dot{x}\ , \delta\ddot{x}$

$$\delta\ddot{y} = \delta_{\ddot{x}}(2b\dot{x}^2 + 2bx\ddot{x}) = 2bx\delta\ddot{x} \qquad \text{(d)}$$

$$\delta\dot{y} = \delta_{\dot{x}}(2bx\dot{x}) = 2bx\delta\dot{x} \qquad \text{(e)}$$

$$\delta y = \delta_x(2bx^2) = 2bx\delta x \qquad \text{(f)}$$

Đưa lần lượt các các biến phân (d),(e),(f) vào các phương trình (a),(b),(c) ta sẽ nhận được cùng một phương trình sau

$$\ddot{x} + (g + 2b\dot{x}^2 + 2bx\ddot{x})2bx = 0$$

Sắp xếp lại, ta có

$$(1 + 4b^2x^2)\ddot{x} + 4b^2x\dot{x}^2 + 2bgx = 0$$

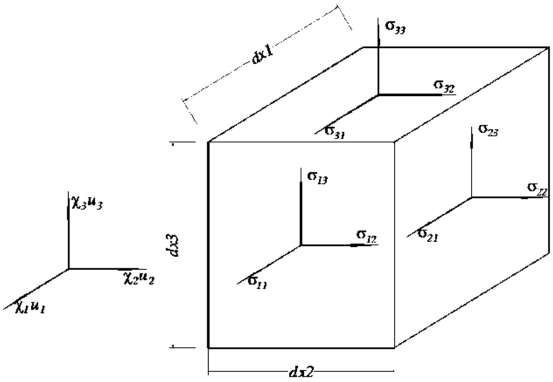
Phương trình vừa nhận được là phương trình chuyển đông cần tìm của ví dụ trên.

Những trình bày trên chỉ ra rằng,đối với cơ học chất điểm trong trường hợp liên kết giữ, đại lượng biến phân của nguyên lý Gauss có thể là gia tốc, vận tốc hoặc chuyển vị.

1.5.2.2. Cơ học môi trường liên tục

a. Các phương trình Navier

Sử dụng trực tiếp nguyên lý Gauss (1.1) để xây dựng các phương trình chuyển động của môi trường liên tục là nội dung của phần trình bày dưới đây. Để trình bày được rõ ràng, ta xét môi trường đàn hồi đồng nhất đẳng hướng. Tách một phân tố khối dx.dy.dz ra khỏi môi trường . Các lực tác dụng đặt ở trọng tâm phân tố là các lực khối $b_{x,}, b_y, b_z$ và các lực quán tính f_x, f_y, f_z , còn ở trên các bề mặt của phân tố có các ứng suất pháp $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ vá các ứng suất tiếp $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$(hinh 2). Do có lực tác dụng, trọng tâm phân tố có các chuyển vị u theo chiều x, v theo chiều y và w theo chiều z.



Hình 1.2 Trạng thái ứng suất phân tố

Các biến dạng của phân tố do các chuyển vị gây ra, khi xem các chuyển vị là bé, theo lý thuyết đàn hồi, ví dụ xem [ ], được xác theo các biểu thức

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \ , \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{xy} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \ , \varepsilon_{xz} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \ , \ \varepsilon_{yz} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \qquad (1.36)$$

Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng sẽ là

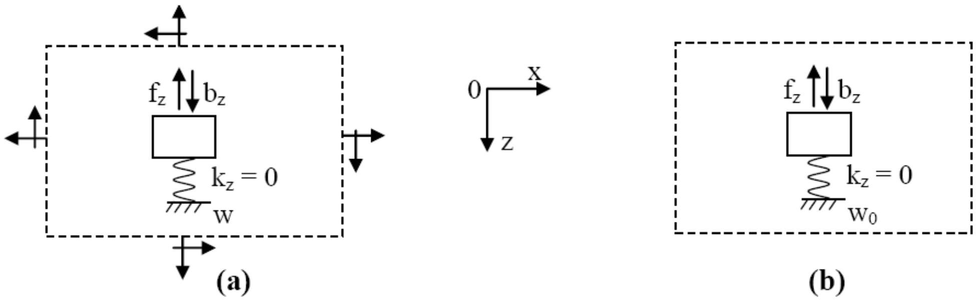
$$\sigma_x = 2G\left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right) , \sigma_y = 2G\left(\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right) , \sigma_z = 2G\left(\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right),$$

$$\tau_{xy} = G\varepsilon_{xy} \ , \qquad \tau_{xz} = G\varepsilon_{xz} \quad \tau_{yz} = G\varepsilon_{yz}$$

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad , \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad (1.37)$$

Trong các biểu thức trên θ là biến dạng thể tích, G là mođun trượt của vật liệu, E là mođun đàn hồi và ν là hệ số Poisson.

Khi giải phóng liên kết, phân tố không có liên hệ nào với môi trường , chỉ chịu tác dụng của các lực khối $b_{x,}, b_y, b_z$ và các lực quán tính f_x, f_y, f_z và có các chuyển vi $u_0, v_{0,} w_0$ như của vật cứng, với $u_0 \to \infty$, $v_0 \to \infty$, $w_0 \to \infty$.



Hình 1.3

Để cho các chuyển vị $u_0, v_{0,} w_0$ được xác định, đăt thêm các lo-xo theo các chiều x, y, z (hinh 1.3) Độ cứng các lo-xo

$$k_x = \lim_{u_0 \to \infty} \frac{-b_x + f_x}{u_0} \quad , \ k_y = \lim_{v_0 \to \infty} \frac{-b_y + f_y}{v_0} \quad , \ k_z = \lim_{w_0 \to \infty} \frac{-b_z + f_z}{w_0}$$

Ta cũng đặt các lo-xo vào phân tố có liên kết . Rõ ràng là các lo-xo được đưa thêm vào không làm thay đổi các chuyển vị u, v, w của phân tố có liên kêt và chuyển vị $u_0, v_{0,} w_0$ của phân tố tự do.

Phân tố có liên kết có các biến dạng (chuyển động) sau :

Các biến dạng $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ có độ cứng 2G ,

Biến dạng thể tích θ có độ cứng $\frac{2G\nu}{(1-2\nu)}$,

Các biến dạng trượt $\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$ có các độ cứng G.

Phân tố tự do (không có liên kết với môi trường) không có các biến dạng này.

Theo nguyên lý Gauss (1.1) ta viết lưỡng bức chuyển động

$$Z = \int \left\{ 2G\left({\varepsilon_x}^2 + {\varepsilon_y}^2 + {\varepsilon_z}^2 \right) + \frac{2G\nu}{(1-2\nu)}\theta^2 + G\left({\varepsilon_{xy}}^2 + {\varepsilon_{xz}}^2 + {\varepsilon_{yz}}^2 \right) \right\} dV$$

$$+ \int \{ k_x(u-u_0)^2 + k_y(v-v_0)^2 + k_z(w-w_0)^2 \} dV \ \to min$$

(1.38)

V là thể tích vật thể cần tính.

Trước tiên ta tìm cực trị ba tích phân cuối của biểu thức trên với chú ý rằng các đại lượng u,v và w là các hàm tọa độ cho nên phải dùng phép tính biến phân . Ta nhận được :

$$\min \int k_x(u-u_0)^2\, dV = \min \int \lim_{u_0\to\infty} \frac{f_x-b_x}{u_0}\ \ (u-u_0)^2\, dV =$$
$$-\int 2(f_x-b_x)\delta u\ \ dV$$
$$\min \int k_y(v-v_0)^2 dV\ = min\ \int \lim_{v_0\to\infty} \frac{f_y-b_y}{v_0}\ (v-v_0)^2\, dV =$$
$$-\int 2(f_y-b_y)\delta v\, dV$$
$$min \int k_z(w-w_0)^2 dV = \min \int \lim_{w_0\to\infty} \frac{f_z-b_z}{w_0}\ (w-w_0)^2\, dV =$$
$$-\int 2(f_z-b_z)\delta w\, dV \qquad (1.39)$$

Bây giờ viết lại lượng cưỡng bức Z (1.38) khi thay các biến dạng bằng các đạo hàm của chuyển vị và chú ý tới các biểu thức (1.13)

$$Z = \int \left\{ 2G\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2G\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2G\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \right.$$
$$\left. G\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + G\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + G\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right\} dV\ -\int\{2(f_x-b_x)\delta u +$$
$$2\left(f_y-b_y\right)\delta v + 2(f_z-b_z)\delta w\}dV\ \to min \qquad (1.40)$$

Trong (1.40) có ba hàm ẩn u,v và w cần xác định. Lấy biến phân lần lượt theo ba hàm ẩn sẽ nhận được ba phương trình.

Trước tiên lấy biến phân theo u ,ta có

$$\delta Z = \int\{2G\frac{\partial u}{\partial x}\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + G\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\delta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) +$$
$$G\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\delta\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) - (f_x-b_x)\delta u\}dV = 0 \qquad (1.41)$$

Phương trình (1.41) là phương trình của nguyên lý công ảo. Như vậy, nguyên lý Gauss trong trường hợp liên kết giữ lại được dẫn về nguyên lý công ảo.

Trong (1.41) vẫn chứa các biến phân của đạo hàm cho nên tính biến phân tiếp tục phương trình này, ta nhận được

$$\delta Z = \int \left\{-2G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) - \frac{2G\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right) - G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}\right) - \right.$$
$$\left. G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}\right)\right\}\delta u dV - \int(f_x-b_x)\delta u dV = 0 \qquad (1.42)$$

Phương trình (1.42) chỉ chứa biến phân δu. Tích phân trên sẽ bằng không khi hàm dưới dấu tích phân bằng không và vì δu là bất kỳ nên sau khi sắp xếp lại ta có:

$$G\nabla^2 u + \frac{G}{1-2\nu}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}) \text{-+} b_x = f_x = \varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Ở đây $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ (toán tử Laplace).

Bằng cách tính tương tự đối với hai hàm ẩn v và w, sẽ có thêm hai phương trinh nữa, cả ba phương trình được viết lại như sau

$$\begin{aligned} G\nabla^2 u + \frac{G}{1-2\nu}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right) + b_x = m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ G\nabla^2 v + \frac{G}{1-2\nu}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}\right) + b_y = m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ G\nabla^2 w + \frac{G}{1-2\nu}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + b_z = m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \qquad (1.43)$$

Các phương trình (1.43) được gọi là các phương trình Navier.

Các trình bày ở trên là ví dụ sử dụng trực tiếp nguyên lý cực trị Gauss, so sánh hệ cần tính với chính hệ đó khi hoàn toàn tự do (khi giải phóng các liên kết) , để nhận được hệ phương trình vi phân chuyển động của vật thể đàn hồi đồng nhất đẳng hướng, hệ phương trình Navier.

Sử dụng các lo-xo ảo và nguyên lý Gauss với cách làm tương tự sẽ nhận được các phương trình chuyển động của dầm , khung, thanh, tấm chịu uốn v. v…

*b.**Các phương trình truyền sóng***

Lý thuyết biến dạng của môi trường liên tục cho thấy rằng có thể phân tích biến dạng chung của phân tố thành biến dạng thể tích và chuyển động quay của phân tố như là vật cứng.

Các ứng suất pháp $\sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_z$ gây ra biến dạng thể tích có hai thành phần, thành phần do các biến dang dài $\varepsilon_{x,}\ \varepsilon_y,\ \varepsilon_z$ với độ cứng 2G và thành phần do hệ số Poisson gây ra với độ cứng $\frac{2G\nu}{1-2\nu}$. Như vậy, độ cứng của biến dạng thể tích θ sẽ là $2G + \frac{2G\nu}{1-2\nu} = 2G\frac{1-\nu}{1-2\nu}$.

Các ứng suất tiếp $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ gây ra các biến dạng quay với độ cứng G làm cho phân tố quay như vật cứng quanh các trục x, y và z . Các góc quay xác định bằng

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right);\ \omega_y = \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z})\ ;\ \omega_z = \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) \qquad (1.44)$$

Phân tố có 4 chuyển động, biến dạng thể tích và 3 chuyển động quay.

Trước tiên, xét biến dạng thẻ tích. Khi tách phân tố khỏi môi trường và nếu như phân tố không có liên kết với môi trường, phân tố hoàn toàn tự do, thì

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=0,\ \frac{\partial\theta}{\partial y}=0,\ \frac{\partial\theta}{\partial z}=0$$

Ngược lại ,khi có liên kết với môi trường thì

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}\neq 0,\ \frac{\partial\theta}{\partial y}\neq 0,\ \frac{\partial\theta}{\partial z}\neq 0$$

Lượng cưỡng bức sẽ là

$$Z=\int\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu}\left\{\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2\right\}dV\ \ \rightarrow min$$

Phương trình Euler của phiếm hàm trên bằng

$$\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right)=0$$

Trường hợp có lực quán tính ta có

$$\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right)=\rho\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$$

Đặt

$$v_p=\sqrt{\frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}} \tag{1.45}$$

Ta có $$v_p{}^2\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} \tag{1.46}$$

Ở đây v_p có thứ nguyên là vận tốc. Phương trình (1.46) là phương trình truyền sóng thể tích với vân tốc truyền sóng v_p, được gọi là phương trình truyền sóng dọc (kéo, nén) theo các phương khác nhau, quỹ đạo chuyển động của các hạt trùng với phương tuyền sóng.

Xét chuyển động quay quanh trục x , ω_x . Khi tách phân tố khỏi môi trường và nếu như phân tố không có liên kết với môi trường, phân tố hoàn toàn tự do, thì

$$\frac{\partial\omega_x}{\partial x}=0,\ \frac{\partial\omega_x}{\partial y}=0,\ \frac{\partial\omega_x}{\partial z}=0$$

Ngược lại ,khi có liên kết với môi trường thì

$$\frac{\partial\omega_x}{\partial x}\neq 0,\ \frac{\partial\omega_x}{\partial y}\neq 0,\ \frac{\partial\omega_x}{\partial z}\neq 0$$

Lượng cưỡng bức sẽ là

$$Z = \int G\,\{(\frac{\partial \omega_x}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \omega_x}{\partial y})^2 + \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial z}\right)^2\} dV \quad \rightarrow min$$

Phương trình Euler của phiếm hàm trên sẽ là

$$G\,\left(\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial z^2}\right) = 0$$

Trường hợp có lực quán tính ta có

$$G\,\left(\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial z^2}\right) = \rho\,\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial t^2}$$

Đặt

$$v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \qquad (1.47)$$

Ta có

$$v_s\,\left(\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial t^2} \qquad (1.48)$$

Ở đây v_s có thứ nguyên là vận tốc. Phương trình (1.48) được goi là phương trình truyền sóng cắt với vân tốc truyền sóng cắt v_s theo phương x, quỹ đạo chuyển động của các hạt nằm trong mặt phẳng (yz).

Thực hiện các bước tính tương tự đối với chuyển động quay quanh trục y và trục z nhận được hai phương trình truyền song sau.

Phương trình

$$v_s\,\left(\frac{\partial^2 \omega_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial t^2} \qquad (1.49)$$

được gọi là là phương trình truyền sóng cắt với vân tốc truyền sóng cắt v_s theo phương y, quỹ đạo chuyển động của các hạt nằm trong mặt phẳng (xz).

Phương trình

$$v_s\,\left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial t^2} \qquad (1.50)$$

được gọi là là phương trình truyền sóng cắt với vân tốc truyền sóng *cắt* v_s theo phương z, quỹ đạo chuyển động của các hạt nằm trong mặt phẳng (xy).

Như vậy đã nhận được 4 phương trình truyền sóng và hiểu rằng mỗi phương trình truyền sóng là phương trình chuyển động của một dạng chuyển động (biến dạng) trong không gian của cơ hệ môi trường liên tuc. Thiết nghĩ, chỉ với nguyên lý Gauss mới có cách xây dựng phương trình truyền sóng như trên.

1.5.3. Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss (tiếp theo)

Ở trên trình bày phương pháp nguyên lý cực trị Gauss khi so sánh hệ cần tính với chính hệ đó khi giải phóng liên kết, hoặc nói cách khác, *so sánh chuyển động của phân tố của môi trường liên tục với chuyển động của chất điểm*. Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss còn cho phép *so sánh hai cơ hệ môi trường liên tục khác nhau khi cả hai cùng chịu lực tác dụng giống nhau.*

Trở lại với bài toán đàn hồi 3 chiều trình bày ở trên. Cho hai vật thể đàn hồi, đồng nhất, đẳng hướng chịu tác dụng của lực khối $b_{x,}, b_y, b_z$. Giả sử biết được lời giải của một hệ là các chuyển vị u_0, v_0, w_0 thì để tính chuyển vị của hệ chưa biết $u\,, v\,, w$ ta xây dựng lượng cưỡng bức bằng cách so sánh chuyển động của hai hệ :

$$Z = \int\{ \tfrac{1}{2G}(2G\varepsilon_x - 2G_0\varepsilon_{0x})^2 + \tfrac{1}{2G}(2G\varepsilon_y - 2G_0\varepsilon_{0y})^2 + \tfrac{1}{2G}(2G\varepsilon_z - 2G_0\varepsilon_{0z})^2 + \tfrac{1-2\nu}{2G\nu}(\tfrac{2G\nu}{1-2\nu}\theta - \tfrac{2G_0\nu}{1-2\nu}\theta_0)^2 + \tfrac{1}{G}(G\varepsilon_{xy} - G_0\varepsilon_{0xy})^2 + \tfrac{1}{G}(G\varepsilon_{xz} - G_0\varepsilon_{0xz})^2 + \tfrac{1}{G}\left(G\varepsilon_{yz} - G_0\varepsilon_{0yz}\right)^2\}dV \quad \rightarrow \quad min \qquad (1.51)$$

Lượng cưỡng bức (1.51) viết cho trường hợp các thông số đàn hồi của hai hệ khác nhau.

Thay các biến dạng bằng các đạo hàm của chuyển vị ta có

$$Z = \int\{ \frac{1}{2G}(2G\frac{\partial u}{\partial x} - 2G_0\frac{\partial u_0}{\partial x})^2 + \frac{1}{2G}(2G\frac{\partial v}{\partial y} - 2G_0\frac{\partial v_0}{\partial y})^2 + \frac{1}{2G}(2G\frac{\partial w}{\partial z} - 2G_0\frac{\partial w_0}{\partial z})^2 +$$
$$\frac{1-2\nu}{2G\nu}\left(\frac{2G\nu}{1-2\nu}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right] - \frac{2G_0\nu}{1-2\nu}\left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z}\right]\right)^2 + \frac{1}{G}\left(G\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right] - G_0\left[\frac{\partial u_0}{\partial y}\frac{\partial v_0}{\partial x}\right]\right)^2 +$$
$$\tfrac{1}{G}\left(G\left[\tfrac{\partial u}{\partial z} + \tfrac{\partial w}{\partial x}\right] - G_0\left[\tfrac{\partial u_0}{\partial z} + \tfrac{\partial w_0}{\partial x}\right]\right)^2 + \tfrac{1}{G}\left(G\left[\tfrac{\partial v}{\partial z} + \tfrac{\partial w}{\partial y}\right] - G_0\left[\tfrac{\partial v_0}{\partial z} + \tfrac{\partial w_0}{\partial y}x\right]2\right)^2\}dV$$

Phiếm hàm trên chứa 3 đại lượng biến phân $\delta u,\ \delta v,\ \delta w$ sẽ cho ta 3 phương trình cân bằng theo chiều x, chiều y và chiều z.

Lấy biến phân theo chuyển vị u, sẽ có

$$\delta Z = \int\{\left(G\frac{\partial u}{\partial x} - G_0\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\delta\frac{\partial u}{\partial x} + (\frac{2G\nu}{1-2\nu}[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}] - \frac{2G_0\nu}{1-2\nu}[\frac{\partial u_0}{\partial x}$$

$$+\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z}])\delta\frac{\partial u}{\partial x} + \left(G\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right] - G_0\left[\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right]\right)\delta\frac{\partial u}{\partial y} + (G\left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right] -$$

$$G_0\left[\frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right])\delta\frac{\partial u}{\partial z}\}dV = 0 \qquad (1.52)$$

Phương trình (1.52) là phương trình của nguyên lý công ảo. Như vậy, nguyên lý cực trị Gauss trong trường hợp liên kết giữ được dẫn về nguyên lý công ảo.

Lấy biến phân tiếp phương trình này ta nhận được

$$\delta Z = \int\{-\left(2G\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2G_0\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right)\delta u - (\frac{2G\nu}{1-2\nu}[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}] -$$

$$\frac{2G_0\nu}{1-2\nu}[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial z}])\delta u - (G\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right] - G_0[\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} +$$

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}])\delta u$$

$$(G\left[\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right] - G_0\left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial z}\right])\delta u\}dV = 0$$

Sau khi rut gọn, viết được

$$G\nabla^2 u + \frac{G}{1-2\nu}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right) =$$

$$= G_0\nabla^2 u_0 + \frac{G_0}{1-2\nu}(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial z}) \qquad (1.53a)$$

Cách làm tương tự đối với chuyển vị v và w ta có

$$G\nabla^2 v + \frac{G}{1-2\nu}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial z\partial y}\right)$$

$$= G_0\nabla^2 v_0 + \frac{G_0}{1-2\nu}(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial z\partial y}) \qquad (1.53b)$$

$$G\nabla^2 w + \frac{G}{1-2\nu}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}\right)$$

$$= G_0\nabla^2 w_0 + \frac{G_0}{1-2\nu}(\frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y\partial z}) \qquad (1.53c)$$

Các phương trình trên chỉ ra rằng có thể tìm các hàm ẩn u, v, w theo các hàm đã biết u_0, v_0, w_0 và bởi vì các vế phải của ba phương trình lần lượt bằng các lực tác dụng, ở đây là các lực khối $b_{x,}, b_y, b_z$ như giả thiết, nên các hàm ẩn tìm được cũng thỏa mãn lực tác dụng đã cho. Khi giải hệ phương trình vi phân (1.53) cần thỏa mãn các điều kiện biên về chuyển vị và biến dạng của hệ chưa biết.

Cũng có thể dung ứng suất làm ẩn. Gọi $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ là các hàm ẩn ứng suất của bài toán và $\sigma_{0x}, \sigma_{0y}, \sigma_{0z}, \tau_{0xy}, \tau_{0xz}, , \tau_{0yz}$ là các hàm ứng suất đã biết của một hệ. Như đã biết, trong trường hợp liên kết giữ nguyên lý Gauss dẫn về nguyên lý công ảo, ta có

$$Z = \int\Big\{ (\sigma_x - \sigma_{0x})\delta\varepsilon_x + \big(\sigma_y - \sigma_{0y}\big)\delta\varepsilon_y + (\sigma_z - \sigma_{0z})\delta\varepsilon_z + \big(\tau_{xy} - \tau_{0xy}\big)\delta\varepsilon_{xy} + (\tau_{xz} - \tau_{0xz})\delta\varepsilon_{xz} + \big(\tau_{yz} - \tau_{0yz}\big)\delta\varepsilon_{yz}\Big\}dV \rightarrow min \quad (1.54)$$

Thay các biến dạng bằng các đạo hàm của chuyển vị ta có

$$Z = \int\{(\sigma_x - \sigma_{0x})\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + (\sigma_y - \sigma_{0y})\delta(\frac{\partial v}{\partial y}) + (\sigma_z - \sigma_{0z})\delta\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) + \big(\tau_{xy} - \tau_{0xy}\big)\delta\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + (\tau_{xz} - \tau_{0xz})\delta\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + (\tau_{yz} - \tau_{0yz})\delta(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y})\}dV \rightarrow min$$

Phương trình Euler của phiếm hàm trên là

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_{0x}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{0xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{0xz}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_{0y}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{0xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{0yz}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \frac{\partial \sigma_{0z}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{0xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{0yz}}{\partial y} \quad (1.55)$$

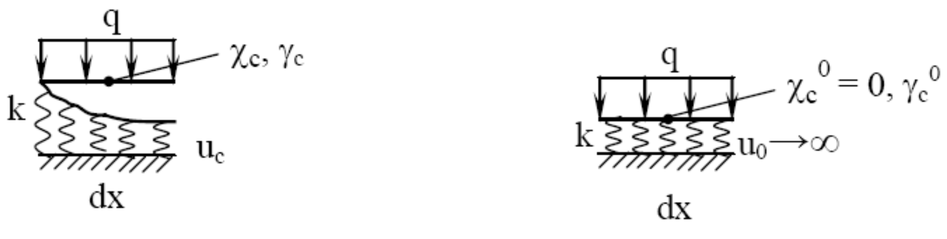
Các phương trình (1.55) chỉ ra rằng có thể xác định trường ứng suất của hệ chưa biết qua trường ứng suất của hệ đã biết và bởi vì trường ứng suất của hệ đã biết cân bằng với ngoại lực tác dụng cho nên trường ứng suất của hệ chưa biết tìm được ,theo phương trình trên, cũng cân bằng với ngoại lực. Khi giải hệ phương trình vi phân (1.55) cần chú ý thỏa mãn các điều kiện biên về ứng suất của hệ chưa biết.

Chúng ta biết trong cơ học môi trường liên tục, đàn hồi tuyến tính có những lời giải giải tích của một số bài toán như : trường ứng suất trong không gian vô hạn (lời giải Kelvin) và trong nửa không gian vô hạn (lời giải Mindlin) khi chịu tác dụng của lực tập trung đơn vị nằm trong môi trường, trường ứng suất động lực học cuả không gian vô hạn chịu tác dụng của lực xung đơn vị nằm trong môi trường [ ] v.v…. Có thể sử dụng các lời giải trên để nghiên cứu trường ứng suất và biến dạng cũng như lời giải động lực học của hệ đàn hồi nhiều lớp , của vật thể đàn hồi hữu hạn v.v… Trong cơ học công trình ta có lời giải giải tích của dầm vô hạn và tấm vô hạn nằm trên nền Winkler …. Có thể dung các lời giải này để tìm lời giải của tấm hữu hạn và dầm hữu hạn v.v…

Phương pháp so sánh hai hệ khi chúng chịu lực tác dụng giống nhau là phương pháp mới trong cơ học nói chung và trong cơ học công trình nói riêng.

1.5.4. Sử dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss thiết lập phương trình vi phân cân bằng của dầm

Xét dầm chịu tải trọng phân bố đều q, độ cứng uốn của dầm EJ=const và có lien kết bất kỳ, hình a. Hệ so sánh được chọn là một dầm không có liên kết có tải trọng và độ cứng uốn như dầm đang xét, hình b.



(a) **(b)**

Hình 1.4. Phân tố dầm a, phân tố tự do b.

Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, lượng cưỡng bức của bài toán được viết như sau:

$$Z = \int_0^l EJ\left(-\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx + \int_0^l k(y-y_0)^2 dx \to min \qquad \text{(a)}$$

Trong đó: $k = \lim\limits_{y_0\to\infty}\frac{q}{y_0}$ là độ cứng của lò xo

Từ điều kiện cực trị của dầm, ta có:

$$\delta Z = \delta\left\{\left[\int_0^l EJ\left(-\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \int_0^l k(y-y_0)^2\right]dx\right\} = 0$$

$$= \delta\left\{\left[\int_0^l EJ\left(-\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \int_0^l \lim_{y_0\to\infty}\frac{q}{y_0}(y-y_0)^2\right]dx\right\} = 0$$

$$= \delta\left\{\left[\int_0^l EJ\left(-\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \int_0^l \lim_{y_0\to\infty} q\left(\frac{y^2}{y_0} - 2y + y_0\right)\right]dx\right\} = 0$$

Vì ta tìm giá trị min nên khi $y_0 \to \infty$ thì $\frac{y^2}{y_0} \to 0$ do đó

$\left(\frac{y^2}{y_0} - 2y + y_0\right) \rightarrow -2y$

Do đó ta có:

$$\delta Z = \delta\left\{\left[\int_0^l EJ\left(-\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \int_0^l q(-2y)\right]dx\right\} = 0$$

Hay: $\quad -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[2EJ\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\right] + 2q = 0$

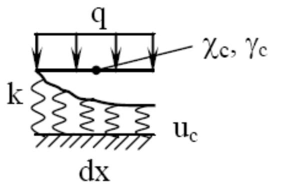
$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - q = 0 \qquad \text{(b)}$$

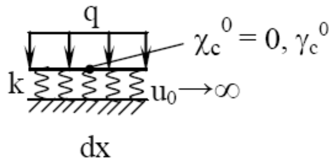
Phương trình (b) chính là phương trình vi phân đường độ võng của dầm

1.5.5. Sử dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss thiết lập phương trình vi phân dao động của dầm

a. Dao động tự do khi không kể lực cản

Xét dầm có khối lượng phân bố đều m, lực quán tính tác dụng trên dầm là fm, độ cứng uốn của dầm EJ=const và có liên kết bất kỳ, hình a. Hệ so sánh được chọn là một dầm không có liên kết có tải trọng và độ cứng uốn như dầm đang xét, hình b.





Hình 1.5.

Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, lượng cưỡng bức của bài toán được viết như sau:

$$Z = \int_0^l EJ\left(-\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx + \int_0^l k(y - y_0)^2 dx \rightarrow min \qquad \text{(a)}$$

Trong đó:

$k = \lim\limits_{y_0 \rightarrow \infty} \frac{q}{y_0}$ là độ cứng của lò xo

Từ điều kiện cực trị của dầm, ta có:

$$\delta Z = \delta\left\{\left[\int_0^l EJ\left(-\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \int_0^l k(y - y_0)^2\right]dx\right\} = 0$$

$$\delta Z = \delta\left\{\left[\int_0^l EJ\left(-\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \int_0^l \lim_{y_0\to\infty}\frac{f_m}{y_0}(y-y_0)^2\right]dx\right\} = 0$$

$$\delta Z = \delta\left\{\left[\int_0^l EJ\left(-\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \int_0^l \lim_{y_0\to\infty} f_m\left(\frac{y^2}{y_0} - 2y + y_0\right)\right]dx\right\} = 0$$

Vì ta tìm giá trị min nên khi $y_0 \to \infty$ thì $\frac{y^2}{y_0} \to 0$ do đó $\left(\frac{y^2}{y_0} - 2y + y_0\right) \to -2y$

Do đó ta có:

$$\delta Z = \delta\left\{\left[\int_0^l EJ\left(-\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \int_0^l f_m(-2y)\right]dx\right\} = 0$$

Hay: $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[2EJ\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\right] - 2f_m = 0$

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + f_m = 0$$

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{(b)}$$

Phương trình (b) là phương trình vi phân dao động tự do của dầm chịu uốn

b. Dao động cưỡng bức khi không kể lực cản

Khi dầm chịu tải phân bố đều q. Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, lượng cưỡng bức của bài toán được viết như sau:

$$Z = \int_0^l EJ\left(-\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx + \int_0^l k(y-y_0)^2 dx \to min \qquad \text{(c)}$$

Trong đó: $k = \lim_{y_0\to\infty}\frac{q-f_m}{y_0}$, là độ cứng của lò xo

Từ điều kiện cực trị của dầm, ta có:

$$\delta Z = \delta\left\{\left[\int_0^l EJ\left(-\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \int_0^l k(y-y_0)^2\right]dx\right\} = 0$$

$$= \delta\left\{\left[\int_0^l EJ\left(-\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \int_0^l \lim_{y_0\to\infty}\frac{q-f_m}{y_0}(y-y_0)^2\right]dx\right\} = 0$$

$$= \delta\left\{\left[\int_0^l EJ\left(-\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \int_0^l \lim_{y_0\to\infty}(q-f_m)\left(\frac{y^2}{y_0} - 2y + y_0\right)\right]dx\right\} = 0$$

Vì ta tìm giá trị min nên khi $y_0 \to \infty$ thì $\frac{y^2}{y_0} \to 0$ do đó

$\left(\frac{y^2}{y_0} - 2y + y_0\right) \to -2y$

Do đó ta có:

$$\delta Z = \delta\left\{\left[\int_0^l EJ\left(-\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \int_0^l (q - f_m)(-2y)\right]dx\right\} = 0$$

Hay: $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[2EJ\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\right] + 2f_m - 2q = 0$

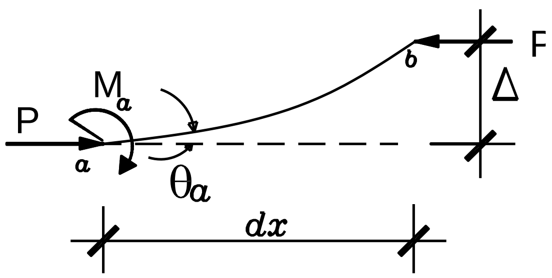
$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + f_m - q = 0$$

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = q \qquad \text{(d)}$$

Phương trình (d) là phương trình vi phân dao động cưỡng bức của dầm khi không kể đến lực cản.

1.5.6. Sử dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss thiết lập phương trình vi phân cân bằng của thanh thẳng chịu uốn dọc

Xét thanh thẳng chịu tải trọng nén dọc trục P, độ cứng uốn của dầm EJ=const và có liên kết bất kỳ. Tách khỏi hệ một phân tố có chiều dài dx, khi phân tố chịu nén có biến dạng uốn như hình a.



Hình 1.6

Tại đầu (a) có nội lực M gây ra biến dạng uốn

$$\chi = -EJ\frac{d^2y}{dx^2}$$

Giả sử tại đầu (b) có chuyển vị Δ,

Tại đầu (a) có ngoại lực M_P=P Δ gây ra góc xoay $\varphi = \frac{dy}{dx}$, vì φ nhỏ nên $tg\varphi = \varphi \rightarrow \Delta = \varphi dx = \frac{dy}{dx}dx$, ta có: $M_P = P\Delta = P\frac{dy}{dx}dx$

Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, lượng cưỡng bức của bài toán được viết như sau:

$$Z = \int_0^l M\left(-\frac{d^2y}{dx^2}\right)dx - \int_0^l P\frac{dy}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)dx \rightarrow min \qquad \text{(e)}$$

Từ điều kiện cực trị của dầm, ta có:

$$\delta Z = -\delta \left\{ \left[\int_0^l M \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) + \int_0^l P \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) \right] dx \right\} = 0$$

Hay: $-\frac{d^2}{dx^2}[M - P] = 0$

$$-\frac{d^2M}{dx^2} + P\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

Thay $\chi = -EJ\frac{d^2y}{dx^2}$ vào phương trình trên ta có

$$EJ\frac{d^4y}{dx^4} + P\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \qquad \text{(f)}$$

Phương trình (b) chính là phương trình ổn định của thanh thẳng chịu uốn dọc

Như vậy, từ phương pháp nguyên lý cực trị Gauss ta cũng nhận được các phương trình vi phân cân bằng của dầm, phương trình dao động tự do, dao động cưỡng bức của thanh khi không kể tới lực cản và phương trình ổn định của thanh chịu uốn dọc, tương tự như các nguyên lý khác.

CHƯƠNG 2
LÝ THUYẾT DẦM CHỊU UỐN

2.1.Lý thuyết dầm Euler – Bernoulli [1]

Dầm chịu uốn là cấu kiện có kích thước tiết diện nhỏ hơn nhiều lần so với chiều dài của nó, trên mặt cắt ngang dầm tồn tại hai thành phần nội lực là mômen uốn M và lực cắt Q. Tải trọng tác dụng lên dầm nằm trong mặt phẳng có chứa đường trung bình của dầm và thẳng góc với trục dầm. Dưới đây ta xét hai trường hợp dầm chịu uốn thuần túy phẳng và uốn ngang phẳng.

2.1.1.Dầm chịu uốn thuần túy phẳng

Dầm chịu uốn thuần túy phẳng là dầm mà trên mọi mặt cắt ngang dầm chỉ có một thành phần nội lực là mômen uốn nằm trong mặt phẳng quán tính chính trung tâm.

Ứng suất trên mặt cắt ngang

Giả sử dầm có mặt cắt ngang hình chữ nhật (bxh) chịu uốn thuần túy như hình… Ta tiến hành thí nghiệm sau:

Trước khi dầm chịu lực ta vạch lên mặt ngoài dầm những đường thẳng song song và vuông góc với trục dầm tạo nên những ô vuông, hình….. Sau khi dầm biến dạng hình….ta thấy rằng những đường song song với trục dầm trở thành những đường cong, những đường thẳng vuông góc với trục dầm vẫn thẳng và vuông góc với trục dầm. Từ đó người ta đưa ra hai giả thiết sau đây:

-Mặt cắt ngang dầm ban đầu phẳng và vuông góc với trục dầm, sau biến dạng vẫn phẳng và vuông góc với trục dầm (giả thiết về mặt cắt ngang, giả thiết Bernoulli).

-Trong quá trình biến dạng các thớ dọc của dầm không ép lên nhau và không đẩy xa nhau (giả thiết về các thớ dọc).

Ngoài ra khi tính toán dầm ta còn dựa vào các giả thiết sau:

- Vật liệu có tính chất lien tục, đồng nhất và đẳng hướng
- Biến dạng của vật thể là biến dạng đàn hồi và đàn hồi tuyệt đối.
- Biến dạng của vật thể do ngoại lực gây ra là nhỏ so với kích thước của chúng.
- Tuân theo nguyên lý độc lập tác dụng

Từ hình… ta nhận thấy rằng: khi dầm bị uốn thì các thớ trên co lại, các thớ dưới giãn ra. Do vậy khi chuyển từ thớ co sang thớ giãn sẽ có thớ không co, không giãn. Thớ này gọi là thớ trung hòa. Tập hợp các thớ trung hòa gọi là lớp trung hòa, giao của lớp trung hòa với mặt cắt ngang gọi là đường trung hòa. Nếu ta xét một mặt cắt ngang nào đó của dầm thì sau khi bị uốn nó sẽ cho hình dạng như hình…Đường trung hòa của mặt cắt ngang là một đường cong. Vì chuyển vị của các điểm trên mặt cắt ngang của dầm là bé, nên ta coi rằng hình dáng mặt cắt ngang dầm không thay đổi sau khi biến dạng. Khi đó đường trung hòa của mặt cắt ngang là đường thẳng và giả sử lấy trục ox trùng với đường trung hòa.

Xét biến dạng của đoạn dầm dz được cắt ra khỏi dầm bằng hai mặt cắt 1-1 và 2-2. Sau biến dạng hai mặt cắt này làm với nhau một góc $d\varphi$ và thớ trung hòa có bán kính cong là ρ (hình…). Theo tính chất của thớ trung hòa ta có:

$$dz = \rho d\varphi \qquad (2.1)$$

Ta xét biến dạng của thớ ab cách thớ trung hòa một khoảng là y, ta có:

$$\overline{ab_t} = dz = \rho d\varphi; \ \overline{ab_s} = dz = (\rho + y)d\varphi \qquad (2.2)$$

Từ (2.2) ta suy ra:

$$\varepsilon_z = \frac{\overline{ab_s} - \overline{ab_t}}{\overline{ab_t}} = \frac{(\rho+y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi}; \qquad (2.3)$$

Xét ứng suất tại điểm bất kỳ A(x,y) trên mặt cắt ngang nào đócủa dầm (hình..). Trong đó trục oy là trục đối xứng của mặt cắt ngang, trục ox trùng với đường trung hòa của mặt cắt ngang.

Ta tách ra tại A một phân tố hình hộp bằng các mặt cắt song song với các mặt tọa độ (hình…). Khi đó theo giả thiết thứ nhất thì góc của phân tố sau biến dạng không đổi, nên ta suy ra trên các mặt của phân tố không có ứng suất tiếp. Mặt khác theo giả thiết thứ hai thì trên các mặt của phân tố song song với trục Z không có ứng suất pháp, nghĩa là $\sigma_x = \sigma_x = 0$. Do vậy trên các mặt của phân tố chỉ có ứng suất pháp σ_z và theo định luật Hooke ta có:

$$\sigma_z = E\varepsilon_z = E\frac{y}{\rho}; \qquad (2.4)$$

Dầm chịu uốn thuần túy nên ta có

$$N_z = \int_F \sigma_z dF = 0 \quad (2.5)$$

$$M_x = \int_F \sigma_z y dF = 0 \quad (2.6)$$

Thay (2.4) vào (2.5) ta được

$$N_z = \int_F E\frac{y}{\rho}dF = \frac{E}{\rho}\int_F ydF = 0 = \frac{E}{\rho}S_x = 0 \quad (2.7)$$

$S_x = 0$ nghĩa là ox là trục quán tính chính trung tâm. Vì y là trục đối xứng nên suy ra oxy là trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt ngang. Thay (2.4) vào (2.6) ta được:

$$M_x = \int_F \sigma_z y dF = \frac{E}{\rho}\int_F E\frac{y^2}{\rho}dF = \frac{E}{\rho}J_x \quad (2.8)$$

Suy ra: $\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x}$ (2.9) EJ_x là độ cứng của dầm khi uốn. Thay (2.9) vào (2.4) ta có:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{EJ_x}y \quad (2.10)$$

Từ công thức (2.10) ta có các nhận xét:

- Luật phân bố của σ_z trên mặt cắt ngang dầm là bậc nhất đối với y.
- Những điểm trên mặtcắt ngang có cùng tung độ y (nghĩa là những điểm nằm trên đường thẳng song song với trục trung hòa x) sẽ có trị số bằng nhau và nó tỉ lệ với khoảng cách từ các điểm đó tới trục trung hòa.
- Những điểm nằm trên trục trung hòa y=0 có trị số $\sigma_z = 0$. Những điểm xa trục trung hòa nhất sẽ có trị số ứng suất lớn nhất và bé nhất.

2.1.2.Dầm chịu uốn ngang phẳng

Dầm chịu uốn ngang phẳng là dầm mà các mặt cắt ngang của nó có các thành phần nội lực là lực cắt Q_y và mômen uốn M_x nằm trong mặt phẳng quán tính chính trung tâm của dầm.

Ứng suất trên mặt cắt ngang

Xét dầm chịu uốn ngang phẳng như trên hình…Ta quan sát thí nghiệm sau:

Trước khi dầm chịu lực ta vạch lên mặt ngoài dầm những đường thẳng song song và vuông góc với trục dầm tạo nên những ô vuông, hình….. Sau khi dầm biến dạng hình….ta thấy rằng những đường thẳng song song với trục dầm trở thành những đường cong nhưng vẫn còn song song với trục dầm, những đường thẳng vuông góc với trục dầm không còn thẳng và vuông góc với trục dầm nữa hình…. Điều đó chứng tỏ mặt cắt ngang dầm sau biến dạng bị vênh đi. Nếu tại điểm A bất kỳ của dầm ta tách ra một phân tố bằng các mặt song song với các mặt tọa độ thì sau khi biến dạng các góc vuông của phân tố không còn vuông nữa, nghĩa là phân tố có biến dạng góc. Suy ra trên các mặt phân tố sẽ có ứng suất tiếp. Trong lý thuyết đàn hồi người ta đã chứng minh được rằng trên các mặt của phân tố có các ứng suất sau:

$\sigma_y, \sigma_z, \tau_{zy,}\ \tau_{yz,}$. Nhưng thực tế cho thấy rằng ứng suất pháp σ_y, rất bé so với các thành phần khác nên ta bỏ qua, nghĩa là khi dầm chịu uốn ngang phẳng thì trên mặt cắt ngang dầm có hai thành phần ứng suất là: ứng suất pháp σ_z, và ứng suất tiếp hình…

a.Ứng suất pháp σ_z:

Trong mục trước nhờ giả thiết Bernoulli về mặt cắt ngang phẳng ta đã đưa tới công thức tính ứng suất pháp σ_z trên mặt cắt ngang dầm là:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{EJ_x} y \qquad (2.11)$$

Trong trường hợp dầm bị uốn ngang phẳng thì sau biến dạng mặt cắt ngang dầm bị vênh đi, nghĩa là không còn phẳng nữa. Như vậy mọi lập luận để đưa tới công thức (2.11) để tính ứng suất pháp σ_z không phù hợp nữa. Tuy nhiên trong lý thuyết đàn hồi người ta đã chứng minh được rằng đối với dầm chịu uốn ngang phẳng ta vẫn có thể dùng công thức (2.11) để tính ứng suất σ_z mà sai số không lớn lắm.

b.Ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang dầm chịu uốn ngang phẳng (công thức Durapski):

Giả sử có dầm mặt cắt ngang là hình chữ nhật hẹp (b<h) chịu uốn ngang phẳng hình…

Ta xét ứng suất tiếp tại điểm bất kỳ A(x,y) trên mặt cắt ngang 1-1 nào đó của dầm. Qua điểm A ta kẻ đường thẳng song song với trục ox cắt biên của mặt cắt tại B và C, cắt trục oy tại D. Trước hết ta xét ứng suất tiếp tại B,C và D.

Ứng suất tiếp tại C là $\tau_{c,}$ giả sử có phương bất kỳ trong 1-1.

Phân $\tau_{c,}$ thành hai thành phần: τ_{zx}^c và τ_{zy}^c. Nhưng theo định luật đối ứng của ứng suất tiếp thì ta có: $\tau_{zx}^c = \tau_{xz}^c = 0$ ($\tau_{xz}^c = 0$ vì mặt bên dầm theo giả thiết không có tải trọng tác dụng) hình….

Do vậy $\tau_c = \tau_{zy}^c$ có phương song song với oy. Do tính chất đối xứng ta suy ra $\tau_B = \tau_{zy}^B = \tau_{zy}^C$.

Cũng do tính chất đối xứng và giả thiết hình chữ nhật hẹp nên $\tau_D = \tau_{yz}^D = \tau_{yz}^B = \tau_{yz}^C$.

Do giả thiết hình chữ nhật hẹp nên CD=b/2 càng nhỏ mà ứng suất tiếp tại C và D chỉ có phương y. Do vậy ta suy ra là ứng suất tiếp tại A chỉ có phương y: $\tau_A = \tau_{yz}^A$. Đồng thời:

$$\tau_{yz}^A = \frac{\tau_{yz}^C + \tau_{yz}^D}{2} = \tau_{yz}^C = \tau_{yz}^D$$

Như vậy ứng suất tiếp của các điểm trên đường thẳng BC qua A chỉ có phương y và trị số bằng nhau. Nghĩa là ứng suất tiếp trên BC phân bố đều với cường độ là τ_{zy}. Để tính τ_{zy} ta cắt một đoạn dầm dz bằng hai mặt cắt 1-1 và 2-2 hình….Sau đó cắt đoạn dầm dz bằng một mặt phẳng qua điểm A song song với trục Z. Mặt phẳng này chia đoạn dầm dz ra làm hai phần. Nếu gọi BC = bc và dt (BCEF)=Fc thì từ điều kiện cân bằng của phân dưới của đoạn dz hình…ta suy ra:

$$\sum Z = \int_{Fc} \sigma_z^{(1)} dF - \int_{Fc} \sigma_z^{(2)} dF + \tau_{yz} bcdZ = 0$$

Mặt khác ta lại có

$$\sigma_z^{(1)} = \frac{M_x}{J_x} y \qquad \text{(a)}$$

$$\sigma_z^{(2)} = \frac{M_x + dM_x}{J_x} y \qquad \text{(b)}$$

Thay (b) vào (a) ta được:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{1}{bc.dz}\left[\int_{Fc} \frac{M_x + dM_x}{J_x} ydF - \int_{Fc} \frac{M_x}{J_x} ydF\right] =$$

$$= \frac{1}{J_x.bc}\frac{dM_x}{dz}\int_{Fc} ydF \qquad \text{(c)}$$

Ta có: $\frac{dM_x}{dz} = Q_y$; $\int_{Fc} ydF = S_x^c$ (d)

S_x^c: gọi là mômen tĩnh của phần diện tích Fc đối với trục x. Thay (d) vào (c) ta suy ra:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^c}{J_x.bc} \qquad (2.12)$$

Trong đó bc gọi là bề rộng của mặt cắt ngang qua điểm cần tính ứng suất A. Công thức (2.12) gọi là công thức Durapski. Từ công thức này và theo điều kiện cân bằng của phần thanh ở trên ta suy ra là τ_{yz} cùng chiều với trục z, τ_{zy} cùng chiều với Q_y. Nghĩa là dấu của τ_{zy} và Q_y như nhau. Do vậy ở đây chỉ cần tính trị số của τ_{zy} theo (2.12) còn dấu của nó được xác định từ biểu đồ lực cắt Q_y.

c. Luật phân bố ứng suất tiếp τ_{zy} đối với mặt cắt hình chữ nhật:

Giả sử mặt cắt ngang dầm chịu uốn ngang phẳng là hình chữ nhật bề rộng b, chiều cao h. Ta đi tìm luật phân bố của ứng suất tiếp τ_{zy} đối với mặt cắt nếu lực cắt tại mặt cắt này là Q_y.

$$S_x^c = \left(\frac{h}{2} - y\right).b\left[y + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y\right)\right] = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

Suy ra: $\tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^c}{J_x.bc} = \frac{Q_y \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{J_x.b} = \frac{Q_y}{2J_x}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$ (2.13)

Từ (2.13) ta nhận thấy rằng: Luật phân bố τ_{zy} trên mặt cắt là parabol bậc hai đối với y. Với y=0 (những điểm nằm trên trục trung hòa ox) thì:

$$\tau_{zy}(0) = \tau_{max} = \frac{Q_y h^2}{8.J_x} = \frac{3Q_y}{2F} \quad (2.14)$$

$y = \pm\frac{h}{2}$ $thì$ $\tau_{zy} = 0$

Từ đó ta có thể vẽ được biểu đồ τ_{zy} cho mặt cắt như hình…

2.2. Lý thuyết dầm xét biến dạng trượt ngang

Lý thuyết xét biến dạng trượt trong dầm do Timoshenko đưa ra và thường được gọi là lý thuyết dầm Timoshenko. Khi xây dựng lý thuyết này vẫn sử dụng giả thiết tiết diện phẳng của lý thuyết dầm thông thường, tuy nhiên do có biến dạng trượt, trục dầm sẽ xoay đi một góc và không còn thẳng góc với tiết diện dầm nữa.

Lý thuyết xét biến dạng trượt được dùng phổ biến trong phương pháp phần tử hữu hạn hiện nay là dùng hàm độ võng y và hàm góc xoay θ do momen uốn gây ra là hai hàm chưa biết. Trong trường hợp này biến dạng trượt tại trục trung hòa được xác định như sau, ví dụ như [28, trg 5].

$$\gamma = \frac{dy}{dx} - \theta \qquad (2.1)$$

Từ đó ta có các công thức xác định M và Q

$$M = -EJ\left(\frac{d\theta}{dx}\right)$$

$$Q = \frac{GF}{\alpha}\left[-\frac{dy}{dx} + \theta\right] \qquad (2.2)$$

Trong các công thức trên EJ là độ cứng uốn, GF là độ cứng cắt của tiết diện, G là mođun trượt của vật liệu, F là diện tích tiết diện, α là hệ số xét sự phân bố không đều của ứng suất tiếp trên chiều cao tiết diện.

Các tác giả [28, trg 5] cho rằng khi môđun trượt G→∞ thì từ (2.2) suy ra

$$\theta = \frac{dy}{dx}$$

nghĩa là trở về lý thuyết dầm không xét biến dạng trượt: Góc xoay của đường độ võng là do mômen gây ra. Theo nghiên cứu sinh lập luận trên không đúng bởi vì khi thỏa mãn phương trình (2.3) thì từ phương trình (2.2) suy ra lực cắt Q =0, dẫn về trường hợp uốn thuần túy của dầm. Vì lý do đó nên lý thuyết xét biến dạng trượt dùng y và θ làm ẩn không hội tụ về lý thuyết dầm thông thường và khi áp dụng vào bài toán tấm, nó cũng không hội tụ về lý thuyết tấm thông thường (lý thuyết tấm Kierchhoff, [28, trg 71], [25, trg 404]. Phương hướng chung để khắc phục thiếu sót vừa nêu là bổ sung thêm các nút xét lực cắt Q trong các phần tử dầm hoặc phần tử tấm [25, 26, 28] hoặc dùng phần tử có hàm dạng là đa thức bậc thấp (bậc nhất) [31,trg 126]. Vấn đề phần tử có hàm dạng không bị hiện tượng biến dạng trượt bị khóa, shear locking, vẫn đang được tiếp tục nghiên cứu, [32]. Tình hình chung hiện nay về lý thuyết xét biến dạng trượt trong dầm và tấm là như trên.

Khác với các tác giả khác, trong [19, 20] lý thuyết xét biến dạng trượt được xây dựng trên cơ sở hai hàm chưa biết là hàm độ võng y và hàm lực cắt Q. Trong trường hợp này biến dạng trượt xác định theo

$$\gamma = \frac{\alpha Q}{GF} \qquad (2.4)$$

α là hệ số xét sự phân bố không đều của ứng suất cắt tại trục dầm.

Góc xoay do momen uốn sinh ra bằng hiệu giữa góc xoay đường độ võng với góc xoay do lực cắt gây ra.

$$\theta = \frac{dy}{dx} - \gamma = \frac{dy}{dx} - \frac{\alpha Q}{GF} \qquad (2.5)$$

Momen uốn sẽ bằng

$$M = -EJ\frac{d\theta}{dx} = -EJ\left(\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF}\frac{dQ}{dx}\right) \qquad (2.6)$$

Biến dạng uốn χ

$$\chi = -\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF}\frac{dQ}{dx} \qquad (2.7)$$

Dựa trên lý thuyết này ta sẽ xây dựng phương trình cân bằng và các điều kiện biên của dầm như sau. Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss ta viết phiếm hàm lượng cưỡng bức (chuyển động) như sau: (giả sử dầm có lực phân bố đều q).

$$Z = \int_0^l M\chi dx + \int_0^l Q\gamma dx - \int_0^l qy dx \rightarrow min \qquad (2.8)$$

Các hàm độ võng y, hàm biến dạng trượt γ và hàm biến dạng uốn χ là các đại lượng biến phân, nghĩa là điều kiện cần và đủ để hệ ở trạng thái cân bằng là

$$\delta Z = \int_0^l M\delta\chi dx + \int_0^l Q\delta\gamma dx - \int_0^l q\delta y dx = 0$$

Hay

$$\delta Z = \int_0^l M\delta\left[-\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF}\frac{dQ}{dx}\right]dx + \int_0^l Q\delta\left[\frac{\alpha Q}{GF}\right]dx - \int_0^l q\delta[y]dx = 0 \qquad (2.9)$$

Trong phương trình tích phân (2.9) hai đại lượng cần tìm là y(x) và Q(x) do đó có thể tách ra thành hai phương trình sau:

$$\int_0^l M\delta\left[-\frac{d^2y}{dx^2}\right]dx - \int_0^l q\delta[y]dx = 0 \qquad (2.10)$$

$$\int_0^l M\delta\left[\frac{\alpha}{GF}\frac{dQ}{dx}\right]dx + \int_0^l Q\delta\left[\frac{\alpha Q}{GF}\right]dx = 0 \qquad (2.11)$$

Lấy tích phân từng phần phương trình (2.10)

$$\int_0^l M\delta\left[-\frac{d^2y}{dx^2}\right]dx = -\int_0^l Md\left(\delta\left[\frac{dy}{dx}\right]\right)dx$$

$$= -M\delta\left[\frac{dy}{dx}\right]\Big|_0^l + \int_0^l \frac{dM}{dx}\delta\left[\frac{dy}{dx}\right]dx$$

Tích phân từng phần thành phần cuối của biểu thức trên ta có

$$\int_0^l M\delta\left[-\frac{d^2y}{dx^2}\right]dx = -M\delta\left[\frac{dy}{dx}\right]\Big|_0^l + \frac{dM}{dx}\delta[y]\Big|_0^l - \int_0^l \frac{d^2M}{dx^2}\delta[y]dx$$

Phương trình (2.10) sau khi lấy tích phân từng phần có dạng

$$-M\delta\left[\frac{dy}{dx}\right]\Big|_0^l + \frac{dM}{dx}\delta[y]\Big|_0^l - \int_0^l \left(\frac{d^2M}{dx^2} + q\right)\delta[y]dx = 0 \qquad (2.12)$$

Bởi vì các đại lượng $\delta[y]$ và $\delta\left[\frac{dy}{dx}\right]$ là nhỏ và bất kỳ nên từ (2.12) ta có

$$\frac{d^2M}{dx^2} + q = 0 \qquad (2.12a)$$

$$-M\delta\left[\frac{dy}{dx}\right]\Big|_0^l = 0 \qquad (2.12b)$$

$$\frac{dM}{dx}\delta[y]\Big|_0^l = 0 \qquad (2.12c)$$

Tích phân từng phần phương trình (2.11):

$$\int_0^l M\delta\left[\frac{\alpha}{GF}\frac{dQ}{dx}\right]dx = \int_0^l Md\left(\delta\left[\frac{\alpha Q}{GF}\right]\right)dx$$

$$= M\left(\delta\left[\frac{\alpha Q}{GF}\right]\right)\Big|_0^l - \int_0^l \frac{dM}{dx}\delta\left[\frac{\alpha Q}{GF}\right]dx$$

Sau khi lấy tích phân từng phần

$$M\left(\delta\left[\frac{\alpha Q}{GF}\right]\right)\Big|_0^l + \int_0^l \left(-\frac{dM}{dx} + Q\right)\delta\left[\frac{\alpha Q}{GF}\right]dx = 0 \qquad (2.13)$$

Bởi vì biến phân $\delta\left[\frac{\alpha Q}{GF}\right]$ là nhỏ và bất kỳ nên từ (2.13) ta có

$$-\frac{dM}{dx} + Q = 0 \qquad (2.13a)$$

$$M\delta\left[\frac{\alpha Q}{GF}\right]\Big|_0^l = 0 \qquad (2.13b)$$

Sử dụng công thức (2.6), hai phương trình vi phân cân bằng của dầm (2.12a) và (2.13a) có dạng.

$$EJ\left[\frac{d^4y}{dx^4}-\frac{\alpha}{GF}\frac{d^3Q}{dx^3}\right]=q \qquad (2.14a)$$

$$EJ\left[\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{\alpha}{GF}\frac{d^2Q}{dx^2}\right]=Q \qquad (2.15a)$$

Phương trình (2.14a) và (2.15a) có thể viết lại dưới dạng

$$EJ\frac{d^4y}{dx^4}-\frac{\alpha h^2}{6}\frac{d^3Q}{dx^3}=q \qquad (2.14b)$$

$$EJ\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{\alpha h^2}{6}\frac{d^2Q}{dx^2}=Q \qquad (2.15b)$$

Để nhận được các điều kiện biên của dầm thì kết hợp (2.12b) và (2.13b) ta có

$$M\delta\left[-\frac{dy}{dx}+\frac{\alpha Q}{GF}\right]\Big|_0^l=0 \qquad (2.16)$$

Chú ý tới phương trình (2.13a), phương trình (2.12c) viết lại như sau

$$Q\delta[y]|_0^l=0 \qquad (2.17)$$

Tóm lại, lý thuyết xét biến dạng trượt cho ta hai phương trình vi phân (2.14) và (2.15) đối với hai hàm y và Q: phương trình (2.14) là phương trình vi phân cân bằng giữa nội lực và ngoại lực, phương trình (2.15) là phương trình liên hệ giữa mômen uốn và lực cắt. Các phương trình (2.16) và (2.17) là các điều kiện biên ở hai đầu thanh.

Ta xét điều kiên biên (2.16)

Nếu như tại x=0 hoặc x=l, góc xoay θ do mômen uốn gây ra có biến phân

$$\delta\theta=\delta\left[-\frac{dy}{dx}+\frac{\alpha Q}{GF}\right]\Big|_0^l\neq 0 \;\; thì\; M|_0^l=0\rightarrow liên\; kết\; khớp \qquad (2.18a)$$

Nếu như góc xoay θ không có biến phân

$$\delta\theta=\delta\left[-\frac{dy}{dx}+\frac{\alpha Q}{GF}\right]\Big|_0^l=0 \;\; thì\; M|_0^l bất\; kỳ\rightarrow liên\; kết\; ngàm \qquad (2.18b)$$

Đối với điều kiện (2.17), nếu như chuyển vị y tại x=0 hoặc x=l có biến phân.

$\delta[y]|_0^l \neq 0$ $thì$ $Q|_0^l = 0, \rightarrow$ $không$ $có$ $gối$ $tựa$ (2.18c)

Nếu như

$\delta[y]|_0^l = 0$ $thì$ $Q|_0^l bất$ $kỳ, \rightarrow$ $liên$ $kết$ $gối$ $tựa$ (2.18b)

Khi không xét biến dạng trượt, G→∞ hoặc h→0 thì các phương trình (2.14) và (2.15) cũng như các phương trình về điều kiện biên (2.16) và (2.17) hoặc (2.18) đều dẫn về lý thuyết dầm Euler- Bernoulli. Cho nên có thể nói lý thuyết xét biến dạng trượt nêu trên (xem hàm y và hàm Q là hai hàm chưa biết) là lý thuyết đầy đủ về dầm.

Cuối cùng cần lưu ý rằng khi xét tính liên tục về góc xoay giữa hai đoạn dầm là nói đến tính liên tục của góc xoay do mômen gây ra xác định theo công thức (2.5), không phải liên tục của góc xoay $\frac{dy}{dx}$.

Hệ số α

Hệ số α là hệ số tập trung ứng suất cắt tại trục dầm. Đối với tiết diện chữ nhật α=1.5, đối với tiết diện tròn α=4/3. Tuy nhiên, khi xét biến dạng trượt các trị trên thay đổi tương ứng bằng 1.2 và 1.11 [23, trg 132, 52, trg 492]. Trong tính toán sau này tác giả dùng hệ số α=1.2 đối với tiết diện chữ nhật. Phương pháp chung để xác định hệ số α là cân bằng tổng theo chiều cao dầm công của ứng suất cắt thực hiện trên biến dạng trượt tại trục dầm, vấn đề này đã được nhiều tác giả nghiên cứu [23] [25, trg 400].

CHƯƠNG 3.

PHƯƠNG PHÁP SAI PHÂN HỮU HẠN TÍNH TOÁN DẦM CHỊU UỐN

3.1. Phương pháp sai phân hữu hạn

Phương pháp sai phân hữu hạn là một phương pháp tính số cổ điển ra đời từ lâu, nhưng từ khi có máy tính điện tử thì phương pháp này mới chiếm một vị trí quan trọng và được áp dụng rộng rãi để giải các bài toán phức tạp trong kỹ thuật nói chung và lĩnh vực kết cấu nói riêng.

Nội dung của phương pháp sai phân hữu hạn là thay thế một hàm xác định trong một miền liên tục bằng một hàm lưới gồm một tập hợp rời rạc hữu hạn các điểm, ở đó đạo hàm được thay thế bằng các tỷ sai phân. Điều kiện biên hoặc điều kiện ban đầu cũng được xấp xỉ sai phân, và nhờ đó bài toán biên của phương trình vi phân được thay thế bởi một hệ phương trình đại số tuyến tính. Trong phần này tác giả giới thiệu những nội dung cơ bản của phương pháp sai phân hữu hạn và cách vận dụng nó để giải các bài toán trong kết cấu.

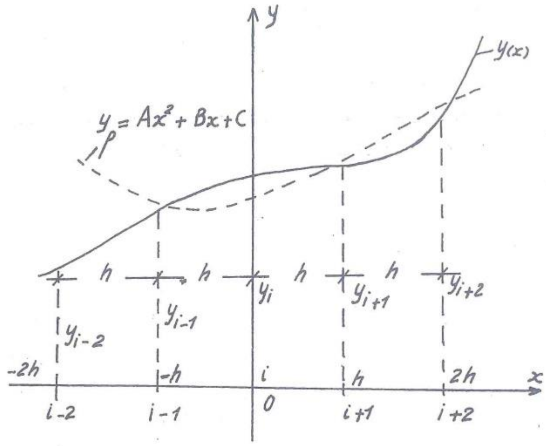
3.1.1.Biểu diễn đạo hàm các cấp bằng phương pháp sai phân hữu hạn

3.1.1.1.Biểu diễn đạo hàm bằng parabôn nội suy

Phương pháp đơn giản nhất để biểu thị gần đúng đạo hàm của một hàm y(x) là sự thay thế hàm y bằng một parabôn đi qua một số điểm nhất định và tại các điểm đó đạo hàm của parabôn có giá trị gần đúng đạo hàm của hàm y.

Chẳng hạn tìm đạo hàm cấp hai y" của y khi biết giá trị của y trên 3 điểm liên tiếp i -1, i, i+1 có khoảng cách h đều nhau trên trục hoành với những giá trị tương ứng của hàm là y_{i-1}, y_i, y_{i+1} (hình 1-1) ta viết phương trình parabôn bậc 2 đi qua 3 điểm trên:

$$y_p = Ax^2 + Bx + C \qquad (a)$$



Hình 3.1. Parabon nội suy

Có thể chọn điểm i làm gốc toạ độ, tức là:

$$y(-h) = y_{i-1} = Ah^2 - Bh + C$$

$$y(0) = y_i = C$$

$$y(h) = y_{y+1} = Ah^2 - Bh + C$$

Từ đó rút ra:

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = 2Ah^2$$

Đạo hàm cấp hai y" của y tại điểm i có giá trị gần đúng là:

$$y_1^{"} = \frac{1}{h^2}\left(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}\right) \tag{3.1}$$

Tương tự chúng ta có thể tìm được đạo hàm cấp cao đối với các phương trình parabôn nội suy cấp cao được chọn sao cho đi qua các điểm đối xứng hoặc không đối xứng đối với điểm i.

Chẳng hạn đối với parabôn bậc 3:

$$y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

qua 4 điểm i - 1, i, i + 1, i + 2 (hình 1-1) và cũng chọn i làm gốc toạ độ ta có:

$$y(-h) = y_{i-1} = Ah^3 - Bh^2 + Cx + D$$

$$y(0) = y_i = D$$

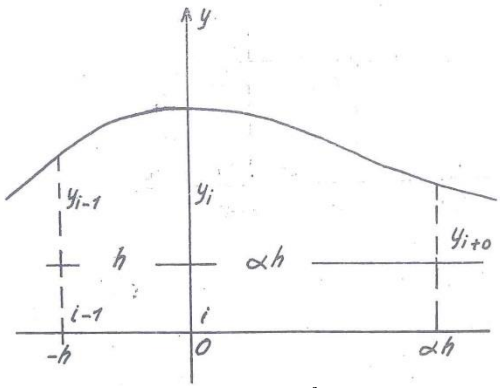
$$y(h) = y_{i+1} = Ah^3 - Bh^2 + Ch + D$$

$$y(2h) = y_{i+2} = 8Ah^3 + 4Bh^2 + 2Ch + D$$

Loại trừ B, C, D từ các phương trình trên ta nhận được giá trị 6A là đạo hàm cấp 3 của parabôn (b). Kết quả ta sẽ có giá trị gần đúng của đạo hàm cấp ba y''' như sau:

$$y_i''' = \frac{1}{h^3}\left(-y_{i-1} + 3y_i - 3y_{i+1} + y_{i+2}\right) \qquad (3.2)$$

Bây giờ tay hãy thành lập biểu thức sai phân đối với các điểm có khoảng cách không đều nhau. Chẳng hạn tìm đạo hàm cấp hai tại điểm i của hàm y khi biết giá trị của nó tại 3 điểm có khoảng cách là h và αh (hình 3.2)



Hình 3.2. Các điểm không cách đều

Phương trình parabôn đi qua 3 điểm trên như sau:

$y(-h) = y_{i-1} = Ah^2 - Bh + C$

$y(0) = y_1 = C$

$y(\alpha h) = y_{i+1}$

$\alpha^2 Ah^2 + \alpha Bh + C$

khử B, C và từ đạo hàm $y_i''' = 2A$ của parabôn, ta có:

$$y_i'' = \frac{1}{h^2}\cdot\frac{2}{\alpha(1+\alpha)}\left[\alpha y_{i-1} - (1+\alpha)y_i + y_{i+1}\right] \qquad (3.3)$$

rõ ràng nếu α = 1 ta lại nhận được công thức (3.1). Các đạo hàm cấp cao cũng được thực hiện một cách tương tự.

3.1.1.2. Biểu diễn đạo hàm bằng phép triển khai Taylor

Việc biểu diễn các đạo hàm bằng phương pháp sai phân sẽ dẫn đến một sai số nhất định, sai số đó sẽ triệt tiêu dần khi khoảng sai phân h dần tới không. Để làm rõ diều này ta sẽ đi tìm một công thức gần đúng khác của đạo hàm, trong đó sai số phụ thuộc vào h qua việc triển khai Taylo.

Chuỗi Taylo của y(x + h) trên trục Ox được viết như sau:

$$y(x + h) = y(x) + \frac{h}{1!}y'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(x) + \ldots$$

hoặc tổng quát hơn ta có:

$$y_{i+1} = y(x + h) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h^m}{m!} y_{(x)}^{(m)} \quad (3.4)$$

Trong đó $y^{(m)}$ là đạo hàm cấp m của y. Thay các ký hiệu ở hình (3.2) vào quan hệ (3.4) ta được một triển khai dạng chuỗi cho các điểm x + αh và (x - h):

$$\left.\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \alpha h y_i^{'} + \frac{\alpha^2 h^2}{2} y_i^{''} + \frac{\alpha^3 h^3}{6} y_i^{'''} + \frac{\alpha^4 h^4}{24} y_i^{IV} + ... \\ y_{i-1} &= y_i - h y_i^{'} + \frac{h^2}{2} y_i^{''} - \frac{h^3}{6} y_i^{'''} + \frac{h^4}{24} y_i^{IV} + ... \end{aligned}\right\} \quad (3.5)$$

Từ trên rút ra:

$$y_{i+1} - y_{i-1} = (\alpha + 1) h y_i^{'} + (\alpha^2 - 1) \frac{h^2}{2} y_i^{''} + (\alpha^3 + 1) \frac{h^3}{6} y_i^{'''} + ...$$

Kết quả:

$$y_i^{'} = \frac{1}{(\alpha + 1) h} (y_{i+1} - y_{i-1}) + (1 - \alpha) \frac{h}{2} y_i^{''} - \frac{(1 + \alpha^3)}{(1 + \alpha)} . \frac{h^2}{6} y_i^{'''} + ...$$

Như vậy biểu thức gần đúng của đạo hàm cấp một là:

$$y_i^{'} = \frac{1}{(\alpha + 1) h} (y_{i+1} - y_{i-1}) \quad (3.6)$$

Với sai số:

$$\varepsilon = (1 - \alpha) \frac{h}{2} y_i^{''} - \frac{(1 + \alpha^3)}{(1 + \alpha)} \frac{h^2}{6} y_i^{'''} + ...$$

Ta thấy ε sẽ tiến tới không cùng một lúc với h nếu $\alpha \neq 1$ và với h^2 nếu $\alpha = 1$.

Nếu khử $y_i^{''}$ trong hai phương trình (3.5) ta được:

$$y_i^{'} = \frac{1}{\alpha(\alpha + 1) h} \left[y_{i+1} - (1 - \alpha^2) y_i - \alpha^2 y_{i-1} \right] \quad (3.7)$$

Sai số của nó sẽ tiến tới không cùng một lúc với h^2 khi α là bất kỳ và biểu thức (3.7) sẽ trở lại như quan hệ (3.6) khi α = 1

Khử $y_i^{'}$ trong các phương trình (3.5) ta nhận được:

$$y_i^{''} = \frac{1}{h^2} \frac{2}{. \alpha(\alpha + 1)} \left[\alpha y_{i-1} - (1 + \alpha) y_i + y_{i+1} \right] + (1 - \alpha) \frac{h}{3} y_i^{'''} - \frac{1 + \alpha^3}{1 + \alpha^2} \frac{h^2}{12} y_i^{IV} \quad (3.8)$$

Ta thấy biểu thức (3.8) đối với $y_i^{''}$ có sai số tiến tới không cùng một lúc với h khi $\alpha \neq 1$ và cùng với h^2 khi $\alpha = 1$.

Bằng phương pháp tương tự, ta có thể thiết lập những biểu thức sai phân khác nhau và sai số của chúng cũng xác định một cách dễ dàng.

Ví dụ: Có thể xác định giá trị gần đúng của $y_i^{''}$:

$$y_i^{''} = \frac{1}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)h^2}\left[\alpha\left(\alpha^2-1\right)y_{i-2} - 2\left(\alpha^3-4\alpha\right)y_{i-1} + \left(\alpha^3-7\alpha-6\right)y_i + 6y_{i+1}\right]$$

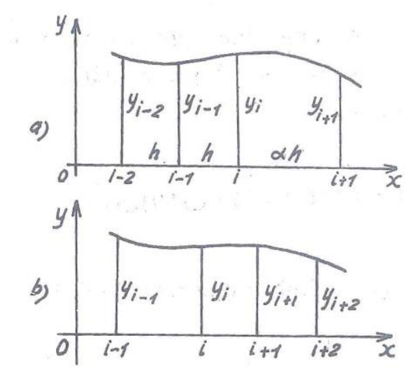
(3.9)

Các điểm i - 2 và i - 1, i và i - 1 cách nhau một đoạn bằng h, các điểm i và i + 1 có khoảng cách αh. Hình (3.3a) có sai số tiến dần tới không cùng một lúc với h^2. Biểu thức tương tự đối với các điểm trong hình (3.3b) sẽ là:

$$y_i^{''} = \frac{1}{\alpha'(\alpha'+1)(\alpha'+2)h^2}\left[6\alpha y_{i-1} + \left(\alpha'^3-7\alpha'-6\right)y_i - 2\left(\alpha'^3-4\alpha'\right)y_{i+1} + \alpha'\left(\alpha'^2-1\right)y_{i+2}\right]$$

(3.10)

Với sai số cũng tiến dần tới không cùng một lúc với h^2



Hình 3.3. Kết hợp khoảng cách đều nhau và khoảng cách không đều nhau

Quá trình thiết lập các đậòhm dưới dạng sai phân và xác định sai số của chúng có thể được khái quát như sau. Giả sử chúng ta muốn biểu diễn $y_i^{''}$ qua các giá trị của y tại các điểm i - 1, i, i + 1. Quan hệ tìm được sẽ có dạng:

$$y_i^{''} = a_{i-1}y_{y-1} + a_i y_i + a_{i+1}y_{i+1} \tag{3.11}$$

Trong đó a_{i-1}, a_i, a_{i+1} là những hằng số được xác định như sau:

- Triển khai y_{i+1} và y_{i-1} theo quan hệ (2.23) đem thay chúng vào (3.11) và sau khi nhóm lại sẽ được như sau:

$$\begin{aligned} y_i^{''} &= \left(a_{i-1}+a_i+a_{i+1}\right)y_i + h\left(-a_{i-1}+\alpha a_{i+1}\right)y_i^{'} + \frac{h^2}{2}\left(a_{i-1}+\alpha^2 a_{i+1}\right)y_i^{''} \\ &+ \frac{h^3}{6}\left(-a_{i-1}+\alpha^3 a_{i+1}\right)y_i^{'''} + \frac{h^4}{24}\left(a_{i-1}+\alpha^4 a_{i+1}\right)y_i^{IV} + \dots \end{aligned} \tag{3.12}$$

Nếu triệt tiêu các hệ số của y'_i và y_i sau đó cân bằng các hệ số của y''_i ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_{i-1} + a_i + a_{i+1} = 0 \\ -a_{i-1} + \alpha a_{i+1} = 0 \\ a_{i-1} + \alpha^2 a_{i+1} = 1 \end{cases}$$

Từ đó rút ra:

$$a_{i-1} = \frac{2}{(\alpha+1)h^2}; \quad a_i = -\frac{2}{\alpha h^2}; \quad a_{i+1} = \frac{2}{\alpha(\alpha+1)h^2}$$

Thay các giá trị của a_{i-1}, a_i, a_{i+1} vào các thành phần còn lại trong dấu ngoặc của (3.12) cho ta sai số ε_2 của biểu thức (3.11)

Để xấp xỉ cùng một đạo hàm y''_i ta có thể đưa thêm nhiều điểm lân cận như i + 2, i - 2. Tương tự như (3.11) ta có thể viết:

$$y''_i = a_{i-2}y_{i-2} + a_{i-1}y_{i-1} + a_iy_i + a_{i+1}y_{i+1} + a_{i+2}y_{i+2}$$

Sau khi thực hiện các phép tính trung gian ta được:

$$y''_i = \frac{1}{12h^2}\left(y_{i-2} - 16y_{i-1} + 30y_i - 16y_{i+1} + y_{i+2}\right) + \varepsilon'_2$$

Trong đó sai số

$$\varepsilon'_2 = \frac{h^4}{90}y_i^{IV} + \frac{h^5}{1008}y_i^{VIII} + \ldots$$

tiến dần tới không cùng một lúc với h^4.

Ta thấy trong trường hợp mà khoảng chia cách đều nhau, phương pháp triển khai Taylo có quan hệ chặt chẽ với phương pháp sai phân hữu hạn.

Nhưng trong thực tế người ta có thể áp dụng nhiều phương pháp đơn giản hơn để xấp xỉ sai phân các đạo hàm và sai số tương ứng của chúng.

Dưới đây sẽ trình bày các phương pháp đó.

3.1.1.3. Sai phân lùi (sai phân lệch trái)

Đạo hàm tại một điểm i nào đó dưới dạng sai phân như sau (hình 3.1)

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \tag{3.13}$$

$$\left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right)_i = \frac{(y_{i+1} - y_i)/h - (y_i - y_{i-1})/h}{h}$$

$$= \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \qquad (3.14)$$

Bằng phương pháp này ta có thể biểu diễn sai phân cho đạo hàm cấp cao. Giả sử hàm y(x) được cho bởi các giá trị y_0, y_1, y_2 ...., y_{i-2}, y_{i-1}, y_i, ..., y_{n-2}, y_{n-1}, y_n tại những điểm có khoảng cách đều nhau là h.

Sai phân lùi của y tại điểm i được xác định như sau:

$$\nabla y_i \equiv y_i - y_{i-1} \qquad (3.15)$$

$$\nabla^2(y_i) = \nabla(\nabla y_i) = (y_i - y_{i-1}) - (y_{i-1} - y_{i-2}) = y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2} \qquad (3.16)$$

$$\nabla^n y_i \equiv \nabla(\nabla^{n-1} y_i) \qquad (3.17)$$

Trong đó ký hiệu ∇ là toán tử sai phân lùi.

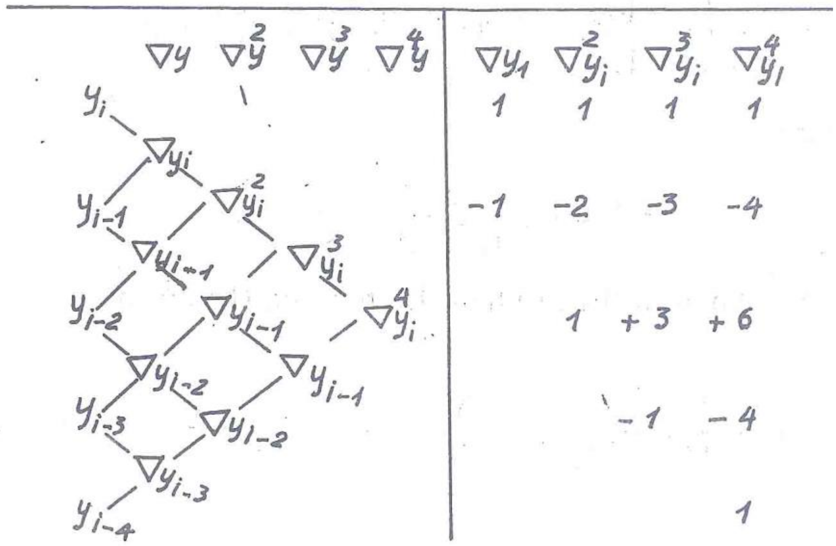
Ta có nhận xét rằng hệ số của giá trị các điểm nút được suy ra từ các hệ số của nhị thức Niutơn $(a - b)^n$

Ví dụ:

$$\nabla^3 y_i = y_i - 3y_{i-1} + 3y_{i-2} - y_{i-3} \qquad (3.18)$$

$$\nabla^4 y_i = y_i - 4y_{i-1} + 6y_{i-2} - 4y_{i-3} + y_{i-4} \qquad (3.19)$$

Tóm lại có thể thực hiện sai phân lùi liên tiếp của một hàm theo sự sắp xếp ở hình (3.4)



Hình 3.4.

Ở phần trái của hình (3.4) biểu thị trình tự sai phân liên tiếp, ví dụ:

$$\nabla^2 y_i = \nabla y_i - \nabla y_{i-1}$$

được biểu thị bởi hai đường xuất phát từ $\nabla^2 y_i$ hướng về ∇y_i và ∇_yi-1 tiếp tục ∇y_i và ∇y_{i-1} có mối liên hệ tương ứng với y_i, y_{i-1} và y_{i-1}, y_{i-2} theo quan hệ:

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1}$$

$$\nabla y_{i-1} = y_{i-1} - y_{i-2}$$

Như vậy $\nabla^2 y_i = y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}$. Ở phần bên phải của hình (3.4) các sai phân ∇y_i, $\nabla^2 y_i$,.... được biểu thị bởi các hệ số tương ứng của y_i, y_{i-1}, ...

Ví dụ: $\nabla^4 y_i = y_i - 4y_{i-1} + 6y_{i-2} - 4y_{i-3} + y_{i-4}$

Chúng ta biết rằng toán tử vi phân $D \equiv d/dx$ có thể sử dụng tượng trưng như một số (hoặc một biến) với điều kiện thoả mãn những quy tắc đại số. Do đó toán tử sai phân ∇ cũng có thể sử dụng như một số (hoặc biến), tức là thoả mãn những quy tắc đại số, cụ thể như sau:

$$\nabla(y_i + y_j) = \nabla y_i + \nabla y_j = \nabla y_j + \nabla y_i$$

$$\nabla (Cy_i) = C\nabla y_i$$

$$\nabla^m(\nabla^n y_i) = \nabla^{m+n} y_i$$

Từ tính chất này, cho phép ta biểu thị sai phan của một hàm y qua các đạo hàm liên tiếp của nó và ngược lại biểu diễn các đạo hàm qua các tỉ số sai phân liên tiếp.

Với ý nghĩa đó, ta thực hiện triển khai Taylo của y(x + h) ở lân cận của x

$$y(x + h) = y(x) + \frac{h}{1!}y'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(x) + ... \quad \text{(a)}$$

Với ký hiệu toán tử $D \equiv d/dx$ ta có thể viết:

$$y(x + h) = y(x) + \frac{h}{1!}Dy(x) + \frac{h^2}{2!}D^2y(x) + \frac{h^3}{3!}D^3y(x) + ...$$

$$= \left(1 + \frac{h}{1!}D + \frac{h^2}{2!}D^2 + \frac{h^3}{3!}D^3 + ...\right)y(x) \quad \text{(b)}$$

Ta biết rằng:

$$e^{\pm x} = 1 \pm \frac{x}{1!} \pm \frac{x^2}{2!} \pm \frac{x^3}{3!} + ...$$

như vậy toán tử vi phân từ thành phần thứ hai của (b) có thể viết tượng trưng như sau:

$$1+\frac{h}{1!}D+\frac{h^2}{2!}D^2+\frac{h^3}{3!}D^3+...=e^{hD} \quad (3.20)$$

Do đó:

$$y(x + h) = e^{hD}y(x) \quad (3.21)$$

cho $x = x_i$ và đặt $y(x_i + h) = y_{i+1}$, $y(x_i) = y_i$

quan hệ (3.21) trở thành:

$$y_{i+1} = e^{hD}y_i \quad (3.22)$$

Tương tự suy ra:

$$y(x - h) = e^{-hD}y(x) \quad (3.23)$$

hoặc
$$y_{i-1} =e^{-hD}y_i \quad (3.24)$$

Từ (3.24), biểu thức sai phân cấp một (3.15) có thể viết:

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1} = (1 - e^{-hD})y \quad (3.25)$$

Hoặc từ quan hệ (3.25) ta có:

$$\nabla y_1 = \left(\frac{hD}{1!}-\frac{h^2D^2}{2!}+\frac{h^3D^3}{3!}-\frac{h^4D^4}{4!}+...\right)y_i$$

$$= \left(1-\frac{hD}{2}+\frac{h^2D^2}{6}-\frac{h^3D^3}{24}+...\right)hDy_i \quad (3.26)$$

Quan hệ (3.26) cho ta sự triển khai tỉ sai phân bậc nhất ∇y_i dưới dạng chuỗi qua các đạo hàm tại điểm i.

Quan hệ (3.19) có thể viết dưới dạng toán tử:

$$\nabla = 1 - e^{-hD} \quad (3.27)$$

"số mũ" trong quan hệ trên có thể sử dụng để xác định giá trị của triển khai dạng chuỗi các sai phân liên tiếp của hàm số. Chẳng hạn nếu bình phương quan hệ (3.27) và sử dụng quan hệ (3.20) ta sẽ có một triển khai của sai phân cấp hai ∇^2 như sau:

$$\nabla^2 = (1 - e^{-hD})^2 = 1 + e^{2hD} - 2e^{-hD}$$

$$= 1 + \left(1-\frac{2hD}{1!}+\frac{4h^2D^2}{2!}-\frac{8h^3D^3}{3!}+\frac{16h^4D^4}{4!}-....\right)-$$

$$2\left(1-\frac{hD}{1!}+\frac{h^2D^2}{2!}-\frac{h^3D^3}{3!}+\frac{h^4D^4}{4!}-...\right)$$

Hoặc

$$\nabla^2 = h^2 D^2 - h^3D^3 + \frac{7}{12} h^4D^4 - ... \qquad (3.28)$$

cũng bằng cách tương tự ta được:

$$\nabla^3 = h^3D^3 - \frac{3}{2}h^4D^4 + \frac{5}{4}h^5D^5 - ... \qquad (3.29)$$

Bây giờ để thiết lập các biểu thức của đạo hàm của y qua các tỉ sao phân, từ (3.27) ta có thể viết:

$$e^{-hD} = 1 - \nabla \qquad (3.30)$$

lấy logarit tự nhiên của (2.48) ta có:

$$Lne^{-hD} = -hD = Ln(1 - \nabla) = -\left(\nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \frac{\nabla^4}{4} + ...\right)^{(*)}$$

$$hD = \nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \frac{\nabla^4}{4} + ... \qquad (3.31)$$

Từ (3.31) suy ra:

$$h^2D^2 = \nabla^2 + \nabla^3 + \frac{11}{12}\nabla^1 + \frac{5}{6}\nabla^5 + ...$$

$$h^3D^3 = \nabla^3 + \frac{3}{2}\nabla^1 + \frac{7}{4}\nabla^5 + ...$$

$$h^4D^4 = \nabla^4 + 2\nabla^5 + \frac{17}{6}\nabla^6 + ... \qquad (3.32)$$

$$h^5D^5 = \nabla^5 + \frac{5}{2}\nabla^6 + \frac{25}{6}\nabla^7$$

Các quan hệ (3.26), (3.27) ... (3.32) cho phép đưa đến những biểu thức sai phân đơn giản của đạo hàm và sai số của chúng.

Chẳng hạn giải phương trình (3.26), (3.27), (3.28) theo D, D^2 và D^3 ta được các quan hệ:

$$D = \frac{\nabla}{h^2} + \frac{hD^2}{2} - \frac{h^2D^3}{6} + \frac{h^3D^1}{24} - ...$$

$$D^2 = \frac{\nabla^2}{h^2} + hD^3 - \frac{7h^2D^1}{12} + ... \qquad (3.33)$$

$$D^3 = \frac{\nabla^3}{h^3} + \frac{3hD^4}{2} - \frac{5h^2D^5}{4} + ...$$

Rõ ràng nếu chỉ xét đến số hạng thứ nhất của chuỗi thì các quan hệ (3.33) có thể viết như sau:

$$Dy_i = \frac{1}{h}(y_i - y_{i-1}) + 0(h)$$

$$D^2y_i = \frac{1}{h^2}\left(y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}\right) + 0(h) \qquad (3.34)$$

$$D^3y_i = \frac{1}{h^3}\left(y_i - 3y_{i-1} + 3y_{i-2} - y_{i-3}\right) + 0(h)$$

Trong đó 0(h) là sai số "bậc của h" là tổng tất cả các số hạng còn lại trong quan hệ (3.33). Từ những kết quả trên ta thấy rằng nếu xấp xỉ đạo hàm cấp n bởi số hạng đầu tiên trong biểu thức triển khai sai phân dưới dạng chuỗi dẫn đến sai số cỡ 0(h)

Để xấp xỉ đạo hàm với sai số cấp của h^2, tức là nâng cao độ chính xác của phương pháp sai phân thì phải xét tới hai số hạng đầu tiên của chuỗi.

Như vậy, bằng việc khử h^2D^2 giữa các quan hệ (3.26) và (3.27) ta có:

$$\nabla + \frac{\nabla^2}{2} = hD - \frac{1}{3}h^3D^3 + \ldots$$

hoặc xét các quan hệ (3.15) và (3.16) ta có:

$$Dy_i = \frac{1}{2h}\left(3y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}\right) + 0\left(h^2\right) \qquad (3.35)$$

Tương tự, từ hai phương trình (3.28) và (3.29) ta có:

$$\nabla^2 + \nabla^3 = h^2D^2 - \frac{11}{12}h^4D^4 + \ldots$$

hoặc từ (3.17) và (3.18) ta được:

$$D^2y_i = \frac{1}{h^2}\left(2y_i - 5y_{i-1} + 4y_{i-2} - y_{i-3}\right) + 0\left(h^2\right) \qquad (3.36)$$

Tóm lại trong việc xấp xỉ đạo hàm nếu xét tới m số hạng đầu tiên của chuỗi sai phâ, thì công thức tương ứng dẫn đến một sai số có cấp của h^m.

Các toán tử sai phân lùi thường gặp được biểu diễn theo sơ đồ như ở hình (3.5) cùng với cấp tương ứng của sai số đạo hàm.

3.1.1.4. Sai phân tiến

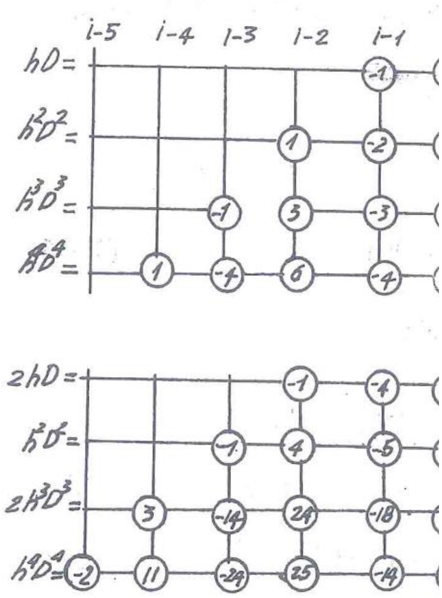
Ngược lại, với sai phân lùi, sai phân tiến ảnh hưởng tới những điểm lân cận phía phải điểm đang xét i:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \tag{3.37}$$

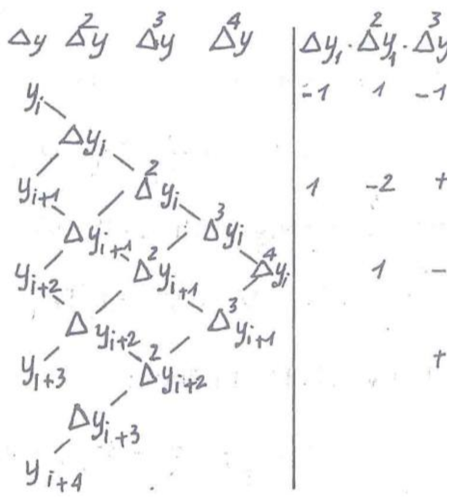
Kết hợp với quan hệ (3.22) có thể viết dưới dạng toán tử:

$$\Delta = e^{hD} - 1 \tag{3.38}$$

Tương tự như sai phân lùi, sai phân tiến liên tiếp của một đạo hàm được biểu thị như hình (3.6a).



Hình 3.6.Sơ đồ sai phân lùi



Hình 3.6.Sơ đồ sai phân tiến

Từ quan hệ (3.15) ta có thể viết:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \tag{3.39}$$

(Δ ký hiệu toán tử sai phân tiến)

$$\Delta^2 y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i \tag{3.40}$$

$$\Delta^3 y_i = y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i \tag{3.41}$$

Ta thấy rằng các hệ số của giá trị của các điểm nút trên bằng các hệ số của nhị thức Niutơn triển khai $(a - b)^n$ và được sắp xếp tương ứng ở hình (3.6b).

Quan hệ (3.37) có thể viết dưới dạng toán tử:

$$\Delta = e^{hD} - 1 \tag{3.42}$$

Để triển khai của đạo hàm dưới dạng sai phân tiến, ta giải (3.42) theo e^{hD} và lấy logarit tự nhiên hai vế phương trình ta có:

$$hD = \ln(1 + \Delta) = \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + ... \qquad (3.43)$$

Suy ra:

$$h^2D^2 = \Delta^2 - \Delta^3 + \frac{11}{12}\Delta^4 - \frac{5}{6}\Delta^5 + ...$$

$$h^3D^3 = \Delta^3 - \frac{3}{2}\Delta^4 + \frac{7}{4}\Delta^5 - ... \qquad (3.44)$$

$$h^4D^4 = \Delta^4 - 2\Delta^5 + \frac{17}{6}\Delta^6 - ...$$

$$h^5D^5 = \Delta^5 - \frac{5}{2}\Delta^6 + \frac{25}{6}\Delta^7 - ...$$

Ngược lại, bằng cách triển khai dưới dạng chuỗi các thành phần thứ hai trong quan hệ (3.26) ta có:

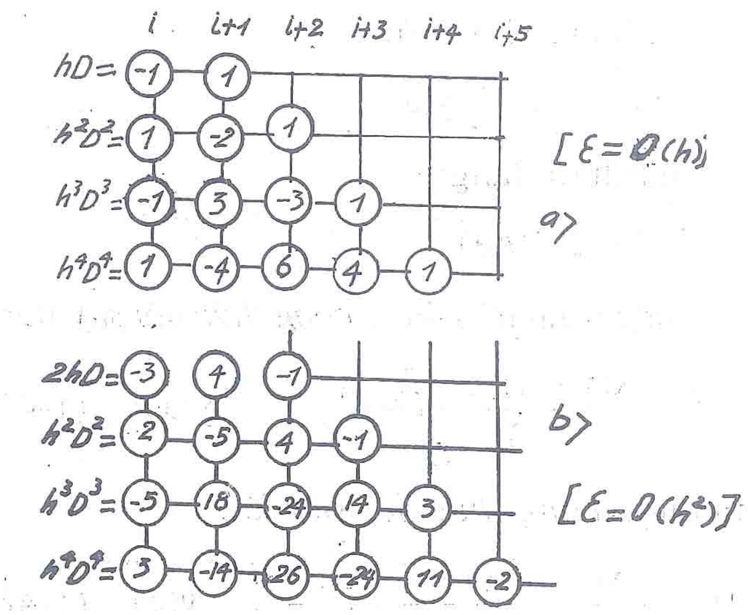
$$\Delta = hD + \frac{h^2D^2}{2!} + \frac{h^3D^3}{3!} + \frac{h^4D^4}{4!} + ... \qquad (3.45)$$

Suy ra: $$\Delta^2 = h^2D^2 + h^3D^3 + \frac{7}{12}h^4D^4 + ...$$

$$\Delta^3 = h^3D^3 + \frac{3}{4}h^4D^4 + \frac{5}{2}h^5D^5 + ... \qquad (3.46)$$

Có thể chứng minh được rằng, từ việc triển khai các đạo hàm dưới dạng chuỗi sai phân tiến với m số hạng đầu tiên sẽ dẫn đến một sai số của đạo hàm cấp của h^m.

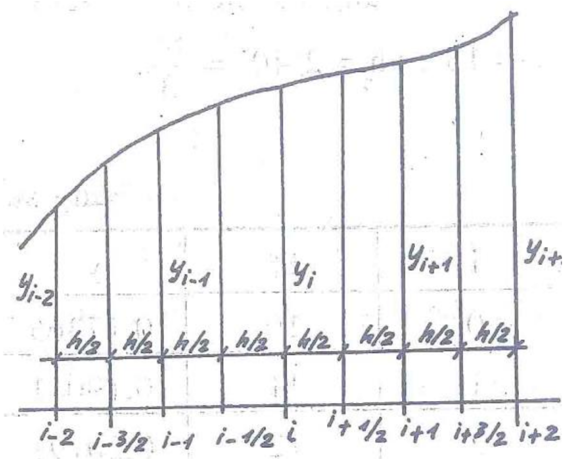
Hình (3.7) cho ta cách biểu diễn những đạo hàm thường gặp dưới dạng sai phân tiến.



Hình 3.7. Toán tử sai phân tiến

3.1.1.5. Sai phân trung tâm

Sai phân trung tâm được dùng với những điểm đối xứng với điểm đang xét i, do đó nó chính xác hơn sai phân lùi hoặc sai phân tiến, phương pháp này thông dụng trong việc giải các bài toán biên.



Hình 3.8. Sai phân trung tâm

Giả thiết hàm y(x) được xác định bởi các giá trị tại các điểm nút i có khoảng cách bằng nhau và tại trung tâm các điểm nút (hình 3.8).

Sai phân trung tâm cấp một của y(x) tại điểm i là:

$$\delta y_i = y\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) - y\left(x_i - \frac{h}{2}\right) = y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}} \tag{3.47}$$

sai phân trung tâm cấp hai:

$$\delta^2 y_i \equiv \delta(\delta y_i) = \left[y_{\left(i+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}} - y_{\left(i-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}\right] - \left[y_{\left(i+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}} - y_{\left(i-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}}\right]$$

$$= y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} \qquad (3.48)$$

Tổng quát:

$$\delta^n y_i \equiv \delta(\delta^{n-1} y_i)$$

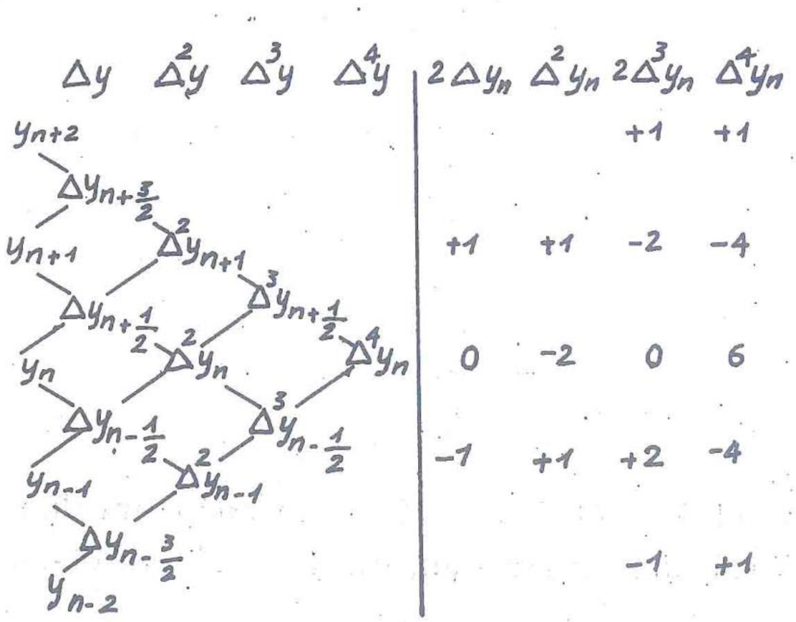
Trong đó: δ - ký hiệu toán tử sai phân trung tâm

Từ đó suy ra:

$$\delta^3 y_i = y_{i+3/2} - 3y_{i+1/2} + 3y_{i-1/2} - y_{i-3/2} \qquad (3.49)$$

Nói chung ta cũng nhận thấy rằng, hệ số của các tung độ y của biểu thức sai phân trung tâm cấp n bằng các hệ số của nhị thức Niutơn triển khai $(a - b)^n$

Hình (3.9) là bảng sắp xếp trật tự sai phân trung tâm liên tiếp.



Hình 3.9. Sai phân trung tâm

Để tránh các giá trị của y tại các điểm trung gian .... i - 3/2, i +1/2, i + 3/2,... xuất hiện trong các biểu thức sai phân trung tâm bậc lẻ, ta đưa khái niệm sai phân trung bình lẻ của điểm i, là giá trị trung bình của sai phân ở điểm i + 1/2 và i - 1/2.

Như vậy sai phân trung bình cấp một tại i được biểu thị bởi:

$$\frac{1}{2}\left(\delta y_{i+1/2} + \delta y_{i-1/2}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(y_{i+1} - y_i\right)\right] = \frac{1}{2}\left(y_{i+1} - y_{i-1}\right) \qquad (a)$$

Phương trình (a) thường được biểu thị bởi một toán tử μ, gọi là toán tử trung bình và định nghĩa như sau:

$$\mu y_i \equiv \frac{1}{2}\left(y_{i+1/2} + y_{i-1/2}\right) \tag{3.50}$$

Như vậy sai phân trung bình cấp một có thể viết:

$$\mu\delta y_i = \frac{1}{2}\left(\delta y_{i+1/2} + \delta y_{i-1/2}\right) = \frac{1}{2}\left(y_{i+1} - y_{i-1}\right) \tag{3.51}$$

Để xác định mối quan hệ giữa toán tử μ và toán tử δ ta có thể viết:

$$\mu^2 y_i = \mu\left[\frac{1}{2}\left(y_{1+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(y_{i+1} + y_i\right) + \frac{1}{2}\left(y_i + y_{i-1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left(y_{i+1} + 2y_i + y_{i-1}\right)$$

Từ quan hệ (3.48) ta có:

$$\left(1 + \frac{\delta^2}{4}\right)y_i = y_i + \frac{1}{4}\left(y_{i+1} - 2y_i + y_{i=1}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(y_{i+1} + 2y_i + y_{i-1}\right) = \mu^2 y_i$$

rút ra:

$$\mu^2 = 1 + \frac{\delta^2}{4} \tag{3.52}$$

Các quan hệ (3.48), (3.49), (3.52) cho phép tìm được mối quan hệ giữa đạo hàm và sai phân trung tâm. Thay (3.22) và (3.24) vào quan hệ (3.51) ta có

$$\mu\delta y_i = \frac{1}{2}\left(y_{i+1} - y_{i-1}\right) = \frac{1}{2}e^{hD}y_i - \frac{1}{2}e^{-hD}y_i = \frac{e^{hD} - e^{hD}}{2}y_i = sh(hD)y_i$$

hoặc dưới dạng toán tử:

$$\mu\delta = \mathrm{sh}(hD) \tag{3.53}$$

Áp dụng triển khai chuỗi Taylo của hàm sin hypecbôlic:

$$\mathrm{shx} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

vào triển khai sai phân trung bình bậc nhất trong quan hệ đạo hàm có:

$$\mu\delta = hD + \frac{h^3D^3}{6} + \frac{h^5D^5}{120} + \ldots \tag{3.54}$$

Tương tự, đối với sai phân trung tâm cấp hai ta có:

$\delta^2 y_i = e^{hD}y_i - 2y_i + e^{-hD}y_i = 2\left(\frac{e^{hD}+e^{-hD}}{2}-1\right)y_i = 2[ch(hD) - 1]y_i$

Ta biết rằng:

$$chx = 1 + \frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...$$

$$\delta^2 = h^2D^2 + \frac{h^4D^4}{12}+\frac{h^6D^6}{360}+... \qquad (3.55)$$

Kết quả tương tự có thể nhận được bằng cách triển khai dưới dạng chuỗi sai phân trung tâm cấp một thông thường (không phải trung bình)

$$\delta y_i = y_{i+1/2} - y_{i-1/2} = \left(e^{hD/2}-e^{-hD/2}\right)y_i$$

$$= 2sh\left(\frac{hD}{2}\right)y_i = \left(hD+\frac{h^3D^3}{2^23!}+\frac{h^5D^5}{2^45!}+...\right)y_i$$

Từ đó có thể viết dưới dạng tổng quát:

$$\delta^n = 2^n sh^n\left(\frac{hD}{2}\right) \qquad (3.56)$$

Trong trường hợp n = 2 ta sẽ nhận được quan hệ như (3.55). Tích số trong các quan hệ (3.54) và (3.55) sẽ có dạng triển khai của sai phân trung bình cấp 3:

$$\mu\delta^3 = h^3D^3+ \frac{h^5D^5}{4}+\frac{h^7D^7}{40}+... \qquad (3.57)$$

Từ (3.55) tìm được sai phân trung tâm cấp 4:

$$\delta^4 = h^4D^4+ \frac{h^6D^6}{6}+\frac{h^8D^8}{80}+... \qquad (3.58)$$

Ngược lại, để nhận được một số triển khai đạo hàm cấp một trong các quan hệ sai phân trung tâm, chúng ta giải phương trình (3.53) theo hD:

$$hD = argsh(\mu\delta)$$

Áp dụng chuỗi Taylo của hàm argshx

$$argshx = x - \frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}-...$$

ta nhận được:

$$hD = \mu\delta - \frac{\mu^3\delta^3}{6} + \frac{3\mu^5\delta^5}{40}$$

Từ quan hệ (3.40) ta có:

$$hD = \mu\left(\delta - \frac{\delta^3}{6} + \frac{\delta^5}{30} - ...\right) \tag{3.59}$$

Bằng cách nâng bậc của hD và sử dụng một lần nữa quan hệ (3.56) ta được

$$h^2D^2 = \delta^2 - \frac{\delta^4}{12} + \frac{\delta^6}{90} - ...$$

$$h^3D^3 = \mu\left(\delta^3 - \frac{\delta^5}{4} + \frac{7\delta^7}{120} - ...\right) \tag{3.60}$$

$$h^4D^4 = \delta^4 - \frac{\delta^6}{6} + \frac{7\delta^8}{240} - ...$$

Chỉ xét tới số hạng đầu của các chuỗi trên, đạo hàm của y có thể biểu thị một cách gần đúng bởi các sai phân trung tâm với các sai số tương cấp $\varepsilon = 0(h^2)$ là

$$2hDy_i = (y_{i+1} - y_{i-1}) + 2\varepsilon_1$$

$$\left[\varepsilon_1 - \mu\left(-\frac{\delta^3}{6} + \frac{\delta^5}{30} - ...\right)y_i\right]$$

$$h^2D^2y_i = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} + \varepsilon_2$$

$$\left[\varepsilon_2 = \left(-\frac{\delta^4}{6} + \frac{\delta^6}{30} - ...\right)y_i\right]$$

$$h^2D^2y_i = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} + \varepsilon_2$$

$$\left[\varepsilon_2 = \left(-\frac{\delta^4}{12} + \frac{\delta^6}{90} - ...\right)y_i\right]$$

$$2h^3D^3y_i = (y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}) + 2\varepsilon_3$$

$$\left[\varepsilon_3 = \mu\left(-\frac{\delta^5}{4} + \frac{7\delta^7}{120} - ...\right)y_i\right] \tag{3.61}$$

$$h^4D^4y_i = y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2} + \varepsilon_4$$

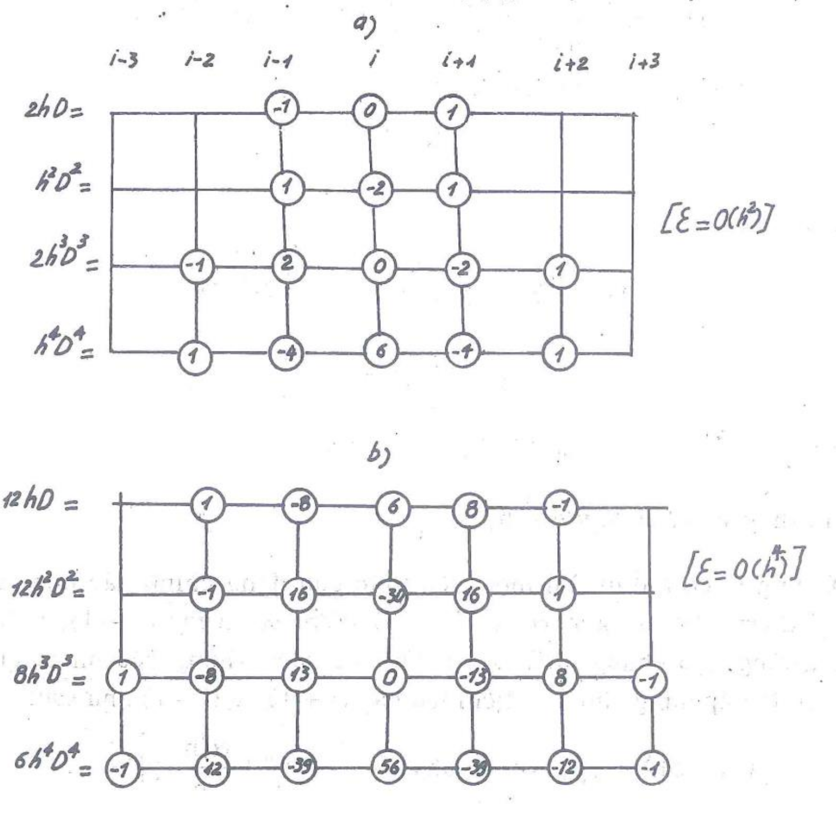
$$\left[\varepsilon_4 = \left(-\frac{\delta^6}{6} + \frac{7\delta^8}{240} - \ldots\right) y_i\right]$$

So sánh các quan hệ (3.61) với các quan hệ (3.64), (3.68) ta thấy rằng sai số của các đạo hàm tương ứng là sai số hai đối với h, do đó các biểu thức sai phân trung tâm trung bình chính xác hơn các biểu thức sai phân lệch phía (sai phân tiến hoặc lùi).

Bằng cách đó thấy rằng, nếu xét tới hai số hạng đầu tiên của các quan hệ (3.59) và (3.60) thì sai số của các đạo hàm tương ứng là cấp bốn đối với h.

Một cách tổng quát nếu xét tới m số hạng đầu tiên, sai số nhận được sẽ có cấp h^{2m}

Các toán tử sai phân trung tâm thường gặp được biểu thị ở hình (3.10).



Hình 3.10. Các toán tử sai phân trung tâm

3.2.Sử dụng phương pháp sai phân hữu hạn tính toán dầm chịu uốn có các điều kiện biên khác nhau

3.2.1. Phương trình vi phân cân bằng của dầm

Phương trình vi phân đường độ võng của dầm chịu uốn chịu tải trọng phân bố đều, khi không xét biến dạng trượt ngang có dạng sau:

$$EJ\frac{d^4y}{dx^4} = q \quad hay \quad \frac{d^2M}{dx^2} = q \tag{3.62}$$

Mômen uốn của dầm (có chiều cao tiết diện không đổi) xác định theo (3.63).

$$M = -EJ\frac{d^2y}{dx^2} \tag{3.63}$$

Lực cắt của dầm (có chiều cao tiết diện không đổi) xác định theo (3.64).

$$Q = \frac{dM}{dx} = -EJ\frac{d^3y}{dx^3}$$

(3.64)

Trong đó:

- M là mô men uốn, có giá trị dương nếu dầm căng thớ dưới
- q là cường độ tải trọng phân bố, có dấu dương nếu hướng từ dưới lên
- E là mô đun đàn hồi của vật liệu
- J là mômen quán tính của tiết diện ngang của dầm

3.2.2. Các bước thực hiện

Bước 1: Rời rạc hóa dầm bằng cách chia dầm thành n phần tử, trong đó có (n-4) phần tử thực, 4 phần tử ảo, dầm sẽ có i=n+1 nút, đánh số nút, đánh số ẩn chuyển vị.

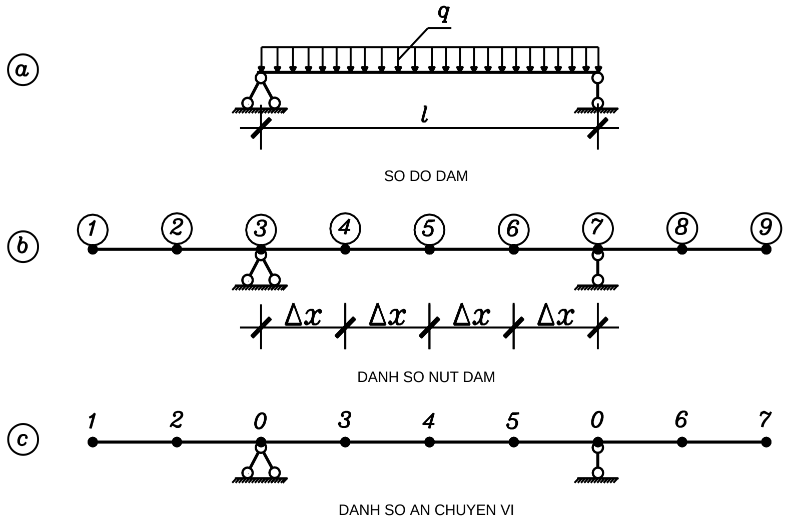
Bước 2: Sai phân hóa phương trình vi phân cân bằng của dầm tại các điểm nút (i); Sai phân hóa các điều kiện ràng buộc, bao gồm các điều kiện biên và các điều kiện ban đầu (nếu có). Nhận được hệ phương trình đại số tuyến tính của bài toán.

Bước 3: Tìm nghiệm của bài toán bằng cách giải hệ phương trình đại số vừa nhận được ở bước 2. Kết quả nhận được là giá trị chuyển vị tại các điểm nút i. Từ chuyển vị tính được mômen và lực cắt tại các điểm i.

3.2.3. Các ví dụ tính toán

Ví dụ 1: Dầm hai đầu khớp

Cho dầm chịu lực như hình 3.11a, dầm có độ cứng uốn EJ=const. Hãy xác định chuyển vị và nội lực trong dầm.



Hình 3.11. Dầm đơn giản

Lời giải:

Rời rạc hóa dầm thành npt phần tử như hình 11a, ở đây npt=8, trong đó có 4 phần tử thực và 4 phần tử ảo (phần tử ảo luôn cố định là 4, phần tử thực có thể thay đổi tùy ý. Bài toán có i=9 nút, trong đó có 4 nút ảo (1, 2, 6, 7) và 5 nút thực (3, 4, 5, 6, 7).

Đánh số ẩn chuyển vị nw1 là các chuyển vị thẳng tại các nút, ở đây chỉ có 7 nút có chuyển vị (1, 2, 4, 5, 6, 8, 9), hai nút (3 và 7) có chuyển vị nw1=0. Như vậy véc tơ chuyển vị nw1 có dạng nw1[1x9], như sau:

nw1=[1 2 0 3 4 5 0 6 7]

Tiến hành sai phân hóa phương trình vi phân cân bằng của dầm theo (3.62) tại các điểm chia trên dầm thực, 5 điểm. Phương trình sai phân của phương trình (3.62) có dạng sau:

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = \frac{\Delta x^4}{EJ} q_i \qquad \text{(a)}$$

Trong đó:

Δx là khoảng cách giữa các điểm i, q_i là tải trọng tại i

Đoạn dầm thực có chiều dài là l được chia thành 4 đoạn bằng nhau $\Delta x = l/4$

Viết phương trình sai phân theo (a) tại 5 điểm 3, 4, 5, 6, 7 trên dầm thực ta nhận được 5 phương trình sai phân cân bằng theo (b):

$$\left.\begin{aligned}
&y_1 - 4y_2 + 6y_3 - 4y_4 + y_5 = 0\\
&y_2 - 4y_3 + 6y_4 - 4y_5 + y_6 = \frac{\Delta x^4}{EJ} q_4\\
&y_3 - 4y_4 + 6y_5 - 4y_6 + y_7 = \frac{\Delta x^4}{EJ} q_5\\
&y_4 - 4y_5 + 6y_6 - 4y_7 + y_8 = \frac{\Delta x^4}{EJ} q_6\\
&y_5 - 4y_6 + 6y_7 - 4y_8 + y_9 = 0
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(b)}$$

Sai phân hóa các điều kiện ràng buộc, ở đây là các điều kiện biên, mô men uốn và chuyển vị tại hai đầu dầm (điểm 3 và điểm 7) bằng không

$$M = -EJ\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$$\left.\begin{aligned}
&y_3'' = 0 \rightarrow y_2 - 2y_3 + y_4 = 0\\
&y_7'' = 0 \rightarrow y_6 - 2y_7 + y_8 = 0\\
&y_3 = 0\\
&y_7 = 0
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(c)}$$

Ghép (b) và (c) nhận được hệ (d) gồm 9 phương trình, 9 ẩn số, trong đó đã biết chuyển vị tại hai gối tựa bằng không (y_3=0; y_7=0)

$$\left.\begin{aligned}
&y_1 - 4y_2 + 6y_3 - 4y_4 + y_5 = 0 \\
&y_2 - 4y_3 + 6y_4 - 4y_5 + y_6 = \frac{\Delta x^4}{EJ} q_4 \\
&y_3 - 4y_4 + 6y_5 - 4y_6 + y_7 = \frac{\Delta x^4}{EJ} q_5 \\
&y_4 - 4y_5 + 6y_6 - 4y_7 + y_8 = \frac{\Delta x^4}{EJ} q_6 \\
&y_5 - 4y_6 + 6y_7 - 4y_8 + y_9 = 0 \\
&y_2 - 2y_3 + y_4 = 0 \\
&y_6 - 2y_7 + y_8 = 0 \\
&y_3 = 0 \\
&y_7 = 0
\end{aligned}\right\}$$

(d)

Trong đó: $q_4=q_5=q_6=qdx$

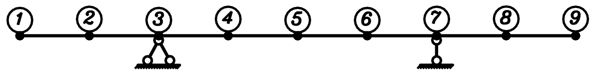
Có thể biểu diễn hệ phương trình (d) dưới dạng ma trận như sau:

$$[A]X = B$$

(e)

Trong đó: $[A]$ là ma trận các hệ số bên trái hệ phương trình (d)

B là véc tơ tải trọng; X là véc tơ ẩn chuyển vị tại các nút



$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[X] = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{Bmatrix}; \quad [B] = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Giải hệ phương trình (e) ta nhận được các ẩn chuyển vị tại các nút

$$[X] = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0137 \\ -0.0098 \\ 0 \\ 0.0098 \\ 0.0137 \\ 0.0098 \\ 0 \\ -0.0098 \\ -0.0137 \end{Bmatrix} \left(\frac{ql^4}{EJ} \right)$$

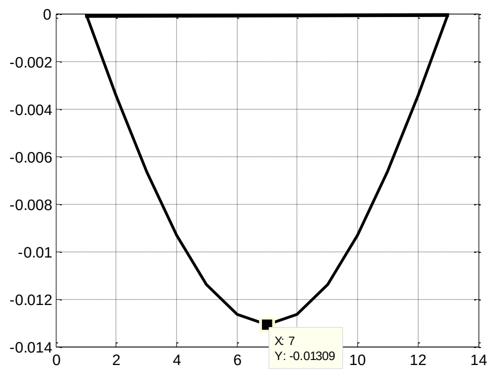
Ta nhận thấy y_5 là chuyển vị giữa dầm:

$$y_5 = 0.0137\frac{ql^4}{EJ}$$

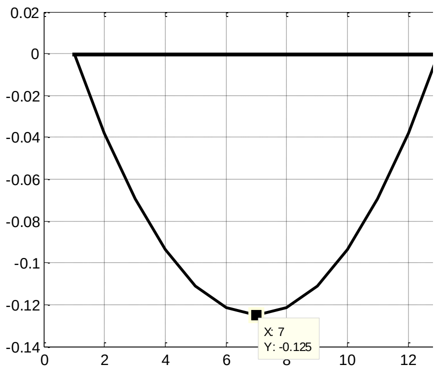
Kết quả chính xác là:

$$y_5 = \frac{5ql^4}{348EJ} = 0.0130\frac{ql^4}{EJ}$$

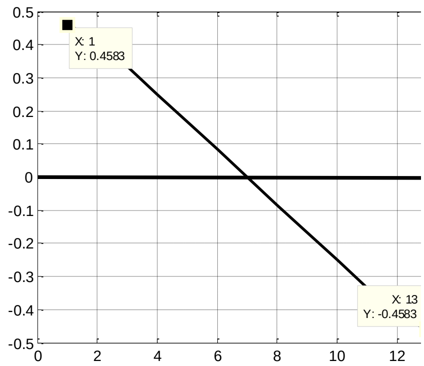
Đường độ võng của dầm như hình 3.12



Hình 3.12. Đường độ võng



Hình 3.13. Biểu đồ mômen uốn M



Hình 3.14. Biểu đồ lực cắt Q

Nhận xét kết quả trên:

Khi chia cột và dầm thành 12 phần tử ta nhận được kết quả như trên, so sánh với kết quả chính xác theo lời giải giải tích ta nhận được sai số theo bảng sau:

BẢNG SO SÁNH M, Y TẠI CÁC TIẾT DIỆN GIỮA DẦM, LỰC CẮT Q TẠI HAI ĐẦU DẦM

Nội lực và chuyển vị	Lời giải số theo phương pháp PTHH	Lời giải chính xác	Sai số %

M	0,1250	0,1250	0
Q	0,4583	0,5000	8,34
Y	0,0131	0,013	0,77

Ta thấy kết quả nhận được, lực cắt Q có sai số 8,34%, M trùng khớp với lời giải chính xác, độ võng y có sai số không đáng kể.

Khi chia dầm thành 4 phần tử ta nhận được kết quả như sau:

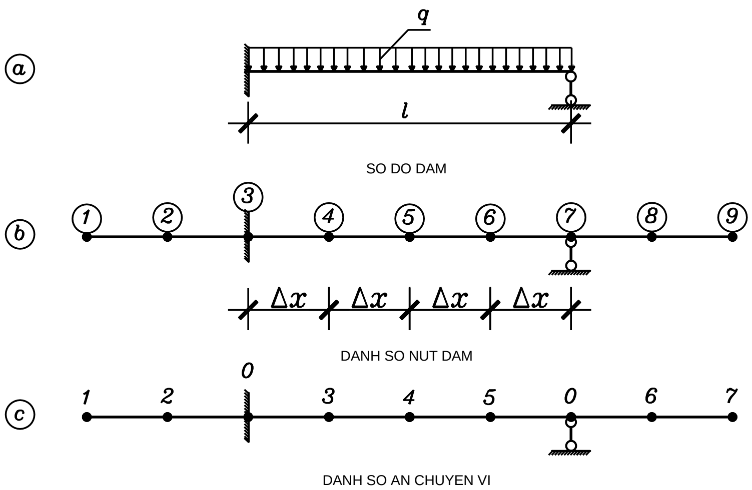
BẢNG SO SÁNH M, Y TẠI CÁC TIẾT DIỆN GIỮA DẦM, LỰC CẮT Q TẠI HAI ĐẦU DẦM

Nội lực và chuyển vị	**Lời giải số theo phương pháp PTHH**	**Lời giải chính xác**	**Sai số %**
M	0,1250	0,1250	0
Q	0,3750	0,5000	25
Y	0,0137	0,013	5,38%

Khi chỉ chia dầm thành 4 phần tử đã nhận M hoàn toàn chính xác, độ võng sai số 5,38%, lực cắt Q tại hai đầu dầm có sai số rất lớn (25%).

Ví dụ 2: Dầm đầu ngàm - đầu khớp

Cho dầm chịu lực như hình 3.15a, dầm có độ cứng uốn EJ=const. Hãy xác định chuyển vị và nội lực trong dầm.



Hình 3.11. Dầm đầu ngàm - đầu khớp

Lời giải:

Làm tương tự như ví dụ 1, ở đây chỉ khác về điều kiện biên ở bên trái dầm là ngàm nên góc xoay tại đó bằng không.

Viết phương trình cho các điểm chia trên dầm thực theo

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = \frac{\Delta x^4}{EJ} q_i \qquad \text{(a)}$$

Trong đó:

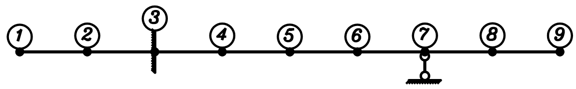
Δx là khoảng cách giữa các điểm i, q_i là tải trọng tại i

Đoạn dầm thực có chiều dài là 1 được chia thành 4 đoạn bằng nhau $\Delta x = l/4$

Viết phương trình sai phân theo (a) tại 5 điểm 3, 4, 5, 6, 7 trên dầm thực ta nhận được 5 phương trình sai phân cân bằng được trình bày dưới dạng ma trận

$$[A]X=B \qquad \text{(b)}$$

trong đó [A], X và B như sau:



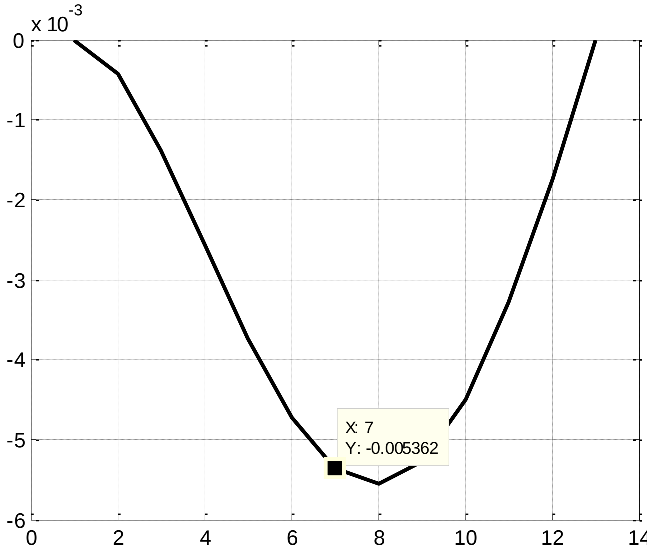
$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[X]=\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{Bmatrix}; \quad [B]=\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

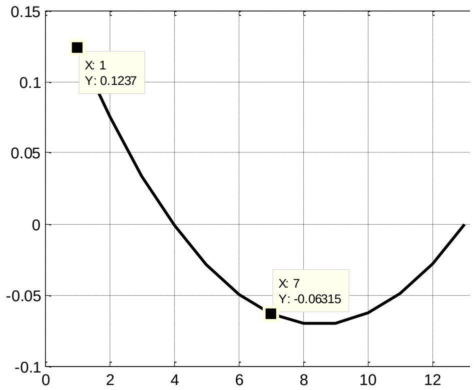
Giải hệ phương trình (b) ta nhận được các ẩn chuyển vị tại các nút

$$[X]=\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0218 \\ 0.0036 \\ 0 \\ 0.0036 \\ 0.0066 \\ 0.0053 \\ 0 \\ -0.0053 \\ -0.0066 \end{Bmatrix}\left(\frac{ql^4}{EJ}\right)$$

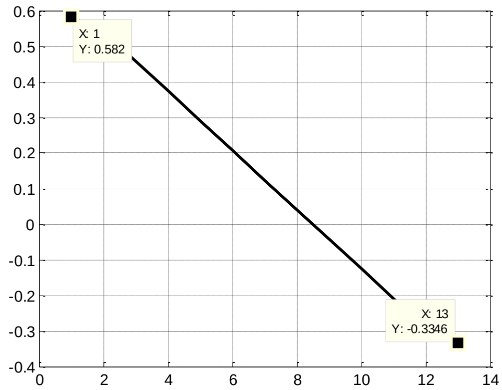
Đường độ võng của dầm như hình 3.16



Hình 3.16. Đường độ võng



Hình 3.17. Biểu đồ mômen uốn M



Hình 3.18. Biểu đồ lực cắt Q

Nhận xét kết quả trên:

Khi chia cột và dầm thành 12 phần tử ta nhận được kết quả như trên, so sánh với kết quả chính xác theo lời giải giải tích ta nhận được sai số theo bảng sau:

BẢNG SO SÁNH M, Y VÀ Q TẠI CÁC TIẾT DIỆN DẦM

Nội lực và chuyển vị	**Lời giải số theo phương pháp PTHH**	**Lời giải chính xác**	**Sai số %**
M đầu dầm	-0,1237	-0,1250	1,04
M giữa dầm	0,0632	0,0625	1,12
Q đầu dầm	0,5820	0,6250	6,88
Q cuối dầm	-0,3346	-0,3750	10,77
Y giữa dầm	0,0054	0,0053	1,88

Ta thấy kết quả nhận được, lực cắt Q tại đầu và cuối dầm có sai số lần lượt là 6,88% và 10,77%, M và độ võng y có sai số không đáng kể.

Khi chia dầm thành 4 phần tử ta nhận được kết quả như sau:

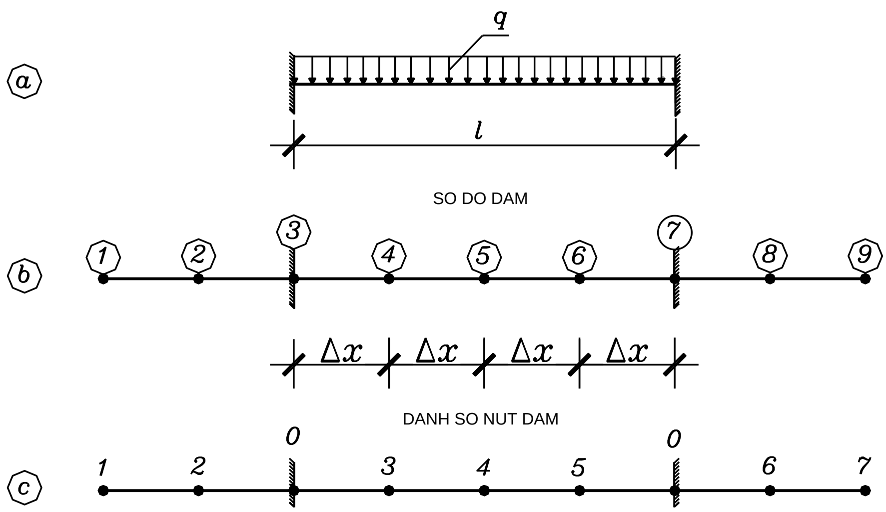
BẢNG SO SÁNH M, Y VÀ Q TẠI CÁC TIẾT DIỆN DẦM

Nội lực và chuyển vị	**Lời giải số theo phương pháp PTHH**	**Lời giải chính xác**	**Sai số %**
M đầu dầm	-0,1136	-0,1250	9,12
M giữa dầm	0,0682	0,0625	9,12
Q đầu dầm	0,4886	0,6250	21,82
Q cuối dầm	-0,2614	-0,3750	30,29
Y giữa dầm	0,0066	0,0053	24,52

Khi chỉ chia dầm thành 4 phần tử kết quả nhận được có sai số tương đối lớn, đặc biệt là lực cắt Q tại hai đầu dầm và độ võng giữa dầm, với sai số lần lượt là 21,82%, 30,29% và 24, 52%. Như vậy, ta thấy rằng đối với trường hợp dầm siêu tĩnh, liên kết hai đầu không đối xứng kết quả hội tụ về lời giải giải tích rất chậm.

Ví dụ 3: Dầm 2 đầu ngàm

Cho dầm chịu lực như hình 3.19a, dầm có độ cứng uốn EJ=const. Hãy xác định chuyển vị và nội lực trong dầm.



Hình 3.19. Dầm 2 đầu ngàm

Lời giải:

Làm tương tự như ví dụ 1, ở đây chỉ khác về điều kiện biên ở cả hai đầu dầm là ngàm nên góc xoay tại hai vị trí đó bằng không.

Viết phương trình cho các điểm chia trên dầm thực theo

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = \frac{\Delta x^4}{EJ} q_i \qquad \text{(a)}$$

Trong đó:

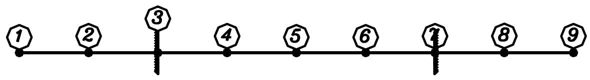
Δx là khoảng cách giữa các điểm i, q_i là tải trọng tại i

Đoạn dầm thực có chiều dài là l được chia thành 4 đoạn bằng nhau $\Delta x = l/4$

Viết phương trình sai phân theo (a) tại 5 điểm 3, 4, 5, 6, 7 trên dầm thực ta nhận được 5 phương trình sai phân cân bằng được trình bày dưới dạng ma trận

$$[A]X=B \qquad \text{(b)}$$

trong đó [A], X và B như sau:



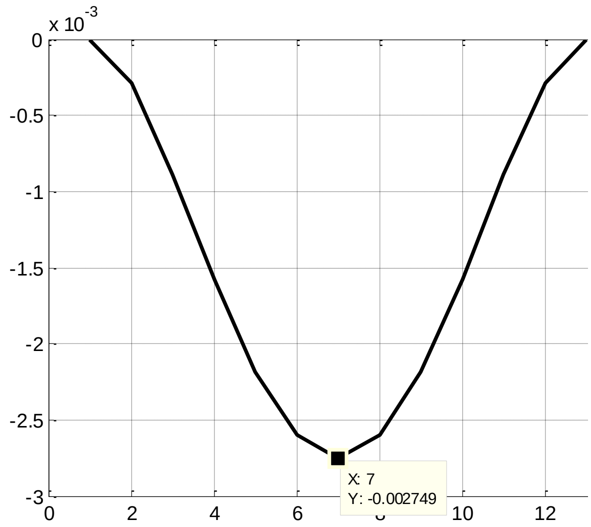
$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[X] = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{Bmatrix}; \quad [B] = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

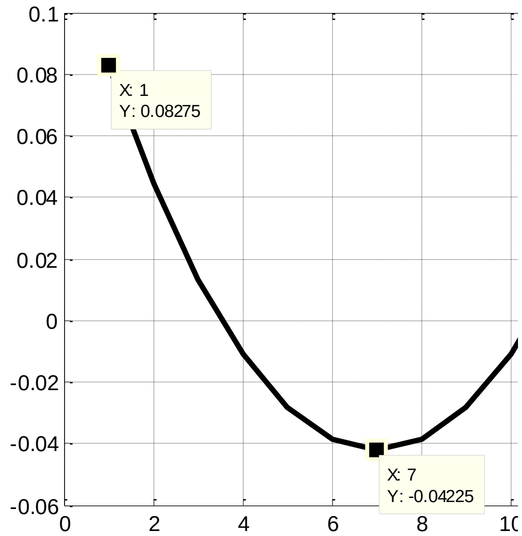
Giải hệ phương trình (b) ta nhận được các ẩn chuyển vị tại các nút

$$[X] = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0156 \\ 0.0024 \\ 0 \\ 0.0024 \\ 0.0039 \\ 0.0024 \\ 0 \\ 0.0024 \\ 0.0156 \end{Bmatrix} \left(\frac{ql^4}{EJ} \right)$$

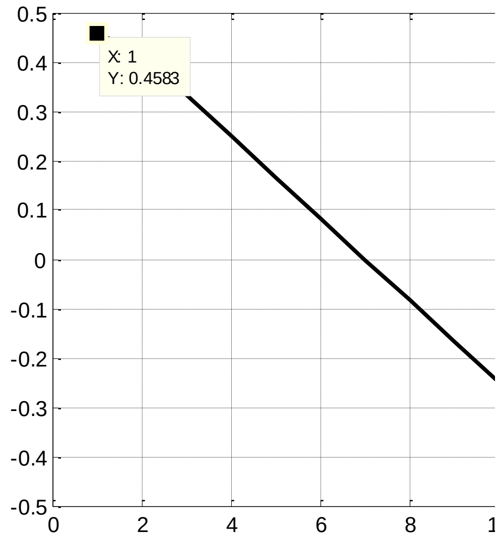
Đường độ võng của dầm như hình 3.16



Hình 3.20. Đường độ võng



Hình 3.21. Biểu đồ mômen uốn M



Hình 3.22. Biểu đồ lực cắt Q

Nhận xét kết quả trên:

Khi chia cột và dầm thành 12 phần tử ta nhận được kết quả như trên, so sánh với kết quả chính xác theo lời giải giải tích ta nhận được sai số theo bảng sau:

BẢNG SO SÁNH M, Y VÀ Q TẠI CÁC TIẾT DIỆN DẦM

Nội lực và chuyển vị	**Lời giải số theo phương pháp PTHH**	**Lời giải chính xác**	**Sai số %**
M đầu dầm	-0,0828	-0,0833	0,60
M giữa dầm	0,0423	0,0417	1,12
Q đầu dầm	0,4583	0,5000	0,014
Y giữa dầm	0,0028	0,0026	7,69

Ta thấy kết quả nhận được, M và Q tại đầu và giữa dầm có sai số không đáng kể, riêng độ võng có sai số 7,69%.

Khi chia dầm thành 4 phần tử ta nhận được kết quả như sau:

BẢNG SO SÁNH M, Y VÀ Q TẠI CÁC TIẾT DIỆN DẦM

Nội lực và chuyển vị	**Lời giải số theo phương pháp PTHH**	**Lời giải chính xác**	**Sai số %**
M đầu dầm	-0,0781	-0,0833	6,24
M giữa dầm	0,0469	0,0417	12,47%
Q đầu dầm	0,3750	0,5000	25
Y giữa dầm	0,0039	0,0026	50

Khi chỉ chia dầm thành 4 phần tử kết quả nhận được có sai số tương rất lớn, đặc biệt là lực cắt Q tại hai đầu dầm và độ võng giữa dầm, với sai số lần lượt là 25%, 50%, còn M giữa dầm có sai số 12,47%. Như vậy, ta thấy rằng đối với trường hợp dầm siêu tĩnh, liên kết hai đầu không đối xứng kết quả hội tụ về lời giải giải tích rất chậm.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

KẾT LUẬN

Qua kết quả nghiên cứu từ chương 1 đến chương 3, tác giả rút ra một số kết luận sau:

1. Đã trình bày được nội dung cơ bản của phương pháp sai phân hữu hạn, trình bày được lý thuyết tính toán dầm chịu uốn và áp dụng thành công phương pháp sai phân hữu hạn đối với bài toán dầm đơn chịu tác dụng của tải trọng phân bố đều.

2. Độ chính xác của kết quả nhận được phụ thuộc vào bài toán tĩnh định hay siêu tĩnh, liên kết hai đầu dầm là đối xứng hay bất kỳ...chẳng hạn ví dụ 3.1, dầm đơn giản, đây là bài toán có hai đầu liên kết đói xứng nên khi chỉ chia dầm thành 4 phần tử đã nhận được M hoàn toàn chính xác, độ võng sai số 5,38%, lực căt Q tại hai đầu dầm có sai số rất lớn (25%). Trong khi đó, ở ví dụ 3.2, dầm ngàm - khớp nếu cũng chia dầm thành 4 phần tử thì kết quả nhận được có sai số rất lớn, đặc biệt là lực cắt Q tại hai đầu dầm và độ võng giữa dầm, với sai số lần lượt là 21,82%, 30,29% và 24, 52%. Cũng tương tự như vậy, dầm hai đầu ngàm có lực cắt Q tại hai đầu dầm và độ võng giữa dầm, với sai số lần lượt là 25%, 50%, còn M giữa dầm có sai số 12,47%. Nhìn chung trong dầm siêu tĩnh lực cắt Q và độ võng y của dầm có sai số lớn hơn nhiều so với dầm tĩnh định cùng nhịp cùng tải trọng và cùng số phần tử chia.

3. Khi chia dầm thành nhiều phần tử hơn thì kết quả nhận được tiệp cận với kết quả chính xác hơn, ở đây khảo sát trường hợp chia dầm thành 12 phần tử, nhận được kết quả gần như trùng khớp với lời giải giải tích, ngoại trừ lực cắt Q vẫn còn sai số từ 8% , 7% và 10%, tương ứng với các ví dụ 3.1, 3.2 và 3.3. Nếu chia dầm thành 16 phần tử trở lên ta sẽ nhận được kết quả chính xác của các bài toán.

KIẾN NGHỊ

Sử dụng phương pháp sai phân hữu hạn để tính toán cho các kết cấu phức tạp hơn.

Có thể dùng nội dung nghiên cứu của luận văn để tham khảo, học tập, nghiên cứu và ứng dụng trong thực tế tính toán công trình.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

I. Tiếng Việt

[1]Nguyễn Văn Liên, Nguyễn Phương Thành, Đinh Trọng Bằng (2003), *Giáo trình Sức bền vật liệu,* Nhà xuất bản xây dựng, tái bản lần thứ 3, 330 trang.

[2]Nguyễn Văn Đạo (2001), *Cơ học giải tích,* Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà nội, 337 trang.

[3]Lều Thọ Trình, Đỗ Văn Bình(2010), *Giáo trình cơ học công trình,* Nhà xuất bản xây dựng.

[4]Lều Thọ Trình, Nguyễn Mạnh Yên (1998), Cơ học kết cấu, Nhà xuất bản khoa học kỹ thuật

[5]Đoàn Văn Duẩn (2015), *Bài toán cơ học kết cấu dưới dạng tổng quát,* Tạp chí Xây dựng số 02 (Tr59-Tr61).

[6] Trần Thị Kim Huế (2005), *Phương pháp nguyên lý Cực trị Gauss đối với các bài toán cơ học kết cấu,* Luận văn thạc sỹ kỹ thuật.

[7]Timoshenko C.P, Voinópki- Krige X, (1971), *Tấm và Vỏ.* Người dịch, Phạm Hồng Giang, Vũ Thành Hải, Đoàn Hữu Quang, Nxb Khoa học và kỹ thuật, Hà Nội.

[8]T. Karamanxki, người dịch Nguyễn Tiến Cường (1985), Phương pháp số trong cơ học kết cấu, Nhà xuất bản Khoa học kỹ thuật.

[9]Nguyễn Trâm, Phương pháp phần tử hữu hạn (2007), Nhà xuất bản xây dựng

II. Tiếng Anh

[10]Klaus – Jurgen Bathe (1996), *Finite Element procedures.* Part one, Prentice – Hall International, Inc, 484 trang.

[11]Klaus – Jurgen Bathe (1996), *Finite Element procedures.* Part two, Prentice – Hall International, Inc, 553 trang.

[12]O.C. Zienkiewicz-R.L. Taylor (1991), *The finite element method* (four edition) Volume 2, McGraw-Hill Book Company, Inc, 807 trang.

[13]G.Korn-T.Korn (1961), *Mathematical Handbook for sientists and Engineers,* McGraw-Hill, New york (Bản dịch tiếng Nga, I.Bramovich chủ biên, Nhà xuất bản Nauka-Moscow, 1964).

[14] D.R.J. Owen, E.Hinton (1986), *Finite Elements in Plasticity:* Theory and Practice, Pineridge Press Lt.

[15]C.A.Brebbia, J.C.F.Telles, L.C.Wrobel(1984), *Boundary Element Techniques. Theory and Applications in Engineering*. Nxb Springer – Verlag.(Bản dịch tiếng Nga, 1987).

[16]Irons, B. M. and O. C. Zienkiewicz (1968). *"The isoparametric Finite Element System – A New Concept in Finite Element Analysis",* Proc. Conf. "Recent Advances in Stress Analysis". Royal Aeronautical Society. London.