BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC DÂN LẬP HẢI PHÒNG

PHẠM QUỐC VIỆT

TÍNH TOÁN DÂY MỀM CHỊU TÁC DỤNG CỦA TẢI TRỌNG TĨNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ KỸ THUẬT

CHUYÊN NGÀNH: KỸ THUẬT XÂY DỰNG CÔNG TRÌNH DÂN DỤNG & CÔNG NGHIỆP; MÃ SỐ: 60.58.02.08

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

PGS. TS. ĐOÀN VĂN DUẨN

HẢI PHÒNG, 11 NĂM 2018

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các số liệu, kết quả trong luận văn là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Tác giả luận văn

Phạm Quốc Việt

LỜI CẢM ƠN

Đề tài **"Tính toán dây mềm chịu tác dụng của tải trọng tĩnh"** là nội dung tôi chọn để nghiên cứu và làm luận văn tốt nghiệp sau hai năm theo học chương trình cao học chuyên ngành Kỹ thuật xây dựng công trình dân dụng và công nghiệp tại trường Đại học Dân lập Hải Phòng.

Lời đầu tiên tôi xin trân trọng bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất đối với PGS.TS Đoàn Văn Duẩn đã tận tình giúp đỡ và cho nhiều chỉ dẫn khoa học có giá trị cũng như thường xuyên động viên, tạo mọi điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu hoàn thành luận văn.

Tôi xin trân trọng cảm ơn các cán bộ, giáo viên của Khoa xây dựng, Phòng đào tạo Đại học và Sau đại học - trường Đại học Dân lập Hải phòng, và các đồng nghiệp đã tạo điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tác giả trong quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Cuối cùng tôi xin chân thành cảm ơn đồng nghiệp, đơn vị công tác đã giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và thực hiện Luận văn này.

Xin trân trọng cảm ơn!

Hải Phòng, ngày tháng năm 2018

Tác giả

Phạm Quốc Việt

MỞ ĐẦU

Ở nước ta kết cấu dây đã được nhiều tác giả nghiên cứu áp dụng và đã đạt được nhiều thành tựu to lớn trong nhiều công trình thuộc ngành giao thông, xây dựng công nghiệp và dân dụng. Cầu dây và cầu treo đã góp phần quan trọng trong cuộc chiến tranh chống Mỹ cứu nước, đảm bảo giao thông thông suốt ra tiền tuyến, chống chiến tranh phá hoại. Trong thời kỳ mở cửa và hội nhập, đất nước trên con đường công nghiệp hóa và hiện đại hóa kết cấu dây đã và đang đóng góp hiệu quả vào các công trình tải điện và giao thông. Đặc biệt, kết cấu dây đóng vai trò quan trọng và quyết định trong việc đảm bảo giao thông miền núi và đồng bằng sông Cửu Long, mái che các công trình nhịp lớn như sân vận động, nhà triển lãm v.v...

Cho đến nay, bài toán dây đơn đã được nhiều tác giả nghiên cứu song vẫn còn dùng nhiều giả thiết gần đúng. Khi tính toán dây đơn hiện nay thường sử dụng đường cong có dạng hypecbol hoặc parabol. Tuy nhiên do phương trình đường độ võng của dây nhận được đều là từ phương trình cân bằng lực, nên để xác định lực căng cần cho trước mũi tên võng, chiều dài hoặc thành phần hình chiếu theo phương ngang của lực căng dây.

Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss do GS.TSKH. Hà Huy Cương đề xuất là phương pháp cho phép áp dụng nguyên lý cực trị Gauss - vốn được phát biểu cho hệ chất điểm - để giải các bài toán cơ học vật rắn biến dạng nói riêng và bài toán cơ học môi trường liên tục nói chung. Đặc điểm của phương pháp này là bằng một cái nhìn đơn giản luôn cho phép tìm được kết quả chính xác của các bài toán dù đó là bài toán tĩnh hay bài toán động, bài toán tuyến tính hay bài toán phi tuyến.

Đối tượng, phương pháp và phạm vi nghiên cứu của luận văn

Trong luận văn này, tác giả sử dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss nói trên để tính toán dây mềm chịu tác dụng của tải trọng tĩnh.

Mục đích nghiên cứu của luận văn

"Tính toán dây mềm chịu tác dụng của tải trọng tĩnh"

Nội dung nghiên cứu của đề tài:

- Giới thiệu về dây mềm và các phương pháp tính dây mềm
- Trình bày phương pháp nguyên lý cực trị Gauss.
- Tính toán dây mềm chịu tác dụng của tải trọng tĩnh
- Lập trình tính toán một số ví dụ

CHƯƠNG 1
DÂY MỀM VÀ CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH

1.1 Kết cấu dây và mái treo

Kết cấu dây và mái treo là hệ kết cấu được cấu tạo từ những dây mềm, chỉ chịu kéo, bỏ qua khả năng chịu uốn của dây. Các dạng kết cấu dây bao gồm dây tải điện, dây văng, cầu dây các loại và mái treo. Kết cấu dây còn được dùng liên hợp với các hệ kết cấu cứng khác như: dầm, dàn hoặc tấm tạo nên hệ kết cấu liên hợp như mái treo dầm cứng, cầu dây văng.

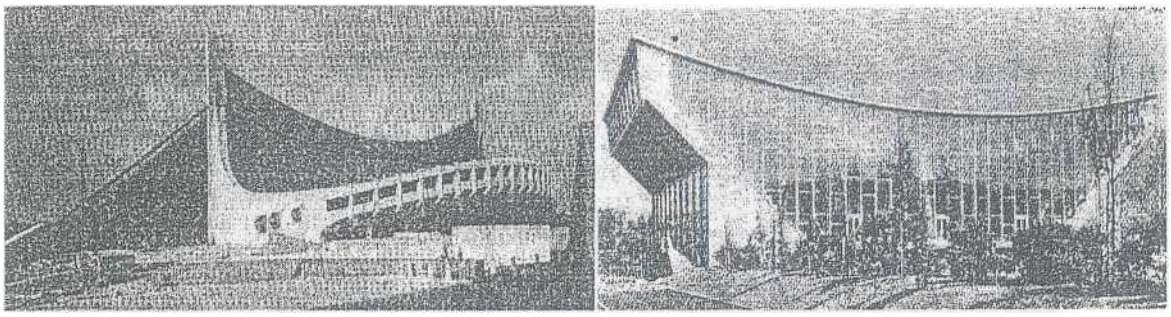
Cáp dùng trong kết cấu dây có loại, có cường độ gấp sáu lần nhưng giá thành chế tạo chỉ đắt hơn hai lần thép xây dựng thông thường. Do tận dụng được sức chịu kéo lớn như vậy, nên kết cấu dây có trọng lượng nhẹ, cho phép vượt được nhịp lớn. Hình dạng kiến trúc của kết cấu dây nói chung và mái treo bằng dây nói riêng cũng đa dạng và phong phú.

Kết cấu mái treo đầu tiên trên thế giới xuất hiện năm 1896 tại Hội chợ triển lãm Thành phố Nhigiegorod (Nga) với các dạng tròn (D=68m), ô van (D_{max}=100m) và hình chữ nhật (30x70m) do kỹ sư xây dựng người Nga V. G. Shukhov thiết kế [86]. Nhưng mãi sau đó, đến năm 1932 mới có công trình tiếp theo được xây dựng ở Mỹ là băng tải nâng hàng ở Allbaney [86]. Từ thơi gian, đó nhiều công trình lớn sử dụng kết cấu dây và mái treo ra đời. Cầu treo xuất hiện sớm hơn, cầu treo đầu tiên được xây dựng vượt sông Tess ở Anh năm 1741 có nhịp 21m [7]. Một số công trình cầu treo, mái treo đã trở thành biểu tượng văn hóa, điểm thăm quan du lịch hoặc biểu tượng khoa học kỹ thuật của địa phương và của cả quốc gia. Có thể nêu một số công trình ví dụ như sau:

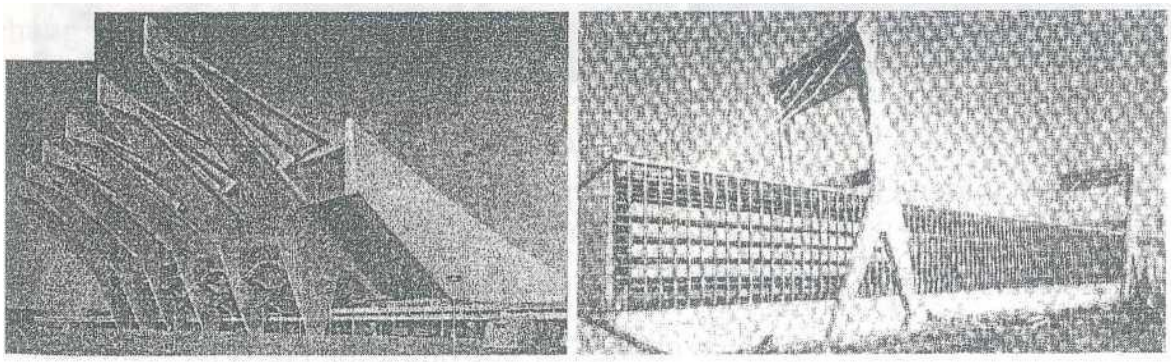
Nhóm các công trình thể thao: Công trình sân vận động Olimpic Seun (Hàn Quốc) có mặt bằng tròn với đường kính 393ft (khoảng 120m) [19]; nhà thi đấu tại Dortmund (CHLB Đức) có mặt bằng chữ nhật 80x110m [32], công

trình bể bơi thành phố Wuppertal (CHLB Đức) kích thước mái 38x65m; bể bơi tại Bil (Thuỵ Sĩ) kích thước mái 35x70m; nhà thi đấu tại Zheshuv (Ba Lan) [50] kích thước mái 37,6x39,2m; sân băng Juhenneshof tại Stockholn (Thuỵ Điển) [95] kích thước mái 83x118m; bể bơi Olimpic tại Tokyo (Nhật Bản) [31] kích thước mái 120x214m.

Nhóm các công trình triển lãm: Công trình Toà nhà triển lãm ở Thành phố New-York (Mỹ)[19], có mặt bằng hình elíp, cao 30m, vành biên ngoài bằng bê tông cốt thép, đường kính lớn 110m, đường kính nhỏ 79m; nhà triển lãm của Mỹ tại triển lãm thế giới tại Bruxelles (Bỉ) [24] có mặt bằng tròn đường kính 104m; nhà triển lãm tại Oklahoma-city (Mỹ) [18] kích thước mái 97,5xl22m; nhà triển lãm của Pháp tại triển lãm thế giới tại Bruxelles (Bỉ) [21] kích thước máil7x34m; nhà triển lãm ở Bratislave.



Bể bơi Olimpic tại Tokyo (Nhật) Bể bơi Wuppertal (CHLB Đức)



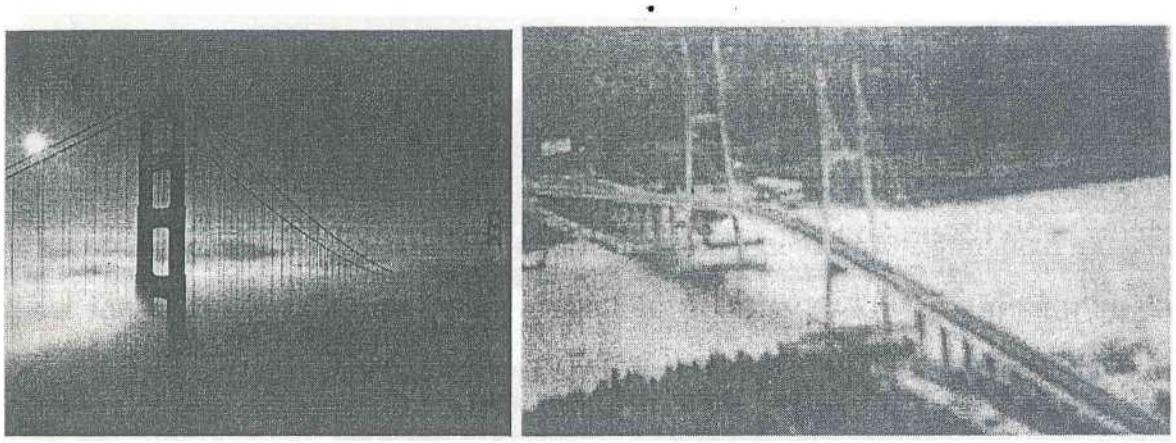
Toà thị chính Bremen (CHLB Đức) Nhà máy giấy Mantu (Italia)

Hình 1.1. *Một số công trình mái treo đã xây dựng.*

Nhóm các công trình sản xuất: Xưởng sản xuất lesjeforce (Thuỵ điển) [23] kích thước mái 14,25x92,75m; trạm máy nông nghiệp Gross-langherwish (CHLB Đức) [30] mặt bằng tròn đường kính 31,6m; ga-ra *ở* Kiep (Nga) mặt bằng tròn đường kính 161m: nhà máy giấy thành phố Mantu (Italia) mặt bằng chữ nhật 30x249m

Một số các công trình khác như: rạp chiếu phim ở Khác- cốp (Nga) [21] kích thước 45x56m, toà thị chính Bremen (CHLB Đức) kích thước 80x95m. Một số công trình tiêu biểu được giới thiệu trên hình 1.1.

Trong lĩnh vực cầu dây, nhiều công trình đã trở thành di sản văn hoá, biểu tượng của kiến trúc và đánh dấu sự phát triển của khoa học học kỹ thuật. Người ta thường nhắc đến cầu Golden Gate (Mỹ) xây dựng năm 1937 nhịp dài 1280m, cầu Verrazano (Mỹ) xây dựng năm 1969 nhịp 1298m, cầu Hamber (Anh) xây dựng năm 1976 nhịp 1410m. Đến nay nhiều dự án cầu dây nhịp hàng nghìn mét đã và đang được nghiên cứu xây dựng qua các vịnh, biển: cầu Messine (Italia), cầu Storebelt (Đan mạch), cầu Gibraltar (Âu-Phi)[9]

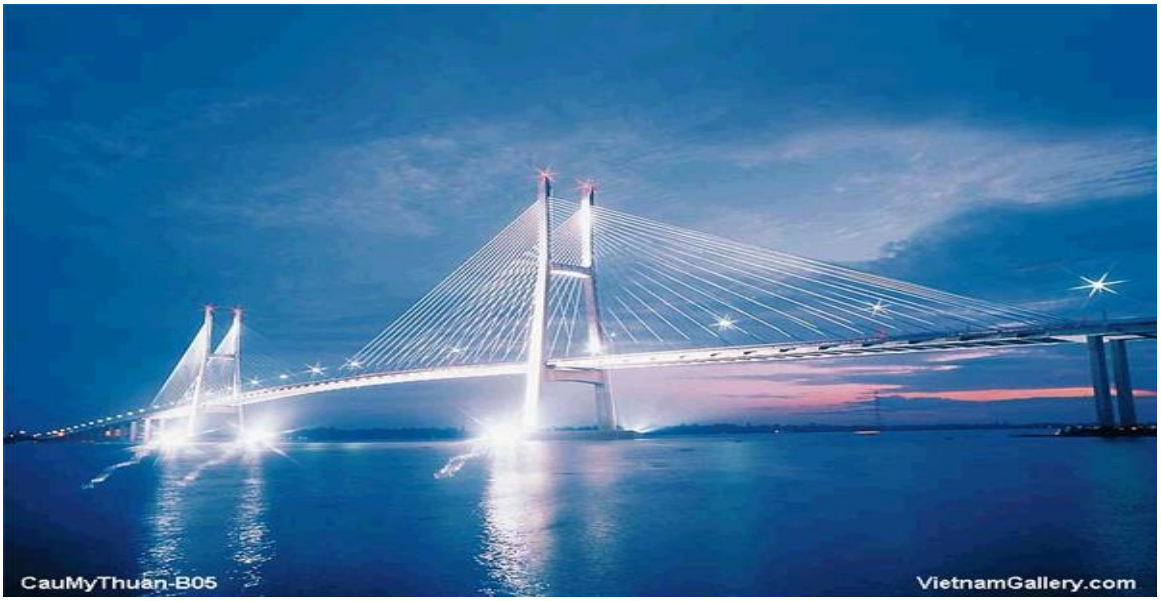


Hình 1.2 Công trình cầu nổi tiếng thế giới và Việt Nam

Cầu Golden Gate (Mỹ); Cầu Mỹ Thuận - Sông Tiền (Việt Nam)

Hình 0.1 Cầu Strömsund ở Thụy Điển, 1955

Hình 0.2 Cầu Vladivostok – Russky, Liên bang Nga, 2012



Hình 0.5 Cầu Mỹ Thuận

Ở Việt Nam các kết cấu dây treo đã được sử dụng nhiều trong ngành cầu đường. Trong thời kỳ kháng chiến chống Mỹ các nhà khoa học Việt Nam: Bùi Khương [7],[8], Nguyên Văn Hường [2], Đỗ Quốc Sam [10], Lều Thọ Trình [13],[14],[15], đã có nhiều công trình nghiên cứu, tính toán, thiết kế và xây dựng các công trình cầu cáp vượt sông góp phần hoàn thành nhiệm vụ bảo đảm giao thông của Đảng và Đất nước trong giai đoạn ấy: cầu Vĩnh Tuy (Hà giang), cầu Đoan Vĩ (Hà nam), cầu Đoan Hùng (Vĩnh Phú), cầu Kỳ Lừa (Lạng Sơn, cầu Sơn Cẩm (Thái Nguyên), cầu Lèn (Thanh Hoá), cầu Việt Trì (Phú Thọ), cầu Đuống (Hà Nội) [7]. Ngày nay đất nước đang trên đường hiện đại hoá và công nghiệp hoá, nhiều công trình có quy mô lớn đã và đang được xây dựng: cầu Mỹ Thuận (Sông Tiền - Vĩnh Long) [11] (hình 1.2); cầu sông Hàn (Đà Nẵng); cầu Bính (Hải Phòng); sân vận động Mỹ-Bình (Hà Nội). Nhiều dự án về cầu dây đã và đang được nghiên cứu xây dựng: cầu Sông Hậu, cầu Thủ Thiêm, cầu Phú Mỹ, cầu Bãi Cháy. Trong tương lai với những ưu điểm của kết cấu dây và mái treo nhiều công trình có quy mô lớn chắc chắn sẽ được xây dựng nhiều ở nước ta..

1.2. Cấu tạo chung của kết cấu dây và mái treo

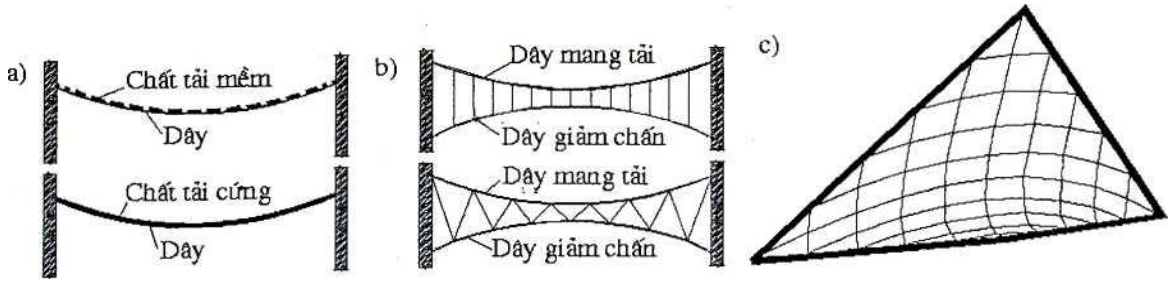
So với các công trình khác, thiết kế kết cấu dây và mái treo có đặc điểm là phải xét đến lực neo dây và tính chất động lực học của hệ kết cấu. Khi chịu tải trọng thay đổi như gió, hệ kết cấu dây và mái treo dễ bị kích động và xảy ra các hiện tượng mất ổn định khí động học, đàn hồi (aeroelastic). Nguyên nhân phá hoại của cấu treo Tacoma Narao vào tháng 11 năm 1940 sau 4 tháng đưa vào sử dụng được xác định là do hiện tượng Hutter một dạng tự dao động kết hợp giữa uốn và xoắn [20]. Người ta cũng ghi được những biên độ dao động lớn cầu đây cáp treo nghiêng của cầu treo xảy ra khi có gió và mưa đạt đến hai lần đường kính của cáp [17]. Cho nên khi thiết kế kết cấu dây nói chung và mái treo nói riêng cần đánh giá tính chất động học của chúng. Để

bảo đảm ổn định cho mái treo thường dùng các giải pháp thiết kế sau [19]. Chất tải nhân tạo lên dây: tải mềm hoặc tải cứng (hình l;3a).

• Hệ dây hai lưới (hình 1.3b).

• Lưới dây có độ cong hai chiều khác nhau dạng hypecbolic, hypa (hyperboloid- paraboloic) (hình 1.3c).

Bộ phận đắt tiền và phức tạp nhất của hệ dây và mái treo bằng dây là kết cấu neo dây. Mái treo nhịp lớn hay nhịp nhỏ đều phải có kết cấu neo dây. Do đó về mặt kinh tế mái treo thường được dùng với nhịp lớn hơn 36m [54], [59], [61], [65]



Hình 1.3 Các giải pháp ổn định mái treo

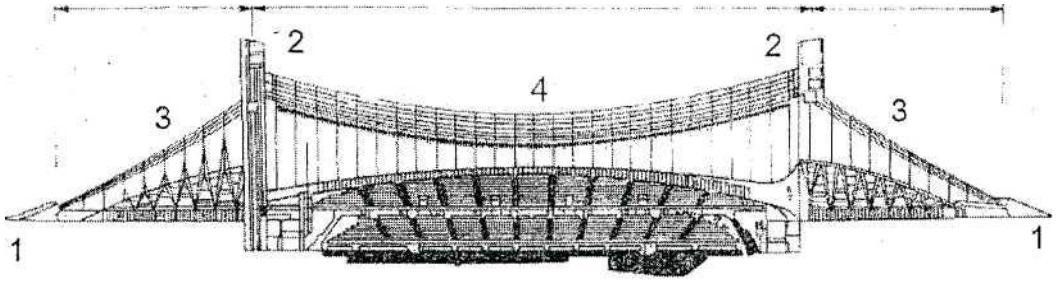
a - Chất tải nhân tạo, b - Dùng hệ dây hai lớp;

c - Dùng lưới dây cong hai chiều dạng Hypa.

Kết cấu neo của mái treo được thiết kế bảo đảm các yêu cầu sau: có khả năng chịu lực và chịu mỏi tương đương với dây, có khả năng điều chỉnh thay đổi chiều dài dây trong thi công, có khả năng vi chỉnh kéo căng hoặc thả chùng khi cần thiết trong quá trình khai thác, chống rỉ tốt, có không gian để thi công đơn giản và thuận tiện, dễ kiểm tra sửa chữa trong quá trình khai thác.

Có thể nêu ba giải pháp về kết cấu neo như sau:

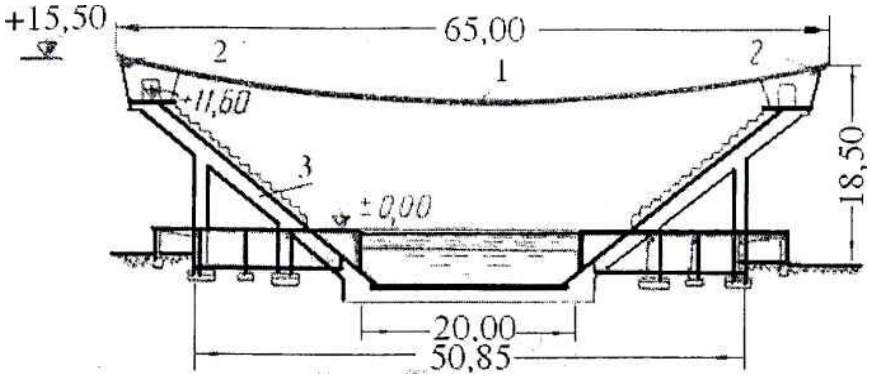
• Neo dây vào móng: Dùng kết cấu bể bơi Olimpic ở Tokyo (Nhật Bản) [32] làm ví dụ. Dây cáp chịu lực chính căng qua nhịp 126m vắt qua hai trụ cao và truyền vào trong móng cách trụ 44m (hình 1.4)



Hình 1.4. *Sơ đồ và mặt cắt dọc công trình Bể bơi Olimpic ở Tokyo*

1 - Khối neo (móng neo); 2 - Tháp trụ đỡ dây; 3 - Dây căng

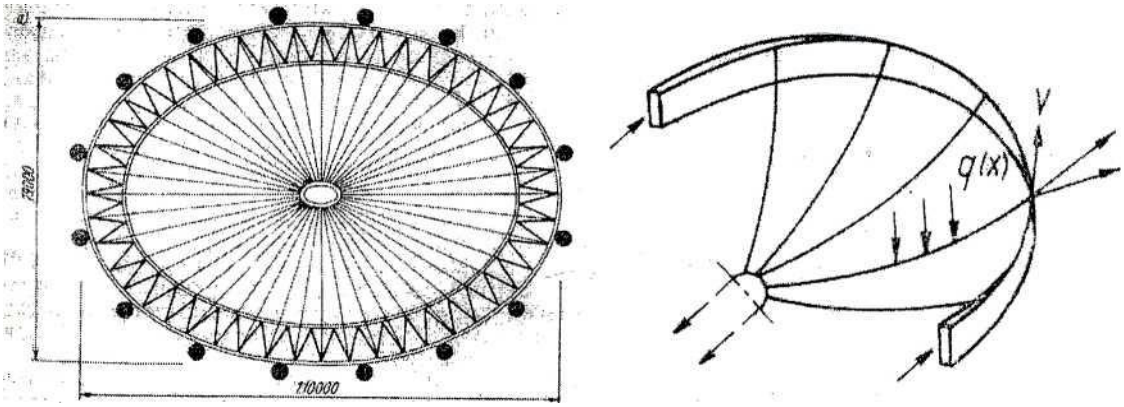
• Chọn dạng hình học và sơ đồ kết cấu công trình sao cho lực neo cũng có tác dụng ổn định của công trình: Lấy công trình bể bơi Wuppertal [27] làm ví dụ (hình 1.5). Lực căng trong dây được truyền qua neo vào dầm biên kích thước 60x360cm đặt trên đỉnh khung khán đài, khung khán đài kết hợp với hệ dầm sàn tiếp nhận tải trọng này và truyền vào móng công trình.



Hình 1.5*. Bể bơi Wuppertal, dùng khung sàn, cột khán đài chịu lực neo.*

1 - Dây căng; 2 - Dầm biên ; 3 - Khung khán đài

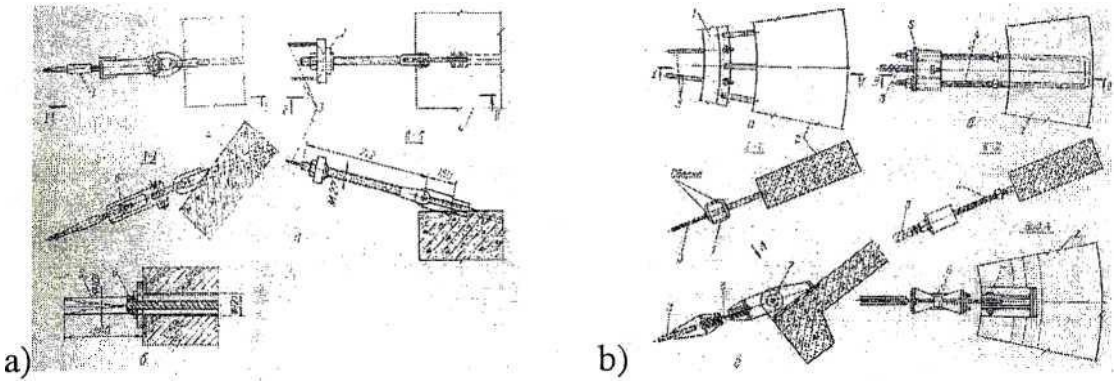
• Dùng các đài neo kín (dầm kín dạng tròn, đa giác phẳng hoặc không gian) chịu tác dụng của lực neo. Ví dụ nhà triển lãm New York [19], lực căng ngang của dây được truyền vào dầm biên dạng elip và triệt tiêu trong hệ dầm này (hình 1.6)



Hình 1.6. *Mặt bằng mái nhà triển lãm New York và sơ đồ triệt tiêu lực ngang*

Neo làm nhiệm vụ liên kết cáp với kết cấu neo và truyền lực căng từ cáp vào kết cấu neo. Bộ phận neo thường được chế tạo trong nhà máy để đảm bảo chất lượng và độ tin cây

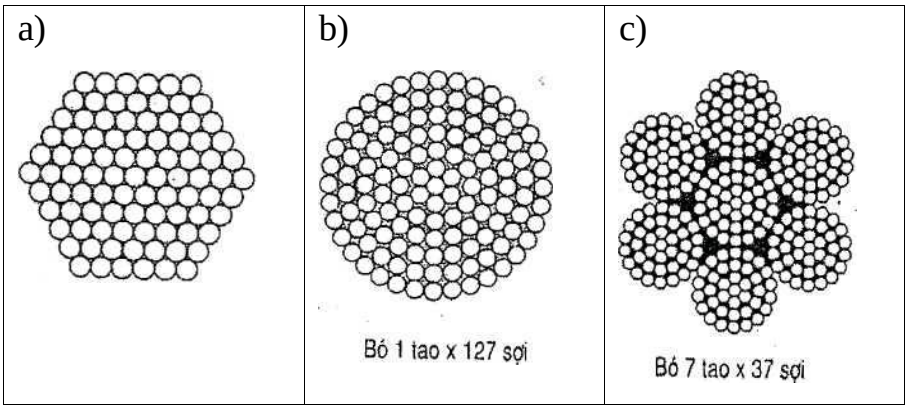
Khối neo là một bộ phận trong kết cấu neo nhằm liên kết neo vào kết cấu neo: Đối với dạng neo vào móng khối neo chính là khối móng; Đối với dạng neo vào biên đỡ thì khối neo là một bộ phận của kết cấu biên (hình 1.7)



Hình 1.7. *Một số chi tiết cấu tạo khối neo.*

a - Neo vào kết cấu biên thẳng; b - Neo vào kết cấu biên cong

Cáp dùng trong mái treo có các loại cáp kín, cáp hở, cáp một tao cáp nhiều tao, cáp song song (hình 1.8). Có rất nhiều loại cáp dùng trong mái treo và đều được chế tạo từ thép có cường độ cao. Việc chọn cáp cho hệ treo nói chung dựa vào lực kéo đứt, khả năng chịu mỏi cũng như yêu cầu về chế tạo, lắp đặt, thi công và cuối cùng là về kinh tế .



Hình 1.8. Mặt cắt một số dạng cáp dùng trong mái treo

a - Cáp nhiều tao; b - Cáp một tao; c - Cáp kín.

Các chỉ tiêu cơ lý của một số loại cáp thường dùng *ở* Mỹ [16] được trình bày bảng 1.1

Bảng 1.1 Bảng phân loại cáp

Cáp có vỏ bọc	Đường kính (in)	Lực kéo Min, (ksi)	Lực kéo tới hạn Min với 0,7% biến dạng (ksi)	Độ biến dạng khi độ dãn dài 10 in (%)
A	>=0,041	220	100	4
B	All	210	150	4
C	All	200	140	4

1.3. Dây mềm trong thiết kế cầu dây văng

Trong kết cấu cầu dây văng, dây làm việc chỉ chịu kéo, dầm và trụ tháp cầu làm việc như các kết cấu không gian chịu tác dụng đồng thời của lực dọc, lực cắt, mô men uốn và xoắn,… Việc tính toán ứng xử của hệ kết cấu chịu lực của cầu dây văng dưới tác động của tải trọng và các yếu tố môi trường là bài toán tổng thể phức tạp đã và đang được nghiên cứu nhiều trên thế giới. Lý thuyết tính toán cầu dây văng được khởi đầu từ cuối thế kỷ XVIII nhưng hầu như không phát triển trong hơn một thế kỷ cho đến tận giữa thế kỷ XX mới tiếp tục phát triển mạnh mẽ.

Vấn đề cơ bản trong lý thuyết tính toán cầu dây văng là bài toán phân tích kết cấu dây đơn và bài toán phân tích sự làm việc đồng thời của kết cấu dây với các loại kết cấu dầm (hệ thanh, hộp) và tháp khi chịu tác động của tải trọng và môi trường nhằm dự báo chính xác các ứng xử tĩnh học và động lực học của kết cấu. Dưới đây trình bày tóm tắt những thành tựu đã đạt được trên thế giới và trong nước liên quan đến tính toán kết cấu cầu dây văng.

1.3.1. Bài toán dây đơn

Khi tính toán, các giả thiết chính được sử dụng trong phân tích các hệ dây là dây chỉ có khả năng chịu kéo và ứng suất kéo được phân bố đều trên toàn bộ diện tích tiết diện ngang của dây, các dây trong hệ không có khả năng chịu nén và uốn (dây mềm tuyệt đối).

Đối với các dây đơn chịu tải trọng lực, hình dạng của dây tuân theo hình dạng của biểu đồ mô men trong dầm đơn giản chịu tác dụng của tải trọng giống như tải trọng tác dụng lên dây. Độ võng lớn nhất trên dây xuất hiện tại điểm ứng với vị trí có mô men lớn nhất và không có lực cắt trên dầm đơn giản (lý thuyết tương tự dầm) [10], [19],.

Do vị trí hình học của dây bị thay đổi khi chất tải trọng, nhất là đối với tải trọng ngang so với phương trục dây nên khi tính toán không thể áp dụng các phương pháp phân tích kết cấu phổ biến dựa trên cơ sở lý thuyết chuyển vị nhỏ, và cũng không thể áp dụng nguyên lý cộng tác dụng cho các hệ kết cấu dây. Ngoài ra, các lực căng trong dây sẽ thay đổi khi dây bị kéo dài dưới tác dụng của tải trọng, hệ quả là các phương trình cân bằng đối với kết cấu dây là các phương trình phi tuyến. Để giải hệ phương trình của kết cấu dây thường phải sử dụng các phương pháp tuyến tính hóa và giải lặp liên tiếp các phương trình tuyến tính hóa để hội tụ về lời giải chính xác.

1.3.1.1. Dây đơn chịu tác dụng của lực phân bố do trọng lượng bản thân

Bài toán tính dây đơn chịu tải trọng bản thân phân bố đều theo chiều dài dây lần đầu tiên được dẫn dắt bởi James Bernouilli năm 1691; lời giải đầu tiên được công bố bởi David Gregory năm 1697 [24].

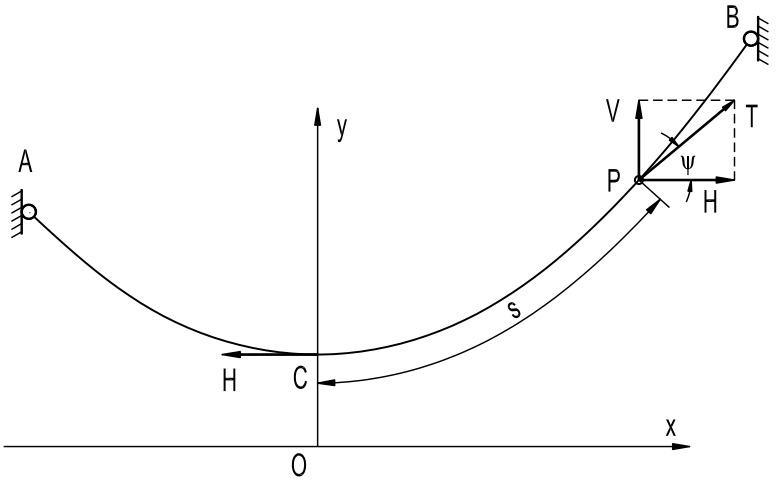
Xét dây đơn treo trên hai gối lệch mức A và B, dây có tiết diện không thay đổi và trọng lượng của dây phân bố đều dọc theo chiều dài của dây, gọi C là điểm thấp nhất trên dây khi dây bị võng (Hình 0.).

Đặt hệ tọa độ x0y có gốc ngay bên dưới điểm thấp nhất trên đường độ võng của dây, gọi g là trọng lượng trên một đơn vị dài của dây và s là chiều dài dây tính từ điểm C đến một điểm P bất kỳ trên dây, T là lực căng trong dây tại điểm P, H là thành phần chiếu lên phương ngang của lực căng trong dây và cũng là lực căng trong dây tại điểm võng nhất C, góc nghiêng giữa tiếp tuyến của dây tại P với phương ngang là ψ, V là thành phần hình chiếu lên phương đứng của lực căng trong dây.

Dây được xem là mềm tuyệt đối. Từ điều kiện cân bằng của đoạn dây CP ta có các phương trình cân bằng lực như sau:

$$T\cos\psi = H \tag{0.1}$$

$$T\sin\psi = g.s \tag{0.2}$$



Hình 0.9 Sơ đồ tính dây đơn treo trên hai gối lệch mức

Đặt $H = g.c$ và chia phương trình (0.2) cho phương trình (0.1) ta có:

$$s = c\tan\psi \tag{0.3}$$

Biểu thức (0.3) là phương trình của đường cong dây do trọng lượng bản thân (đường caternary), hằng số c được gọi là tham số của đường caternary. Biểu diễn trong hệ tọa độ Đề các thì phương trình (0.3) có thể viết lại dưới dạng:

$$c\frac{dy}{dx} = s \tag{0.4}$$

Lấy đạo hàm theo x, từ các biểu thức (0.3) và (0.4) ta nhận được:

$$c\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{0.5}$$

Tích phân biểu thức (0.5) ta nhận được:

$$c.\sinh^{-1}(dy/dx) = x + A,$$

với A là hằng số tích phân. Do gốc tọa độ nằm thẳng đứng ngay bên dưới điểm võng nhất trên dây C, nên tại x=0 thì $dy/dx = 0$, vì vậy A=0 và ta có phương trình vi phân đường độ võng của dây là:

$$\frac{dy}{dx} = \sinh\frac{x}{c} \tag{0.6}$$

Tích phân biểu thức (0.6) ta nhận được:

$$y = c.\cosh\frac{x}{c} + B$$

với B là hằng số tích phân. Nếu ta bố trí hệ tọa độ sao cho khoảng cách $\overline{0C} = c$ thì tại x=0 ta có y=c và do đó B=0. Do vậy phương trình dạng đường độ võng của dây đơn do tác dụng của trọng lượng bản thân phân bố đều trên dây là:

$$y = c\ \cosh\frac{x}{c} \tag{0.7}$$

Từ (0.3) và (0.6), chiều dài dây tính từ điểm thấp nhất đo dọc theo dây được xác định theo biểu thức:

$$s = c.\sinh\frac{x}{c} \tag{0.8}$$

Để tính lực căng tại một điểm bất kỳ trên dây, bình phương các biểu thức (0.1) và (0.2) rồi cộng lại theo từng vế ta được $T^2 = g^2\left(c^2 + s^2\right)$, xét đến các biểu thức (0.7) và (0.8), sau khi biến đổi ta có:

$$T = g.y \tag{0.9}$$

Từ các kết quả trên, nhận thấy: Lực căng trong dây có phương tiếp tuyến với đường cong của dây và có thể được phân thành các thành phần theo phương ngang và phương đứng; thành phần nằm ngang $H = g.c$ là không đổi ở mọi điểm dọc theo dây; thành phần thẳng đứng $V = g.s$ và thay đổi theo các điểm trên dây. Lực căng lớn nhất trong dây sẽ xuất hiện ở cùng vị trí mà thành phần lực thẳng đứng đạt giá trị lớn nhất, và thường ở vị trí một trong các gối treo dây, còn lực căng trong dây nhận giá trị nhỏ nhất tại điểm có độ võng lớn nhất.

Từ các biểu thức (0.7)÷(0.9) ta thấy để xác định được lực căng trong dây cũng như độ võng của dây tại một điểm bất kỳ trên dây thì cần phải xác định được tham số c của đường caternary. Việc này chỉ có thể giải đúng dần nếu cho trước chiều dài tổng cộng của dây hoặc độ võng lớn nhất của dây.

1.3.1.2. Dây đơn chịu tác dụng của lực thẳng đứng phân bố đều theo nhịp

Bài toán dây đơn chịu tác dụng của tải trọng thẳng đứng phân bố đều theo nhịp là bài toán khá phổ biến trong thực tiễn, đặc biệt trong xây dựng cầu treo dây võng. Mặc dù bài toán dây đơn chịu tải trọng bản thân được giải quyết từ đầu thế kỷ XVII, nhưng mãi đến hơn 100 năm sau lời giải đầu tiên của bài toán dây đơn chịu tải trọng thẳng đứng phân bố đều theo nhịp mới được giải và công bố bởi Nicholas Fuss khi thiết kế cầu treo qua sông Neva gần Leningrad (LB Nga) vào năm 1794 [24].

Xét dây đơn treo trên hai gối tựa A và B. Dây chịu tác dụng của tải trọng theo phương trọng lực và phân bố đều theo nhịp với cường độ là g_0. Đặt hệ tọa độ có gốc tại điểm thấp nhất trên dây (điểm C). Gọi T là lực căng trong dây tại P, H là thành phần chiếu lên phương ngang của lực căng trong dây và cũng là lực căng trong dây tại điểm võng nhất C, góc nghiêng giữa tiếp tuyến của dây tại P với phương ngang là ψ, V là thành phần hình chiếu lên phương đứng của lực căng trong dây.

Dây được xem là mềm tuyệt đối và không bị dãn dài do trọng lượng bản thân. Từ điều kiện cân bằng của đoạn dây CP ta có các phương trình cân bằng lực như sau:

$$T\cos\psi = H \tag{0.10}$$

$$T\sin\psi = g_0.x \tag{0.11}$$

Chia biểu thức (0.11) cho biểu thức (0.10) ta có:

$$\tan\psi = \frac{dy}{dx} = \frac{g_0.x}{H} \tag{0.12}$$

Tích phân biểu thức (0.12), khử hằng số tích phân từ điều kiện y=0 tại x=0 ta được phương trình biểu diễn đường độ võng của dây là đường parabol:

$$y = \frac{g_0}{2H}x^2 \tag{0.13}$$

Lực căng tại một điểm bất kỳ trên dây được xác định từ biểu thức (0.10): $T = H(ds/dx) = H\sqrt{1+(dy/dx)^2}$. Từ (0.13) ta có $dy/dx = g_0 x/H$ nên thay vào ta nhận được biểu thức tính lực căng tại điểm bất kỳ trên dây:

$$T = H\sqrt{1+\frac{g_0^2.x^2}{H^2}} \tag{0.14}$$

Trường hợp đặc biệt khi dây treo trên các gối ngang mức, khi đó điểm võng nhất của dây tại giữa nhịp, lực căng trong dây tại vị trí các gối bằng nhau và có thể xác định theo các biểu thức sau:

+ Thành phần ngang của lực căng: $H = \frac{g_0 l^2}{8f}$ (0.15)

+ Lực căng trong dây tại gối: $T_{max} = \frac{g_0 l^2}{8f}\sqrt{1+\frac{16f^2}{l^2}}$ (0.16)

+ Chiều dài của dây giữa hai gối treo:

$$L = l\left(1+\frac{8}{3}\frac{f^2}{l^2}-\frac{32}{5}\frac{f^4}{l^4}+\frac{256}{7}\frac{f^6}{l^6}+...\right) \tag{0.17}$$

Cũng tương tự như với trường hợp dây chịu tải trọng bản thân phân bố đều theo nhịp, ở đây ta cũng nhận thấy các phương trình nhận được mới chỉ cho ta quy luật đường độ võng của dây và sự phân bố của lực căng trong dây mà chưa tính được biến dạng của dây; ngoài ra để tính được lực căng hay đường độ võng của dây vẫn phải cho trước chiều dài dây hoặc mũi tên võng của dây.

Lời giải của bài toán tính độ dãn dài và chuyển vị của dây đơn dưới tác dụng của tải trọng hay nhiệt độ đã được công bố bởi Rankine năm 1858 và Routh năm 1891[24], dưới tác dụng của tải trọng phân bố đều hay nhiệt độ làm dây bị biến dạng đàn hồi và đường độ võng của dây vẫn giữ nguyên dạng là đường caternary

hay đường parabol nhưng độ võng và chiều dài tăng lên. Tuy nhiên trong thực tiễn tính toán thường xấp xỉ bằng đường parabol, khi đó độ dãn dài (biến dạng đàn hồi) của dây dưới tác dụng của tải trọng phân bố đều:

$$\Delta L = \frac{Hl}{AE}\left(1+\frac{16}{3}\frac{f^2}{l^2}\right) \tag{0.18}$$

trong đó: A là diện tích tiết diện ngang của dây; E là mô đun đàn hồi của vật liệu dây; H là thành phần chiếu lực căng trong dây theo phương ngang; l là chiều dài nhịp treo dây; f là mũi tên võng của đường độ võng của dây. Biến thiên độ võng của dây tại giữa nhịp được tính gần đúng theo:

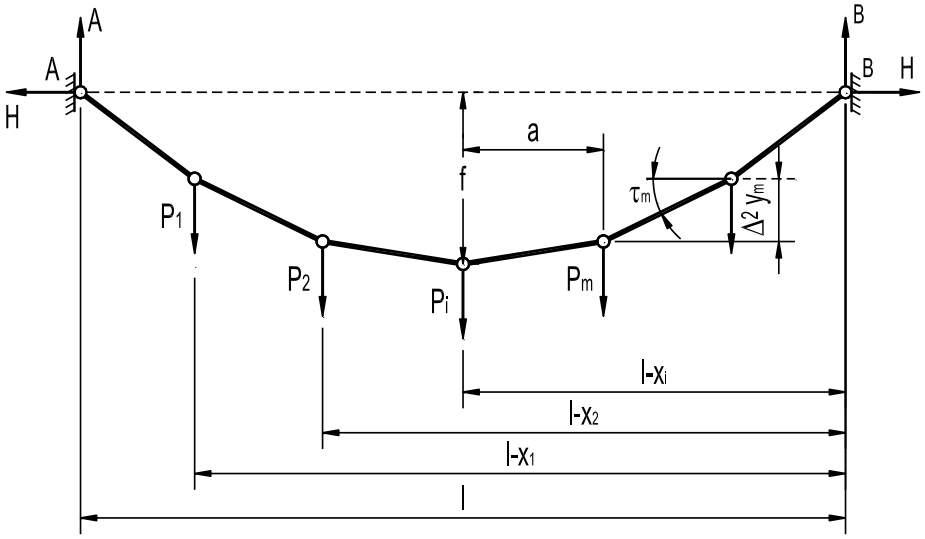
$$\Delta f = \frac{15}{16}\frac{l}{f}\left(\frac{\Delta L}{5-24f^2/l^2}\right) \tag{0.19}$$

Biến thiên của độ võng của dây dưới tác dụng của nhiệt độ có thể tính theo biểu thức (1.20) với hệ số giãn nở nhiệt của vật liệu dây là α.

$$\Delta f = \frac{15}{16}\frac{l^2\alpha t}{f\left(5-24f^2/l^2\right)}\left(1+\frac{8}{3}\frac{f^2}{l^2}\right) \tag{0.20}$$

1.3.1.2. Dây đơn chịu tác dụng của tải trọng bất kỳ

Bài toán dây đơn chịu tác dụng của tải trọng tập trung đã được nhiều tác giả nghiên cứu như Melan **Error! Reference source not found.**, Petropavlovxki **Error! Reference source not found.**. Dây thường được xấp xỉ bằng những đường gẫy khúc liên tục (hình 1.10). Sử dụng lý thuyết đàn hồi để tiến hành phân tích xét cân bằng của dây dưới tác dụng của các lực tập trung. Để xét đến biến dạng dài của dây dưới tác dụng tải trọng vẫn phải sử dụng các lời giải lặp.



Hình 0.10 Sơ đồ tính dây của Melan **Error! Reference source not found.**

V.A. Smirnov (1975) **Error! Reference source not found.** đã trình bày lời giải cho bài toán dây chịu tải bất kỳ (tải tập trung bất kỳ, tải phân bố theo cả phương ngang và phương đứng) có xét đến biến dạng của dây. Lời giải nhận được theo nguyên lý năng lượng bằng cách xấp xỉ dây bằng đường gãy khúc và lực phân bố được quy về các lực tập trung đặt tại các nút. Quan hệ lực căng và biến dạng là đàn hồi theo định luật Hook. Dạng đường cong của dây trước khi biến dạng cũng phải xác định trước.

Ở Việt Nam đã có một số tác giả [10], [19] trình bày bài toán dây và sử dụng lý thuyết dây tương tự dầm **Error! Reference source not found.** trong tính toán hệ treo và cầu treo. Gần đây, năm 2006 tác giả Phạm Văn Trung [20] trong luận án tiến sỹ nghiên cứu về kết cấu dây và mái treo đã áp dụng phương pháp Nguyên lý Cực trị Gauss để xây dựng và giải bài toán dây đơn chịu lực tập trung và lực phân bố theo phương bất kỳ. Dây được xấp xỉ thành đường gấp khúc, lực phân bố trên dây được quy gần đúng thành các lực tập trung đặt tại các nút của đường gấp khúc. Hệ phương trình của bài toán được xây dựng từ điều kiện cực tiểu của phiếm hàm lượng cưỡng bức viết cho toàn bộ kết cấu dây:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} EA\left(\frac{N_i}{EA}\right)^2 S_{0i} - \sum_{i=1}^{n-1} 2P_{xi}u_i - \sum_{i=1}^{n-1} 2P_{yi}v_i - \sum_{i=1}^{n-1} 2P_{zi}w_i \rightarrow \min \qquad (0.21)$$

trong đó: EA là độ cứng chống biến dạng dọc của dây; N_i là lực căng trong đoạn dây thứ i; S_{0i} là chiều dài của đoạn dây thứ i trước khi biến dạng; P_{xi}, P_{yi}, P_{zi} tương

ứng là các lực tập trung theo các phương x, y, z tác dụng lên dây tại nút thứ i; u_i, v_i, w_i tương ứng là chuyển vị của dây theo các phương x, y, z tại nút thứ i. Phương pháp này có ưu điểm là không cần phải giả thiết trước dạng đường độ võng của dây.

Nhận xét: Lý thuyết tính dây đơn cổ điển dựa trên cơ sở của lý thuyết đàn hồi, từ điều kiện cân bằng lực của dây đã dẫn ra được phương trình đường độ võng của dây khi chịu tác dụng của lực phân bố đều theo phương trọng trường (phương thẳng đứng) là:

1) Đường cong hypecbol khi tải trọng là phân bố đều theo chiều dài dây;

2) Đường cong parabol khi tải trọng là phân bố đều theo chiều dài nhịp. Dạng đường cong parabol có thể dùng để tính gần đúng cho dạng đường cong dây xích khi dây thỏa mãn điều kiện dây thoải (tỉ số giữa độ võng và chiều dài nhịp không lớn). Đối với dây đơn chịu tải trọng tập trung, dây thường được xấp xỉ bằng đường gẫy khúc và cũng sử dụng lý thuyết đàn hồi để xác định lực căng trong dây.

Bài toán dây chịu lực ngang (phương tác dụng của lực không trùng với trục dây) là bài toán phi tuyến do phải kể đến sự thay đổi hình dạng do chuyển vị của dây khi chịu tải. Tuy nhiên lý thuyết dây hiện nay mới chỉ là lý thuyết gần đúng do chưa cho phép xác định đồng thời cả chuyển vị và nội lực trong dây khi chịu tải mà chỉ cho ta dạng đường độ võng và quy luật phân bố lực căng trong dây; khi tính toán phải biết trước chiều dài dây, hay độ võng lớn nhất của dây hoặc lực căng ngang trong dây. Vì vậy khi ghép vào bài toán phân tích hệ dây liên hợp như cầu dây văng hay cầu dây võng hoặc hệ mái treo thì thường phải đưa thêm các giả thiết đơn giản hóa để tính toán.

1.3.2. Phân tích tĩnh học kết cấu cầu dây văng

Ngày nay, các phương pháp tính toán hệ kết cấu dây liên hợp có thể phân ra thành hai nhóm: nhóm phương pháp cổ điển và nhóm phương pháp hiện đại. Nhóm các phương pháp cổ điển có thể phân chia thành hai nhóm nhỏ tùy theo cơ sở lý thuyết được áp dụng là lý thuyết đàn hồi hay lý thuyết biến dạng; trong tính toán cầu dây, cả hai lý thuyết này đều được dùng để phân tích tổng thể hệ kết cấu liên hợp dây-dầm của kết cấu nhịp cầu theo mô hình bài toán phẳng.

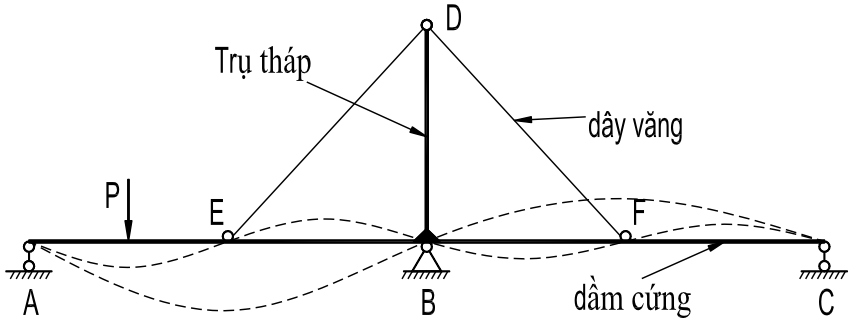
Các phương pháp phân tích theo lý thuyết biến dạng và theo lý thuyết đàn hồi đều chấp nhận các giả thiết: Dây cáp là mềm tuyệt đối; dầm nhịp nằm ngang và thẳng; mô men quán tính hình học của dầm nhịp là hằng số; tĩnh tải do trọng lượng bản thân kết cấu nhịp và dây cáp là phân bố đều; đường độ võng của các dây cáp có

dạng đường cong parabol. Sự khác biệt của các phương pháp tính theo hai lý thuyết vừa nêu là việc có hay không kể đến biến dạng của dây cáp do hoạt tải gây ra.

Nhóm phương pháp hiện đại là các phương pháp số, điển hình là phương pháp phần tử hữu hạn. Cùng với sự phát triển của máy tính điện tử, phương pháp phần tử hữu hạn đã được phát triển trở thành một phương pháp số hiện đại dùng trong phân tích kết cấu với độ chính xác cao. Phương pháp này cho phép phân tích hệ kết cấu cầu dây theo mô hình phẳng hoặc mô hình không gian.

1.3.2.1 Phương pháp tính theo lý thuyết đàn hồi

Ứng xử tĩnh của cầu dây văng có thể được xem xét một cách rõ ràng từ một kết cấu đơn giản với hai nhịp như trên Hình 0.3.



Hình 0.3 Sơ đồ tính cầu dây văng theo lý thuyết đàn hồi **Error! Reference source not found.Error! Reference source not found., Error! Reference source not found.**

Dầm nhịp được treo trên hai dây đơn tại các điểm E, F và kê lên trụ tháp đặt tại điểm giữa B.

Với bài toán này hệ sẽ có hai bậc siêu tĩnh của cáp và một bậc siêu tĩnh tại gối. Nếu như cáp và trụ tháp có độ cứng vô cùng lớn thì nhịp cầu sẽ làm việc như một dầm liên tục 4 nhịp đặt trên các gối tựa ABEF và C. Dây cáp là kết cấu đàn hồi nên sẽ làm việc như một lò xo (gối đàn hồi), còn trụ tháp cũng đàn hồi nhưng có tiết diện rất lớn nên có thể xem như gối cứng. Nếu độ cứng của cáp tiến tới không (bỏ qua ảnh hưởng của cáp) dầm sẽ bị biến dạng như dầm hai nhịp ABC.

Việc phân tích tĩnh học của cầu dây văng theo lý thuyết đàn hồi thường được thực hiện theo mô hình bài toán phẳng bằng cách bổ sung các bậc siêu tĩnh tương thích với hệ kết cấu không gian và việc phân tích không gian thường được thực hiện với các hệ có bậc siêu tĩnh rất lớn (40÷60).

Khi phân tích tĩnh học cầu dây văng theo các phương pháp của lý thuyết đàn hồi thường xem dây cáp văng là thẳng và sử dụng độ cứng tương đương của dây để kể đến độ võng của dây do trọng lượng bản thân. Hệ cơ bản có thể là tĩnh định hay siêu tĩnh, lời giải được thực hiện theo phương pháp lực hoặc phương pháp chuyển vị. Hệ cơ bản tĩnh định thường được chọn bằng cách hóa khớp tai các điểm liên kết giữa dây với dầm cứng và trụ tháp; hệ cơ bản siêu tĩnh có thể dầm liên tục trên gối đàn hồi và ẩn số là các lực căng trong cáp, hoặc hệ cơ bản đối xứng và cộng tác dụng của lời giải chất tải đối xứng và phản xứng. Chi tiết về các phương pháp tính cầu dây văng theo lý thuyết đàn hồi có thể tham khảo trong các tài liệu tham khảo **Error! Reference source not found.**, **Error! Reference source not found.** và sẽ không được trình bày ở đây.

Các phương pháp tính theo lý thuyết đàn hồi không kể đến biến dạng của dây khi chịu tải và thường xem dây cáp văng là dây thẳng. Vì vậy các phương pháp này chỉ hạn chế ứng dụng cho các cầu dây văng có nhịp nhỏ với độ cứng lớn và bố trí ít dây cáp văng. Đối với các cầu dây văng hiện đại thường sử dụng dầm cứng có độ mảnh lớn, nhịp cầu dài và bố trí nhiều dây văng nên không thể áp dụng các phương pháp tính theo lý thuyết đàn hồi hoặc nếu có áp dụng thì chỉ để tính toán nhằm phục vụ thiết kế sơ bộ.

1.3.2.2. Phương pháp tính theo lý thuyết biến dạng

Sự thay đổi hình dạng kết cấu cầu dây văng dưới tác dụng tải trọng nhỏ hơn đáng kể so với cầu treo dây võng. Ảnh hưởng của biến dạng đến ứng suất của kết cấu cầu là tương đối nhỏ. Trong mọi trường hợp, biến dạng có xu hướng làm tăng ứng suất trong kết cấu. Thực tiễn xây dựng cầu cho thấy ảnh hưởng của biến dạng đến ứng suất trong dầm nhiều hơn so với ứng suất trong cáp (Cầu Severn, ảnh hưởng của biến dạng đến tăng ứng suất là 6% đối với dầm và <1% đối với cáp; đối với cầu Düsseldorf North thì biến dạng của kết cấu làm tăng ứng suất của dầm nhịp là 12%) **Error! Reference source not found.**.

Từ phân tích trên, W.Podolny và các tác giả phương Tây **Error! Reference source not found.**, **Error! Reference source not found.** đã đề xuất phương pháp tính theo lý thuyết biến dạng bằng việc tính toán lặp liên tiếp lời giải theo lý thuyết đàn hồi có kể đến sự thay đổi lực căng trong dây và nội lực trong kết cấu dầm, trụ tháp do biến dạng của kết cấu trong mỗi bước tính lặp. Khi xây dựng sơ đồ tính thường coi dây văng là thanh thẳng chỉ chịu kéo và sử dụng mô đun đàn hồi tương đương do J.H Ernst đưa ra để kể đến ảnh hưởng của độ võng do trọng lượng bản

thân của dây. Mô đun đàn hồi của thanh tương đương nhằm xét đến độ võng của dây cáp do trọng lượng bản thân có thể được tính theo các trường hợp sau:

• Trường hợp coi ứng suất trong cáp dây văng thay đổi không đáng kể dưới tác động của hoạt tải:

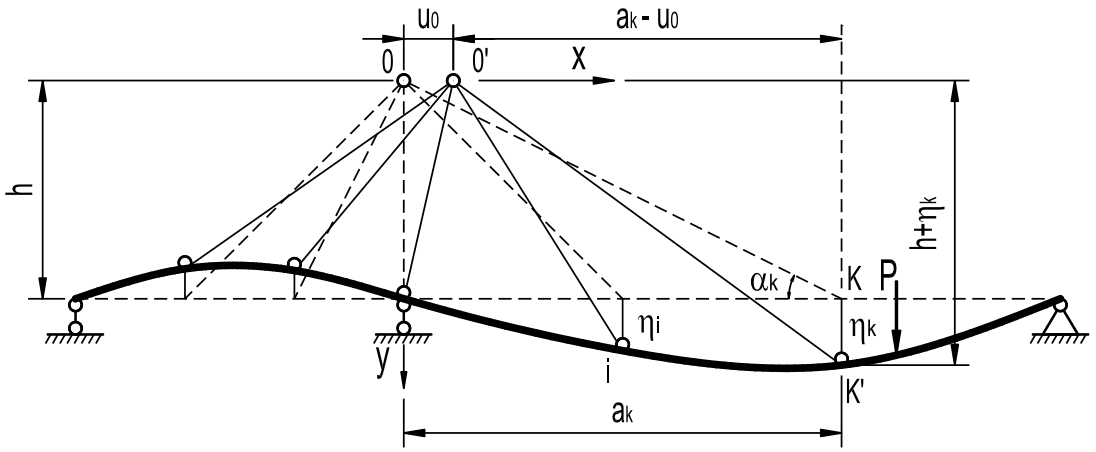
$$E = \frac{E_0}{1 + \frac{(gl\cos\alpha)^2}{12\sigma^3} E_0} \tag{0.22}$$

• Trường hợp xét đến sự thay đổi ứng suất trong cáp dây văng dưới tác động của hoạt tải:

$$E = \frac{E_0}{1 + \frac{(gl\cos\alpha)^2 (\sigma_1 + \sigma_2)}{24\sigma_1^2\sigma_2^2} E_0} \tag{0.23}$$

trong đó: E- mô đun đàn hồi tương đương có xét đến độ võng của cáp dây văng; E_0- mô đun đàn hồi của cáp dây văng khi chưa xét đến độ võng (cáp thẳng); g - trọng lượng trên một đơn vị dài của cáp dây văng; l- chiều dài cáp dây văng; α- góc nghiêng của dây văng so với phương ngang; σ- ứng suất kéo trong cáp dây văng; σ_1, σ_2- tương ứng là ứng suất lớn nhất và nhỏ nhất trong cáp dây văng.

Trong tài liệu xuất bản năm 1975 của mình, Smirnov **Error! Reference source not found.** đã trình bày phương pháp gần đúng dựa trên lý thuyết biến dạng để phân tích tĩnh học kết cấu nhịp của cầu dây văng (Hình 0.). Trong phương pháp tính đề xuất, ông giả thiết rằng dây là thanh thẳng chỉ chịu kéo và có thể bị dãn dài trong quá trình làm việc dưới tác dụng của tải trọng, góc nghiêng của dây với dầm nhịp cầu không thay đổi trước và sau khi biến dạng do chuyển vị của dầm và tháp là bé; khi chịu tác dụng của hoạt tải, dầm chỉ có chuyển vị thẳng đứng và tháp chỉ có chuyển vị ngang; tuyến tính hóa lực căng trong dây bằng cách bỏ qua các thành phần bậc cao liên quan đến chuyển vị và độ dãn dài của dây trong biểu thức tính chiều dài dây sau biến dạng.



Hình 0.12 Sơ đồ tính cầu dây văng theo lý thuyết biến dạng của Smirnov

Phương pháp số gần đúng của Smirnov chỉ phù hợp cho hệ có chuyển vị nhỏ và ứng xử của hệ là tuyến tính nên kết quả tính sẽ không phù hợp với các cầu dây văng nhịp lớn, phương pháp này chỉ có thể dùng tính toán sơ bộ ban đầu để chọn tiết diện và lực căng ban đầu trong dây.

Khi nghiên cứu tính toán cầu dây văng theo lý thuyết biến dạng, Petropavlovxki **Error! Reference source not found.** xem dây văng như thanh thẳng chỉ chịu kéo. Để kể đến ảnh hưởng của độ võng của dây do tác dụng của trọng lượng bản thân có thể sử dụng diện tích tiết diện tương đương xác định tùy theo mức độ thay đổi ứng suất trong dây khi chịu tải:

• Trường hợp xét đến sự thay đổi ứng suất trong cáp dây văng dưới tác động của hoạt tải (khi $\left|N_2 - N_1\right| \geq 0{,}1N_1$):

$$A = \frac{A^*}{1 + \frac{p^2 l^2 E A^* \left(N_1 + N_2\right)}{24 N_1^2 N_2^2}} \tag{0.24}$$

• Trường hợp coi ứng suất trong cáp dây văng thay đổi không đáng kể dưới tác động của hoạt tải (khi $\left|N_2 - N_1\right| < 0{,}1N_1$):

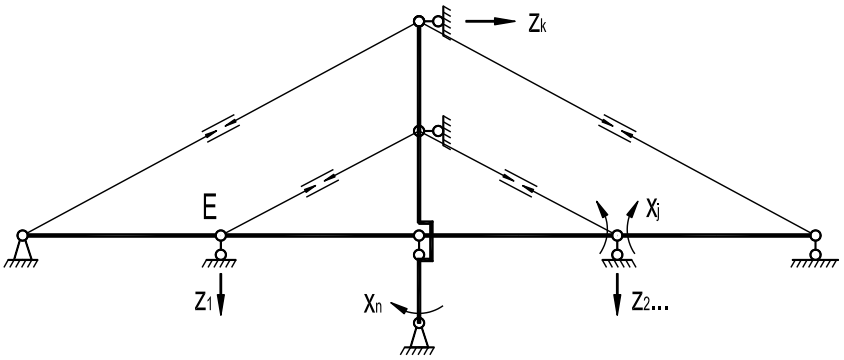
$$A = \frac{A^*}{1 + \frac{p^2 l^2 E A^*}{12 N_1^3}} \tag{0.25}$$

trong đó, N_1 là lực căng ban đầu trong dây, N_2 là giá trị gần đúng của giới hạn trên (hoặc dưới) của nội lực trong dây, l là chiều dài nhịp treo dây, p là tải trọng phân bố

đều trên một đơn vị dài của chiều dài dây, A^* là diện tích tiết diện của dây khi không xét đến độ võng do trọng lượng bản thân. Trường hợp quan hệ ứng suất và biến dạng trong dây là phi tuyến $N = N(\Delta)$, với Δ là biến dạng dọc trục của dây, thì mô đun đàn hồi của dây được xác định như sau:

$$E = \frac{N_2 - N_1}{\Delta_2 - \Delta_1} \quad \text{khi } |N_2 - N_1| \geq \beta N_1$$
$$E = \frac{dN}{d\Delta} \quad \text{khi } |N_2 - N_1| < \beta N_1 \qquad (0.26)$$
$$0 < \beta \leq 0{,}1$$

Sử dụng phương pháp lực với hệ cơ bản được hóa khớp tại các điểm liên kết dây với dầm và tháp, ẩn số là lực căng trong dây và mô men uốn trong dầm, tháp (Hình 1.13). Sử dụng lý thuyết đàn hồi để xây dựng hệ phương trình cân bằng đối với hệ cơ bản.



Hình 0.13 Phương pháp hóa khớp của Petropavlovki

1.3.2.3. Phương pháp phần tử hữu hạn

Sự phát triển của máy tính điện tử và sự ra đời của các phương pháp số như phương pháp dải hữu hạn, phương pháp phần tử hữu hạn từ giữa thế kỷ XX đã giúp cho việc phân tích và tính toán kết cấu cầu nói chung và cầu dây văng, cầu treo dây võng nói riêng được hoàn thiện. Hiện nay phương pháp PTHH đã được sử dụng phổ biến trong tính toán tĩnh học và động lực học cầu và được phát triển thành các phần mềm thương mại như MIDAS Civil, RM, CSI Bridge, ABAQUS, ANSYS,…

Khi tính cầu dây văng bằng phương pháp PTHH, tùy theo yêu cầu chi tiết của bài toán và nội dung cần khảo sát mà có thể sử dụng nhiều loại phần tử hữu hạn khác nhau để mô hình hóa kết cấu (Hình 0.4). Mỗi dây văng trong cầu dây văng có thể được mô hình hóa bằng một hay nhiều phần tử thanh thẳng chỉ chịu kéo và ghép

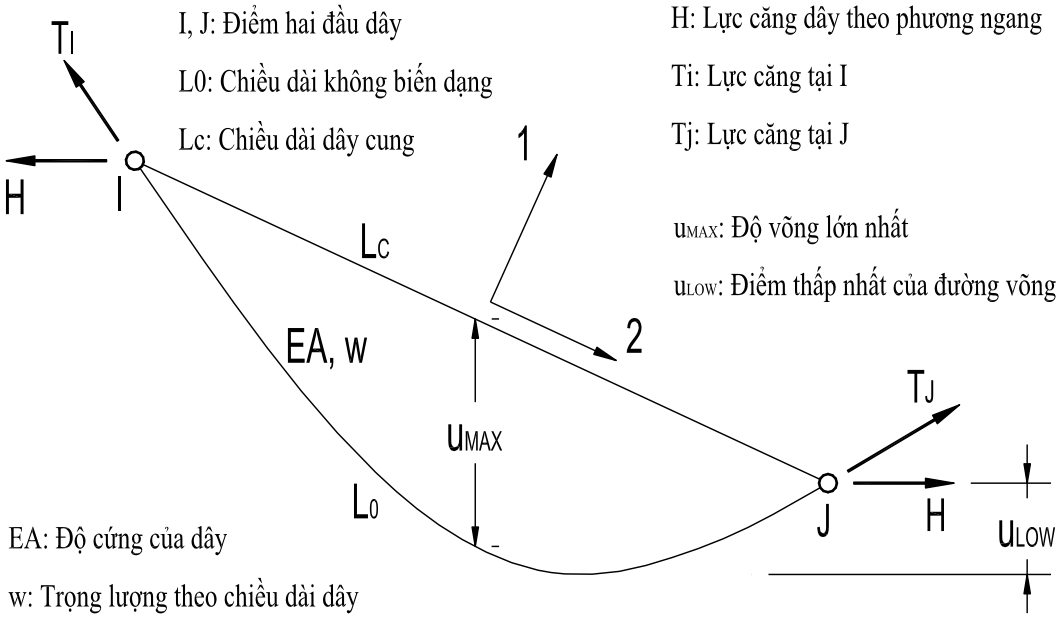
nối liên tiếp; hoặc mô hình hóa bằng một phần tử dây thẳng có tiết diện hay độ cứng tương đương để xét đến độ võng của cáp do trọng lượng bản thân. Ngoài ra để mô tả chính xác hơn hiệu ứng phi tuyến của cáp có thể áp dụng lý thuyết biến dạng lớn, dây văng được mô hình hóa bằng một hay nhiều phần tử dây caternary ghép nối liên tiếp, phương trình xác định vị trí ban đầu của dây được lập theo lý thuyết cổ điển của dây đơn khi xét trọng lượng bản thân của dây. Trong trường hợp mô hình hóa dây bằng phần tử dây caternary, để xác định được hình dạng ban đầu của dây thì phải cho trước một trong các thông số sau :

• Chiều dài của dây nối giữa hai điểm treo dây,

• Độ lớn của mũi tên võng (khoảng cách từ điểm võng nhất đến đường dây cung),

• Thành phần hình chiếu lên phương ngang của lực căng ban đầu trong dây (là hằng số),

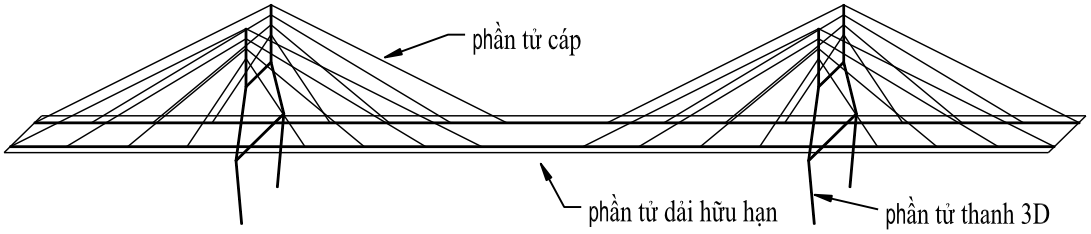
• Lực căng trong dây tại hai đầu liên kết.



Hình 0.14 Phần tử dây Caternary trong phần mềm PTHH của CSI Bridge

Đối với kết cấu dầm nhịp và trụ tháp trong cầu dây văng có thể sử dụng kết hợp các loại PTHH như phần tử thanh không gian chịu tác dụng đồng thời của lực dọc, lực cắt, mô men uốn và mô men xoắn; phần tử khối, phần tử thanh phẳng, phần tử vỏ hay phần tử tấm mỏng,… tùy theo yêu cầu của bài toán cần phân tích và loại kết cấu được sử dụng để nhằm mô tả sát thực nhất ứng xử của kết cấu trong bài toán được khảo sát. Tuy nhiên trong các tính toán tĩnh học của cầu dây văng thường sử

dụng mô hình bài toán phẳng đối với hệ kết cấu một mặt phẳng dây hay mô hình bài toán không gian cho các hệ có nhiều hơn một mặt phẳng dây. Chi tiết về các phương pháp mô hình hóa kết cấu dầm nhịp cầu và trụ tháp bằng PTHH có thể tham khảo thêm trong tài liệu và sẽ không trình bày ở đây. Hệ phương trình của kết cấu cầu dây văng khi phân tích theo phương pháp phần tử hữu hạn được xây dựng dựa trên nguyên lý năng lượng (nguyên lý chuyển vị khả dĩ, nguyên lý công ảo) là hệ phương trình phi tuyến và thường được giải bằng phương pháp lặp Newton-Raphson.



Hình 0.4 Mô hình PTHH 3 chiều tính cầu dây văng

Bởi vì cầu dây văng và cầu treo vốn có kết cấu nhịp dài và rất linh hoạt, ứng xử và sự làm việc của kết cấu phụ thuộc vào dự đoán chính xác phản ứng của kết cấu cho cả tải trọng ngắn hạn và dài hạn, chẳng hạn như hiệu ứng nhiệt độ, từ biến của vật liệu cầu, sự chùng của ứng suất trước, hiệu ứng uốn dọc trong dầm cứng và tháp do lực căng của cáp gây ra, tải trọng động của phương tiện giao thông, gió và tải trọng động đất. Để đánh giá chính xác ảnh hưởng của các hiệu ứng phi tuyến vừa nêu, các nghiên cứu gần đây đã sử dụng phương pháp PTHH kết hợp với các thuật toán giải lặp và các thuật toán tối ưu để phân tích cầu dây văng.

Nhận xét: Bài toán phân tích tĩnh học của kết cấu cầu dây văng là bài toán phi tuyến khi xét sự làm việc đồng thời của các dây đơn với các kết cấu dầm cứng và trụ tháp. Các phương pháp tính hiện hành đều là các phương pháp gần đúng do việc đặt bài toán xuất phát từ lý thuyết dây cổ điển chỉ cho phép xác định trạng thái cân bằng của dây mà chưa cho phép xác định đồng thời cả nội lực và biến dạng của dây. Để tính toán cần phải đưa vào các giả thiết bổ sung để mô tả đặc trưng biến dạng của dây cũng như điều kiện liên kết giữa dây với dầm cứng và trụ tháp.

CHƯƠNG 2
PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN LÝ CỰC TRỊ GAUSS

Chương này trình bày nguyên lý Gauss, sau đó trình bày phương pháp mới dựa trên nguyên lý cực trị Gauss để xây dựng và giải các bài toán cơ học dưới dạng tổng quát, chủ yếu là của cơ hệ vật rắn biến dạng.

2.1. Nguyên lí cực trị Gauss

Năm 1829 nhà toán học người Đức K.F. Gauss đã đưa ra nguyên lý sau đây đối với cơ hệ chất điểm [1,tr. 171]:

"*Chuyển động thực của hệ chất điểm có liên kết tùy ý chịu tác động bất kì ở mỗi thời điểm xảy ra một cách phù hợp nhất có thể với chuyển động của hệ đó khi hoàn toàn tự do, nghĩa là chuyển động thực xảy ra với lượng cưỡng bức tối thiểu nếu như số đo lượng cưỡng bức lấy bằng tổng các tích khối lượng chất điểm với bình phương độ lệch vị trí chất điểm so với vị trí khi chúng hoàn toàn tự do".*

Gọi m_i là khối lượng chất điểm, A_i là vị trí của nó, B_i là vị trí sau thời đoạn vô cùng bé do tác động lực ngoài và do vận tốc ở đầu thời đoạn gây ra, C_i là vị trí có thể (bị ràng buộc bởi liên kết) thì lượng cưỡng bức được viết như sau:

$$Z = \sum_i m_i \left(\overline{B_i C_i}\right)^2 \to Min \tag{2.1}$$

Dấu tổng trong (2.1) lấy theo số chất điểm.

Sử dụng nguyên lý vận tốc ảo và nguyên lý D 'Alembert, xét hệ ở trạng thái cân bằng và cho rằng có lực với độ lớn tỉ lệ với độ dài $\overline{B_i C_i}$ tác dụng theo chiều từ C_i đến B_i, Gauss đã chứng minh nguyên lý của mình [1,tr. 172] .

Để có thể sử dụng nguyên lý Gauss cần biết đại lượng biến phân của nó. Theo [1,tr. 889], Gibbs (năm 1879) và Appell (năm 1899) đi từ các lập

luận khác nhau đều nhận được nguyên lý Gauss và chỉ ra rằng đại lượng biến phân của nguyên lý này là gia tốc. Điều này có nghĩa là:

$$\delta r_i = 0 ; \quad \delta \dot{r}_i = 0 ; \quad \delta \ddot{r}_i \neq 0 \tag{2.2}$$

ở đây δ là kí hiệu biến phân (lấy vi phân khi cố định thời gian), r_i, $\dot{r}_i$ và $\ddot{r}_i$ lần lượt là vectơ toạ độ, vectơ vận tốc và vectơ gia tốc của điểm i. Chuyển dịch của chất điểm của hệ có liên kết dưới tác dụng của lực F_i sau thời đoạn dt tính theo công thức sau đây:

$$r_i + \dot{r}_i dt + \frac{1}{2}\ddot{r}_i dt^2 \tag{2.3}$$

Vì $\delta r_i = 0$ và $\delta \dot{r}_i = 0$ nên chuyển dịch của chất điểm hoàn toàn tự do (có thể hình dung ở đầu thời đoạn dt liên kết được giải phóng nhưng vẫn giữ lực tác dụng) sau thời đoạn dt là :

$$r_i + \dot{r}_i dt + \frac{1}{2}\frac{F_i}{m_i} dt^2 \tag{2.4}$$

Hiệu của (2.4) và (2.3) cho ta độ lệch vị trí của chất điểm có liên kếtso với vị trí của nó khi hoàn toàn tự do.

Có thể xem dt là hằng thì lượng cưỡng bức Z theo (2.1) được viết dưới dạng lực như sau (với độ chính xác bằng thừa số $dt^4 / 4$) :

$$Z = \sum_i m_i \left(\frac{F_i}{m_i} - \ddot{r}_i \right)^2 \rightarrow Min \tag{2.5}$$

hoặc

$$Z = \sum_i \frac{1}{m_i} (F_i - m_i \ddot{r}_i)^2 \rightarrow Min \tag{2.5a}$$

Khi tính lượng cưỡng bức theo (2.5) cần xem gia tốc là đại lượng biến phân (biến phân kiểu Gauss theo cách nói của Boltzmann). Như vậy, phương pháp tìm cực tiểu của các bài toán cơ học được xây dựng theo nguyên lý (2.5) không thể là bất kỳ mà phải là (khi không có ràng buôc nào khác):

$$\frac{\partial Z}{\partial \ddot{r}_i} = 0 \qquad (2.6)$$

Điều kiện (2.6) sẽ cho ta phương trình cân bằng. Thật vậy, áp dụng (2.6) vào (2.5) ta nhận được phương trình cân bằng của hệ (ở đây lực tác dụng bằng lực quán tính). Appell và Boltzmann (năm 1897) còn cho biết nguyên lý Gauss đúng cho hệ liên kết holonom và cả hệ liên kết không holonom [1,tr. 890].

Nguyên lý Gauss (2.1) hoặc (2.5) có dạng của phương pháp bình phương tối thiểu là phương pháp cũng do Gauss đưa ra và được dùng rộng rãi trong toán học hiện đại, trong giải tích cũng như trong lời giải số. Có lẽ vì vậy nguyên lý Gauss thu hút sự chú ý của nhiều nhà khoa học, thí dụ, Hertz (năm 1894) dựa trên ý tưởng lượng cưỡng bức đưa ra nguyên lý đường thẳng nhất (đường có độ cong nhỏ nhất) hoặc Prigogine (năm 1954) và Gyarmati (năm 1965) đã xây dựng được lượng cưỡng bức của các quá trình không hồi phục trong nhiệt động lực học [2].

Các tài liệu giáo khoa về cơ học thường giới thiệu nguyên lý Gauss dưới dạng (2.5) là dạng dùng được để tính toán. Nhưng nguyên lý (2.5) với đại lượng biến phân là gia tốc chỉ là một biểu thị của nguyên lý Gauss (2.1) bởi vì đại lượng biến phân trong cơ học còn có thể là chuyyển vị và vận tốc như trình bày sau đây.

2.2. Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss

Trong bài viết của mình Gauss nêu nhận xét rằng *nguyên lý vận tốc ảo biến vấn đề tĩnh học thành vấn đề toán học thuần tuý, còn nguyên lý* D'Alembert *đưa bài toán động lực học về bài toán tĩnh học và mọi nguyên lý của cơ học hoặc nhiều hoặc ít đều có thể trực tiếp rút ra từ hai nguyên lý trên.* Dưới đây trình bày phương pháp dựa trên nguyên lý chuyển vị ảo để nhận được biểu thức (2.1) của nguyên lý Gauss.

Xét hệ chất điểm có liên kết tuỳ ý ở một thời điểm bất kì nào đó có nghĩa là phải đưa lực quán tính f_i của hệ tại thời điểm đó tác dụng lên hệ. Đối

với hệ hoàn toàn tự do lực quán tính f_{0i} của nó bằng với ngoại lực (chỉ số '0' ở chân kí tự chỉ rằng kí tự đó thuộc hệ so sánh, trường hợp này là hệ hoàn toàn tự do có cùng khối lượng và cùng chịu tác dụng lực ngoài giống như hệ có liên kết). Như vậy, các lực tác dụng lên hệ có liên kết gồm các lực $f_i = m_i \ddot{r}_i$ và các lực $f_{0i} = m_i \ddot{r}_{0i}$ (thay cho ngoại lực). Theo nguyên lý chuyển vị ảo đối với liên kết giữ (liên kết dưới dạng đẳng thức) và không giữ (liên kết dưới dạng bất đẳng thức) điều kiện cần và đủ để hệ ở trạng thái cân bằng là [1,tr. 887] :

$$\sum_i (f_i - f_{0i}) \delta r_i \le 0 \qquad (2.7)$$

Biểu thức (2.7) cũng được Fourier (năm 1798) và Ostrogradsky (năm 1838) độc lập đưa ra.

Có thể nhận xét ngay rằng phần trong ngoặc đơn của (2.7) biểu thị lực tác dụng lên hệ nên phải bằng không để hệ ở trạng thái cân bằng.

Trong biểu thức (2.7) cần xem các chuyển vị r_i độc lập đối với lực tác dụng. Cho nên từ (2.7) có thể viết:

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) r_i \to Min \qquad (2.8)$$

Trong (2.8) r_i là các biến độc lập cần tìm để bảo đảm cho Z cực tiểu. Vì chuyển vị r_{0i} của hệ hoàn toàn tự do đã biết nên biểu thức (2.8) tương đương với các biểu thức dưới đây:

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i})(r_i - r_{0i}) \to Min \qquad (2.8a)$$

hoặc

$$Z = \sum_i m_i \left[\frac{f_i}{m_i} - \ddot{r}_{0i} \right] (r_i - r_{0i}) \to Min \qquad (2.8b)$$

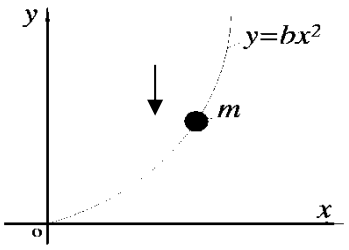
Dễ dàng nhận thấy (2.8b) là tích của khối lượng m_i với bình phương độ lệch vị trí chất điểm và do đó Z xác định theo (2.8) là lượng cưỡng bức của nguyên lý Gauss (với độ chính xác bằng thừa số $dt^2/2$). So với (2.5), lượng cưỡng bức Z xác định theo (2.8) biểu thị đầy đủ và rõ ràng tư tưởng của nguyên lý Gauss thể hiện ở chỗ, thứ nhất, nó cho phép so sánh hệ có liên kết với hệ hoàn toàn tự do, thứ hai, đại lượng không biết (đại lượng biến phân)

trong (2.8) là chuyển vị giống như trong (2.1). Cực tiểu của (2.8) cần và phải được tìm từ điều kiện (khi không có các ràng buộc nào khác):

$$\frac{\partial Z}{\partial r_i} = 0 \qquad (2.9)$$

Điều kiện (2.9) áp dụng vào (2.8) cho ta phương trình cân bằng của cơ hệ.

Ví dụ 1 Ví dụ này lấy từ [3,tr. 64]. Viết phương trình chuyển động của khối lượng m chạy trên đường cong $y= bx^2$ trong mặt phẳng (xy), không có lực ma sát, dưới tác dụng của trường gia tốc g (Hình 1.1).



Hình 1.1

Các lực tác dụng lên khối lượng m bao gồm: lực quán tính theo chiều y, lực trọng trường theo chiều âm của y, lực quán tính theo x. Chọn hệ so sánh là hệ có cùng khối lượng m nằm trong trường gia tốc g nhưng hoàn toàn tự do. Lượng cưỡng bức được viết theo (2.8) như sau:

$$Z = (m\ddot{y} + mg)y + (m\ddot{x})x \rightarrow Min \qquad (a)$$

Thế $y = bx^2$ vào (a) ta có

$$Z = (m\ddot{y} + mg)bx^2 + (m\ddot{x})x \rightarrow Min \qquad (b)$$

Xem chuyển vị x là biến độc lập và từ điều kiện $\frac{\partial Z}{\partial x} = 0$ nhận được:

$$2bx\ddot{y} + 2bgx + \ddot{x} = 0 \qquad (c)$$

Thay $\ddot{y} = 2bx\ddot{x} + 2b\dot{x}^2$ vào (c) nhận được phương trình chuyển động của khối lượng m

$$(4b^2x^2 + 1)\ddot{x} + 4b^2x\dot{x}^2 + 2bgx = 0 \qquad (d)$$

Phương trình (d) là kết quả cần tìm.

Như nhận xét của Gauss nêu trên, có thể nói biểu thức (2.7) đã biến vấn đề tĩnh học (cân bằng lực) thành vấn đề toán học thuần tuý. Thật vậy, nếu ta dùng gia tốc là đại lượng biến phân thì tương tự như (2.7) có thể viết

$$\sum_i \left(f_i - f_{0i}\right)\delta \ddot{r}_i \leq 0 \qquad (2.10)$$

với điều kiện gia tốc $\ddot{r}_I$ là đại lượng độc lập đối với lực tác dụng.

Từ (1.10) có thể viết

$$Z = \sum_i \left(f_i - f_{0i}\right)\ddot{r}_i \rightarrow Min \qquad (2.11)$$

Trong (2.11) cần xem gia tốc $\ddot{r}_i$ là đại lượng biến phân để bảo đảm cho Z cực tiểu. Vì gia tốc $\ddot{r}_{0i}$ của hệ hoàn toàn tự do đã biết nên biểu thức (2.11) tương đương với các biểu thức dưới đây:

$$Z = \sum_i \left(f_i - f_{0i}\right)(\ddot{r}_i - \ddot{r}_{0i}) \rightarrow Min \qquad (2.11a)$$

hoặc

$$Z = \sum_i m_i\left(\frac{f_i}{m_i} - \ddot{r}_{0i}\right)(\ddot{r}_i - \ddot{r}_{0i}) \rightarrow Min$$

$$Z = \sum_i m_i.(\ddot{r}_i - \ddot{r}_{0i}).^2 \rightarrow Min \qquad (2.11b)$$

Ta thấy (2.11b) trùng với (2.5). Các gia tốc $\ddot{r}_i$ phải thỏa mãn các liên kết nếu có và điều kiện cực tiểu của (2.11) là biểu thức (2.6).

Ví dụ 2 . Làm lại ví dụ 1 (Hình 1) theo nguyên lí (2.5) hoặc biểu thức (2.11)

Khối lượng m vừa chuyển động theo x, vừa chuyển động theo y, nhưng do có liên kết $y = bx^2$ nên chỉ có một bậc tự do, thí dụ là x. Các lực tác dụng lên m bao gồm: Lực quán tính theo chiều y, lực trọng trường theo chiều âm của y, lực quán tính theo x. Lượng cưỡng bức Z viết theo (2.5) là:

$$Z = m(\frac{mg}{m} + \ddot{y})^2 + m\ddot{x}^2 \rightarrow Min \qquad (a)$$

Lấy đạo hàm ràng buộc $y=bx^2$ theo thời gian hai lần ta có :

$$\ddot{y} = 2bx\ddot{x} + 2b\dot{x}^2 \qquad \text{(b)}$$

Thay $\ddot{y}$ trong (a) bằng (b), nhận được

$$Z = (g + 2bx\ddot{x} + 2b\dot{x}^2)^2 + \ddot{x}^2 \rightarrow Min \qquad \text{(c)}$$

Xem gia tốc $\ddot{x}$ là biến độc lập và từ điều kiện $\partial Z / \partial \ddot{x} = 0$ ta có phương trình chuyển động của khối lượng m như sau :

$$(4b^2x^2 + 1)\ddot{x} + 4b^2x\dot{x}^2 + 2bgx = 0 \qquad \text{(d)}$$

Phương trình (d) là kết quả cần tìm.

Tương tự, cũng có thể dùng vận tốc $\dot{r}_i$ là đại lượng biến phân, khi đó lượng cưỡng bức Z được viết :

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i})\,\dot{r}_i \rightarrow Min \qquad (2.12)$$

với điều kiện vận tốc $\dot{r}_i$ là biến độc lập và thoả mãn các liên kết nếu có. Trong trường hợp này điều kiện cực tiểu của nguyên lý(2.12) sẽ là (khi không có ràng buộc nào khác) :

$$\frac{\partial Z}{\partial \dot{r}_i} = 0 \qquad (2.13)$$

Làm lại bài toán của ví dụ 1 với đại lượng biến phân là vận tốc (biểu thức 2.12) cũng cho ta kết quả đúng đắn.

Tóm lại, các nguyên lý (2.5) hoặc (2.11) với đại lượng biến phân là gia tốc độc lập đối với lực tác dụng, nguyên lý (2.8) với đại lượng biến phân là chuyển vị độc lập đối với lực tác dụng và nguyên lý (2.12) với đại lượng biến phân là vận tốc độc lập đỗi với lực tác dụng đã biến phương trình cân bằng lực (vấn đề cơ học) thành các bài toán toán học thuần tuý và có thể được phát biểu như sau : *Chuyển động thực của cơ hệ xảy ra khi lượng cưỡng bức Z*

- *xác định theo (2.5) thì được tìm theo gia tốc , điều kiện (2.6)*
- *xác định theo (2.8) thì được tìm theo chuyển vị, điều kiện (2.9)*

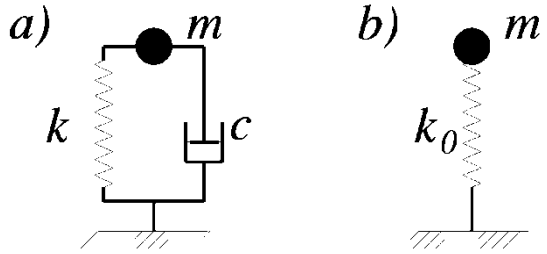
- *xác định theo (2.12) thì được tìm theo vận tốc, điều kiện (2.13) là cực tiểu.*

Đương nhiên, các đại lượng biến phân gia tốc, chuyển vị và vận tốc phải thỏa mãn các điều kiện liên kết của hệ.

Để có thể áp dụng cho cả các bài toán tĩnh của môi trường liên tục ta sẽ dùng nguyên lý (2.8) với đại lượng biến phân là chuyển vị và điều kiện cực tiểu là (2.9). Nguyên lí (2.5) không cho phép giải các bài toán tĩnh. Do đó, cách trình bày nguyên lý Gauss dưới dạng này đã hạn chế việc sử dụng nguyên lý trong cơ học.

Có thể mở rộng nguyên lý Gauss bằng cách so sánh hệ cần tính với hệ có liên kết tuỳ ý chịu tác dụng của lực giống như hệ cần tính mà lời giải của nó đã biết. Khi đó thay cho lực ngoài ta dùng lực liên kết và lực quán tính của hệ so sánh với dấu ngược lại để tác động lên hệ cần tính. Điều này là hiển nhiên bởi vì ngoại lực luôn cân bằng với nội lực. Xét ví dụ minh họa sau

Ví dụ 3 Hệ cần tính là khối lượng m có liên kết lò xo độ cứng k và liên kết nhớt với hệ số nhớt c chịu tác dụng lực p(t) (Hình 2.2). Xét dao động thẳng đứng u(t) của m so với vị trí cân bằng tĩnh của nó. Bài toán có một bậc dao động tự do. Ta chọn hệ so sánh có khối lượng m_0 và liên kết lò xo độ cứng k_0 cùng chịu lực p(t) (Hình 2.2.b).



Hình 2.2 a) Hệ cần tính; b) Hệ so sánh.

Dao động $u_0(t)$ của hệ so sánh (so với vị trí cân bằng tĩnh của nó) xác định từ phương tình cân bằng sau :

$$m_0\ddot{u}_0 + k_0 u_0 = p(t) \qquad \text{(a)}$$

Lực tác dụng lên khối lượng m gồm có: lực quán tính $m\ddot{u}$, lực cản lò xo ku, lực cản nhớt $c\dot{u}$ và lực p(t) được thay bằng nội lực của hệ so sánh. Lượng cưỡng bức theo (2.8) viết được:

$$Z = (m\ddot{u} + c\dot{u} + ku - m_0\ddot{u}_0 - k_0 u_0)u \rightarrow Min \qquad \text{(b)}$$

Phần trong dấu ngoặc đơn của (b) biểu thị lực tác dụng và theo nguyên lý chuyển vị (2.8) cần xem chuyển vị u là biến độc lập đối với lực tác dụng thì từ điều kiện $\partial Z/\partial u = 0$ nhận được phương trình cân bằng của hệ cần tính

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = m_0\ddot{u}_0 + k_0 u_0 \qquad \text{(c)}$$

hay chú ý tới (a) ta có

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \qquad \text{(d)}$$

Nhìn vào (c) và (d) thấy rằng thay cho việc giải phương trình vi phân cân bằng (d) của hệ cần tính ta có thể giải phương trình (c) ứng với từng thời điểm. Vế phải của (c) có thể là nghiệm riêng hoặc nghiệm cơ bản (trường hợp p(t) là xung đơn vị) của (d) hoặc, một cách tổng quát, là thể hiệncủa p(t) trên hệ bất kì nào khác (lời giải của hệ bất kì khi chịu tác động của p(t)). Nhận xét này rất hữu ích bởi vì nó cho ta một phương pháp nữa để giải các phương trình vi phân phức tạp, đặc biệt là đối với các bài toán có điều kiện biên ở vô hạn hoặc là khi giải bằng số.

Lượng cưỡng bức Z theo (b) có thể viết dưới dạng sau:

$$Z = Z1 + Z2 + Z3 \rightarrow Min \qquad \text{(e)}$$

$$Z1 = \frac{1}{k}(ku - k_0 u_0)^2, \quad Z2 = 2c\dot{u}u, \quad Z3 = 2m(\ddot{u} - \ddot{u}_0)u \qquad \text{(f)}$$

Ở đây Z1 viết dưới dạng bình phương tối thiểu. Vì Z1 được viết dưới dạng bình phương tối thiểu nên các đại lượng Z2 và Z3 phải nhân với hệ số 2. Các biểu thức lượng cưỡng bức (b) và (e), (f) là tương đương.

Những nhận xét rút ra từ ví dụ minh họa nêu trên áp dụng đúng cho bất kì hệ nào khác.

Trình bày trên cho thấy có thể dùng hệ có liên kết bất kì để làm hệ so sánh cho nên có thể mở rộng biểu thức (2.8) như sau :

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) r_i \to Min \qquad (2.14)$$

với f_i là nội lực bao gồm lực quán tính và lực liên kết nếu có của hệ cần tính, f_{0i} là nội lực và lực liên kết đã biết của hệ so sánh bất kỳ chịu tác dụng lực ngoài giống như hệ cần tính.

Chú ý rằng khi sử dụng biểu thức (2.14) cần xem chuyển vị r_i là đại lượng độc lập đối với lực và phải thỏa mãn các điều kiện liên kết nếu có. Bởi vì cực tiểu của lượng cưỡng bức Z phải được tìm theo (2.9) (khi không có các ràng buộc nào khác) nghĩa là phải giải phương trình cân bằng của cơ hệ nên bài toán luôn có nghiệm và nghiệm là duy nhất

Phương pháp của nguyên lý (2.14) cho phép dùng hệ so sánh bất kì. Đại lượng biến phân của (2.14) là chuyển vị, điều kiện cực tiểu của nó là biểu thức (2.9). Phương pháp này do GS. TSKH Hà Huy Cương đề xuất và được gọi là phương pháp nguyên lý cực trị Gauss.

Biểu thức (2.7) trong các giáo trình cơ học thường mang dấu bằng, nghĩa là chỉ xét trường hợp liên kết giữ và khi đó từ (2.7) sẽ nhận được nguyên lý công ảo. Có thể nói biểu thức (2.7) với dấu nhỏ thua hoặc bằng là sự khác biệt cơ bản giữa nguyên lý cơ học của Gauss với cơ học dựa trên nguyên lý công ảo hiện dùng.

2.3. Cơ hệ môi trường liên tục: ứng suất và biến dạng

Trong mục này trình bày phương pháp nguyên lý Gauss đối với cơ hệ môi trường liên tục. Muốn vậy cần biết khái niệm ứng suất và biến dạng của môi trường liên tục. Để trình bày gọn dưới đây dùng các đại lượng tenxơ với cách hiểu như sau [4 ,tr.196]:

$$a_i a_i = a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2}$$

$$a_{kk} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

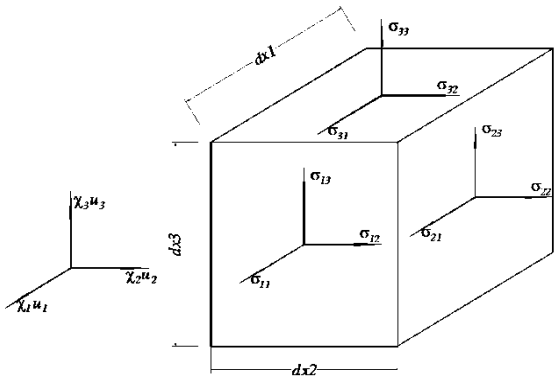
và hệ số Kronecker

$$\delta_{i\,j} \quad = \quad 1 \quad \text{khi} \quad i = j$$

$$\delta_{i\,j} \quad = \quad 0 \quad \text{khi} \quad i \neq j$$

với i = 1,2,3 ; j = 1,2,3 ; k = 1,2,3 đối với không gian 3 chiều.

Có thể nói đối tượng nghiên cứu của cơ hệ môi trườngliên tục trong toạ độ vuông góc là phân tố khối chữ nhật (ba chiều, kích thước vô cùng bé) hoặc phân tố chữ nhật (hai chiều, kích thước vô cùng bé) được tách ra từ môi trường (hình 2.3).



Hình 2.3. Trạng thái ứng suất phân tố

Khi đó lí thuyết ứng suất cho thấy ngoài các lực thông thường (lực gây các chuyển vị tịnh tiến trong cơ hệ chất điểm) trên bề mặt phân tố còn có các ứng suất tác dụng . Có 9 ứng suất σ_{ij} tác dụng lên bề mặt phân tố. Thứ nguyên cuả ứng suất bằng lực chia cho đơn vị diện tích.

Từ điều kiện cân bằng lực và momen sẽ nhận được phương trình cân bằng tĩnh của phân tố

$$\sigma_{ij,\,j} + \quad b_i \quad = \quad 0 \qquad (2.15)$$

Trong (2.15) σ_{ij} là ứng suất , $\sigma_{ij,j}$ biểu thị đạo hàm của ứng suất theo toạ độ không gian, $\partial\sigma_{ij}/\partial x_j = \sigma_{ij,j}$, b_i là lực khối (lực khối xem như là lực cản). Nếu không có lực momen khối thì từ phương trình cân bằng sẽ có :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{2.16}$$

Số ứng suất độc lập tác dụng lên bề mặt phân tố chỉ còn 6 . Lí thuyết ứng suất cho thấy khi biết trạng thái ứng suất phân tố thì sẽ xác định được trạng thái lực tại điểm đó của môi trường và ngược lại .

Khi chịu tác dụng ngoại lực, phân tố chuyển động và biến hình. Lý thuyết biến dạng cho thấy ngoài các chuyển vị u_i phân tố còn chịu các biến dạng ε_{ij} . Nếu xem biến dạng là bé (bình phương hoặc tích hai biến dạng là nhỏ so với chính nó) thì các biến dạng được xác định theo các phương trình sau:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} \right) \tag{2.17}$$

Các ε_{ij} là các đại lượng không thứ nguyên. Tương tự như tenxơ σ_{ij}, tenxơ ε_{ij} đối xứng và có 6 biến dạng độc lập tương ứng với 6 ứng suất.

Từ (2.17) thấy rằng trạng thái chuyển vị xác định duy nhất trạng thái biến dạng, nhưng ngược lại không đúng bởi vì có những chuyển vị không gây biến dạng (chuyển vị của vật rắn tuyệt đối). Ngoài các phương trình nêu trên, để bảo đảm tính liên tục của môi trường còn có các các phương trình về điều kiện không bị gián đoạn.

Tùy theo tính chất cơ học của vật liệu môi trường mà có các liên hệ khác nhau giữa ứng suất và biến dạng. Do có 6 ứng suất và 6 biến dạng nên một cách tổng quát cần biết 36 thông số tính chất vật liệu. Tuy nhiên từ điều kiện biểu thị năng lượng biến dạng phải giống nhau con số 36 rút xuống còn 21. Đối với vật liệu đẳng hướng chỉ còn 2 thông số tính chất vật liệu độc lập được chọn trong số các thông số sau: hai hằng số Lamé μ và λ , môđun Young E , môđun trượt G và hệ số Poisson ν, giữa chúng có các liên hệ sau đây :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad , \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2.18}$$

Đối với vật liệu đồng nhất , đẳng hướng, tuân theo định luật Húc (Hooke) thì liên hệ giữa ứng suất và biến dạng sẽ là :

$$\sigma_{ij} = 2G\left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\right) \tag{2.19}$$

Từ công thức (2.19) thấy rằng ứng suất σ_{ij} không những phụ thuộc vào biến dạng ε_{ij} theo phương của nó mà còn phụ thuộc vào các biến dạng theo các phương khác thông qua hệ số Poisson ν. Hệ số 2G để tiện trình bày sau này sẽ được gọi là *độ cứng của biến dạng*.

Những trình bày trên cho thấy đối với cơ hệ môi trường liên tục cần xem các biến dạng ε_{ij} là độc lập đối với nhau và được xác định theo phương trình (2.17), cần xét các phương trình về điều kiện không bị gián đoạn của môi trường và liên hệ giữa ứng suất và biến dạng. Đối với môi trường đàn hồi, đồng nhất, đẳng hướng liên hệ ứng suất - biến dạng lấy theo (2.19) và điều kiện không bị gián đoạn của môi trường tự động thoả mãn khi biểu thị ứng suất qua chuyển vị.

Tóm lại, khác với cơ hệ chất điểm, trong môi trường liên tục ngoài lực khối và lực quán tính là các lực tác dụng gây chuyển vị, còn phải xét thêm các ứng suất σ_{ij} gây ra các biến dạng ε_{ij}.

Từ nhận xét vừa nêu, có thể sẽ có ích đối với nhận thức khi đưa ra các nhận định tổng quát về mối tương quan giữa cơ học chất điểm và cơ hệ môi trường liên tục như sau:

- Khái niệm cơ bản của cơ chất điểm là chất điểm, các lực tác dụng lên chất điểm gây ra các chuyển vị, đặc trưng của chất điểm là khối lượng;
- Khái niệm cơ bản của cơ hệ môi trường liên tục là mặt cắt phân tố, các ứng suất gây ra các biến dạng, các đặc trưng của mặt cắt phân tố là các độ cứng biến dạng tương ứng với các ứng suất. Các độ cứng này xác định tùy theo tính chất vật liệu môi trường. Trong cơ hệ môi trường liên tục còn có lực khối và

lực quán tính gây chuyển vị giống như trong cơ hệ chất điểm. Do đó, có thể tóm tắt mối tương quan vừa nêu dưới dạng:

Chất điểm ⇔ *Mặt cắt phân tố*

Lực ⇔ *Lực*

Các ứng suất

Chuyển vị ⇔ *Chuyển vị*

Biến dạng

Khối lượng ⇔ *Khối lượng*

Các độ cứng biến dạng

Kí hiệu ⇔ chỉ sự tương đương giữa các khái niệm. Với cách hiểu này cũng dễ dàng xây dựng phiếm hàm lượng cưỡng bức tương tự như (2.14) đối với cơ hệ môi trường liên tục bất kỳ được trình bày sau đây.

Trước tiên, ta dùng hệ so sánh là hệ chất điểm có cùng khối lượng, cùng chịu tác dụng lực ngoài và hoàn toàn tự do. Đối với môi trường liên tục cần xét thêm ứng suất và biến dạng nên lượng cưỡng bức Z của hệ viết tương tự (2.14) như sau:

$$Z.... = ..Z1 + Z2 \rightarrow Min$$

$$Z1 = \int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dV \quad , \quad Z2 = \int_V (\rho\ddot{u}_i u_i + b_i u_i - \rho\ddot{u}_{0i}u_i)dF \qquad (2.20)$$

Trong (2.20) V là thể tích vật thể, ρ là khối lượng đơn vị. Lực quán tính là lực cản nên trong (2.20) mang dấu cộng. Lượng cưỡng bức *Z1* xét ứng suất của môi trường liên tục cần tính, hệ chất điểm so sánh không có ứng suất. Lượng cưỡng bức *Z2* xét lực khối và lực quán tính của môi trường liên tục, lực quán tính của hệ chất điểm so sánh. Các lực này đều gây chuyển vị *u*.

Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, trong (2.20) cần xem các biến dạng ε_{ij} là độc lập đối với các ứng suất σ_{ij} và các chuyển vị u_i là độc lập đối với lực tác dụng (ở đây là lực khối và lực quán tính) và độc lập đối với nhau. Điều kiện cực tiểu của (2.20) là

$$\frac{\partial Z1}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial Z2}{\partial u_i} = 0 \qquad (2.21.a)$$

Nếu biến dạng ε_{ij} biểu thị qua chuyển vị (công thức (2.17)) thì điều kiện cực tiểu của (2.20) được viết như sau:

$$\frac{\partial Z1}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial u_i} + \frac{\partial Z2}{\partial u_i} = 0 \qquad (2.21.b)$$

Từ điều kiện (2.21.a) nhận được

$$\sigma_{ij,j} + b_i + \rho \ddot{u}_i - \rho \ddot{u}_{0i} = 0 \qquad (2.22)$$

Phương trình (2.22) là phương trình vi phân cân bằng của cơ hệ môi trường liên tục dưới dạng ứng suất.

Nếu tại điểm đang xét không có lực ngoài tác dụng thì $\rho \ddot{u}_{0y}$ bị triệt tiêu, phương trình (2.22) là phương trình cân bằng động lực học thường gặp của cơ hệ môi trường liên tục. Trường hợp bài toán tĩnh, $\rho \ddot{u}_i$ cũng bằng không, phương trình (2.22) khi đó trùng với (2.15).

Dễ dàng nhận được phương trình vi phân cân bằng dưới dạng chuyển vị bằng cách đưa liên hệ ứng suất - biến dạng vào phương trình (2.22) hoặc vào phiếm hàm (2.20).Trong mục (2.5) dưới đây sẽ trở lại vấn đề này.

Cần nêu nhận xét rằng biểu thức (2.20) cho phép so sánh cơ hệ môi trường liên tục với cơ hệ chất điểm hoàn toàn tự do khi hai hệ cùng chịu lực ngoài như nhau. Trong (2.20) không chứa các thông số tính chất vật liệu của môi trường nên nó đúng với môi trường bất kỳ.

Xét các trường hợp khác của phiếm hàm lượng cưỡng bức (2.20):

− Trường hợp không dùng hệ so sánh thì phải đưa lực ngoài pi vào (2.20). Lực pi thường tác dụng lên bề mặt Ω của vật nên ta viết

$$Z = \int_V (\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + \rho \ddot{u}_i u_i - b_i u_i) dv - \int_\Omega p\, u_i d\Omega \to Min \qquad (2.23)$$

− Có thể dùng hệ so sánh cũng là cơ hệ môi trường liên tục có liên kết bất kỳ với điều kiện hai hệ cùng chịu lực ngoài giống nhau:

$$Z = \int_V \left[(\sigma_{ij} - \sigma_{0ij})\varepsilon_{ij} + (\rho\ddot{u}_i - \rho_0\ddot{u}_{0i})u_i - (b_i - b_{0i})u_i\right]dv \to Min \quad (2.24)$$

Giống như đã trình bày ở ví dụ 3, thực chất của phương pháp nguyên lý cực trị Gauss là dùng nội lực của hệ so sánh tác dụng lên hệ cần tìm.

– Đối với bài toán tĩnh, lực quán tính triệt tiêu, khi không xét lực khối, biểu thức (2.24) có dạng:

$$Z = \int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{0ij})\varepsilon_{ij} dv \to Min \quad (2.25)$$

– Đối với bài toán tĩnh, không xét lực khối, không dùng hệ so sánh, từ (2.23) ta có:

$$Z = \int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dv - \int_\Omega p_i u_i d\Omega \to Min \quad (2.26)$$

Các chuyển vị u_i và biến dạng ε_{ij} (xác định theo (2.17)) trong các phiếm hàm (2.20, 2.23, 2.24, 2.25) và (2.26) là những đại lượng độc lập đối với lực tác dụng và ứng suất và phải thoả mãn các điều kiện liên kết nếu có. Chuyển động thực của cơ hệ môi trường liên tục xảy ra khi cực tiểu các phiếm hàm lượng cưỡng bức vừa nêu theo điều kiện (2.21) nếu không có các điều kiện liên kết nào khác.

Đối với môi trường đàn hồi, quan hệ ứng suất – biến dạng xác định theo (2.19), ta có thể viết lượng cưỡng bức dưới dạng bình phương tối thiểu như nhận xét đã nêu ở ví dụ 3:

$$Z = \int_V \frac{1}{2G}(\sigma_{ij} - \sigma_{0ij})^2 dv + 2\int_V (f_{mi} - f_{0mi})u_i dv \to Min \quad (2.27a)$$

hoặc $$Z = \int_V 2G(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{0ij})^2 dv + 2\int_V m_i(\ddot{u}_i - \ddot{u}_{0i})u_i dv \to Min$$

Tương tự, khi không dùng hệ so sánh thì phải xét lực ngoài, có thể viết lại (2.26) như dưới đây

$$Z = \int_V \frac{1}{2G}(\sigma_{ij})^2 dv + 2\int_V f_{mi}u_i dv - 2\int_\Omega p_i u_i d\Omega \to Min \quad (2.27b)$$

hoặc $$Z = \int_V 2G(\varepsilon_{ij})^2 dv + 2\int_V (m_i \ddot{u}_i) u_i dv - 2\int_\Omega p_i u_i d\Omega \to Min$$

Trong (2.27) $f_{mi} = m_i \ddot{u}_i$ và $f_{0mi} = m_{0i} \ddot{u}_{0i}$ là lực quán tính của hệ cần tính và hệ so sánh, liên hệ giữa ứng suất và biến dạng xác định theo biểu thức (2.19). Trong (2.27), cần xem các biến dạng ε_{ij} là các đại lượng biến phân độc lập đối với các ứng suất σ_{ij}, các chuyển vị u_i là độc lập đối với lực tác dụng p và lực quán tính.

Tích phân thứ nhất trong (2.27) liên quan đến ứng suất đàn hồi có trọng số là 2G, Trở lên trình bày các phiếm hàm lượng cưỡng bức, đối với cơ hệ chất điểm là các biểu thức (2.14), đối với môi trường liên tục là biểu thức (2.20) và các trường hợp khác của nó là các biểu thức (2.23), (2.24), (2.25), (2.26) và (2.27). Trongcác phiếm hàm này cầnxem các biến dạng ε_{ij}xác định theo (2.17) và các chuyển vị $u_i$là các đại lượng không biết độc lập đối với ứng suất và lực tác dụng, thỏa mãn các điều kiện liên kết nếu có và các điều kiện không bị gián đoạn (riêng đối với môi trường liên tục). Cực tiểu các phiếm hàm này theo điều kiện (2.21) cho ta chuyển vị thực của cơ hệ cần tính.

Phương pháp nguyên lí cực trị Gauss là phương pháp mới trong cơ học môi trường liên tục.

2.4. Cơ học kết cấu

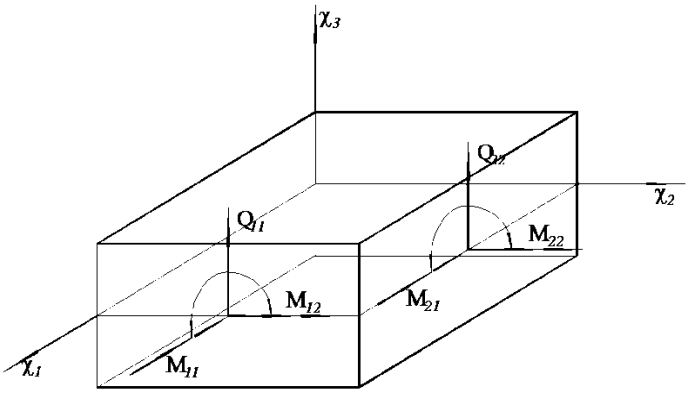
Môn sức bền vật liệu và cơ học kết cấu nghiên cứu trạng thái ứng suất biến dạng của dầm, thanh, tấm, khung, dàn v.v…là những kết cấu có một hoặc hai kích thước nhỏ thua nhiều lần so với các kích thước còn lại. Trong trường hợp này để đơn giản nhưng kết quả tính vẫn bảo đảm độ chính xác đủ dùng trong thực tế (kiểm tra bằng thí nghiệm), có thể dùng mặt cắt kết cấu thay cho mặt cắt phân tố và các ứng suất tác dụng lên mặt cắt được qui về thành các nội lực tác dụng lên mặt trung bình (đường trung bình đối với dầm) như lực dọc N, momen uốn M, lực cắt Q v.v… Muốn vậy cần đưa vào các giả thiết sau đây:

- Khi chịu lực dọc trục, ứng suất pháp được xem là phân bố đều trên tiết diện.
- Khi chịu lực ngang (tác dụng thẳng góc với mặt trung bình) có các giả thiết sau đây:

Mặt trung bình của tấm và trục trung bình của dầm không có nội lực và do đó không bị biến dạng.

Giả thiết tiết diện phẳng: tiết diện sau khi biến dạng vẫn phẳng.

Không xét ứng suất nén giữa các lớp theo chiều cao tiết diện, nghĩa là xem các lớp song song với mặt trung bình (tấm) làm việc ở trạng thái ứng suất phẳng.



Hình 2.4. Nội lực của phân tố tấm

Sử dụng các giả thiết trên, các momen uốn và xoắn và lực cắt tác dụng lên mặt cắt kết cấu xác định theo các biểu thức dưới đây (hình 2.4):

$$M_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} x_3 dx_3 , \quad M_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} x_3 dx_3 , \quad M_{12} = M_{21} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} x_3 dx_3$$

$$Q_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} dx_3 , \quad Q_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23} dx_3 \qquad (2.28)$$

ở đây h là chiều cao tiết diện.

Để có thể áp dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss cần biết các 'biến dạng' của tiết diện do momen uốn gây ra. Với các giả thiết nêu trên chỉ

cần biết chuyển vị thẳng đứng w của trục hoặc mặt trung bình của kết cấu (còn gọi là đường độ võng, đường đàn hồi) thì trong trường hợp uốn thuần tuý có thể tính được các chuyển vị theo các phương còn lại và dùng các phương trình (2.17) để xác định các biến dạng. Kết quả cho thấy các biến dạngtrong mặt phẳng tấm (hoặc thớ dầm) phân bố tuyến tính theo chiều cao và tỉ lệ với độ cong χ_{ij} của mặt võng (i=1,2; j=1,2):

$$\varepsilon_{ij} = x_3 \chi_{ij} ;$$

$$\chi_{11} = -w_{,11} , \quad \chi_{22} = -w_{,22} , \quad \chi_{12} = -w_{,12} . \qquad (2.29)$$

Dấu trừ trong công thức xác định độ cong (2.29) là do xem chuyển vị w có chiều dương hướng xuống dưới và dấu nội lực như trên hình 2.4. Như vậy, độ cong χ_{ij} của các lớp song song với mặt trung bình là giống nhau và đó là 'biến dạng' do momen M_{ij} gây ra. Biết được biến dạng ε_{ij} xác định theo (2.29) sẽ tính được momen M_{ij} theo (2.28). Liên hệ giữa momen uốn và 'biến dạng uốn' của tiết diện như sau:

$$M_{11} = D(\chi_{11} + \nu\chi_{22}), \qquad M_{22} = D(\chi_{22} + \nu\chi_{11}), \qquad M_{12} = D(1-\nu)\chi_{12}$$

(2.30)

ở đây D là độ cứng uốn

đối với dầm $D = EJ = \frac{Eh^3}{12}$, đối với tấm $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

và $D(1 - \nu)$ được gọi là độ cứng xoắn (độ cứng của biến dạng xoắn).

(ở đây cần chú ý rằng do có liên kết gối tựa nên mặt trung bình có thể bị biến dạng trong mặt phẳng của nó, giả thiết mặt trung bình là mặt trung hoà nêu trên không được thoả mãn.Trong trường hợp này độ võng phải là bé so với chiều cao dầm hoặc chiều dày tấm để có thể bỏ qua ứng suất tác dụng trong mặt trung bình).

Trong trường hợp có lực cắt Q_{ii} thì chúng được xác định từ điều kiện cân bằng phân tố, ta có:

$$Q_{11} = \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} \quad , \quad Q_{22} = \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_1}$$

hay $Q_{11} = D\,[(\chi_{11})_{,1} + (\chi_{12})_{,2}]$, $Q_{22} = D[(\chi_{12})_{,1} + (\chi_{22})_{,2}]$ (2.31)

Từ công thức (2.28) có thể thấy độ cứng chịu cắt cuả tiết diện là Gh và biến dạng trượt γ_{11} và γ_{22} tương ứng với lực cắt sẽ bằng góc xoay của đường đàn hồi:

$$\gamma_{11} = w_{,1} = \frac{\partial w}{\partial x_1} \quad , \quad \gamma_{22} = w_{,2} = \frac{\partial w}{\partial x_2} \tag{2.32}$$

Trong lý thuyết kết cấu chịu uốn nêu trên, độ võng của kết cấu chỉ do momen uốn gây ra, không xét biến dạng trượt do lực cắt gây ra.

Đối với các lực N_{ij} tác dụng lên mặt trung bình của tiết diện thì các biến dạng ε_{ij} (i=1,2;j=1,2) vẫn xác định theo (2.17). Độ cứng của tiết diện chịu nén kéo sẽ là Eh.

Trong các công thức vừa nêu lấy i=1,j=1 đối với bài toán một chiều (thanh, dầm), chiều rộng dầm bằng đơn vị.

Do sử dụng momen uốn của tiết diện nên phải đưa thêm các liên kết về xoay để mô tả các điều kiện biên của nó: liên kết khớp cho phép tiết diện xoay tự do, momen bằng không; liên kết ngàm không cho tiết diện xoay, momen khác không.

Sau khi đã biết 'các biến dạng' tương ứng với các nội lực của tiết diện (momen uốn, lực cắt, lực dọc trục v.v..) và độ cứng của chúng thì dễ dàng xây dựng các bài toán cơ học kết cấu theo phương pháp nguyên lí cự trị Gauss.

Ta có thể viết một cách tổng quát lượng cưỡng bức Z của bài toán cơ học kết cấu dưới dạng tương tự như (2.25) (bài toán tĩnh):

$$Z= \int_V [(M_{ij} - M_{0ij})\chi_{ij} + (Q_{ii} - Q_{0ii})\gamma_{ii} + (N_{ij} - N_{0ij})\varepsilon_{ij}\}dv \rightarrow Min \qquad (2.33a)$$

hoặc dưới dạng bình phương tối thiểu

$$Z= \int_V \frac{1}{Docung} (\text{Nội lực hệ cần tính- Nội lực hệ so sánh})^2 dv \rightarrow Min \qquad (2.33b)$$

và trong trường hợp không dùng hệ so sánh ta có

$$Z= \int_V \frac{1}{Docung} (\text{ Nội lực hệ cần tính})^2 dv - 2\int_\Omega p_i w_i d\Omega \rightarrow \qquad (2.33c)$$

ở đây V là chiều dài dầm hoặc diện tích tấm, Ω là chiều dài hoặc diện tích phạm vi đặt lực. Trong (2.33) cần xem các độ cong χ_{ij} là các đại lượng độc lập đối với nội lực momen uốn M_{ij}, các biến dạng trượt γ_{11} và γ_{22} là các đại lượng độc lập đối với lực cắt Q_{11} và Q_{22}, các biến dạng trong mặt trung bình ε_{ij} là các đại lượng độc lập đối với N_{ij} và đều là các đại lượng biến phân của bài toán. Điều đó chỉ ra rằng cực tiểu của lượng cưỡng bức Z , biểu thức(2.33) , chỉ có thể tìm từ điều kiện:

$$\frac{\partial Z}{\partial \chi_{ij}}\frac{\partial \chi_{ij}}{\partial W} + \frac{\partial Z}{\partial \gamma_{ii}}\frac{\partial \gamma_{ii}}{\partial W} + \frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_{ij}}\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial W} + \frac{\partial Z}{\partial W} = 0 \qquad (2.34)$$

Bởi vì các biến dạng uốn, biến dạng cắt v.v…là hàm của độ võng và độ võng là hàm của tọa độ nên điều kiện (2.34) được tính bằng phép tính biến phân và sẽ cho ta phương trình cân bằng tĩnh của kết cấu (xem mục 2.5 dưới đây).

Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss với biểu thức lượng cưỡng bức Z viết theo (2.33) và điều kiện cực tiểu (2.34) là phương pháp mới, tổng quát trong cơ học kết cấu.

CHƯƠNG 3
TÍNH DÂY ĐƠN THEO PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN LÝ CỰC TRỊ GAUSS

Trong kết cấu mái treo, cầu treo và cầu dây văng, dây cáp chịu kéo và là bộ phận chịu lực chính. Lý thuyết tính toán dây đơn là một trong những lý thuyết cấu thành nên lý thuyết tính toán cầu dây nói chung và cầu dây văng nói riêng. Trong chương này trình bày phương pháp nguyên lý cực trị Gauss để xây dựng bài toán tính dây đơn chịu các tác động khác nhau như tải trọng ngoài, trọng lượng bản thân.

3.1. Bài toán tính dây đơn hiện nay

Trong tính toán, dây được xem là dây mềm chỉ chịu kéo, bỏ qua khả năng chịu uốn. Tính toán dây đơn hiện nay dựa trên đường cong dây xích do trọng lượng bản thân (the common catenary) có dạng hyperbol hoặc dạng parabol.

Khi xem dây có trọng lượng phân bố theo chiều dài dây, phương trình đường cong biến dạng của dây do trọng lượng bản thân có dạng hypecbol có phương trình: $y = c.\cosh(x/c)$ trong đó c=H/g là thông số của đường cong, g là trọng lượng phân bố đều theo chiều dài dây, H là lực căng dây theo phương ngang của dây.

Khi xem dây có trọng lượng phân bố đều theo chiều dài nhịp (phương ngang), phương trình đường cong biến dạng của dây do trọng lượng bản thân có dạng parabol có phương trình: $y = \frac{1}{2}\frac{g_0}{H}x^2$, trong đó g_0 là trọng lượng phân bố đều của dây theo chiều dài nhịp.

Các kết quả dựa trên điều kiện cân bằng lực và lực căng trong dây chỉ được xác định khi đã biết trước độ võng của dây và ngược lại muốn xác định độ võng phải biết lực căng dây.

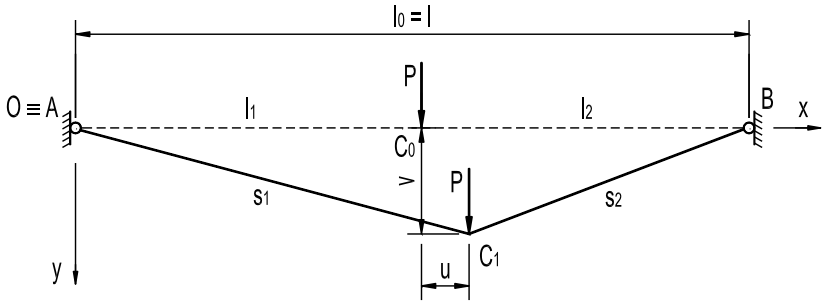
Dưới đây, tác giả áp dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss để viết phiếm hàm theo nguyên lý chuyển vị ảo, từ đó thiết lập được hệ phương trình của bài toán tính dây mềm, cho phép tìm được đồng thời chuyển vị và lực căng trong dây.

3.2. Bài toán dây đơn chịu một lực tập trung

3.2.1. Bài toán dây ngang mức chịu một lực tập trung

Xét dây mềm treo cố định qua hai điểm ngang mức A, B và chịu một lực tập trung P đặt cách hai gối A, B khoảng cách l_1, l_2, chiều dài dây l bằng chiều dài nhịp

l_0. Dây có độ cứng chống kéo EA. Ở đây, ta chưa xét trọng lượng bản thân dây và bỏ qua độ cứng chống uốn của dây.



Hình 3.1 Sơ đồ tính dây đơn chịu một lực tập trung

Chọn hệ trục tọa độ Oxy với gốc O trùng với gối A như hình vẽ.

Gọi điểm C_0 là vị trí ban đầu của điểm đặt lực. Dưới tác dụng của lực P, điểm C_0 dịch chuyển tới điểm C_1 và chiều dài các đoạn dây lúc này là s_1, s_2.

Gọi u, v là chuyển vị của điểm đặt lực, khi đó chiều dài các đoạn dây sau khi biến dạng sẽ là:

$$s_1 = \sqrt{(l_1 + u)^2 + v^2}; s_2 = \sqrt{(l_2 - u)^2 + v^2} \tag{3.1}$$

Biến dạng trong các đoạn dây:

$$\varepsilon_1 = \frac{s_1 - l_1}{l_1}; \varepsilon_2 = \frac{s_2 - l_2}{l_2} \tag{3.2}$$

Lực căng trong các đoạn dây:

$$T_1 = EA.\varepsilon_1; T_2 = EA.\varepsilon_2 \tag{3.3}$$

Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, lượng cưỡng bức của bài toán được viết:

$$Z = \int_0^{l_1} T_1 \varepsilon_1 dx + \int_0^{l_2} T_2 \varepsilon_2 dx - Pv \to \min \tag{3.4}$$

Phiếm hàm được xây dựng ở đây dựa trên nguyên lý chuyển vị ảo, khác với [20] viết dưới dạng bình phương tối thiểu.

Trong mỗi đoạn dây, lực căng và biến dạng là một giá trị xác định nên trong (3.4) có thể đưa $T_1, T_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ ra ngoài dấu tích phân, ta được:

$$Z = T_1\varepsilon_1 l_1 + T_2\varepsilon_2 l_2 - Pv \to \min \tag{3.5}$$

Trong phiếm hàm Z, cần xem biến dạng $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ độc lập với nội lực T_1, T_2; chuyển vị v độc lập với ngoại lực P.

Điều kiện cực trị của phiếm hàm **Error! Reference source not found.** là:

$$\delta Z = T_1 l_1 \delta\varepsilon_1 + T_2 l_2 \delta\varepsilon_2 - P\delta v = 0 \tag{3.6}$$

Hay là:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial Z}{\partial u} = l_1 T_1 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial u} + l_2 T_2 \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial u} = 0; \\ &\frac{\partial Z}{\partial v} = l_1 T_1 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial v} + l_2 T_2 \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial v} - P = 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Thay (3.1), (3.2), (3.3) vào (3.7) ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial u} = \dfrac{EA\left(\sqrt{l_1^2 + 2l_1 u + u^2 + v^2} - l_1\right)(l_1 + u)}{l_1\sqrt{l_1^2 + 2l_1 u + u^2 + v^2}} + \\ \dfrac{EA\left(\sqrt{l^2 - 2ll_1 - 2lu + l_1^2 + 2l_1 u + u^2 + v^2} - l_2\right)(-l + l_1 + u)}{l_2\sqrt{l^2 - 2ll_1 + 2lu + l_1^2 - 2l_1 u + u^2 + v^2}} = 0 \\ \dfrac{\partial Z}{\partial v} = \dfrac{EA\left(\sqrt{l_1^2 + 2l_1 u + u^2 + v^2} - l_1\right)v}{l_1\sqrt{l_1^2 + 2l_1 u + u^2 + v^2}} + \\ \dfrac{EA\left(\sqrt{l^2 - 2ll_1 - 2lu + l_1^2 + 2l_1 u + u^2 + v^2} - l_2\right)v}{l_2\sqrt{l^2 - 2ll_1 - 2lu + l_1^2 + 2l_1 u + u^2 + v^2}} - P = 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

Đây là hệ phương trình phi tuyến với hai ẩn số u, v. Để tìm nghiệm của chúng thường dùng các phương pháp giải số đúng dần (lặp) là phương pháp rất phổ biến trong quy hoạch toán (vận trù học). Thí dụ, trong phần mềm Matlab có hàm *fsolve* cho phép giải hệ các phương trình đại số phi tuyến. Giải hệ phương trình cho ta các chuyển vị u, v. Thay giá trị tìm được vào (3.1), (3.2), (3.3) xác định được lực căng trong dây.

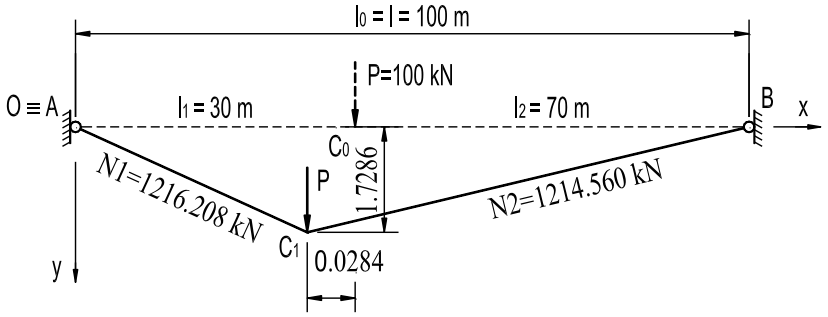
Ví dụ 3.1:

Dây đơn ngang mức chịu một lực tập trung P = 100 kN, chiều dài dây bằng chiều dài nhịp $l = l_0 = 100\,m$, vị trí đặt lực cách đầu A một khoảng $l_1 = 30\,m$, mô đun đàn hồi của dây $E = 200.10^6\,kN/m^2$, diện tích tiết diện dây $A = 0,00854\,m^2$.

Hệ phương trình phi tuyến **Error! Reference source not found.** trở thành:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial u} = \dfrac{\left(\dfrac{170800}{3}\sqrt{900+60u+u^2+v^2}-1708000\right)(30+u)}{\sqrt{900+60u+u^2+v^2}} + \\ \quad + \dfrac{\left(24400\sqrt{4900-140u+u^2+v^2}-1708000\right)(-70+u)}{\sqrt{4900-140u+u^2+v^2}} = 0 \\ \dfrac{\partial Z}{\partial v} = \dfrac{\left(\dfrac{170800}{3}\sqrt{900+60u+u^2+v^2}-1708000\right)v}{\sqrt{900+60u+u^2+v^2}} + \\ \quad + \dfrac{\left(24400\sqrt{4900-140u+u^2+v^2}-1708000\right)v}{\sqrt{4900-140u+u^2+v^2}} - 100 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta nhận được các chuyển vị nút u= -0,0284m, v= 1,7286m và thay vào vào (3.1), (3.2), (3.3) ta nhận được các lực căng trong dây. Dấu (-) của chuyển vị u chứng tỏ điểm đặt lực dịch chuyển sang trái so với điểm ban đầu. Các kết quả thể hiện trên Hình 3.2.



Hình 3.2 Kết quả của bài toán dây đơn ngang mức chịu một lực tập trung

Điều kiện cân bằng nút: $\sum Fx = -0,137.10^{-10} \approx 0\,kN; \sum Fy = 0,34.10^{-11} \approx 0\,kN$

Ta thấy điều kiện cân bằng nút được thỏa mãn.

Ví dụ 3.2: Cũng xét dây như ví dụ 3.1 nhưng thay đổi vị trí điểm đặt lực, kết quả thể hiện ở Bảng 3.1.

Bảng 3.1 Bài toán dây đơn khi thay đổi vị trí đặt lực

$\mathbf{l_1}$ (m)	$\mathbf{l_1}$ = 10 m	$\mathbf{l_1}$ = 20 m	$\mathbf{l_1}$ = 30 m	$\mathbf{l_1}$ = 40 m	$\mathbf{l_1}$ = 50 m
u (m)	0,0428	0,0389	0,0284	0,0149	$-0,21.10^{-14}$
v (m)	0,9809	1,4413	1,7286	1,8899	1,9422
T_1 (kN)	918,4419	1111,3807	1216,2080	1271,1179	1288,1398
T_2 (kN)	914,0716	1108,6746	1214,5601	1270,3298	1288,1398
ΣFx (kN)	$0,97.10^{-10}$	$-0,92.10^{-10}$	$-0,14.10^{-10}$	$0,24.10^{-9}$	$-0,15.10^{-9}$
ΣFy (kN)	$-0,11.10^{-10}$	$-0,19.10^{-12}$	$0,35.10^{-11}$	$0,11.10^{-10}$	$0,80.10^{-11}$

Kết quả trong bảng cho thấy điều kiện cân bằng nút luôn đảm bảo.

Khi điểm đặt lực càng vào phía giữa nhịp thì chuyển vị ngang u càng nhỏ nhưng chuyển vị đứng v, lực căng N trong dây lại tăng lên và ngược lại.

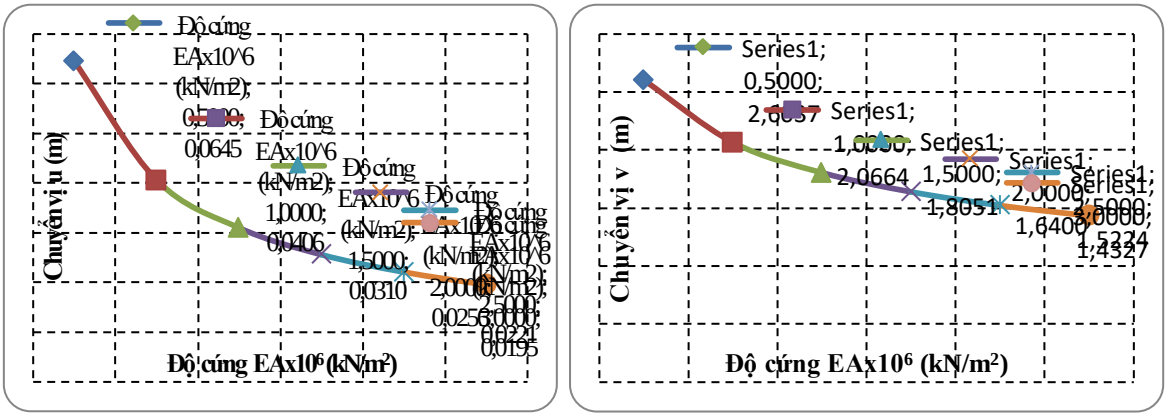
Khi đặt lực ở giữa nhịp ($l_1 = 50m$) thì bài toán là đối xứng.

Ví dụ 3.3: Xét bài toán dây như Ví dụ 3.1 nhưng thay đổi độ cứng kéo EA. Kết quả trình bày ở Bảng 3.2 và Hình 3.3.

Bảng 3.2 Dây đơn khi thay đổi độ cứng kéo EA

EA (kN)	$0,5.10^6$	$1,10^6$	$1,5,10^6$	$2,10^6$	$2,5,10^6$	$3,10^6$
u (m)	0,0645	0,0406	0,0310	0,0256	0,0221	0,0195
v (m)	2,6037	2,0664	1,8051	1,6400	1,5224	1,4327
T_1 (kN)	808,6081	1017,8984	1164,7952	1281,7708	1380,5683	1466,9381
T_2 (kN)	806,1229	1015,9277	1163,0743	1280,2076	1379,1172	1465,5727
Δl (m)	0,16137	0,1016	0,0776	0,0640	0,0552	0,0489
ΣF_x (kN)	$-0,26.10^{-10}$	$0,24.10^{-10}$	$0,19.10^{-9}$	$-0,18.10^{-9}$	$-0,36.10^{-9}$	$0,36.10^{-10}$
ΣF_y (kN)	$-0,22.10^{-11}$	$0,84.10^{-11}$	$0,46.10^{-11}$	$0,2.10^{-10}$	$-0,14.10^{-10}$	$0,22.10^{-11}$

Kết quả thu được trong bảng cho thấy khi độ cứng kéo EA tăng thì chuyển vị và tổng biến dạng Δl giảm, còn lực căng trong dây lại tăng.

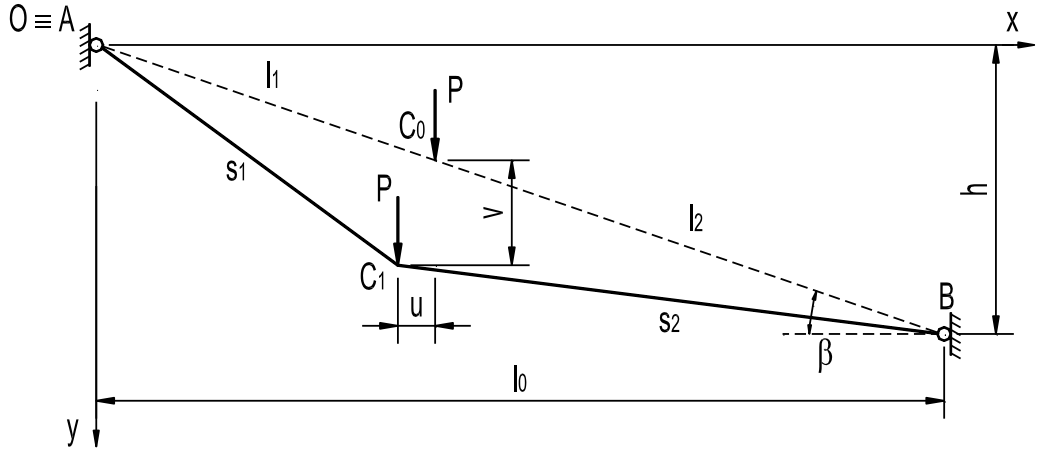


Hình 3.3 Biểu đồ quan hệ EA-u và EA-v

Trên biểu đồ Hình 3.3 cho thấy quan hệ giữa độ cứng EA và chuyển vị u, v là phi tuyến.

3.2.2. Bài toán dây nghiêng chịu một lực tập trung

Xét dây mềm treo nghiêng cố định qua hai điểm A, B, góc nghiêng của đường thẳng AB nối hai gối treo dây so với phương ngang là β, chiều dài nhịp l_0. Độ cứng chống kéo của dây là EA. Dây chịu một lực tập trung P đặt cách hai gối A, B khoảng cách l_1, l_2. Ở đây, ta chưa xét trọng lượng bản thân dây.



Hình 3.4 Sơ đồ tính dây nghiêng chịu một lực tập trung

Chọn hệ trục tọa độ Oxy có gốc O trùng với gối A như hình vẽ. Tọa độ của điểm C_0 là vị trí ban đầu của điểm đặt lực:

$$x_0 = l_1 \cos\beta; y_0 = l_1 \sin\beta \tag{3.9}$$

Dưới tác dụng của lực P, điểm C_0 dịch chuyển tới điểm C_1. Gọi u, v là chuyển vị của điểm đặt lực, ta có tọa độ của điểm đặt lực sau khi biến dạng:

$$x_1 = l_1\cos\beta + u; y_0 = l_1\sin\beta + v \tag{3.10}$$

Chiều dài các đoạn dây sau khi biến dạng:

$$\begin{aligned} s_1 &= \sqrt{\left(l_1\cos\beta + u\right)^2 + \left(l_1\sin\beta + v\right)^2}; \\ s_2 &= \sqrt{\left[\left(l - l_1\right)\cos\beta - u\right]^2 + \left[\left(l - l_1\right)\sin\beta - v\right]^2} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Biến dạng trong các đoạn dây:

$$\varepsilon_1 = \frac{s_1 - l_1}{l_1}; \varepsilon_2 = \frac{s_2 - l_2}{l_2} \tag{3.12}$$

Lực căng trong các đoạn dây:

$$T_1 = EA.\varepsilon_1; T_2 = EA.\varepsilon_2 \tag{3.13}$$

Cũng như trong mục 0, theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, ta cũng dùng phiếm hàm lượng cưỡng bức (3.4) và nhận được hệ phương trình phi tuyến với hai ẩn số u, v:

$$\begin{cases} \dfrac{EA\left(\sqrt{\left(l_1\cos\beta + u\right)^2 + \left(l_1\sin\beta + v\right)^2} - l_1\right)\left(l_1\cos\beta + u\right)}{l_1\sqrt{\left(l_1\cos\beta + u\right)^2 + \left(l_1\sin\beta + v\right)^2}} + \\ + \dfrac{EA\left(\sqrt{\left(l\cos\beta - l_1\cos\beta - u\right)^2 + \left(l\sin\beta - l_1\sin\beta - v\right)^2} - l + l_1\right)\left(-l\cos\beta + l_1\cos\beta + u\right)}{\left(l - l_1\right)\sqrt{\left(l\cos\beta - l_1\cos\beta - u\right)^2 + \left(l\sin\beta - l_1\sin\beta - v\right)^2}} = 0 \\ \dfrac{EA\left(\sqrt{\left(l_1\cos\beta + u\right)^2 + \left(l_1\sin\beta + v\right)^2} - l_1\right)\left(l_1\sin\beta + v\right)}{l_1\sqrt{\left(l_1\cos\beta + u\right)^2 + \left(l_1\sin\beta + v\right)^2}} + \\ + \dfrac{EA\left(\sqrt{\left(l\cos\beta - l_1\cos\beta - u\right)^2 + \left(l\sin\beta - l_1\sin\beta - v\right)^2} - l + l_1\right)\left(-l\sin\beta + l_1\sin\beta + v\right)}{\left(l - l_1\right)\sqrt{\left(l\cos\beta - l_1\cos\beta - u\right)^2 + \left(l\sin\beta - l_1\sin\beta - v\right)^2}} - P = 0 \end{cases} \tag{3.14}$$

Dễ thấy rằng, nếu góc nghiêng của dây β=0 thì hệ phương trình (3.14) trở về hệ phương trình (3.8), bài toán dây ngang mức là một trường hợp riêng của bài toán dây nghiêng. Giải hệ phương trình (3.14) cho ta các chuyển vị u, v. Thay giá trị tìm được vào (3.11), (3.12), (3.13) xác định được lực căng trong dây.

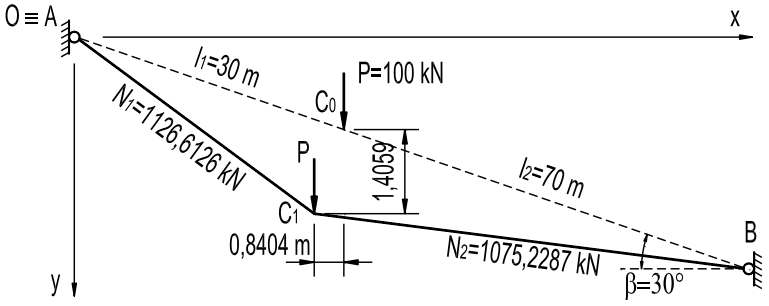
Ví dụ 3.4:

Xét bài toán dây nghiêng có chiều dài dây bằng chiều dài đoạn nối hai gối l = 100 m, độ cứng chống kéo EA = 1708000 kN, góc nghiêng dây $\beta = 30^o$. Dây chịu tác dụng của một lực tập trung có giá trị P = 100 kN đặt cách gối treo A một khoảng $l_1 = 30\text{m}$.

Hệ phương trình phi tuyến **Error! Reference source not found.** lúc này trở thành:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{30}\dfrac{\left(1708000\sqrt{\left(15\sqrt{3}+u\right)^2+\left(15+v\right)^2}-51240000\right)\left(15\sqrt{3}+u\right)}{\sqrt{\left(15\sqrt{3}+u\right)^2+\left(15+v\right)^2}}+ \\ \dfrac{1}{70}\dfrac{\left(1708000\sqrt{\left(35\sqrt{3}-u\right)^2+\left(35-v\right)^2}-119560000\right)\left(-35\sqrt{3}+u\right)}{\sqrt{\left(35\sqrt{3}-u\right)^2+\left(35-v\right)^2}}=0 \\ \dfrac{1}{30}\dfrac{\left(1708000\sqrt{\left(15\sqrt{3}+u\right)^2+\left(15+v\right)^2}-51240000\right)\left(15+v\right)}{\sqrt{\left(15\sqrt{3}+u\right)^2+\left(15+v\right)^2}}+ \\ \dfrac{1}{70}\dfrac{\left(1708000\sqrt{\left(35\sqrt{3}-u\right)^2+\left(35-v\right)^2}-119560000\right)\left(v-35\right)}{\sqrt{\left(35\sqrt{3}-u\right)^2+\left(35-v\right)^2}}-100=0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình xác định được các chuyển vị u=-0,8404m, v=1,4059m và từ đó xác định lực căng dây. Kết quả thể hiện trong Hình 3.4.



Hình 3.5 Kết quả bài toán tính dây nghiêng chịu một lực tập trung

Kiểm tra điều kiện cân bằng nút C_1:

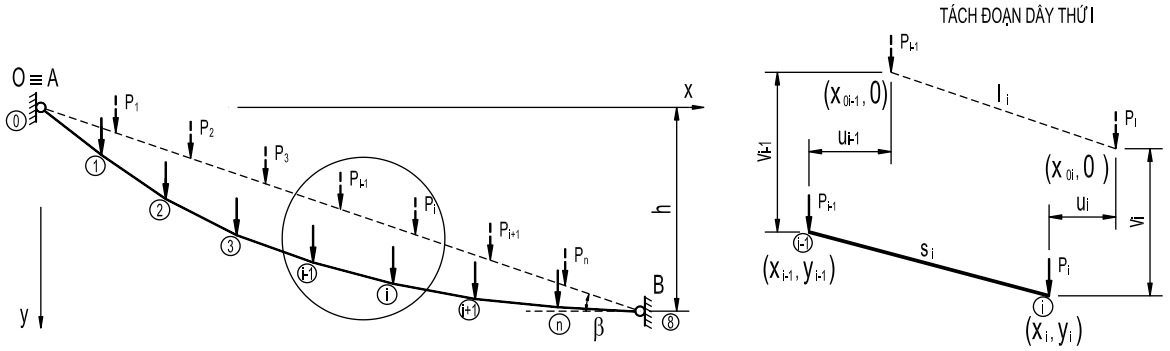
$$\sum Fx = -N_1x_1/s_1+N_2(x_B-x_1)/s_2 = 2{,}1.10^{-9} \approx 0\,kN$$

$$\sum Fy = P - N_1y_1/s_1 + N_2(y_B - y_1)s_2 = 1{,}5.10^{-9} \approx 0\,kN$$

Điều kiện cân bằng nút được thỏa mãn.

3.3. Bài toán dây đơn chịu nhiều lực tập trung

Xét bài toán dây mềm treo qua hai gối A, B chịu nhiều lực tập trung.



Hình 3.6 Sơ đồ tính dây đơn chịu nhiều lực tập trung

Với n lực tập trung thì sẽ chia dây ra thành n+1đoạn với điểm chia là các điểm đặt lực. Như vậy ta có n+2 nút (kể cả hai nút ở hai đầu gối) (Hình 3.6).

Tọa độ ban đầu điểm đặt lực thứ i là $(x_{0i}, 0)$. Gọi u_i, v_i là chuyển vị của điểm đặt lực tại nút thứ i.

Tọa độ điểm đặt lực thứ i sau khi biến dạng là (x_i, y_i), với:

$$x_i = x_{0i} + u_i; y_i = v_i \tag{3.15}$$

Chiều dài ban đầu đoạn dây thứ j với j=1÷ n+1:

$$l_i = x_{0\,i} - x_{0\,i-1} \tag{3.16}$$

Chiều dài đoạn dây thứ i sau khi biến dạng:

$$s_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \tag{3.17}$$

Biến dạng của dây:

$$\varepsilon_i = \frac{s_i - l_i}{l_i} \tag{3.18}$$

Lực căng trong dây:

$$T_i = EA.\varepsilon_i \tag{3.19}$$

Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, lượng cưỡng bức của bài toán được viết:

$$Z = \sum_{i=1}^{n+1} \int_0^{l_i} T_i \varepsilon_i dx - \sum_{i=1}^{n} P_i v_i \to \min \tag{3.20}$$

Trong mỗi đoạn dây, lực dọc T_i và biến dạng ε_i là một đại lượng xác định, do vậy:

$$Z = \sum_{i=1}^{n+1} T_i \varepsilon_i l_i - \sum_{i=1}^{n} P_i v_i \to \min \tag{3.21}$$

Trong phiếm hàm Z, cần xem biến dạng ε_i độc lập với nội lực T_i, chuyển vị v_i độc lập với ngoại lực P_i. Khi có một lực tập trung, n=1, phiếm hàm dây chịu nhiều lực tập trung (3.21) trở về phiếm hàm dây chịu một lực tập trung (3.5).

Điều kiện cực trị của phiếm hàm Z là:

$$\delta Z = \sum_{i=1}^{n+1} T_i l_i \delta\varepsilon_i - \sum_{i=1}^{n} P_i \delta v_i = 0 \tag{2.1}$$

Hay là:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial u_i} = \sum\limits_{i=1}^{n+1} T_i l_i \dfrac{\partial \varepsilon_i}{\partial u_i} = 0; \\ \dfrac{\partial Z}{\partial v_i} = \sum\limits_{i=1}^{n+1} T_i l_i \dfrac{\partial \varepsilon_i}{\partial v_i} - P_i = 0 \end{cases} \tag{3.23}$$

Đây là hệ 2.n phương trình đại số phi tuyến chứa 2.n ẩn số u_i, v_i. Giải hệ phương trình bằng phương pháp lặp xác định được các ẩn số và thay kết quả vào (3.15) đến (3.19) sẽ xác định được lực căng trong dây.

Ví dụ 3.5:

Bài toán dây đơn ngang mức ($\beta=0^o$) có chiều dài dây bằng chiều dài nhịp $l = l_0 = 100\,\text{m}$, độ cứng chống kéo $EA = 1708000\,\text{kN}$ chịu 7 lực tập trung $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_6 = P_7 = 100\,\text{kN}$ tác dụng tại các điểm mà chia dây ra các đoạn đều nhau.

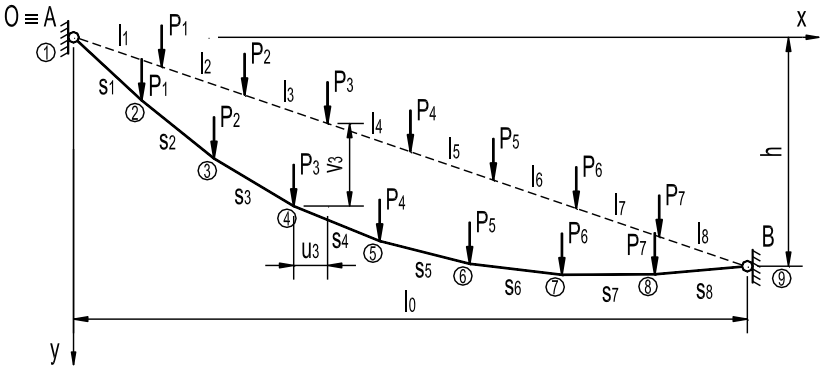
Hệ phương trình (3.23) lúc này là hệ 14 phương trình chứa 14 ẩn số là các chuyển vị tại các điểm đặt lực. Giải hệ phương trình tìm được các ẩn số và từ đó xác định được lực căng trong dây. Kết quả thể hiện trong Bảng 3.3. Điều kiện cân bằng tại các nút đều được thỏa mãn.

Bảng 3.3 Kết quả bài toán dây đơn ngang mức chịu nhiều lực tập trung

Điểm	u_i (m)	v_i (m)	T_i (kN)	ΣFx (kN)	ΣFy (kN)
A	0	0			
			3563,2727		
1	0,0345	1,2304		$-0,19.10^{-9}$	$-0,19.10^{-10}$
			3554,8435		
2	0,0395	2,1113		$0,56.10^{-10}$	$0,13.10^{-11}$
			3549,2129		
3	0,0247	2,6407		$-0,98.10^{-10}$	$-0,46.10^{-11}$
			3546,3943		
4	$-0,184.10^{-14}$	2,8173		$-0,11.10^{-10}$	$0,49.10^{-12}$
			3546,3943		
5	-0,0247	2,6407		$-0,18.10^{-9}$	$0,73.10^{-11}$
			3549,2129		
6	-0,0395	2,1113		$0,29.10^{-9}$	$-0,16.10^{-10}$
			3554,8435		
7	-0,0345	1,2304		$-0,15.10^{-9}$	$0,13.10^{-10}$
			3563,2727		
B	0	0			

Ví dụ 3.6:

Xét bài toán dây nghiêng có chiều dài dây bằng chiều dài đoạn nối hai gối AB=100m, độ cứng chống kéo $EA = 1708000$ kN, góc nghiêng dây $\beta = 30^o$. Dây chịu tác dụng 7 lực tập trung có giá trị $P = 10$ kN đặt tại các điểm mà chia đều dây ra làm 8 đoạn.



Hình 0.7 Sơ đồ tính dây nghiêng chịu nhiều lực tập trung

Xây dựng phiếm hàm, lập hệ phương trình cân bằng với 14 phương trình có 14 ẩn là các chuyển vị tại các điểm đặt lực.

Kết quả thể hiện trong Bảng 3.4.

Bảng 3.4 Kết quả tính toán dây nghiêng chịu tác dụng 7 lực tập trung

Điểm	u (m)	v (m)	T	ΣFx (kN)	ΣFy (kN)
1	0	0		0	0
			713,4389		
2	-0,2740	0,4619		$-0,204,10^{-9}$	$-0,69,10^{-10}$
			708,1219		
3	-0,4688	0,7976		$0,420,10^{-9}$	$0,4,10^{-9}$
			702,9069		
4	-0,5847	1,0042		$0,392,10^{-9}$	$0,294,10^{-9}$
			697,7963		
5	-0,6223	1,0789		$-0,221,10^{-8}$	$-0,115,10^{-8}$
			692,7923		
6	-0,5819	1,0188		$0,284,10^{-8}$	$0,146,10^{-8}$
			687,8973		
7	-0,4643	0,8209		$-0,208,10^{-8}$	$0,116,10^{-8}$
			683,1136		
8	-0,2701	0,4822		$0,114,10^{-8}$	$-0,614,10^{-9}$
			678,4437		
9	0	0			

3.4. Tính dây đơn chịu tải trọng bản thân

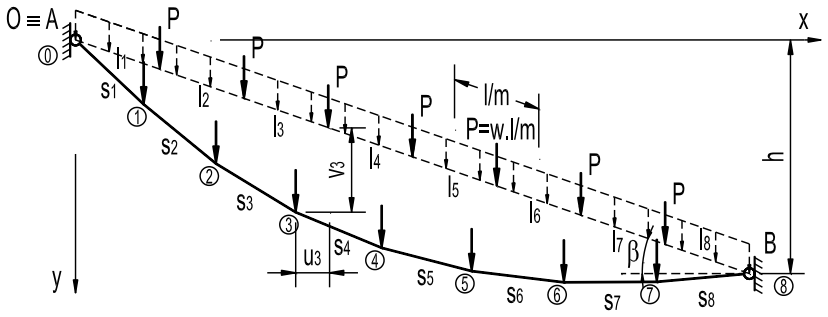
3.4.1. Phương pháp tính toán

Xét bài toán dây đơn, chiều dài dây bằng chiều dài nhịp, chịu tải trọng bản thân. Để giải bài toán, ta chia dây thành các đoạn có chiều dài bằng nhau và quy đổi trọng lượng phân bố trên chiều dài dây thành các lực tập trung tương đương đặt ở các điểm chia dây với độ lớn P:

$$P = g.\frac{l}{m} \tag{3.24}$$

trong đó: l, g, m tương ứng là chiều dài, trọng lượng dây trên đơn vị dài, số đoạn chia của dây (Hình 3.8).

Bằng cách này, bài toán tính dây chịu tải trọng bản thân được đưa về bài toán dây chịu nhiều lực tập trung P và áp dụng phương pháp tính dây chịu nhiều lực tập trung như trong mục 0 và cụ thể là phiếm hàm (3.21) để giải. Độ chính xác của lời giải nhận được tùy thuộc vào số đoạn chia dây.



Hình 3.8 Sơ đồ tính dây chịu trọng lượng bản thân

Khi chia dây thành m đoạn, đánh số nút nối các đoạn dây là $i = 0 \div m$, trong đó nút 0 và m là các nút nối với gối tựa. Hệ phương trình cân bằng của đoạn dây thứ i có nút đầu là i-1 và nút cuối là i :

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{\left(\dfrac{l.\cos\beta}{m}+u_i-u_{i-1}\right)^2+\left(\dfrac{l.\sin\beta}{m}+v_i-v_{i-1}\right)^2}-\dfrac{l}{m}}{\sqrt{\left(\dfrac{l.\cos\beta}{m}+u_i-u_{i-1}\right)^2+\left(\dfrac{l.\sin\beta}{m}+v_i-v_{i-1}\right)^2}}.\dfrac{m.EA}{l}\left(\dfrac{l.\cos\beta}{m}+u_i-u_{i-1}\right)+ \\ \dfrac{\sqrt{\left(\dfrac{l.\cos\beta}{m}+u_{i+1}-u_i\right)^2+\left(\dfrac{l.\sin\beta}{m}+v_{i+1}-v_i\right)^2}-\dfrac{l}{m}}{\sqrt{\left(\dfrac{l.\cos\beta}{m}+u_{i+1}-u_i\right)^2+\left(\dfrac{l.\sin\beta}{m}+v_{i+1}-v_i\right)^2}}.\dfrac{mEA}{l}\left(-\dfrac{l.\cos\beta}{m}-u_{i+1}+u_i\right)=0 \\ \dfrac{\sqrt{\left(\dfrac{l.\cos\beta}{m}+u_i-u_{i-1}\right)^2+\left(\dfrac{l.\sin\beta}{m}+v_i-v_{i-1}\right)^2}-\dfrac{l}{m}}{\sqrt{\left(\dfrac{l.\cos\beta}{m}+u_i-u_{i-1}\right)^2+\left(\dfrac{l.\sin\beta}{m}+v_i-v_{i-1}\right)^2}}.\dfrac{m.EA}{l}\left(\dfrac{l.\sin\beta}{m}+v_2-v_1\right)+ \\ \dfrac{\sqrt{\left(\dfrac{l.\cos\beta}{m}+u_{i+1}-u_i\right)^2+\left(\dfrac{l.\sin\beta}{m}+v_{i+1}-v_i\right)^2}-\dfrac{l}{m}}{\sqrt{\left(\dfrac{l.\cos\beta}{m}+u_{i+1}-u_i\right)^2+\left(\dfrac{l.\sin\beta}{m}+v_{i+1}-v_i\right)^2}}.\dfrac{mEA}{l}\left(-\dfrac{l.\sin\beta}{m}-v_{i+1}+v_i\right)-P=0 \end{cases} \quad (3.25)$$

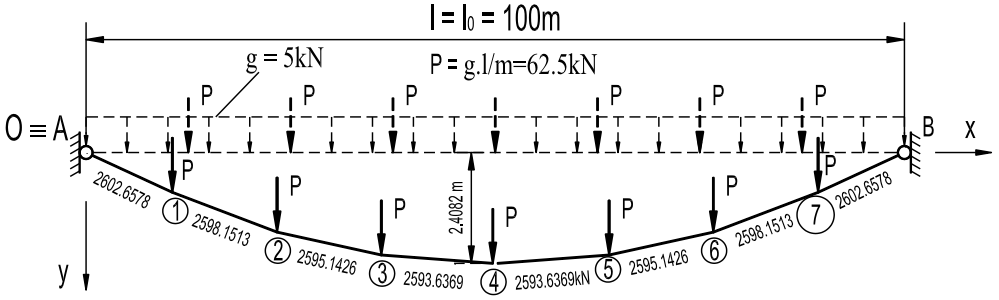
Tổng số có 2(m-1) phương trình với các ẩn số là các chuyển vị nút là $u_i, v_i\,(i = 1 \div m-1)$. Chú ý rằng do điều kiện biên tại các gối treo cố định nên ta có các chuyển vị tại các gối: $u_0 = u_m = v_0 = v_m = 0$.

Ví dụ 3.7:

Xác định nội lực và độ võng của dây ngang mức chịu tác dụng tải trọng bản thân. Chiều dài dây bằng chiều dài nhịp $l = l_0 = 100\,\text{m}$, độ cứng kéo nén EA = 1708000 kN, trọng lượng dây phân bố đều theo chiều dài g = 5 kN/m.

Chia dây thành 8 đoạn bằng nhau. Trọng lượng dây được đưa về các lực tập trung đặt tại nút: $P = g.\frac{l}{m} = 62,5\,\text{kN}$. Bài toán có 14 ẩn là các chuyển vị nút. Xây dựng phiếm hàm lượng cưỡng bức của bài toán, từ điều kiện cực trị của phiếm hàm, nhận được hệ 14 phương trình phi tuyến 14 ẩn số. Giải hệ phương trình tìm đươc các ẩn số từ đó xác định được lực căng trong dây.

Kết quả thể hiện trên Hình 3.9 và Bảng 3.5.



Hình 3.9 Kết quả tính dây đơn chịu tác dụng trọng lượng bản thân

Bảng 3.5 Bài toán dây đơn chịu tải trọng bản thân khi chia dây 8 đoạn

Điểm	u (m)	v (m)	T (kN)	ΣFx (kN)	ΣFy (kN)
0	0	0			
			2602,6578		
1	-0,0252	1,0522		$0,8.10^{-10}$	$0,5.10^{-11}$
			2598,1513		
2	-0,0289	1,8051		$0,48.10^{-9}$	$0,922.10^{-10}$
			2595,1426		
3	-0,0181	2,2573		$-0,295.10^{-8}$	$-0,794.10^{-10}$
			2593,6369		
4	0	2,4082		$0,449.10^{-8}$	$0,521.10^{-10}$
			2593,6369		
5	-0,0181	2,2573		$-0,149.10^{-8}$	$0,71.10^{-11}$
			2595,1426		
6	-0,0289	1,8051		$-0,31.10^{-9}$	$-0,49.10^{-10}$

Điểm	u (m)	v (m)	T (kN)	ΣFx (kN)	ΣFy (kN)
			2598,1513		
7	-0,0252	1,0522		$-0,113.10^{-8}$	$0,60.10^{-10}$
			2602,6578		
8	0	0			

Kết quả thể hiện trong bảng cho thấy lực căng trong dây lớn nhất ở hai đầu dây. Điều này phù hợp với các kết quả tính toán của các tác giả trước đây [24].

3.4.2. Khảo sát bài toán dây chịu tải trọng bản thân khi số đoạn chia khác nhau

Kết quả tính cho các trường hợp với số đoạn chia dây khác nhau được thể hiện trong Bảng 3.6. Giá trị tính toán đưa ra trong bảng là lực căng lớn nhất ở sát gối và chuyển vị lớn nhất ở giữa nhịp. Để đánh giá sự hội tụ của bài toán, ta tính sai khác về kết quả tính khi số đoạn chia tăng lên.

Bảng 3.6 Bài toán dây chịu tải trọng bản thân khi số đoạn chia khác nhau

Số đoạn chia m	Lực căng lớn nhất (sát gối)		Chuyển vị lớn nhất (giữa nhịp)	
	Lực căng (kN)	Sai khác (%)	Chuyển vị (m)	Sai khác (%)
2	2373,5268		2,6369	
4	2558,7770	7,8	2,4477	7,18
8	2602,6578	1,71	2,4082	1,61
16	2614,1569	0,44	2,3987	0,39
32	2617,3907	0,12	2,3963	0,10
64	2618,3846	0,04	2,3958	0,02

Về logic khi số đoạn chia tăng lên thì kết quả tính sẽ hội tụ về gần với giá trị thực của lực căng và chuyển vị trong dây. Kết quả trong Bảng 3.6 cho ta thấy rõ sự hội tụ khi tăng số đoạn chia m trong dây, sai khác về lực căng và chuyển vị giữa các trường hợp chia dây khác nhau giảm rất nhanh và hội tụ. Khi số đoạn chia lớn hơn 8 thì sai lệch về kết quả tính lực căng và độ võng lớn nhất là dưới 0.5% nếu tăng gấp đôi số đoạn chia.

3.4.3. So sánh với lý thuyết tính dây đơn hiện nay

Xét trường hợp dây có chiều dài bằng chiều dài nhịp. Hiện nay lý thuyết tính dây đơn thường dùng đường độ võng của dây dưới tác dụng của trọng lượng bản thân có dạng parabol, khi đó theo diễn giải của Sir Alfpred Pugsley [24], lực căng lớn nhất trong dây là ở vị trí hai đầu gối và được tính theo công thức:

$$T_{max} = \frac{gl^2}{8d}\sqrt{1+\frac{16d^2}{l^2}} \qquad (3.26)$$

trong đó g là trọng lượng bản thân phân bố đều theo phương ngang, l là chiều dài nhịp, d là độ võng giữa nhịp của dây.

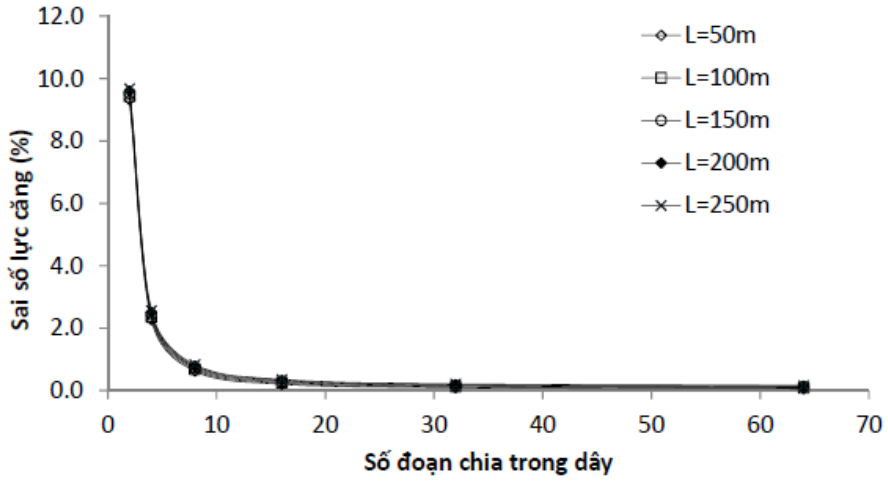
Trong công thức (3.26) để tính lực căng lớn nhất phải biết độ võng lớn nhất là d. Tác giả dùng d là độ võng giữa nhịp lấy theo kết quả Bảng 3.6 để đưa vào tính toán. Kết quả so sánh trong Bảng 3.7.

Bảng 3.7 So sánh với lý thuyết dây hiện nay

Số đoạn chia m	Độ võng giữa nhịp (m)	Lực căng lớn nhất (sát gối) (kN)		
		Theo pp nguyên lý cực trị Gauss	Theo lý thuyết dây hiện nay	Sai khác (%)
2	2,6369	2373,5268	2383,3809	0,41
4	2,4477	2558,7770	2565,6268	0,27
8	2,4082	2602,6578	2607,3126	0,18
16	2,3987	2614,1569	2617,5440	0,13
32	2,3963	2617,3907	2620,1417	0,10
64	2,3958	2618,3846	2620,6836	0,09

Trong Bảng 3.7, khi tính lực căng lớn nhất theo công thức (3.26) thì sai khác so với phương pháp nguyên lý cực trị Gauss rất nhỏ (từ 0,09 ÷ 0,41%).

Để tìm được số đoạn chia phù hợp khi tính dây đơn chịu tải trọng bản thân, tác giả đã khảo sát cho các trường hợp chiều dài dây khác nhau, số đoạn chia của dây thay đổi từ 2 đến 64. Khi số đoạn chia lớn hơn 16 thì độ võng lớn nhất hầu như không thay đổi. Đồ thị trong Hình 3.10 biểu diễn tương quan giữa sai số về lực căng lớn nhất trong dây với số đoạn chia trong dây cho các trường hợp dây có chiều dài khác nhau, giá trị lực căng lớn nhất tính theo (3.26) ứng với độ võng d của dây khi chia dây làm 64 đoạn. Theo kết quả khảo sát thì sai khác về lực căng khi tính theo hai phương pháp là dưới 1% nếu chia dây làm 8 đoạn và dưới 0.5% nếu chia dây hơn 16 đoạn.



Hình 3.10 Tương quan giữa số đoạn chia và sai khác về lực căng trong dây

Kết quả bài toán tính dây chịu trọng lượng bản thân khi chia dây làm 8 đoạn được trình bày trong Bảng 3.5.

So sánh với lý thuyết dây hiện nay, ta có đường độ võng của dây dưới tác dụng tải trọng bản thân được xác định theo công thức:

$$y = \frac{1}{2}\frac{g}{H}x^2 + A \qquad (3.27)$$

Ở đây g là trọng lượng phân bố đều của dây theo chiều dài dây cũng bằng phân bố theo chiều dài nhịp; H là lực căng dây tại điểm giữa. Phương trình (3.27) xác định khi biết được lực căng dây tại điểm giữa nhịp H. Đây là phương trình parabol có đỉnh ở giữa nhịp và ta có tại $x = \pm\frac{l}{2}$ thì $y = 0$, vì thế $A = \frac{g.l^2}{8H}$

Với trường hợp chia dây làm 8 đoạn, trọng lượng g = 5 kN/m, lực căng giữa nhịp dây là $H = T_{3-4} = T_{4-5} = 2593,6369\,kN$, $A = \frac{g.l^2}{8H} = \frac{5.100^2}{8.2593,6369} = 2,4097$, do đó ta có phương trình đường độ võng của dây là:

$$y = \frac{1}{2}\frac{g}{H}x^2 - A = \frac{1}{2}\frac{5}{2593,6369}x^2 - 2,4097$$

Ta lấy x là tọa độ của các điểm đặt lực của dây sau khi biến dạng, kết quả tính độ võng y và so sánh với độ võng v tính ở trên (Bảng 3.5) được thể hiện trên Bảng 3.8. Trong Bảng 3.8, ta thấy rằng sai số giữa kết quả tính được v rất nhỏ so với độ

võng của đường Parabol y, tức là ta thấy rằng đường cong theo phương pháp tác giả tính toán gần như trùng khớp với đường Parabol.

Bảng 3.8 So sánh độ võng với đường Catenary Parabol

Điểm	x	v	y	Sai số (%)
0	-50	0	0	0
1	-37,5252	1,0522	1,05244	0,0240
2	-25,0289	1,8051	1,80591	0,0814
3	-12,5181	2,2573	2,2587	0,1398
4	0	2,4082	2,40974	0,1544
5	12,5181	2,2573	2,2587	0,1398
6	25,0289	1,8051	1,80591	0,0814
7	37,5252	1,0522	1,05244	0,0240
8	50	0	0	0

Như vậy khi tính dây chịu tác dụng của trọng lượng bản thân theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss không cần giả thiết trọng lượng dây phân bố đều theo chiều dài nhịp và chỉ cần chia dây thành các đoạn nhỏ với số đoạn chia bằng 8 đã có thể tính được lực căng trong dây với sai số nhỏ hơn 1% và độ võng là 0,15%.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

KẾT LUẬN

Từ các kết quả trình bày trong các mục trên, ta có thể rút ra một số kết luận sau:

Sử dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, với phiếm hàm lượng cưỡng bức $Z = \sum_{i=1}^{n+1} T_i \varepsilon_i l_i - \sum_{i=1}^{n} P_i v_i \to \min$, tác giả đã xây dựng và giải được bài toán dây đơn chịu các tác động khác nhau. Phương pháp áp dụng ở đây là chính xác, đơn giản, dễ sử dụng, cho phép xác định được đồng thời chuyển vị và lực căng trong dây. Điều này khác với các lý thuyết hiện nay là muốn xác định lực căng trong dây phải giả thiết trước mũi tên võng hoặc chiều dài, hoặc thành phần ngang của lực căng trong dây.

Trên cơ sở lý thuyết đề xuất, tác giả đã xây dựng được thuật toán và chương trình tính dây đơn bằng ngôn ngữ Matlab có tên là CABLE; chương trình cho phép khảo sát bài toán dây đơn cho các trường hợp dây chịu tải trọng bản thân, tải trọng ngoài, dây căng trước, chiều dài dây khác chiều dài nhịp, dây chịu ảnh hưởng của nhiệt độ.

Bài toán dây chịu tải trọng bản thân có thể chia dây thành đường gẫy khúc. Khi số đoạn chia lớn hơn hoặc bằng 8 thì đảm bảo được độ chính xác yêu cầu về lực căng và độ võng của dây. Khi chia dây với số đoạn chia bằng 8, sai khác về lực căng so kết quả của đường liên tục là nhỏ hơn 1% còn về độ võng là 0,15%.

KIẾN NGHỊ

Tiếp tục phát triển phương pháp nguyên lý cực trị Gauss để xây dựng và giải các bài toán kết cấu dây phức tạp khác.

Có thể dùng luận văn làm tài liệu tham khảo, nghiên cứu và học tập trong thực tế tính toán kết cấu công trình

TÀI LIỆU THAM KHẢO

TIẾNG VIỆT

[1] N.I.Bêdukhốp (1978), người dịch Phan Ngọc Châu, *Cơ sở lý thuyết đàn hồi, lý thuyết dẻo, lý thuyết từ biến*, Nxb Đại học và trung học chuyên nghiệp, Hà Nội.

[2] Đào Huy Bích (2000), *Lý thuyết đàn hồi,* Nxb Đại học quốc gia Hà Nội.

[3] Bộ Giao thông vận tải (2007), *Tiêu chuẩn thiết kế cầu 22TCN-272-05*, Nxb Giao thông vận tải, Hà Nội.

[4] Hà Huy Cương (2005), "Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss", *Tạp chí Khoa học và kỹ thuật*, (Số 4).

[5] Nguyễn Văn Đạo (2001), *Cơ học giải tích,* Nxb Đại học quốc gia Hà Nội.

[6] Đoàn Văn Duẩn (2010), *Nghiên cứu ổn định công trình có xét biến dạng trượt,* Luận án tiến sỹ kỹ thuật, Trường Đại học Kiến trúc Hà Nội, Hà Nội.

[7] L.E.Engôn (1974), người dịch Hoàng Tấn Hưng, *Phép tính biến phân,* Nxb Khoa học và kỹ thuật.

[8] Hội Khoa học kỹ thuật cầu đường Việt Nam (2004), Hội thảo khoa học phát triển cầu dây văng và hầm tại Việt Nam,

[9] Trần Thị Kim Huế (2005), *Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss đối với bài toán cơ học kết cấu,* Luận văn thạc sỹ kỹ thuật, Trường Đại học Kiến trúc Hà Nội, Hà Nội.

[10] Bùi Khương (2003), *Lý thuyết tính toán các hệ treo và cầu treo,* Nxb Giao thông vận tải, Hà Nội.

[11] Đinh Quốc Kim (2008), *Thiết kế và xây dựng cầu dây văng đường bộ,* Nxb Giao thông vận tải, Hà Nội.

[12] Nguyễn Thị Thùy Liên, Nguyễn Phương Thành (2009), "Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss đối với bài toán dao động công trình", *Tạp chí xây dựng,* (số 3).

[13] Lê Đình Tâm, Phạm Duy Hòa (2001), *Cầu dây văng,* Nxb Khoa học và kỹ thuật, Hà Nội.

[14] Nguyễn Xuân Tấn, Nguyễn Bá Minh (2007), *Lý thuyết tối ưu không trơn,* Nxb Đại học quốc gia Hà Nội, Hà Nội.

[15] Phùng Bá Thắng (2008), "Phương pháp tính kết cấu dàn có xét đến biến dạng dọc trục của thanh", *Tạp chí Cầu đường*, (Số 4).

[16] Vũ Thanh Thủy (2009), "Xây dựng bài toán dầm khi xét đầy đủ hai thành phần nội lực mômen uốn M và lực cắt Q", *Tạp chí Xây dựng*, (Số 4).

[17] Vũ Thanh Thủy (2010), Nghiên cứu nội lực và chuyển vị của hệ thanh chịu uốn khi xét tới ảnh hưởng của biến dạng trượt, Luận án tiến sỹ kỹ thuật, Trường Đại học Kiến trúc Hà Nội, Hà Nội.

[18] Bùi Minh Trí (2001), *Quy hoạch toán học,* NXB Khoa học và kỹ thuật, Hà Nội.

[19] Lều Thọ Trình (2003), *Cách tính hệ treo theo sơ đồ biến dạng,* Nxb Xây dựng, Hà Nội.

[20] Phạm Văn Trung (2006), *Phương pháp mới tính hệ kế cấu dây và mái treo,* Luận án tiến sỹ kỹ thuật, Trường Đại học Kiến trúc Hà Nội, Hà Nội.

[21] Nguyễn Viết Trung (2004), *Thiết kế cầu treo dây võng*, Nxb Xây dựng, Hà Nội.

[22] Quy phạm tạm thời thiết kế cầu dây văng JTJ 027096, nước Cộng hòa Nhân dân Trung Hoa (bản dịch tiếng Việt).

[23] Liên doanh tư vấn JBSI (Viện cầu và kết cấu Nhật Bản), PCI (Công ty tư vấn quốc tế Thái Bình Dương, TEDI, công ty tư vấn thiết kế Hyder(2003), *Hồ sơ thiết kế kỹ thuật cầu Bãi Cháy*.

TIẾNG ANH

[24] Sir. Alfred Pugsley (1957), *The theory of suspension bridges*, Edward Arnold Ltd, London.

[25] BrunoD & Leonardi A (1997), "Natural periods of long-span cable-stayed bridges", *Journal of Bridge Engineering*, 2(3).

[26] Brian R. Hunt, Ronald L. Lipsman, Jonathan M. Rosenberg (2006), *A Guide to MATLAB®*, Cambridge University Press, New York.