BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC DÂN LẬP HẢI PHÒNG

TRẦN MẠNH HÙNG

ÁP DỤNG THỪA SỐ LARGRANGE GIẢI BÀI TOÁN KẾT CẤU DÀN PHẲNG CÓ ĐIỀU KIỆN BIÊN ĐA BẬC TỰ DO BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Chuyên ngành: **Kỹ thuật Xây dựng Công trình Dân dụng & Công nghiệp**
Mã số: **60.58.02.08**

LUẬN VĂN THẠC SỸ KỸ THUẬT

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. PHẠM VĂN ĐẠT

Hải Phòng, 2017

LỜI CAM ĐOAN

Tên tôi là: Trần Mạnh Hùng

Sinh ngày: 03/08/1984

Đơn vị công tác: Ban quản lý dự án công trình huyện Bình Liêu tỉnh Quảng Ninh.

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các số liệu, kết quả trong luận văn là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Hải Phòng, ngày .... tháng 11 năm 2017

Tác giả luận văn

Trần Mạnh Hùng

LỜI CẢM ƠN

Tác giả luận văn xin trân trọng bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất đối với Tiến sỹ Phạm Văn Đạt vì những ý tưởng khoa học độc đáo, những chỉ bảo sâu sắc về phương pháp mới để phân tích nội lực, chuyển vị bài toán tuyến tính kết cấu dàn chịu tải trọng tĩnh của và những chia sẻ về kiến thức cơ học, toán học uyên bác của Tiến sỹ. Tiến sỹ đã tận tình giúp đỡ và cho nhiều chỉ dẫn khoa học có giá trị cũng như thường xuyên động viên, tạo mọi điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu hoàn thành luận văn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các nhà khoa học, các chuyên gia trong và ngoài trường Đại học Dân lập Hải phòng đã tạo điều kiện giúp đỡ, quan tâm góp ý cho bản luận văn được hoàn thiện hơn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn các cán bộ, giáo viên của Khoa xây dựng, Phòng đào tạo Đại học và Sau đại học - trường Đại học Dân lập Hải phòng, và các đồng nghiệp đã tạo điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tác giả trong quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tác giả luận văn

Trần Mạnh Hùng

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

1. Tính cấp thiết của đề tài

Trước đây khi công nghệ thông tin chưa phát triển, việc giải các bài toán có số ẩn lớn là một vấn đề rất khó khăn. Các phương pháp phân tích kết cấu công trình khi xây dựng thường phải đưa vào một số giả thuyết nhằm làm đơn giản hóa bài toán để giảm ẩn số. Trong những năm gần đây việc phát triển của công nghệ thông tin máy tính điện tử nên việc giải các bài toán phức tạp, có nhiều ẩn số không còn là một vấn đề phức tạp. Do đó, các phương pháp phân tích kết cấu được xây dựng ngày càng cho phép mô phỏng được các mô hình tính toán phức tạp cũng như đưa được nhiều đặc tính khác nhau của vật liệu. Vì vậy, kết quả phân tích bằng lý thuyết sẽ gần sát với sự làm việc thực tế của kết cấu.

Một trong những phương pháp phân tích kết cấu hiện nay thường được sử dụng để phân tích các bài toán kết cấu là phương pháp phần tử hữu hạn. Phương pháp phần tử hữu hạn đã được đưa vào giảng dạy cho các sinh viên, học viên cao học các trường Kỹ thuật, tuy nhiên tài liệu về phương pháp phần tử hữu hạn đã được xuất bản tại Việt Nam thường chưa giới thiệu cách giải bài toán kết cấu có điều kiện biên đa bậc tự do bằng phương pháp phần tử hữu hạn. Điều kiện biên đa bậc tự do ở đây được hiểu là điều kiện biên làm các bậc tự do theo chuyển vị thẳng trong hệ trục tọa độ tổng thể của kết cấu tại biên nào đó ràng buộc nhau.

Nhằm có một cách đơn giản về cách giải bài toán kết cấu có điều kiện biên đa bậc tự do bằng phương pháp phần tử hữu hạn, tác giả lựa chọn đề tài: "Áp dụng thừa số Largrange giải bài toán kết cấu dàn phẳng có điều kiện biên đa bậc tự do bằng phương pháp phần tử hữu hạn".

2. Mục đích nghiên cứu

Áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn sử dụng hàm số Largrange giải được các bài toán kết cấu có điều kiện biên làm các bậc tự do theo chuyển vị thẳng trong hệ tọa độ tổng thể tại biên đó ràng buộc nhau.

3. Phạm vi nghiên cứu

Đề tài nghiên cứu việc áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn và sử dụng hàm số Largrange để giải bài toán tuyến tính kết cấu dàn phẳng có điều kiện biên làm các bậc tự do theo chuyển vị thẳng trong hệ tọa độ tổng thể tại biên đó ràng buộc nhau khi chịu tải trọng tĩnh và vật liệu làm việc trong giai đoạn đàn hồi.

4. Phương pháp nghiên cứu

Áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn kết hợp với phương pháp thừa số Largrange để xây dựng lời giải cho bài toán kết cấu dàn, khung phẳng có biên phức tạp.

5. Bố cục của đề tài

Ngoài phần mở đầu, phần kết luận, tài liệu tham khảo và phụ lục. Nội dung chính của đề tài được bố cục trong 3 chương:

- **Chương 1 Tổng quan về phân tích kết cấu dàn**: Trong chương này đề tài sẽ trình bày một số phương pháp thường dùng để phân tích nội lực, chuyển vị cho bài toán kết cấu dàn khi chịu tải trọng tĩnh. Đồng thời giới thiệu một số cách thường dùng để xử lý điều kiện biên cho bài toán kết cấu khi sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn để phân tích. Cuối chương là một số nhận xét.

- **Chương 2 Phương pháp phần tử hữu hạn sử dụng hàm số Largrange để giải bài toán kết cấu có điều kiện biên đa bậc tự do**: Trong chương này sẽ trình bày các khái niệm, cũng như phương pháp phần tử hữu hạn để giải bài toán kết cấu hệ thanh. Khái niệm về phương pháp thừa số Largrange để giải bài toán quy hoạch toán học. Cuối chương đề tài trình bày việc Áp dụng thừa số Largrange để giải bài toán kết cấu có điều kiện biên đa bậc tự do theo phương pháp phần tử hữu hạn.

- **Chương 3 Một số ví dụ phân tích kết cấu dàn phẳng, khung phẳng có điều kiện biên đa bậc tự do**: Trên cơ sở lý thuyết trình bày ở chương 2, trong chương này đề tài sẽ tiến hành phân tích một số ví dụ cụ thể của bài toán kết cấu dàn phẳng, khung phẳng có điều kiện biên đa bậc tự do dựa theo phương pháp phần tử hữu hạn bằng việc sử dụng hàm số Largrange .

Chương 1: TỔNG QUAN VỀ PHÂN TÍCH KẾT CẤU DÀN

1.1. Một số phương pháp phân tích nội lực và chuyển vị cho bài toán kết cấu dàn, khi chịu tải trọng tĩnh

Từ nửa đầu của thế kỷ XVII trở về trước, các công trình khác nhau được xây dựng thường dựa trên cơ sở truyền bá kinh nghiệm từ thế hệ này qua thế hệ khác hoặc từ sự hướng dẫn của người đi trước cho người đi sau. Các bộ phận công trình cũng được xây dựng như vậy. Những công trình hoặc bộ phận công trình sau khi xây dựng, nếu được tồn tại thì lấy đó làm mẫu để xây dựng cho những cái tương tự về sau. Cách làm như thế rất nguy hiểm, vì các công trình xây dựng mới dựa vào kinh nghiệm như thế thì người xây dựng không chắc chắn được các công trình này có tồn tại không, hoặc các bộ phận của công trình có đảm bảm an toàn khi đưa công trình vào sử dụng và trong thực tế rất nhiều công trình có thể bị phá hoại ngay trong quá trình xây dựng. Mãi đến giữa thế kỷ XVII thì người ta mới chú ý đến nghiên cứu tính toán đến khả năng chịu lực của vật liệu dùng để làm các bộ phận của công trình và yêu cầu đặt ra là kích thước các cấu kiến của các công trình này hợp lý nhất để chi phí xây dựng là nhỏ nhất, nhưng vẫn đảm bảo yêu cầu kết cấu không bị phá hoại khi sử dụng. Hiện nay, các phương pháp phân tích chuyển vị, nội lực của kết cấu dàn, kết cấu khung khi chịu tải trọng tĩnh có thể chia thành một số nhóm phương pháp chính như sau:

1.1.1 Phương pháp tách nút

Phương pháp tách nút là trường hợp đặc biệt của phương pháp mặt cắt. Trong đó hệ lực cần khảo sát cân bằng là hệ lực đồng quy.

Nội dung phương pháp: Phương pháp tách nút là sự khảo sát sự cân bằng của từng nút được tách ra khỏi dàn.

Thứ tự áp dụng:

- Lần lượt tách từng nút ra khỏi dàn bằng những mặt cắt bao quanh nút.

- Thay thế tác dụng của các thanh bị cắt bằng lực dọc trong thanh đó, sau khi thay thế tại mỗi nút ta có một hệ lực đồng quy.

- Khảo sát sự cân bằng của từng nút chúng ta sẽ xây dựng nên được một hệ phương trình cân bằng các nút mà ẩn số của các hệ này là lực dọc trong các thanh dàn.

- Cuối cùng ta chỉ việc giải hệ sẽ xác định được lực dọc trong các thanh dàn.

Phạm vi áp dụng phương pháp: Phương pháp tách nút chỉ sử dụng tính toán các dàn tĩnh định còn dàn siêu tĩnh không áp dụng được.

1.1.2 Phương pháp mặt cắt

Nội dung phương pháp: Phương pháp mặt cắt đơn giản được thực hiện bằng mặt cắt qua các thanh tìm nội lực (số lực chưa biết không lớn hơn số phương trình cân bằng được lập) và viết phương trình cân bằng cho từng phần của dàn. Thứ tự áp dụng:

- Thực hiện mặt cắt qua thanh cần tìm nội lực và mặt cắt chia dàn ra làm hai phần độc lập.

- Thay thế tác dụng của các thanh bị cắt bằng các lực dọc tương ứng. Khi chưa biết lực dọc ta giả thiết lực dọc dương nghĩa là hướng ra ngoài mặt cắt đang xét.

- Lập phương trình cần bằng cho một phần dàn bị cắt (phần bên phải hoặc phần bên trái). Từ các phương trình cần bằng sẽ suy ra nội lực cần tìm. Nếu kết quả mang dấu dương thì chiều nội lực hướng theo chiều giả định, tức là kéo. Ngược lại nếu kết quả mang dấu âm thì chiều nội lực hướng ngược chiều giả định, tức là nén.

Phạm vi áp dụng phương pháp: Phương pháp mặt cắt đơn giản chỉ dùng tính toán cho dàn tĩnh.

1.1.3 Phương pháp mặt cắt phối hợp

Nội dung phương pháp:

Phương pháp mặt cắt phối hợp được áp dụng để tính dàn khi không dùng được mặt cắt đơn giản, nghĩa là khi tại một mặt cắt, số lực chưa biết lớn hơn ba. Mục đích chính của phương pháp này là tìm cách thiết lập một số phương trình cân bằng chỉ chứa một số lực chưa biết bằng số phương trình đó. Khi thiết lập một phương trình cân bằng trong mỗi mặt cắt nói chung ta chỉ có thể loại trừ được hai lực chưa biết.

Bởi vậy, khi chỉ có thể thực hiện mặt cắt qua bốn thanh chưa biết nội lực mới đủ điều kiện là cắt qua thanh cần tìm nội lực và chia dàn thành hai phần độc lập thì ta phải dùng hai mặt cắt phối hợp. Với hai mặt cắt thì ta có thể tìm được ngay hai nội lực theo hai phương trình. Muốn vậy:

- Hai mặt cắt cùng phải đi qua hai thanh cần tìm nội lực và mỗi mặt cắt chỉ có thể đi qua hai thanh khác chưa cần tìm nội lực.

- Trong mỗi mặt cắt, thiết lập một phương trình cân bằng sao cho các lực chưa cần tìm không tham gia.

Phạm vi áp dụng phương pháp: Phương pháp mặt cắt phối hợp chỉ dùng tính toán cho dàn tĩnh.

1.1.4 Phương pháp họa đồ - Giản đồ Maxwell - Cremona

Nội dung phương pháp:

Phương pháp họa đồ là phương pháp vẽ để giải bài toán. Có thể dùng phương pháp này để giải nhiều bài toán khác nhau của cơ học và để xác định phản lực, nội lực cho hệ dàn tĩnh định. Cách giải bài toán được trình bày toàn bộ trên hình vẽ gọi là giản đồ Maxwell – Remona.

Dựa vào điều kiện cần và đủ để hệ lực đồng quy được cân bằng là đa giác lực của hệ đồng quy này phải khép kín. Lần lượt áp dụng điều kiện này cho từng nút của dàn bị tách ra theo thứ tự sao cho tại mỗi nút của dàn chỉ có hai nội lực chưa biết trị số nhưng đã biết phương thì ta xác định được nội lực của tất cả các thanh dàn.

Phạm vi áp dụng phương pháp: Phương pháp họa đồ chỉ dùng tính toán cho dàn tĩnh.

1.1.5 Phương pháp lực

Nội dung phương pháp:

Phương pháp lực được áp dụng trong việc tính toán hệ dàn siêu tĩnh. Để tính toán hệ dàn siêu tĩnh, ta không tính trực tiếp trên hệ đó mà tính trên một hệ thay thế khác cho phép dễ dàng xác định nội lực. Hệ thay thế này suy ra từ hệ siêu tĩnh đã cho bằng cách loại bớt các liên kết thừa gọi là hệ cơ bản. Hệ cơ bản của phương pháp lực phải là hệ bất biến hình suy ra từ hệ siêu tĩnh đã cho bằng cách loại bỏ tất cả hay một số liên kết thừa. Nếu loại bỏ tất cả các liên kết thừa thì hệ cơ bản là tĩnh định còn nếu chỉ loại bỏ một số liên kết thừa thì hệ cơ bản là siêu tĩnh có bậc thấp hơn. Điều quan trọng là hệ cơ bản phải là bất biến hình và cho phép ta xác định nội lực của các thanh dễ dàng. Vì vậy, trong đại đa số trường hợp ta thường chọn hệ cơ bản là tĩnh định.

Để đảm bảo cho hệ cơ bản làm việc giống hệ siêu tĩnh đã cho cần bổ sung thêm các điều kiện. Trong hệ cơ bản đặt các lực X_1, X_2,…, X_n tương ứng với vị trí và phương của các liên kết bị loại bỏ. Những lực này liên kết giữ vai trò là ẩn. Thiết lập điều kiện chuyển vị trong hệ cơ bản tương ứng với vị trí và phương của các liên kết bị loại bỏ bằng không.

Phạm vi áp dụng phương pháp: Phương pháp lực thường áp dụng để giải các bài toán dàn siêu tĩnh.

1.1.6 Phương pháp chuyển vị

Nội dung phương pháp:

Phương pháp chuyển vị cũng là phương pháp dùng để xác định nội lực trong hệ dàn siêu động (Hệ siêu động là những hệ khi chịu chuyển vị cưỡng bức, nếu chỉ dùng các điều kiện động học không thôi thì chưa đủ để xác định tất cả các chuyển vị tại các nút hệ). Khác với phương pháp lực, trong phương pháp chuyển vị ta dùng tập hợp các biến dạng ở hai đầu thanh làm đại lượng cần tìm. Những đại lượng này sẽ tìm được nếu biết chuyển vị tại các nút của hệ. Như vậy theo phương pháp này ta chọn ẩn là chuyển vị của các nút của hệ. Chính vì lẽ đó mà phương pháp được gọi là phương pháp chuyển vị (còn gọi là phương pháp biến dạng). Sau khi xác đinh chuyển vị tại các nút, tức là chuyển vị tại đầu thanh ta sẽ xác định được nội lực.

Theo phương pháp chuyển vị, để tính hệ siêu động ta không tính trên hệ đó mà thực hiện tính toán trên hệ cơ bản đồng thời bổ sung các điều kiện đảm bảo cho hệ cơ bản làm việc giống hệ thực.

Hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị là hệ suy ra từ hệ siêu động đã cho bằng cách đặt thêm vào hệ những liên kết phụ nhằm ngăn cản chuyển vị xoay và chuyển vị thẳng của các nút trong hệ (những liên kết phụ gồm hai loại: liên kết mômen và liên kết lực). Hệ cơ bản có thể là hệ xác định động hoặc hệ siêu động. Nếu số liên kết được đặt thêm vào hệ bằng số bậc siêu động thì hệ cơ bản là hệ xác định động. Nếu số liên kết đặt thêm vào hệ ít hơn số bậc siêu động ta được hệ cơ bản là hệ siêu động với bậc thấp hơn.

Nếu hệ cơ siêu động có n liên kết đặt thêm, lần lượt ký hiệu các chuyển vị $Z_1, Z_2,..., Z_k,..., Z_n$ với Z_k là chuyển vị cưỡng bức tại liên kết thứ k đặt vào hệ. Các chuyển vị này giữ vai trò là ẩn số của phương pháp chuyển vị.

Phạm vi áp dụng phương pháp: Phương pháp chuyển vị thường áp dụng để giải các bài toán dàn siêu động.

1.1.7 Các phương pháp số [1,7,12]

Khi giải bài toán bằng các phương pháp số, nghiệm của bài toán sẽ được xác định tại một số hữu hạn các điểm của vật thể; hay nói khác đi nghiệm được mô tả theo một tập hợp số, các điểm còn lại được xác định bằng cách nội suy. Các phương pháp số là phương pháp gần đúng và có thể được chia thành 2 nhóm chính: Nhóm rời rạc hóa về mặt toán học (phương pháp sai phân hữu hạn); Nhóm rời rạc hóa về mô hình vật thể nghiên cứu (phương pháp phần tử hữu hạn, phương pháp phần tử biên, phương pháp ma trận chuyển v.v…).

1.2. Các cách xử lý điều kiện biên của kết cấu khi giải bằng phương pháp phần tử hữu hạn

Phương pháp phần tử hữu hạn là cuối cùng đưa về giải phương trình toán học:

$$\left[K'\right]\left\{\delta'\right\} = \left\{F'\right\} \tag{1.1}$$

Để phương trình này không có nghiệm tầm thường thì điều kiện định thức của ma trận [K’] khác 0 (det [K’] khác 0), khi đó phương trình không suy biến. Với bài toán kết cấu, điều này chỉ đạt được khi điều kiện biên được thoả mãn (kết cấu phải bất biến hình). Đó là điều kiện cho trước một số chuyển vị nút nào đó bằng 0 hay bằng một giá trị xác định hoặc một số chuyển vị nút phải liên hệ với nhau. Sau khi áp đặt điều kiện biên vào, phương trình cân bằng của toàn hệ kết cấu trong hệ tọa độ chung có dạng:

$$\left[K^{*}\right]\left\{\delta^{*}\right\} = \left\{F^{*}\right\} \tag{1.2}$$

Trong thực tế khi phân tích kết cấu thường gặp 4 điều kiện biên sau:

- Biên làm một hoặc nhiều thành phần chuyển vị bằng 0.
- Biên làm một hoặc nhiều thành phần chuyển vị có một giá trị xác định.
- Biên là gối đàn hồi.
- Biên làm một số thành phần chuyển vị ràng buộc nhau (điều kiện biên đa bậc tự do).

1.2.1 Khi biên có thành phần chuyển vị nào đó bằng “0” [1,7]

Thành phần chuyển vị tại một nút của phần tử bằng 0 do tương ứng với các thành phần chuyển vị này là các liên kết với đất, ta xử lí bằng cách:

- Khi đánh mã chuyển vị cho toàn bộ hệ, những thành phần chuyển tại nút nào đó bằng 0 thì ghi mã của chuyển vị đó là 0. Việc đánh số mã toàn thể của chuyển vị nút theo thứ tự và véctơ chuyển vị nút của toàn hệ chỉ bao gồm các chuyển vị nút còn lại.

- Khi lập ma trận $\left[K'\right]_e$ và véctơ $\left\{F'\right\}_e$ của từng phần tử, các hàng và cột tương ứng với số mã chuyển vị nút bằng không thì không cần tính. Và khi thiết lập ma trận độ cứng tổng thể [K’] và véctơ tải trọng nút tổng thể {F’} thì những hàng và cột nào có mã bằng 0 thì ta loại bỏ hàng, cột.

1.2.2 Khi biên có thành phần chuyển vị cho trước một giá trị [1,7]

Khi thành phần chuyển vị tại một nút nào đó cho trước một giá trị xác định, thí dụ $\Delta_m = a$ (hay liên kết tương ứng với các thành phần chuyển vị nút δ_m chịu chuyển vị cưỡng bức có giá trị bằng a). Lúc này ta có thể giải quyết bài toán này theo 2 cách:

Cách 1: Khi đánh số mã của bậc tự do (các thành phần chuyển vị) tổng thể kết cấu thì thành phần chuyển vị tại nút có chuyển vị bằng a ta vẫn đánh mã bình thường chẳng hạn mã là m. Sau khi lập được ma trận độ cứng tổng thể [K’] và véctơ tải trọng nút tổng thể {F’} thay thế số hạng k_{mm} trong ma trận thể [K’] bằng $\left(k_{mm} + A\right)$ với A là một số vô cùng lớn và thay số hạng tại hàng m trong ma trận {F’} là f_m bằng $\left(k_{mm} + A\right)a$.

Cách 2: Theo cách thứ 2 này thì khi đánh mã chuyển vị tổng thể cho kết cấu những thành phần nào chuyển vị bằng không hoặc có chuyển vị cưỡng bức ta đánh mã 0, còn các thành phần chuyển vị còn lại ta đánh mã theo thứ tự từ 1 đến hết. Sau đó ta lập ma trận độ cứng và véctơ tải trọng tác dụng nút cho toàn bộ hệ như bài toán không có chuyển vị cưỡng bức. Lúc này ta coi chuyển vị cưỡng bức như là một dạng tải trọng tác dụng lên kết cấu, vì vậy khi tính véctơ tải trọng tác dụng nút lên toàn bộ hệ phải kể thêm phần tải trọng tác dụng nút do chuyển vị cưỡng bức gây ra. Véctơ tải trọng nút lúc này là do chuyển vị cưỡng bức các liên kết tựa, được tổng hợp từ các véctơ tải trọng nút $\{P'_{\Delta}\}_e$ của mỗi phần tử có liên kết tựa chuyển vị cưỡng bức: $\{P'_{\Delta}\}_e = [T]_e^T \{P_{\Delta}\}_e$; trong đó: $\{P_{\Delta}\}_e$ nhận được bằng phản lực liên kết nút do chuyển vị cưỡng bức gối tựa với dấu ngược lại.

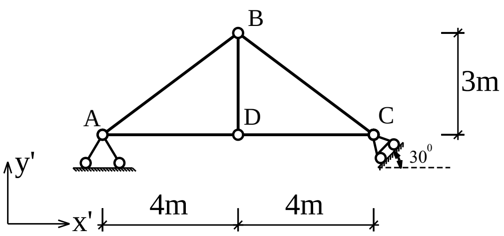
1.2.3 Khi biên là gối lò xo đàn hồi [1]

Khi biên có gối lò xo, thì lúc này ta coi lo xo như là một phần tử thanh chịu kéo (nén) với giá trị $\frac{EA}{l}$ trong ma trận độ cứng của phần tử thanh chịu kéo (nén) được thay bằng giá trị độ cứng của lò xo k. Tiếp theo ta đánh số mã tổng thể cũng như xác định các ma trận độ cứng và véctơ tải trọng tác dụng nút như hệ có thêm thanh chịu kéo (nén).

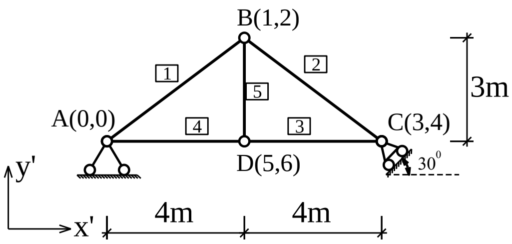
1.2.4 Khi có điều kiện biên đa bậc tự do

Điều kiện biên đa bậc tự do (Multi freedom constraints) là điều kiện biên làm một số bậc tự do theo chuyển vị thẳng tại biên đó ràng buộc nhau.

Ví dụ 1.1: Cho kết cấu dàn và chọn hệ trục tọa độ chung của hệ như hình vẽ 1.1:



Hình 1.1 Ví dụ 1.1



Hình 1.2 Số hiệu bậc tự do và phần tử

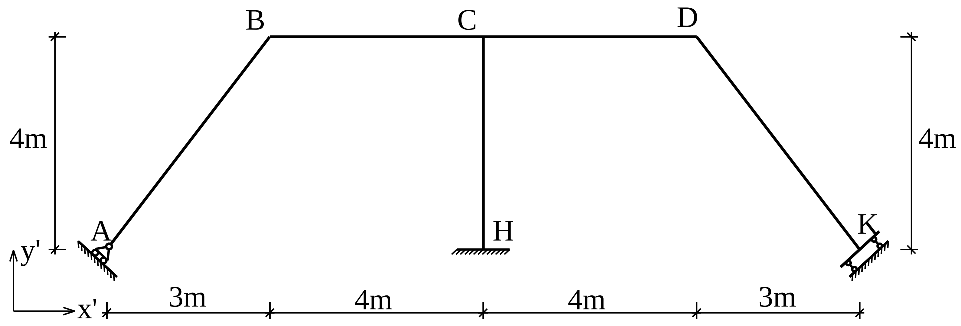
Ta thấy tại gối A (biên A) không có chuyển vị theo cả hai phương trong hệ trục tọa độ chung (x'0'y') do đó khi đánh mã bậc tự do trong hệ tọa độ chung lần lượt là: 0; 0 (hình 1.2) .

Tại gối C (biên C) khi hệ chịu lực thì có chuyển vị theo cả hai phương trong hệ tọa độ chung (x'0'y'), do đó tại nút C có hai bậc tự do và được đánh thứ tự như hình 1.2. Tuy nhiên, hai bậc (δ'_3, δ'_4) không độc lập với nhau mà ràng buộc với nhau cho bởi phương trình:

$$\tan 30^0.\delta'_3 - \delta'_4 = 0 \tag{1.3}$$

Như vậy biên C được gọi là biên có điều kiện biên đa bậc tự do trong hệ trục tọa độ chung (x’0’y’).

Ví dụ 1.2: Cho kết cấu dàn và chọn hệ trục tọa độ chung của hệ như hình vẽ 1.3:

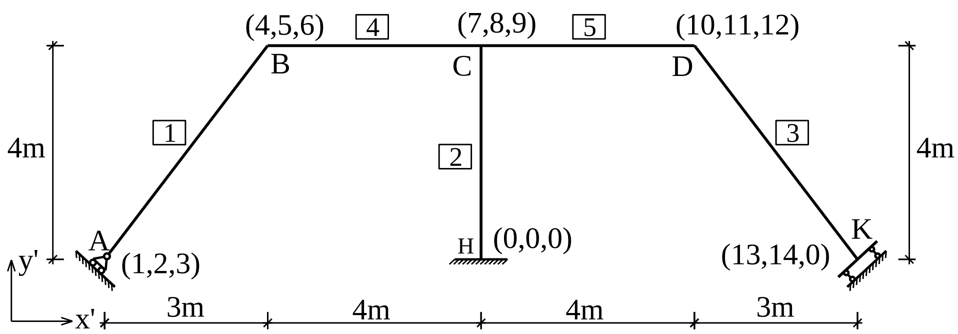


Hình 1.3 Ví dụ 1.2

Tại gối A (biên A) trong hệ tọa độ chung (x’0’y’) thì có cả chuyển vị thẳng theo hai phương và chuyển vị góc, do đó tại biên A có ba bậc tự do và được đánh thứ tự như hình 1.4. Tuy nhiên, hai bậc (δ'_1, δ'_2) không độc lập với nhau mà ràng buộc với nhau cho bởi phương trình:

$$\delta'_1 + 0,75.\delta'_2 = 0 \tag{1.4}$$

Như vậy biên A được gọi là biên có điều kiện biên đa bậc tự do trong hệ trục tọa độ chung (x’0’y’).



Hình 1.4 Số hiệu bậc tự do và phần tử

Ta thấy tại gối H (biên H) trong hệ trục tọa độ chung (x’0’y’) không có chuyển vị thẳng theo cả hai phương cũng như mặt cắt ngang tại H không xoay do đó tại biên H khi đánh mã bậc tự do trong hệ tọa độ chung lần lượt là: (0,0,0) (hình 1.4).

Ta thấy tại gối K (biên K) trong hệ trục tọa độ chung (x’0’y’) có chuyển vị thẳng theo cả hai phương và mặt cắt ngang tại K không xoay do đó tại biên K khi đánh mã bậc tự do trong hệ tọa độ chung lần lượt là: (13,14,0) (hình 1.4). Tuy nhiên, hai bậc $(\delta'_{13}, \delta'_{14})$ không độc lập với nhau mà ràng buộc với nhau cho bởi phương trình:

$$\delta'_{13} - 0,75.\delta'_{14} = 0 \qquad (1.5)$$

Như vậy biên K được gọi là biên có điều kiện biên đa bậc tự do trong hệ trục tọa độ chung (x’0’y’).

Khi giải bài toán kết cấu có điều kiện biên đa bậc tự do bằng phương pháp phần tử hữu hạn thường là một trong những vấn đề khó khăn. Hiện nay khi xử lý các điều kiện biên đa bậc tự do này, các nhà khoa học đã nghiên cứu có một số cách như sau: Phương pháp khử ẩn chính phụ (Master Slave Method) [14,15]; Phương pháp mở rộng sự bất lợi (Penalty Augmentation Method) [14,15]; Phương pháp thừa số Largrange (Largrange Multiplier Method) [14,15].

Tuy nhiên phương pháp khử ẩn chính phụ và phương pháp mở rộng sự bất lợi khi phân tích bài toán kết cấu có điều kiện phức tạp bằng phương pháp phần tử hữu hạn thường gặp một số nhược điểm:

- Phương pháp khử ẩn chính phụ: Phương pháp khử ẩn chính phụ thường chỉ áp dụng cho các bài toán đơn giản phân tích bằng tay, không áp dụng được các bài toán có nhiều biên phức tạp tổng quát [15].

- Phương pháp mở rộng sự bất lợi: Phương pháp mở rộng sự bất lợi kết quả của bài toán sẽ phụ thuộc rất lớn vào việc chọn giá trị của trọng số w.

Trong một số bài toán điều kiện biên không quá phức tạp thì việc chọn trọng số này có thể theo quy tắc căn bậc 2, nhưng trong một số bài toán phức tạp thì đòi hỏi phải thực hiện bằng phương pháp thử dần sẽ rất mất thời gian và nhiều khi vẫn không cho được kết quả phù hợp do sai lệch của sự tổ hợp nghiệm. Đặc biệt trong bài toán có nhiều điều kiện biên đa bậc tự do thì mỗi điều kiện biên phải sử lý quá trình lặp một lần và các số hiệu phân tử cũng như mã bậc tư do được đánh lại, do đó quá trình phân tích sẽ rất lâu và tốn bộ nhớ [15].

1.3. Một số nhận xét

Phương pháp thừa số Largrange đã được một số tài liệu nước ngoài giới thiệu [14,15], nhưng các tài liệu này thường tập trung phân tích về mặt toán học của phương pháp giải bài toán phương trình ma trận với điều một hoặc nhiều điều kiện ràng buộc là các phương trình tuyến tính, vì vậy yêu cầu người đọc cần có trình độ toán học nhất định.

Các tài liệu về phương pháp phần tử hữu hạn được xuất bản tại Việt Nam thì hầu như chưa có tài liệu nào giới thiệu chi tiết về phương pháp thừa số Largrange để xử lý điều kiện biên đa bậc tự do khi giải bài toán kết cấu bằng phương pháp phần tử hữu hạn. Từ đó tác giả đề xuất đề tài nghiên cứu: "Áp dụng thừa số Largrange giải bài toán kết cấu dàn phẳng có điều kiện biên đa bậc tự do bằng phương pháp phần tử hữu hạn" với các nội dung chủ yếu sau đây:

- Dựa trên nguyên lý dừng thế năng toàn phần và phương pháp thừa số Largrange trong bài toán quy hoạch để xây dựng được phương trình cân bằng cho bài toán kết cấu dàn phẳng có điều kiện biên đa bậc tự do.

- Xây dựng được cách mở rộng ma trận độ cứng và véc tơ tải trọng tác dụng của toàn hệ trong hệ tọa độ chung khi hệ kết cấu có một hoặc nhiều điều kiện biên đa bậc tự do.

- Dựa trên các lý thuyết đã trình bày, luận văn sẽ tiến hành phân tích một số kết cấu dàn phẳng chịu tải trọng tĩnh có điều kiện biên đa bậc tự do bằng phương pháp phần tử hữu hạn kết hợp với sử dụng hàm số Largrange .

Chương 2: PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN SỬ DỤNG THỪA SỐ LARGRANGE ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN KẾT CẤU DÀN PHẲNG CÓ ĐIỀU KIỆN BIÊN ĐA BẬC TỰ DO

2.1 Phương pháp phần tử hữu hạn [1]

Phương pháp phần tử hữu hạn là phương pháp khi nghiên cứu một vật thể (kết cấu công trình) thì vật thể nghiên cứu được chia thành một số hữu hạn các miền con (phần tử). Các phần tử này được nối với nhau tại các điểm định trước thường tại đỉnh phần tử (thậm trí tại các điểm trên biên phần tử) gọi là nút. Như vậy việc tính toán kết cấu công trình được đưa về tính toán trên các phần tử của kết cấu sau đó kết nối các phần tử này lại với nhau ta được lời giải của một kết cấu công trình hoàn chỉnh. Tương tự như phương pháp sai phân hữu hạn cũng chia công trình thành các đoạn nhỏ (phần tử) và các trạng thái chuyển vị (trường chuyển vị), nội lực (ứng suất) v.v… được xác định tại các điểm nút sai phân. Sự khác biệt giữa phương pháp sai phân hữu hạn và phương pháp phần tử hữu hạn: Phương pháp sai phân hữu hạn là phương pháp rời rạc hóa toán học và sau khi tìm được các chuyển vị hoặc nội lực tại các nút sai phân thì các điểm nằm giữa hai nút được xác định bằng nội suy tuyến tính; Phương pháp phần tử hữu hạn là phương pháp rời rạc hóa mô hình vật thể và sau khi xác định được chuyển vị hoặc nội lực tại các nút của phần tử thì các giá trị chuyển vị hoặc nội lực của các điểm bên trong được xác định bằng hàm nội suy (hàm xấp xỉ). Hàm xấp xỉ của phương pháp phần tử hữu hạn không được lập cho toàn bộ vật thể nghiên cứu mà hàm xấp xỉ chỉ được lập cho từng phần tử để tính các giá trị chuyển vị, nội lực v.v… bên trong phần tử khi biết các thông số đó tại nút phần tử.

Đối với bài toán cơ học vật rắn biến dạng, tuỳ theo cách chọn ẩn số của hàm xấp xỉ là chuyển vị, ứng suất mà có thể khi phân tích bài toán chia thành các loại mô hình sau:

1. Mô hình tương thích: Khi phân tích kết cấu xem các thành phần chuyển vị tại các nút của phần tử là đại lượng cần tìm và hàm nội suy biểu diễn gần đúng dạng phân bố của chuyển vị trong phần tử.

2. Mô hình cân bằng: Khi phân tích kết cấu xem các thành phần ứng suất (nội lực) tại các nút của phần tử là ẩn số của bài toán. Hàm nội suy biểu diễn gần đúng dạng phân bố của ứng suất hay nội lực trong phần tử.

3. Mô hình hỗn hợp: Khi phân tích kết cấu xem các đại lượng chuyển vị và ứng suất là 2 yếu tố độc lập riêng biệt. Các hàm xấp xỉ biểu diễn gần đúng dạng phân bố của cả chuyển vị lẫn ứng suất trong phần tử.

Trong 3 mô hình vừa được trình bày ở trên, hiện nay đại bộ phận khi áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn để giải các bài toán cơ học thường sử dụng mô hình tương thích.

2.1.1 Các bước để giải bài toán theo phương pháp phần tử hữu hạn

Các bước để giải bài toán theo phương pháp phần tử hữu hạn có thể được mô tả theo như sau:

Bước 1: Rời rạc hóa kết cấu: Kết cấu cần phân tích được rời rạc hóa thành các phần tử liên kết với nhau tại các nút của phần tử. Các phân tử được đánh số mã theo thứ tự từ 1 đến tổng số phần tử, các nút của phần tử được đánh số từ 1 đến tổng số nút (hoặc theo I, II, III v.v…) và bậc tự do của kết cấu được đánh số từ 1 đến tổng số bậc tự do của kết cấu theo hệ tọa độ chung.

Bước 2: Chọn hàm xấp xỉ: Hàm xấp xỉ (hàm nội suy) là hàm mô tả trường chuyển vị bên trong phần tử, sao cho nếu biết được giá trị của hàm hoặc đạo hàm của nó tại vị trí các nút của phần tử sẽ tìm được giá trị hàm hoặc đạo hàm của nó tại điểm bất kỳ bên trong phần tử đó. Hàm xấp xỉ được chọn sao cho phải là hàm hội tụ và việc tính đạo hàm và tích phân của hàm phải dễ dàng.

Bước 3: Xây dựng phương trình cân bằng cho phần tử: Sử dụng nguyên lý dừng thế năng toàn phần (hoặc một số nguyên lý biến phân khác trong cơ học) sẽ xây dựng được phương trình cân bằng cho mỗi phần tử trong hệ trục tọa độ riêng của phần tử:

$$[K]_e\{\delta\}_e = \{F\}_e$$

trong đó: $[K]_e$ - là ma trận độ cứng của phần tử trong hệ tọa độ riêng; $\{F\}_e$ - tải trọng tác dụng của nút của phần tử trong hệ tọa độ riêng; $\{\delta\}_e$ - chuyển vị nút của phần tử trong hệ tọa độ riêng.

Phương trình cân bằng cho phần tử trong hệ trục tọa độ chung có dạng:

$$[K']_e\{\delta'\}_e = \{F'\}_e$$

trong đó: $[K']_e, \{F'\}_e$, $\{\delta'\}_e$: là ma trận độ cứng, tải trọng tác dụng của nút và chuyển vị nút của phần tử trong hệ tọa độ chung.

Bước 4: Xác định ma trận độ cứng tổng thể của kết cấu: Sau khi xác định được ma trận độ cứng của từng phần tử trong hệ tọa độ chung, tiến hành ghép nối các ma trận này lại thành ma trận độ cứng tổng thể của kết cấu trong hệ tọa độ chung.

Bước 5: Xác định véctơ tải trọng tác dụng nút của toàn bộ kết cấu: Véctơ tải trọng tác dụng nút của toàn bộ kết cấu được chi thành hai thành phần: Véctơ tải trọng tác dụng tại nút của các phần tử và véctơ tải trọng tác dụng trên các phần tử chuyền về nút. Chú ý khi tính toán véctơ tải trọng tác dụng trên các phần tử chuyền về nút phải chuyển các véctơ này từ hệ trục tọa độ riêng về hệ trục tọa độ chung.

Bước 6: Xác định các thành phần chuyển vị tại các nút của phần tử: Sau khi xác định được ma trận độ cứng tổng thể của kết cấu và véctơ tải trọng tác dụng nút của toàn bộ kết cấu có kể đến điều kiện biên, dựa vào phương trình: $\left[K^*\right]\left\{\delta^*\right\}=\left\{F^*\right\}$ sẽ xác định được các thành phần véctơ chuyển vị của toàn bộ kết cấu.

Bước 7: Xác định nội lực (ứng suất) tại các mặt cắt (điểm) trên kết cấu: Sau khi xác định được các thành phần chuyển vị tại các nút, dựa vào các mối liên hệ hình học và vật lý sẽ xác định được các thành phần nội lực (ứng suất) tại các mặt cắt (điểm) trên kết cấu.

2.1.2 Rời rạc hóa kết cấu

Phương pháp phần tử hữu hạn khi phân tích kết cấu sẽ được rời rạc hóa thành hữu hạn các phần tử liên kết với nhau tại các nút của phần tử.

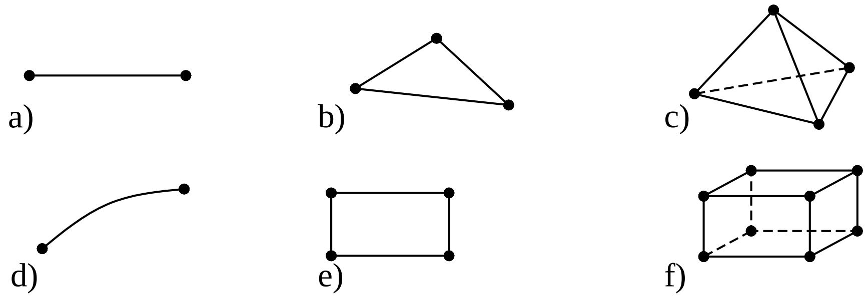
2.1.2.1 Phân loại phần tử hữu hạn

Khi chia kết cấu thành các phần tử thì vật liệu trong phần tử thường phải coi là đồng nhất. Dựa vào hình dáng của phần tử có thể chia phần tử thành một số dạng sau: Phần tử thanh thẳng; Phần tử thanh cong; Phần tử tấm chữ nhật; Phần tử tấm tam giác; Phần tử hình chóp; Phần tử hình hộp (hình 2.1, hình 2.2, hình 2.3, hình 2.4) v.v…

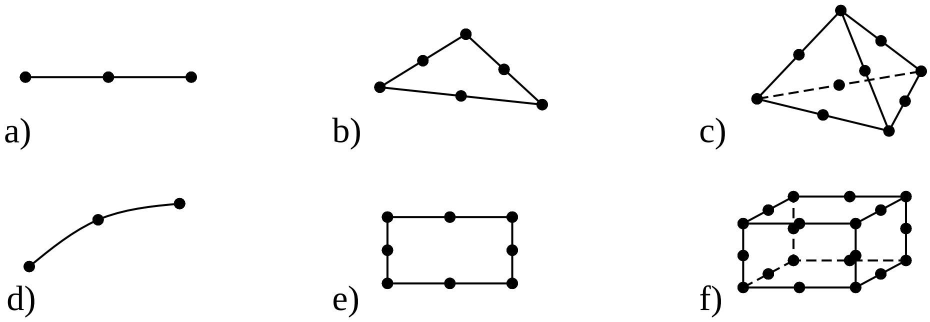
Kích thước hình học và số lượng phần tử phụ thuộc vào hình dạng hình học, tính chất chịu lực của kết cấu (bài toán phẳng hay không gian, hệ thanh hay hệ tấm, vỏ v.v...) và yêu cầu về độ chính xác của bài toán. Số lượng chia càng lớn thì lưới phần tử càng mau, sẽ cho độ chính xác càng cao nhưng dẫn đến số lượng bậc tự do của toàn hệ tăng lên làm cho việc phân tích sẽ lâu hơn. Vì vậy tùy thuộc vào yêu cầu của kết quả phân tích hoặc yêu cầu của bài toán mà chia số lượng phần tử hợp lý.

Các phần tử được liên kết với nhau tại các nút của phần tử. Các nút của phần tử thường nằm tại vị trí các đỉnh của phần tử, nhưng cũng có thể nằm cả trên vị trí các biên của phần tử hoặc trọng tâm của phần tử. Tùy theo cách đặt vị trí nút và số lượng các nút trên biên của phần tử mà phân biệt phần tử hữu hạn thành:

- Phần tử hữa hạn bậc 1 còn gọi là phần tử hữu hạn tuyến tính là phần tử chỉ có nút đặt ở đỉnh của phần tử (hình 2.1).



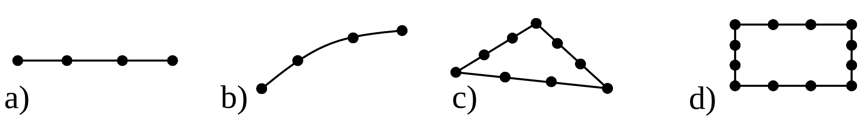
Hình 2.1 Phần tử hữa hạn bậc 1



Hình 2.2 Phần tử hữa hạn bậc 2

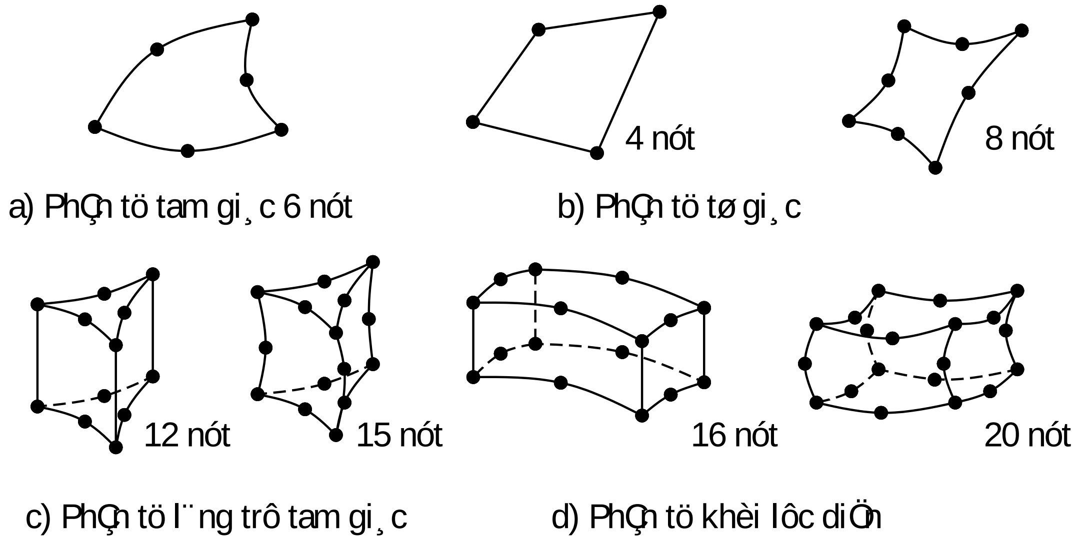
- Phần tử hữa hạn bậc 2 là phần tử ngoài các nút đặt ở đỉnh của phần tử còn có 1 nút đặt trên biên giữa hai đỉnh của phần tử (hình 2.2).

- Phần tử hữa hạn bậc 3 là phần tử ngoài các nút đặt ở đỉnh của phần tử còn có 2 nút đặt trên biên giữa hai đỉnh của phần tử (hình 2.3).



Hình 2.3 Phần tử hữa hạn bậc 3

Hiện nay phương pháp phần tử hữu hạn đã được rất nhiều nhà khoa học quan tâm và phát triển mạnh mẽ để phân tích các kết cấu khác nhau. Vì vậy phương pháp phần tử hữu hạn cũng được chia thành nhiều hướng nghiên cứu về phần tử hữu hạn khác nhau như: Phương pháp phần tử hữu hạn đẳng tham số (Isoparametric Elements); Phương pháp phần tử có số nút thay đổi (Variable-number-of-nodes Elements); Phương pháp phần tử hữu hạn trơn (Smoothed Finite Element Methods); Phương pháp phần tử hữu hạn gián đoạn (Discrete Finite Element Method); Phương pháp không lưới (Meshless Methods) v.v…



Hình 2.4 Một số loại phần tử đẳng tham số

2.1.2.2 Bậc tự do - Véctơ chuyển vị nút của phần tử và của toàn hệ kết cấu

*** Bậc tự do:**

Bậc tự do của nút là các chuyển vị thẳng và góc xoay tại nút (khác không). Bậc tự do của nút còn được gọi là các thành phần của véctơ chuyển vị nút. Tập hợp bậc tự do các nút của phần tử được gọi là véctơ chuyển vị nút của phần tử, tập hợp bậc tự do các nút của toàn bộ kết cấu được gọi là véctơ chuyển vị nút của của toàn hệ ký hiệu $\{\delta'\} = \{\delta_1 \quad \delta_2 \quad ... \quad \delta_n\}^T$. Các bậc tự do chính là các ẩn số của bài toán khi phân tích theo phương pháp phần tử hữu hạn. Và ở đây chúng ta có thể thấy bậc tự do của kết cấu hệ thanh giống như số ẩn của bài toán giải theo phương pháp chuyển vị của cơ học kết cấu II.

Quy ước dấu của các thành phần chuyển vị nút:

- Chuyển vị thẳng là dương nếu chiều chuyển vị cùng chiều với chiều dương của trục tọa độ. Chuyển vị thẳng là âm nếu chiều chuyển vị ngược chiều với chiều dương của trục tọa độ.

- Chuyển vị góc là dương nếu góc xoay ngược chiều với chiều kim đồng hồ. Chuyển vị góc là âm nếu góc xoay cùng chiều với chiều kim đồng hồ.

*** Hàm chuyển vị:**

Như đã trình bày ở đầu chương là phương pháp phần tử hữu hạn là phương pháp chia kết cấu ra thành các phần tử, các phần tử liên kết với nhau tại các nút. Sau khi tìm được các thành phần chuyển vị tại các nút của phần tử, muốn tìm chuyển vị tại các điểm bên trong phân tử nhờ vào một hàm xấp xỉ.

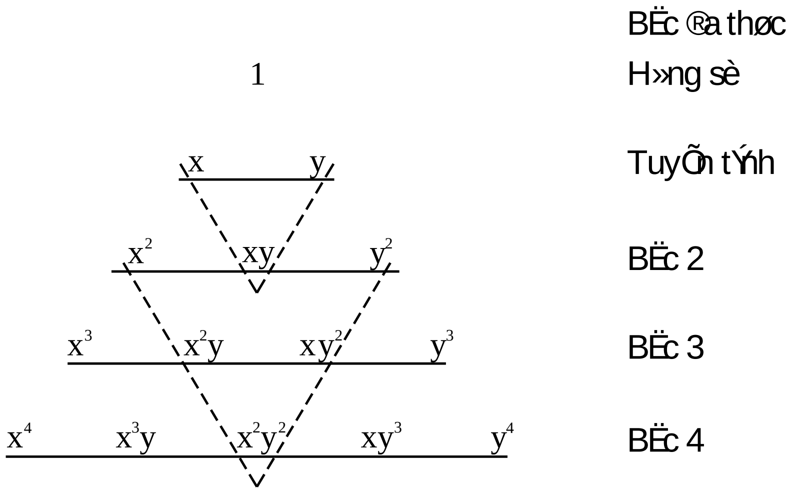
Bậc tự do tại nút của phần tử là giá trị của hàm xấp xỉ (chuyển vị) hoặc giá trị đạo hàm (góc xoay) của hàm xấp xỉ tại nút của phần tử. Vì vậy hàm xấp xỉ phải được chọn sao cho mô tả gần đúng các đại lượng cần tìm trong phạm vi mỗi phần tử. Hàm xấp xỉ có thể chọn là hàm dưới dạng đa thức hoặc hàm lượng giác, trong thực tế các hàm xấp xỉ thường chọn là các hàm đa thức vì các lý do sau:

- Đa thức khi được xem như một tổ hợp tuyến tính của các đơn thức nên đa thức thoả mãn yêu cầu độc lập tuyến tính như yêu cầu của Ritz, Galerkin.

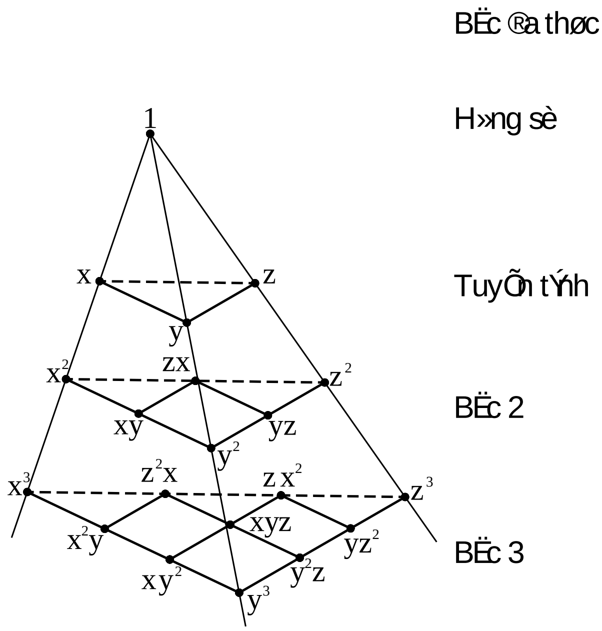
- Hàm xấp xỉ dạng đa thức thường dễ tính toán, dễ thiết lập công thức khi xây dựng các phương trình của phương pháp phần tử hữu hạn và tính toán bằng máy tính. Đặc biệt dễ lấy đạo hàm, tích phân.

- Có khả năng tăng độ chính xác bằng cách tăng số bậc của đa thức (về mặt lí thuyết đa thức bậc vô cùng sẽ cho nghiệm chính xác). Tuy nhiên, trong thực tế ta chỉ lấy các đa thức bậc thấp mà thôi.

Trong phương pháp phần tử hữu hạn - mô hình chuyển vị, hàm xấp xỉ còn gọi là hàm chuyển vị được nội suy theo giá trị (hay giá trị các đạo hàm) của các thành phần chuyển vị tại các nút phần tử. Kết quả thu được hàm chuyển vị mà các hệ số của nó được biểu diễn qua chính giá trị (hay giá trị các đạo hàm) của thành phần chuyển vị tại các nút phần tử. Hàm chuyển vị đóng vai trò quan trọng trong việc đồng thời đảm bảo mức độ chính xác của lời giải bài toán cũng như vừa đủ đơn giản trong thuật toán giải.



Hình 2.5 Tam giác Pascal cho bài toán 2D



Hình 2.6 Tháp Pascal cho bài toán 3D

Khi chọn bậc của hàm chuyển vị (hay bậc của đa thức xấp xỉ) cần lưu ý các yêu cầu sau:

- Các đa thức xấp xỉ cần thoả mãn điều kiện hội tụ. Đây là yêu cầu quan trọng vì phương pháp phần tử hữu hạn là một phương pháp số, do đó phải đảm bảo khi kích thước phần tử giảm thì kết quả sẽ hội tụ đến nghiệm chính xác.

- Các đa thức xấp xỉ được chọn sao cho không mất tính đẳng hướng hình học. Để đảm bảo điều kiện này, dạng các đa thức được chọn tam giác Pascal đối với bài toán 2 chiều (hình 2.5) hoặc tháp Pascal đối với bài toán 3 chiều (hình 2.6).

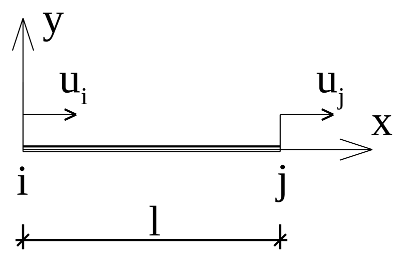
- Số tham số của các đa thức xấp xỉ phải bằng số bậc tự do của phần tử, tức là bằng số thành phần chuyển vị nút của phần tử. Yêu cầu này cho khả năng nội suy đa thức của hàm xấp xỉ theo giá trị đại lượng cần tìm, tức là theo giá trị các thành phần chuyển vị tại các điểm nút của phần tử.

*** Hàm dạng:**

Trong đề tài này, chỉ tập trung phân tích kết cấu hệ thanh phẳng. Nên trong phần này cũng chỉ đi vào 2 trường hợp cụ thể tìm hàm dạng của phần tử thanh chịu kéo - nén dọc trục và phần tử thanh chịu uốn.

*** Trường hợp 1:** Xét phần tử thanh thẳng i-j là thanh thẳng chịu kéo - nén dọc trục, có 2 nút tại 2 đầu thanh. Thanh có độ dài l, có độ cứng EA không đổi.

Hệ trục riêng của phần tử xoy với trục x trùng trục thanh, trục y vuông góc với trục thanh, gốc tại i (hình 2.7).



Hình 2.7 Phần tử thanh chịu kéo (nén) đúng tâm

Đây là bài toán 1- D. Mọi điểm trong thanh chỉ tồn tại chuyển vị dọc trục u(x). phần tử có 2 bậc tự do là 2 thành phần chuyển vị dọc trục tại 2 điểm nút, véctơ chuyển vị nút của phần tử có dạng:

$$\{\delta\}_e = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \tag{2.1}$$

Trong hàm chuyển vị sẽ có 2 tham số a. Do đó, chọn hàm chuyển vị là đa thức bậc một có dạng sau: $u(x) = a_1 + a_2x \quad (0 \le x \le l)$ (2.2)

Viết dưới dạng ma trận:

$$\{u\}=\{u(x)\} = [1 \quad x]\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = [P(x)]\{a\} \tag{2.3}$$

trong đó: [P(x)] - ma trận các đơn thức; {a} - véctơ các tham số; {u}- véctơ các hàm chuyển vị tại một điểm bất kì.

Xét tại nút i và nút j:

$$\{\delta\}_e = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} u(x=0) \\ u(x=l) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_1 + a_2 l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [P(x_i)] \\ [P(x_j)] \end{bmatrix}\{a\} = [A]\{a\} \tag{2.4}$$

Suy ra: $\{a\} = [A]^{-1}\{\delta\}_e$ (2.5)

đặt : $[N] = [P(x)][A]^{-1}$ (2.6)

Ta có: $\{u\} = [N]\{\delta\}_e$ (2.7)

trong đó: [N] - gọi là ma trận hàm dạng, chứa các toạ độ tại các điểm nút của phần tử và các biến của điểm bất kì đang xét.

Trong trường hợp cụ thể này, ta thấy:

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix}$$

Theo (2.6), ma trận hàm dạng sẽ thu được:

$$[N]=[P(x)][A]^{-1}=[1 \quad x]\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{1}{l} & \dfrac{1}{l}\end{bmatrix}=\left[\left(1-\frac{x}{l}\right) \quad \frac{x}{l}\right]=[N_1(x) \quad N_2(x)]$$

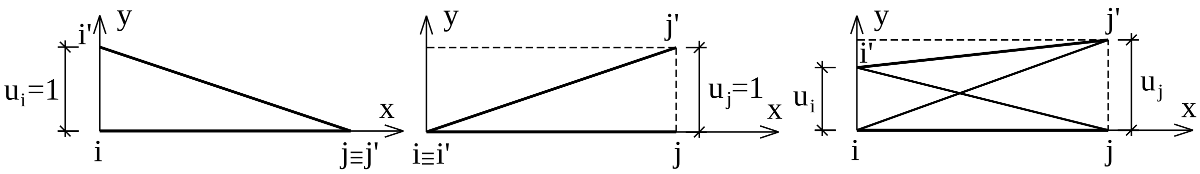
(2.8)

Theo (2.7), biểu diễn hàm chuyển vị theo các chuyển vị nút của phần tử:

$$\{u\}=\{u(x)\}=[N]\{\delta\}_e=\left[\left(1-\frac{x}{l}\right) \quad \frac{x}{l}\right]\begin{Bmatrix}u_i\\ u_j\end{Bmatrix} \qquad (2.9)$$

Các hàm $N_1(x)=\left(1-\dfrac{x}{l}\right)$ và $N_2(x)=\dfrac{x}{l}$ có tên là các hàm nội suy Lagrange bậc 1.

Ý nghĩa của hàm dạng: Hàm dạng $N_1(x)$, $N_2(x)$ lần lượt là các hàm số mô tả các hàm chuyển vị của thanh chịu kén (nén) đúng tâm ij khi có các bậc tự do tương ứng $u_i=1,\ u_j=1$ (hình 2.8).

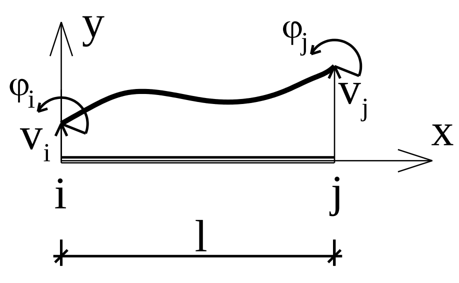


a) Hàm dạng $N_1(x)$ b) Hàm dạng $N_2(x)$ c) Hàm chuyển vị u(x)

Hình 2.8 Biểu đồ của các hàm dạng và hàm chuyển vị

* **Trường hợp 2**. Xét phần tử thanh thẳng i-j là thanh thẳng chịu uốn ngang phẳng, có 2 nút tại 2 đầu thanh. Thanh có độ dài l, có độ cứng chống uốn EI không đổi.

Hệ trục riêng của phần tử xoy với trục x trùng trục thanh, trục y vuông góc với trục thanh, gốc tại i (hình 2.9).



Hình 2.9 Phần tử thanh uốn ngang phẳng

Khi phần tử chịu uốn, trạng thái chuyển vị tại điểm bất kì có toạ độ x bao gồm chuyển vị thẳng vuông góc với trục dầm v(x) và chuyển vị xoay $\varphi(x)$. Vì chuyển vị xoay $\varphi(x)$ của tiết diện có thể tính theo chuyển vị thẳng vuông góc với trục dầm v(x) $\left(\varphi(x)=\frac{dv}{dx}\right)$, nên chuyển vị thẳng vuông góc với trục dầm được chọn làm thông số chuyển vị cơ bản.

Số bậc tự do của phần tử là 4, gồm các chuyển vị thẳng vuông góc với trục thanh và chuyển vị xoay tại 2 nút:

$$\{\delta\}_e=\begin{Bmatrix} v_i \\ \varphi_i \\ v_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix} \tag{2.10}$$

Từ đó suy ra trong hàm chuyển vị sẽ có 4 tham số a. Hàm chuyển vị v(x) sẽ là đa thức bậc 3 và có dạng:

$$\{u\}=\{v(x)\}=a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3=\begin{bmatrix}1 & x & x^2 & x^3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}=[P(x)]\{a\}$$

(2.11)

Suy ra: $$[P(x)]=\begin{bmatrix}1 & x & x^2 & x^3\end{bmatrix} \tag{2.12}$$

Chuyển vị xoay quanh trục z tại một mặt cắt ngang bất kì là:

$$\varphi(x)=\frac{dv}{dx}=a_2+2a_3x+3a_4x^2$$

Thực hiện đồng nhất:

$$v_i\equiv v(x=0)=a_1$$
$$\varphi_i\equiv\varphi(x=0)=a_2$$
$$v_j\equiv v(x=l)=a_1+a_2l+a_3l^2+a_4l^3$$
$$\varphi_j\equiv\varphi(x=l)=a_2+2a_3l+3a_4l^2$$

Viết dưới dạng ma trận:

$$\{\delta\}_e = \begin{Bmatrix} v_i \\ \varphi_i \\ v_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = [A]\{a\} \tag{2.13}$$

Suy ra ma trận nghịch đảo của [A]:

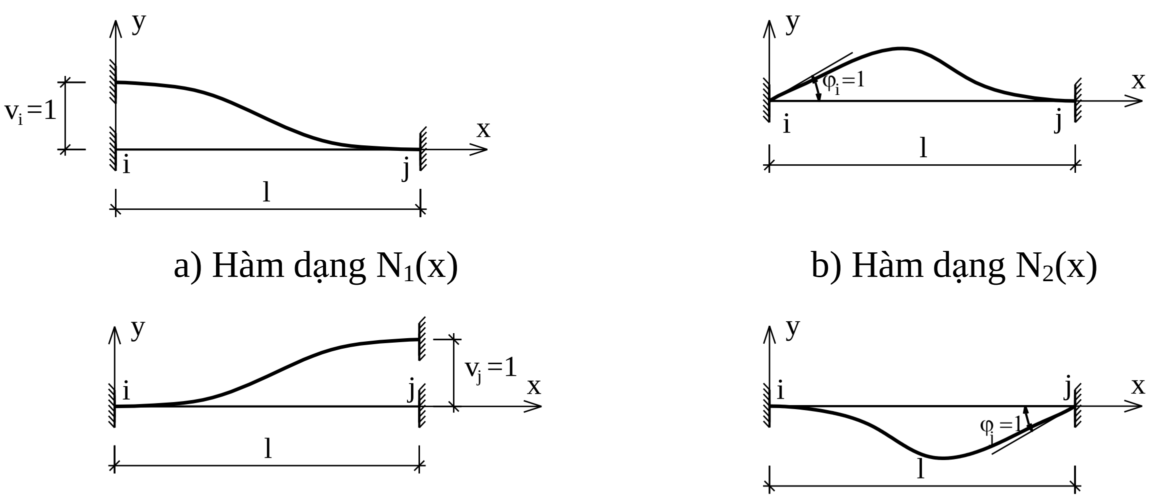
$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/l^2 & -2/l & 3/l^2 & -1/l \\ 2/l^3 & 1/l^2 & -2/l^3 & 1/l^2 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

Theo (2.6), ta có ma trận hàm dạng:

$$[N] = [P(x)][A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/l^2 & -2/l & 3/l^2 & -1/l \\ 2/l^3 & 1/l^2 & -2/l^3 & 1/l^2 \end{bmatrix}$$

$$= \left[(1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}) \quad (x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}) \quad (\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}) \quad (-\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}) \right]$$

$$= \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) & N_3(x) & N_4(x) \end{bmatrix} \tag{2.15}$$



a) Hàm dạng $N_1(x)$ b) Hàm dạng $N_2(x)$

c) Hàm dạng $N_3(x)$ d) Hàm dạng $N_4(x)$

Hình 2.10 Biểu đồ của các hàm dạng

Các hàm dạng $N_1(x)$, $N_2(x)$, $N_3(x)$, $N_4(x)$ còn được đặt tên là các hàm $H_1(x)$, $H_2(x)$, $H_3(x)$, $H_4(x)$. Đây là các hàm nội suy Hermite bậc 3. Vậy ta có:

$$\begin{aligned} &H_1(x) = N_1(x) = (1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}); H_2(x) = N_2(x) = (x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}) \\ &H_3(x) = N_3(x) = (\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}); H_4(x) = N_4(x) = (-\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Ý nghĩa của hàm dạng: Hàm dạng $N_1(x)$, $N_2(x)$, $N_3(x)$, $N_4(x)$ lần lượt là các hàm số mô tả các hàm chuyển vị của thanh chịu uốn ngang phẳng ij khi có các bậc tự do tương ứng $v_i = 1, \varphi_i = 1, v_j = 1, \varphi_j = 1$ (hình 2.10). Như vậy chuyển vị của dầm chịu uốn là:

$$v(x) = u_i.N_1(x) + v_i.N_2(x) + u_j.N_3(x) + v_j.N_4(x) \quad (2.17)$$

2.1.3 Xây dựng ma trận độ cứng của các phần tử trong hệ tọa độ riêng

2.1.3.1 Xây dựng phương trình cân bằng và ma trận độ cứng phần tử $[K]_e$ bằng nguyên lí dừng thế năng toàn phần

*** Biến dạng và ứng suất tại một điểm trong phần tử:**

Thiết lập biểu thức tính biến dạng và ứng suất tại một điểm bất kì trong phần tử thông qua ẩn cơ bản là chuyển vị nút của phần tử $\{\delta\}_e$. Sử dụng các công thức trong lý thuyết đàn hồi. Quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị :

$$\{\varepsilon\} = [\nabla]\{u\} \quad (2.18)$$

Thay (2.7) vào (2.18):

$$\{\varepsilon\} = [\nabla][N]\{\delta\}_e = [B]\{\delta\}_e \quad (2.19)$$

trong đó : $[B] = [\nabla][N]$ (2.20)

[B] - ma trận tính biến dạng.

Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (2.21)$$

Thay (2.19) vào (2.21) được :

$$\{\sigma\} = [D][B]\{\delta\}_e \qquad (2.22)$$

*** Thế năng toàn phần Π_e của phần tử:**

Xét trường hợp phần tử chịu tải trọng tập trung tại nút $\{P_n\}_e$ ứng với chuyển vị nút $\{\delta\}_e$ và chịu tải trọng phân bố trên bề mặt phần tử có cường độ tại điểm M bất kì là $\{q\} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix}$.

Thiết lập biểu thức tính thế năng toàn phần Π_e của phần tử theo công của ngoại lực W_e và thế năng biến dạng U_e của phần tử đó.

$$\Pi_e = U_e - W_e \qquad (2.23)$$

trong đó W_e là công của ngoại lực và được tính theo công thức:

$$W_e = \{\delta\}_e^T \{P_n\}_e + \int_S \{u\}^T \{q\} dS \qquad (2.24)$$

Thay (2.7) vào (2.24) thu được:

$$W_e = \{\delta\}_e^T \{P_n\}_e + \{\delta\}_e^T \int_S [N]^T \{q\} dS \qquad (2.25)$$

Theo thế năng biến dạng U_e của phần tử được tính:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV \qquad (2.26)$$

Thay (2.19) và (2.22) vào biểu thức tính thế năng biến dạng U_e của phần tử, ta có:

$$U_e = \frac{1}{2} \{\delta\}_e^T \left(\int_V [B]^T [D][B] dV \right) \{\delta\}_e \qquad (2.27)$$

Thay (2.25) và (2.27) vào (2.23) được thế năng toàn phần của phần tử :

$$\Pi_e = U_e - W_e = \frac{1}{2} \{\delta\}_e^T \left(\int_V [B]^T [D][B] dV \right) \{\delta\}_e - \left(\{\delta\}_e^T \{P_n\}_e + \{\delta\}_e^T \int_S [N]^T \{q\} dS \right)$$

(2.28)

Đặt: $\left[K\right]_e = \int\limits_V \left[B\right]^T \left[D\right]\left[B\right] dV$ (2.29)

$\left[K\right]_e$ - gọi là ma trận độ cứng của phần tử. Vì [D] là ma trận đối xứng nên tích $\left[B\right]^T\left[D\right]\left[B\right]$ cũng đối xứng và do đó $\left[K\right]_e$ là ma trận đối xứng.

đặt: $\left\{F\right\}_e = \left\{P_n\right\}_e + \int\limits_S \left[N\right]^T \left\{q\right\} dS = \left\{P_n\right\}_e + \left\{P_q\right\}_e$ (2.30)

trong đó: $\{F\}_e$ - là véctơ tải trọng nút của phần tử; được xây dựng bởi ngoại lực đặt tại nút phần tử $\{P_n\}_e$ và ngoại lực đặt trong phần tử qui về nút $\{P_q\}_e$.

Ngoại lực đặt trong phần tử qui về nút được xác định theo công thức:

$$\left\{P_q\right\}_e = \int\limits_S \left[N\right]^T \left\{q\right\} dS \qquad (2.31)$$

Thay (2.29) và (2.30) vào (2.28) được :

$$\Pi_e = \frac{1}{2}\left\{\delta\right\}_e^T \left[K\right]_e \left\{\delta\right\}_e - \left\{\delta\right\}_e^T \left\{F\right\}_e \qquad (2.32)$$

*** Thiết lập phương trình cân bằng:**

Theo nguyên lí dừng thế năng toàn phần, điều kiện cân bằng của phần tử tại các điểm nút :

$$\delta\left(\Pi_e\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Pi_e}{\partial \left\{\delta\right\}_e} = 0 \qquad (2.33)$$

Nếu phần tử có véctơ chuyển vị là trường bậc m, lấy đạo hàm riêng lần lượt với từng chuyển vị nút và cho bằng 0, ta được m phương trình:

$$\frac{\partial \Pi_e}{\partial \left\{\delta\right\}_e} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \Pi_e}{\partial \delta_1} \\ \dfrac{\partial \Pi_e}{\partial \delta_2} \\ \cdots \\ \\ \dfrac{\partial \Pi_e}{\partial \delta_m} \end{Bmatrix} = 0 \qquad (2.34)$$

Thay Π_e theo (2.30) vào (2.34) và áp dụng phép lấy đạo hàm riêng đối với ma trận $\left(\dfrac{\partial\left(\{X\}^T[A]\{X\}\right)}{\partial\{X\}} = 2[A]\{X\}; \dfrac{\partial\left(\{X\}^T\{B\}\right)}{\partial\{X\}} = \{B\}\right)$, ta được:

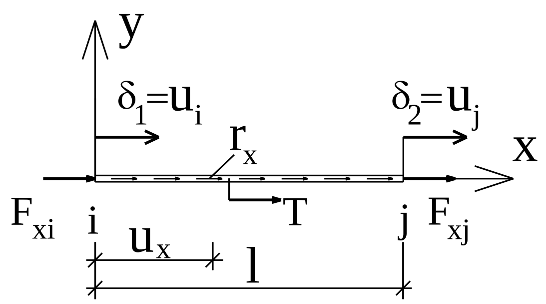
$$[K]_e\{\delta\}_e - \{F\}_e = 0 \tag{2.35a}$$

Suy ra : $$[K]_e\{\delta\}_e = \{F\}_e \tag{2.35b}$$

Phương trình (2.35) chính là phương trình cân bằng của phần tử thứ e.

2.1.3.2 Ma trận độ cứng của một số phần tử thanh

*** Phần tử thanh chịu kéo, nén đúng tâm:**



Hình 2.11 Phần tử thanh thẳng chịu kéo (nén) đúng tâm

Xét phần tử thanh thẳng i-j, có chiều dài l, có độ cứng EA không đổi dọc theo chiều dài thanh (hình 2.11).

Thanh chịu tải trọng: lực phân bố r(x) dọc trục thanh, lực tập trung T dọc trục thanh có chiều như hình 2.11.

Hệ trục riêng của phần tử x0y có trục x trùng với trục thanh, có trục y vuông góc với trục thanh, gốc tại i. Mỗi nút của phần tử có 1 bậc tự do vì vậy toàn bộ phần tử chỉ có 2 bậc tự do là 2 chuyển vị thẳng dọc trục tại 2 nút đầu và cuối của phần tử.

Chuyển vị dọc trục u(x) của phần tử là một hàm xấp xỉ tuyến tính có dạng:

$$u(x) = a_0 + a_1 x$$

hay: $$u(x) = [N]\{\delta\}_e \tag{2.36}$$

trong đó: $$\{\delta\}_e = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$$

Hàm dạng của phần tử thanh chịu kéo - nén theo (3.9) ta có:

$$[N] = \left[\left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad \frac{x}{l}\right] = [N_1(x) \quad N_2(x)] \tag{2.37}$$

Thanh chịu kéo - nén đúng tâm (1-D), theo (2.19) ta có: $\{\varepsilon\} = \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$

Suy ra: $$[\nabla] = \partial / \partial x \tag{2.38}$$

Theo (2.34), ta có: $\sigma_x = E\varepsilon_x$

Suy ra: $$[D] = E \tag{2.39}$$

Thay (2.39) và (2.37) vào (2.19), xác định ma trận [B]:

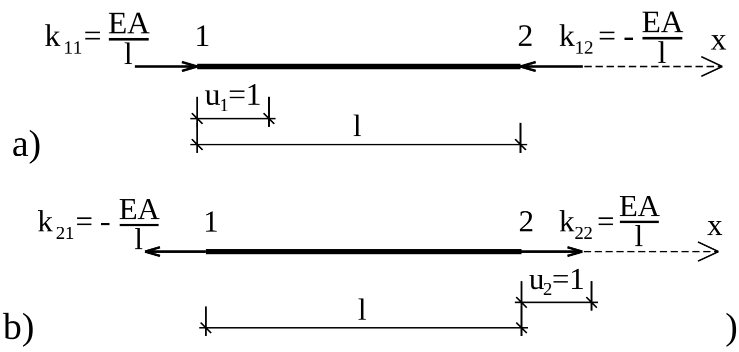
$$[B] = [\nabla].[N] = [\partial / \partial x]\left[\left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad \frac{x}{l}\right] = \left[-\frac{1}{l} \quad \frac{1}{l}\right] \tag{2.40}$$

Theo (2.28), xác định được ma trận độ cứng phần tử:

$$[K]_e = \int_V [B]^T [D][B] dV = \int_l \int_A [B]^T [D][B] dA dx \tag{2.41}$$

Thay (2.39), (2.40) vào (2.41) được:

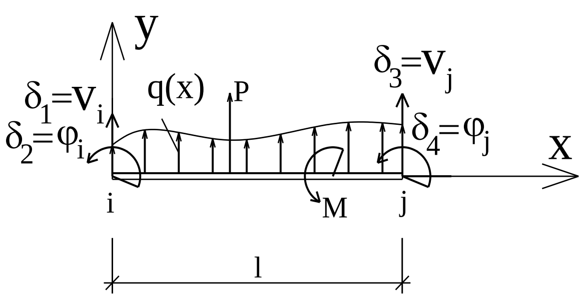
$$[K]_e = \int_0^l \begin{Bmatrix} -\dfrac{1}{l} \\ \dfrac{1}{l} \end{Bmatrix} E \left[-\frac{1}{l} \quad \frac{1}{l}\right] A dx = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

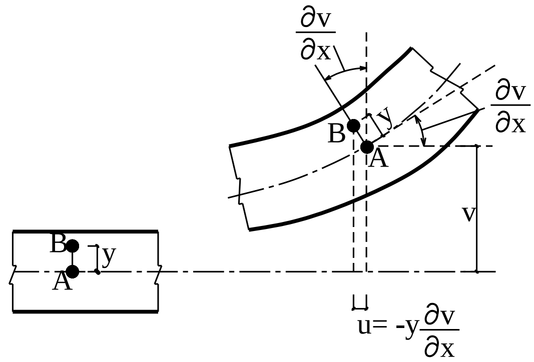


Hình 2.12 Nội lực tại nút phần tử khi bậc tự do chuyển vị bằng 1

Ý nghĩa của phần tử k_{ij} trong ma trận độ cứng $[K]_e$: k_{ij} là nội lực tại nút j (nội lực là dương khi chiều của nội lực cùng với chiều dương của trục ox và nội lực là âm khi chiều của nội lực ngược chiều với chiều dương của trục ox) khi bậc tự do i có chuyển vị cưỡng bức bằng 1 (hình 2.12).

*** Phần tử thanh chịu uốn ngang phẳng:**





Hình 2.13 Phần tử dầm chịu uốn Hình 2.14 Biến dạng phần tử dầm chịu uốn

Xét phần tử thanh thẳng i-j, có chiều dài l, có độ cứng chống uốn EI không đổi dọc theo chiều dài thanh. Thanh chịu tải trọng: lực phân bố q(x) vuông góc trục thanh, lực tập trung P vuông góc trục thanh và mômen tập trung M như hình 2.13.

Xét trong hệ trục tọa độ riêng xoy của phần tử, trục ox trùng với trục thanh còn trục oy vuông góc với trục thanh. Mỗi nút của phần tử có 2 bậc tự do vì vậy toàn bộ phần tử có 4 bậc tự do là 2 chuyển vị thẳng vuông góc với trục thanh tại nút đầu, nút cuối và 2 góc xoay tại nút đầu, nút cuối (hình 2.13).

Véctơ chuyển vị nút tương ứng:

$$\{\delta\}_e = \{v_i \quad \varphi_i \quad v_j \quad \varphi_j\}^T \tag{2.43}$$

Hàm dạng của phần tử thanh chịu uốn ngang phẳng theo (3.15b):

$$[N] = [N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x)]$$

trong đó:

$$N_1(x) = (1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}); N_2(x) = (x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2});$$
$$N_3(x) = (\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}); N_4(x) = (-\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}).$$

Đối với bài toán một chiều, ta có: $\{\varepsilon\} = \varepsilon_x$; $[D] = E$

Theo lý thuyết tính toán dầm chịu uốn trong Sức bền vật liệu $\varphi = \frac{dv}{dx}$, do đó chuyển vị dọc trục có quan hệ như hình 2.14:

$u = -y\frac{dv}{dx}$ trong đó: y là tọa độ của điểm đang xét đến trục trung hòa.

Như vậy biến dạng tỉ đối dọc trục ε_x được xác định :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^u = \frac{du}{dx} = -y\frac{d^2v}{dx^2}$$

Suy ra : $$[\nabla] = -y\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{2.44}$$

Thay (2.44), và ma trận hàm dạng [N] của phần tử thanh chịu uốn theo (3.15b) vào (2.19), xác định ma trận [B]:

$$\begin{aligned}[B] &= [\nabla][N] = -y\left[N_1''(x) \quad N_2''(x) \quad N_3''(x) \quad N_4''(x)\right] \\ &= y\left[\left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}\right) \quad \left(\frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2}\right) \quad \left(-\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3}\right) \quad \left(\frac{2}{l} - \frac{6x}{l^2}\right)\right]\end{aligned} \tag{2.45}$$

Xác định $[K]_e$ theo (2.41), ta được:

$$[K]_e = \int_V [B]^T [D][B]dV = \int_l\int_A [B]^T [D][B]dA.dx \tag{2.46a}$$

Thay $[B]^T$, $[D] = E$, $[B]$ vào công thức trên, ta được:

$$[K]_e = EI_z \begin{bmatrix} \int_l N_1'' N_1'' dx & & (\text{đx}) & \\ \int_l N_2'' N_1'' dx & \int_l N_2'' N_2'' dx & & \\ \int_l N_3'' N_1'' dx & \int_l N_3'' N_2'' dx & \int_l N_3'' N_3'' dx & \\ \int_l N_4'' N_1'' dx & \int_l N_4'' N_2'' dx & \int_l N_4'' N_3'' dx & \int_l N_4'' N_4'' dx \end{bmatrix} \quad (2.46b)$$

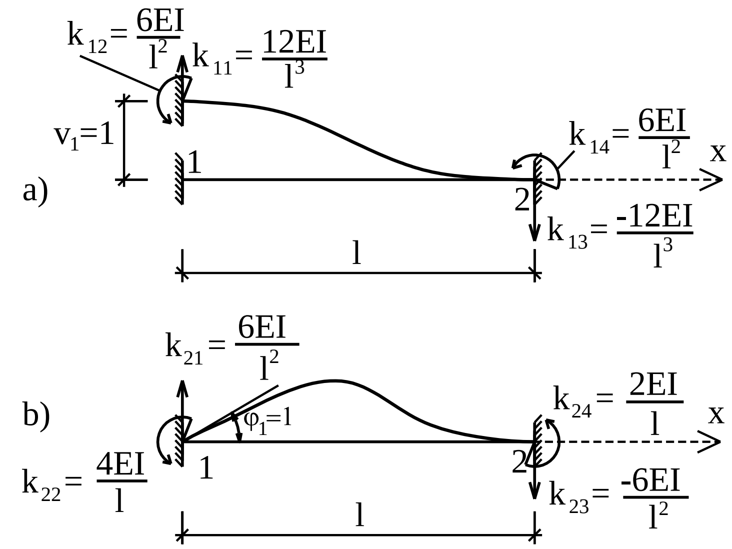
trong đó: $I_z = \int_A y^2 dA$ là mômen quán tính của mặt cắt ngang lấy với trục z.

Sau khi biến đổi thu được kết quả:

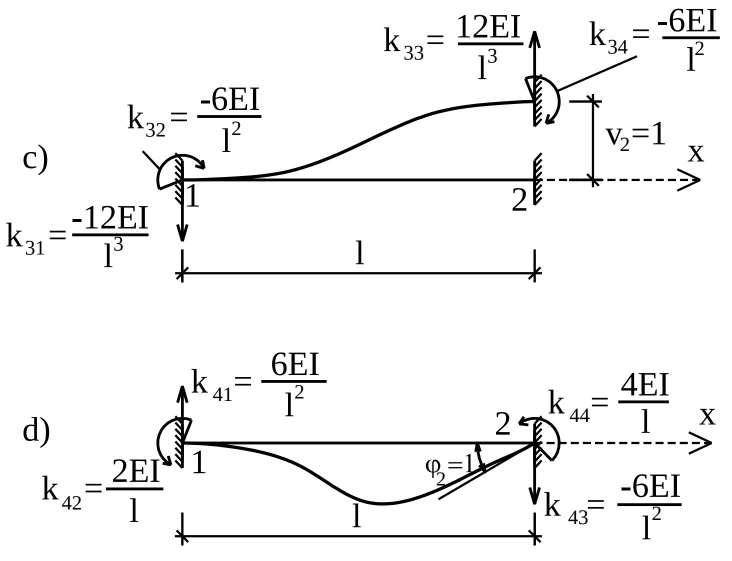
$$[K]_e = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Vậy (2.47) là ma trận độ cứng phần tử chịu uốn ngang phẳng. Đây là ma trận hình vuông cấp (4x4), đối xứng qua đường chéo.

Ý nghĩa của phần tử k_{ij} trong ma trận độ cứng $[K]_e$: k_{ij} là nội lực tương ứng với bậc tự do j khi bậc tự do i có chuyển vị cưỡng bức bằng 1 (hình 2.15).



Hình 2.15 Nội lực tại các nút của phần tử khi bậc tự do chuyển vị bằng 1



Hình 2.15 (tiếp)

*** Phần tử thanh hai đầu nút cứng chịu uốn và kéo (nén) đồng thời:**

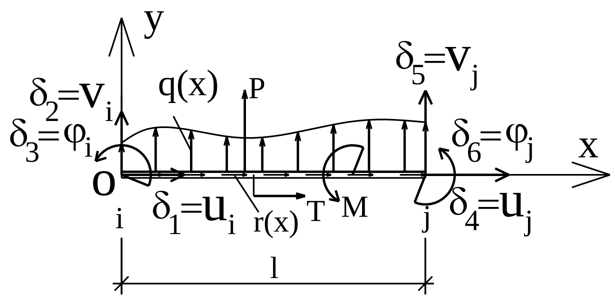
Xét phần tử thanh thẳng i-j, có chiều dài l, có độ cứng EA và EI là không đổi dọc theo chiều dài thanh. Phần tử thanh i-j được nối với các phần tử thanh lân cận bằng nút cứng. Khi xét riêng phần tử này, liên kết ở 2 đầu được coi là ngàm.

Thanh chịu tải trọng như hình 2.16:

- Lực phân bố q(x) có hướng vuông góc trục thanh và r(x) dọc trục thanh.

- Lực tập trung P vuông góc trục thanh, lực tập trung T dọc trục thanh và mômen tập trung M.

Hệ trục tọa độ riêng x0y có trục x trùng với trục thanh, có trục y vuông góc với trục thanh, gốc tại i (hình 2.16).



Hình 2.16 Phần tử thanh hai đầu nút cứng chịu kéo (nén) – uốn đồng thời

Véctơ chuyển vị nút của phần tử trong hệ trục tọa độ riêng:

$$\{\delta\}_e = \{u_i \quad v_i \quad \varphi_i \quad u_j \quad v_j \quad \varphi_j\}^T$$

Véctơ chuyển vị nút của phần tử trong hệ trục tọa độ chung:

$$\{\delta'\}_e = \{u'_i \quad v'_i \quad \varphi'_i \quad u'_j \quad v'_j \quad \varphi'_j\}^T$$

Ma trận hàm dạng

Tại mỗi tiết diện của phần tử có 3 thành phần chuyển vị gồm: chuyển vị thẳng dọc trục u(x), chuyển vị thẳng vuông góc với trục v(x) và chuyển vị xoay φ(x) (trong đó chuyển vị xoay và chuyển vị thẳng vuông góc với trục có quan hệ $\varphi(x) = \frac{dv}{dx}$). Do đó chọn u(x) và v(x) làm 2 thông số. Véctơ các hàm chuyển vị có dạng:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 + a_2 x \\ a_3 + a_4 x + a_5 x^2 + a_6 x^3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \qquad (2.48)$$

Suy ra: $$\left[P(x)\right]=\begin{bmatrix}1 & x & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3\end{bmatrix} \tag{2.49}$$

Hàm chuyển vị thẳng theo phương x : $u(x)=a_1+a_2x$

Hàm chuyển vị thẳng theo phương y: $v(x)=a_3+a_4x+a_5x^2+a_6x^3$

Hàm chuyển vị xoay quanh trục z vuông góc với mặt phẳng x0y:

$$\varphi(x)=v'(x)=a_4+2a_5x+3a_6x^2$$

Xét điều kiện biên tại nút i và nút j:

$$\begin{cases} u_i\equiv u(x=0)=a_1\\ v_i\equiv v(x=0)=a_3\\ \varphi_i\equiv\varphi(x=0)=a_4\\ u_j\equiv u(x=l)=a_1+a_2l\\ v_j\equiv v(x=l)=a_3+a_4l+a_5l^2+a_6l^3\\ \varphi_j\equiv\varphi(x=l)=a_4+2a_5l+3a_6l^2\end{cases}$$

Viết dưới dạng ma trận:

$$\left\{\delta\right\}_e=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & l & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & l & l^2 & l^3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2l & 3l^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\\ a_4\\ a_5\\ a_6\end{Bmatrix}=\left[A\right]\left\{a\right\} \tag{2.50}$$

Suy ra ma trận $[A]^{-1}$ có dạng:

$$\left[A\right]^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1/l & 0 & 0 & 1/l & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -3/l^2 & -2/l & 0 & 3/l^2 & -1/l\\ 0 & 2/l^3 & 1/l^2 & 0 & -2/l^3 & 1/l^2\end{bmatrix} \tag{2.51}$$

Thay (2.49), (2.51) vào (2.6), xác định ma trận hàm dạng [N]:

$$[N]=[P(x)][A]^{-1}=\begin{bmatrix} N_1(x) & 0 & 0 & N_4(x) & 0 & 0 \\ 0 & N_2(x) & N_3(x) & 0 & N_5(x) & N_6(x) \end{bmatrix}$$

(2.52a)

trong đó:

$$\begin{aligned} &N_1(x)=(1-\frac{x}{l}); N_2(x)=(1-\frac{3x^2}{l^2}+\frac{2x^3}{l^3}); \\ &N_3(x)=(x-\frac{2x^2}{l}+\frac{x^3}{l^2}); N_4(x)=\frac{x}{l}; \\ &N_5(x)=(\frac{3x^2}{l^2}-\frac{2x^3}{l^3}); N_6(x)=(-\frac{x^2}{l}+\frac{x^3}{l^2}) \end{aligned} \qquad (2.52b)$$

Ma trận độ cứng phần tử thanh 2 đầu nút cứng chịu uốn ngang phẳng và kéo-nén

Đối với bài toán một chiều, ta có: $\{\varepsilon\} = \varepsilon_x$; $[D]=E$

Kết hợp 2 trường hợp : thanh chịu kéo - nén và thanh chịu uốn, ta có:

$$\{\varepsilon\}=\varepsilon^{k-n}+\varepsilon^{u}=\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -y\frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

Suy ra: $[\nabla]=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -y\frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}$ (2.53)

Thay (2.52b), (2.53) vào (2.52a), xác định ma trận [B]:

$$[B]=[\nabla][N]=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -y\frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N_1(x) & 0 & 0 & N_4(x) & 0 & 0 \\ 0 & N_2(x) & N_3(x) & 0 & N_5(x) & N_6(x) \end{bmatrix}$$

suy ra : $[B]=[N_1'(x) - yN_2''(x) - yN_3''(x) \quad N_4'(x) - yN_5''(x) - yN_6''(x)]$ (2.54)

trong đó:

$$\begin{aligned} &N_1'(x)=-\frac{1}{l}; N_2''(x)=\left(-\frac{6}{l^2}+\frac{12x}{l^3}\right); N_3''(x)=\left(-\frac{4}{l}+\frac{6x}{l^2}\right) \\ &N_4'(x)=\frac{1}{l}; \quad N_5''(x)=\left(\frac{6}{l^2}-\frac{12x}{l^3}\right) \quad N_6''(x)=\left(-\frac{2}{l}+\frac{6x}{l^2}\right) \end{aligned} \qquad (2.55)$$

Xác định $[K]_e$ theo (2.41), ta có:

$$[K]_e = \int_v [B]^T [D][B] dv = E\int_v \begin{bmatrix} N_1' \\ -yN_2'' \\ -yN_3'' \\ N_4' \\ -yN_5'' \\ -yN_6'' \end{bmatrix} [N_1' - yN_2'' - yN_3'' + N_4' - yN_5'' - yN_6''] dv$$

$$[K]_e = E\begin{bmatrix} \int_v N_1'N_1'dv & & & & & \\ \int_v -yN_2''N_1'dv & \int_v y^2N_2''N_2''dv & & & (đx) & \\ \int_v -yN_3''N_1'dv & \int_v y^2N_3''N_2''dv & \int_v y^2N_3''N_3''dv & & & \\ \int_v N_4'N_1'dv & \int_v -yN_4'N_2''dv & \int_v -yN_4'N_3''dv & \int_v N_4'N_4'dv & & \\ \int_v -yN_5''N_1'dv & \int_v y^2N_5''N_2''dv & \int_v y^2N_5''N_3''dv & \int_v -yN_5''N_4'dv & \int_v y^2N_5''N_5''dv & \\ \int_v -yN_6''N_1'dv & \int_v y^2N_6''N_2''dv & \int_v y^2N_6''N_3''dv & \int_v -yN_6''N_4'dv & \int_v y^2N_6''N_5''dv & \int_v y^2N_6''N_6''dv \end{bmatrix}$$

trong đó: - Những tích phân có thừa số (y^2), ví dụ k_{22}, khi khai triển tích phân có dạng: $k_{22} = E\int_V y^2N_2''N_2''dV = E\int_A y^2dA\int_l N_2''N_2''dx = EI_z\int_l N_2''N_2''dx$

với : $I_z = \int_A y^2dA$ là mômen quán tính của mặt cắt ngang lấy với trục z.

- Những tích phân có thừa số (-y), ví dụ k_{21}, khi khai triển tích phân có dạng:

$$k_{21} = E\int_V -yN_2''N_1'dV = -E\int_A ydA.\int_l N_2''N_1'dx = 0$$

vì $\int_A ydA = 0$ (mô men tĩnh của tiết diện đối với trục đối xứng trung tâm = 0)

Sau khi biến đổi, ma trận độ cứng của phần tử thanh 2 đầu ngàm chịu kéo - nén và uốn có dạng:

$$[K]_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \qquad (2.56)$$

Ý nghĩa của phần tử k_{ij} trong ma trận độ cứng $[K]_e$: k_{ij} là nội lực tương ứng với bậc tự do j khi bậc tự do i có chuyển vị cưỡng bức bằng 1.

2.1.4 Phép chuyển trục tọa độ

Như ta đã biết, phương pháp phần tử hữu hạn là phương pháp rời rạc hóa kết cấu công trình ra thành các phần tử. Các phần tử này thông thường được các nhà khoa học nghiên cứu tính toán các đại lượng ma trận độ cứng, véctơ tải trọng tác dụng nút trong một tọa độ thích hợp của mỗi phần tử. Hệ tọa độ này phải chọn sao cho việc thiết lập các phương trình cân bằng cho phần tử là đơn giản và hệ tọa độ này được gọi là hệ tọa độ riêng (hệ tọa độ địa phương). Như vậy khi tính toán các đại lượng chuyển vị, tải trọng cho phần tử mẫu được lập trên hệ tọa độ riêng. Kết cấu thì được tạo bởi nhiều phần tử và các phần tử này trong trường hợp tổng quát thường có các hệ trục tọa độ riêng không trùng nhau. Vì vậy không thể lấy ma trận độ cứng, véctơ tải trọng tác dụng nút của từng phần tử trong hệ trục tọa độ riêng của phần tử để ghép nối thành ma trận độ cứng, véctơ tải trọng tác dụng nút của toàn bộ hệ kết cấu mà phải đưa các ma trận độ cứng, véctơ tải trọng tác dụng nút của các phần tử này về trên cùng một hệ trục tọa độ và hệ trục tọa độ này được gọi là hệ trục tọa độ chung (hệ trục tọa độ tổng thể) của kết cấu. Hệ trục tọa độ chung thường không trùng với hệ trục tọa độ riêng, vì vậy để đưa các ma trận độ cứng, véctơ tải trọng tác dụng nút của phần tử về hệ trục tọa độ riêng chúng ta phải thực hiện phép chuyển trục tọa độ.

Hệ trục tọa độ chung thường là tùy ý, tuy nhiên khi chọn hệ trục tọa độ chung cho một bài toán cụ thể thường chọn hệ trục tọa độ chung sao cho việc chuyển trục tọa độ của các phần tử là ít nhất hoặc trùng với phương chuyển vị cần tính.

Xét phần tử thứ e, trong hệ trục tọa độ riêng là xyz của kết cấu véctơ tải trọng nút, ma trận độ cứng và véctơ chuyển vị nút của phần tử lần lượt là: :$\{F\}_e$,$[K]_e$, $\{\delta\}_e$. Trong hệ trục tọa độ chung x’y’z’ véctơ tải trọng nút, ma trận độ cứng và véctơ chuyển vị nút của phần tử lần lượt là: $\{F'\}_e$, $[K']_e$, $\{\delta'\}_e$.

Mối quan hệ giữa véctơ tải trọng nút và véctơ chuyển vị nút của phần tử giữa hệ trục tọa độ riêng và hệ trục tọa độ chung là:

$$\begin{cases} \{F\}_e = [T]_e \{F'\}_e \\ \{\delta\}_e = [T]_e \{\delta'\}_e \end{cases} \tag{2.57}$$

Thế năng biến dạng toàn phần của phần tử e trong hệ tọa độ riêng là:

$$\Pi_e = \frac{1}{2}\{\delta\}_e^T [K]_e \{\delta\}_e - \{\delta\}_e^T \{F\}_e \tag{2.58a}$$

Thay (2.57) vào (2.58a), ta có:

$$\Pi_e = \frac{1}{2}\{\delta'\}_e^T [T]_e^T [K]_e [T]_e \{\delta'\}_e - \{\delta'\}_e^T [T]_e^T [T]_e \{F'\}_e \tag{2.58b}$$

Thế năng biến dạng toàn phần của phần tử e trong hệ tọa độ chung là:

$$\Pi_e = \frac{1}{2}\{\delta'\}_e^T [K']_e \{\delta'\}_e - \{\delta'\}_e^T \{F'\}_e \tag{2.59}$$

Bằng cách so sánh (2.58b) và (2.59), dễ dàng nhận thấy:

$$[K']^T{}_e = [T]^T{}_e [K]_e [T]_e \tag{2.60}$$

$$[T]_e^T [T]_e^{-1} = [I] \qquad (2.61)$$

Như vậy ma trận $[T]_e$ có tính chất trực giao:

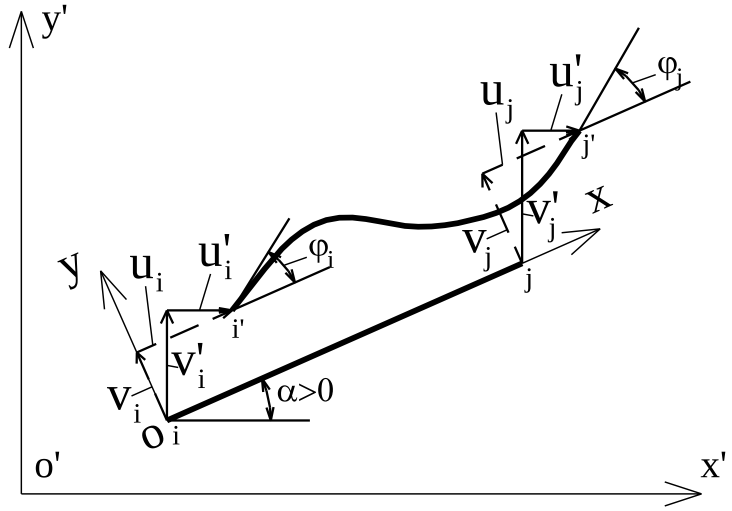
$$[T]_e^T = [T]_e^{-1} \qquad (2.62)$$

Như vậy, từ (2.57) ta có:

$$\begin{cases} [F']_e = [T]_e^T [F]_e \\ [\delta']_e = [T]_e^T [\delta]_e \end{cases} \qquad (2.63)$$

2.1.4.1 Ma trận biến đổi toạ độ $[T]_e$ của phần tử thanh 2 đầu nút cứng

Xét phần tử thanh i-j trong bài toán phẳng 2 đầu nút cứng, sau khi chịu lực thanh bị biến dạng và chuyển dời tới vị trí i'-j'. Hệ toạ độ riêng của phần tử là xoy, trong đó trục x trùng trục thanh. Hệ toạ độ chung của kết cấu là x'o'y' có phương lập với với hệ tọa độ chung một góc α (hình 2.17).



Hình 2.17 Phần tử thanh 2 đầu nút cứng

Góc α là góc giữa chiều dương ox và chiều dương trục o'x'. Quy ước dấu của góc α là dương nếu quay chiều từ trục tọa độ o'x' sang chiều của trục ox là ngược kim đồng hồ.

Véctơ chuyển vị nút của phần tử trong hệ trục tọa độ riêng:

$$\{\delta\}_e = \{u_i \quad v_i \quad \varphi_i \quad u_j \quad v_j \quad \varphi_j\}^T$$

Véctơ chuyển vị nút của phần tử trong hệ trục tọa độ chung:

$$\{\delta'\}_e = \{u'_i \quad v'_i \quad \varphi'_i \quad u'_j \quad v'_j \quad \varphi'_j\}^T$$

Theo hình 2.17 ta có mối tương quan giữa chuyển vị nút tại đầu i giữa hệ trục tọa độ chung của kết cấu và hệ trục tọa độ riêng của phần tử:

$$\begin{cases} u_i = u'_i \cos\alpha + v'_i \sin\alpha \\ v_i = -u'_i \sin\alpha + v'_i \cos\alpha \\ \varphi_i = \varphi'_i \end{cases}$$

Viết dưới dạng ma trận: $\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ \varphi'_i \end{Bmatrix} = [L_i]\{\delta'_i\}$

trong đó: $[L_i]$ - là ma trận biến đổi véctơ chuyển vị tại nút i (nút cứng) từ hệ trục tọa độ chung sang hệ trục tọa độ riêng.

$$[L_i] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tương tự xét tại đầu j, ta có:

$$[L_j] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Xét với cả phần tử i-j, quan hệ giữa $\{\delta\}_e$ và $\{\delta'\}_e$ được biểu diễn:

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_i \\ u_j \\ v_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [L_i] & [0] \\ [0] & [L_j] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ \varphi'_i \\ u'_j \\ v'_j \\ \varphi'_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ \varphi'_i \\ u'_j \\ v'_j \\ \varphi'_j \end{Bmatrix}$$

Suy ra ma trận biến đổi toạ độ $[T]_e$ của phần tử thanh 2 đầu nút cứng:

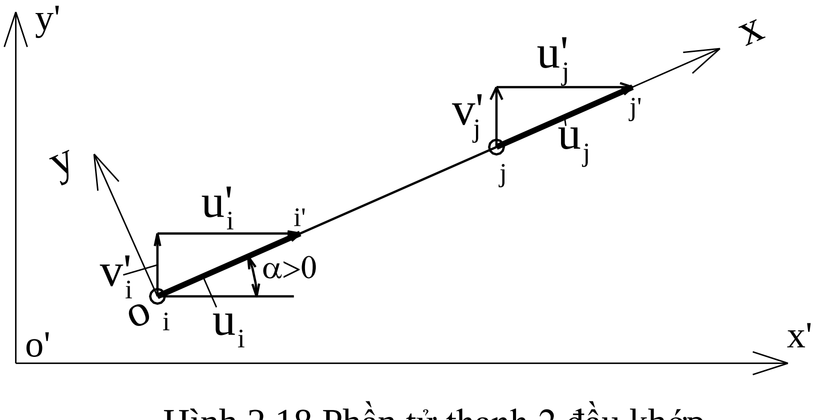
$$[T]_e = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.64}$$

trong đó :
$$\begin{cases} \cos\alpha = c = \dfrac{x'_j - x'_i}{l} \\ \sin\alpha = s = \dfrac{y'_j - y'_i}{l} \\ l = \sqrt{(x'_j - x'_i)^2 + (y'_j - y'_i)^2} \end{cases} \tag{2.65}$$

2.1.4.2 Ma trận biến đổi toạ độ $[T]_e$ của phần tử thanh 2 đầu khớp chịu kéo, nén

Xét phần tử thanh i-j trong bài toán phẳng 2 đầu khớp chịu kéo (nén) đúng tâm. Hệ toạ độ riêng của phần tử là xoy, trong đó trục x trùng trục thanh ban đầu. Hệ toạ độ chung của kết cấu là x’o’y’ có phương lập với với hệ tọa độ chung một góc α (hình 2.18).

Góc α là góc giữa chiều dương ox và chiều dương trục o’x’. Quy ước dấu của góc α là dương nếu quay chiều từ trục tọa độ o’x’ sang chiều của trục ox là ngược kim đồng hồ.



Hình 2.18 Phần tử thanh 2 đầu khớp

Véctơ chuyển vị nút của phần tử trong hệ trục tọa độ riêng:

$$\{\delta\}_e = \{u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j\}^T$$

Véctơ chuyển vị nút của phần tử trong hệ trục tọa độ chung:

$$\{\delta'\}_e = \{u'_i \quad v'_i \quad u'_j \quad v'_j\}^T$$

Theo hình 2.18 ta có mối tương quan giữa chuyển vị nút tại đầu i khớp và đầu j khớp giữa hệ trục tọa độ chung của kết cấu và hệ trục tọa độ riêng của phần tử:

$$[L_i] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}; \qquad [L_j] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Suy ra ma trận biến đổi toạ độ $[T]_e$ của phần tử thanh 2 đầu khớp:

$$[T]_e = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & & \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & & \\ & & \cos\alpha & \sin\alpha \\ & & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad (2.66)$$

2.1.5 Xây dựng các ma trận độ cứng của phần tử trong hệ tọa độ chung

2.1.5.1 Phần tử thanh chịu kéo, nén đúng tâm

Thay (2.42), (2.66) vào (2.60) ta được ma trận độ cứng phần tử thanh chịu kéo-nén trong hệ trục tọa độ chung:

$$[K']^T_e = [T]^T_e [K]_e [T]_e = \begin{bmatrix} c & 0 \\ s & 0 \\ 0 & c \\ 0 & s \end{bmatrix} \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix}$$

$$[K']_e = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \tag{2.67}$$

Ma trận độ cứng của phần tử lò xo cũng được tính theo công thức (2.67), nhưng lúc đó thay $\frac{EA}{l}$ bằng độ cứng của lò xo k $\left(\frac{EA}{l} = k\right)$.

2.1.5.2 Phần tử thanh hai đầu ngàm chịu uốn và kéo (nén) đồng thời

Thay (2.56), (2.64) vào (2.60) ta được ma trận độ cứng phần tử thanh chịu kéo-nén trong hệ trục tọa độ chung:

$$[K']_e = [T]_e^T [K]_e [T]_e =$$

$$[K']_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l}c^2 + \frac{12EI}{l^3}s^2 & & & & & \\ \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}\right)cs & \frac{EA}{l}s^2 + \frac{12EI}{l^3}c^2 & & (\text{đx}) & & \\ -\frac{6EI}{l^2}s & \frac{6EI}{l^2}c & \frac{4EI}{l} & & & \\ -\frac{EA}{l}c^2 - \frac{12EI}{l^3}s^2 & \left(-\frac{EA}{l} + \frac{12EI}{l^3}\right)cs & \frac{6EI}{l^2}s & \frac{EA}{l}c^2 + \frac{12EI}{l^3}s^2 & & \\ \left(-\frac{EA}{l} + \frac{12EI}{l^3}\right)cs & -\frac{EA}{l}s^2 - \frac{12EI}{l^3}c^2 & -\frac{6EI}{l^2}c & \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}\right)cs & \frac{EA}{l}s^2 + \frac{12EI}{l^3}c^2 & \\ -\frac{6EI}{l^2}s & \frac{6EI}{l^2}c & \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2}s & -\frac{6EI}{l^2}c & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

(2.68)

2.1.6 Cách ghép nối các phần tử

Giả sử hệ kết cấu được rời rạc hoá thành m phần tử. Theo (2.35) ta viết được m phương trình cân bằng cho tất cả m phần tử trong hệ toạ độ riêng của từng phần tử. Sau khi chuyển về hệ tọa độ chung của toàn kết cấu, tiến tới gộp các phương trình cân bằng của từng phần tử trong cả hệ, thu được phương trình cân bằng cho toàn hệ kết cấu trong hệ tọa độ chung:

$$[K']\{\delta'\} = \{F'\} \tag{2.69}$$

Do thứ tự các thành phần trong véctơ chuyển vị nút {δ'}$_e$ của từng phần tử khác với thứ tự trong véctơ chuyển vị nút {δ'} của toàn hệ kết cấu, nên cần lưu ý xếp đúng vị trí của từng thành phần trong [K']$_e$ và {F'}$_e$ vào [K'] và {F'}. Việc sắp xếp này thường được áp dụng phương pháp số mã hoặc sử dụng ma trận định vị phần tử [H]$_e$ để thiết lập các ma trận tổng thể và véctơ tải trọng nút tổng thể của toàn hệ kết cấu.

2.1.6.1 Áp dụng ma trận định vị phần tử $[H]_e$

Giả sử hệ kết cấu được rời rạc hoá thành m phần tử. Số bậc tự do của toàn hệ là n. Véctơ chuyển vị nút tổng thể có dạng:

$$\{\delta'\} = \{\delta'_1 \quad \delta'_2 \quad \ldots \quad \delta'_n\}^T \tag{2.70}$$

Với phần tử thứ e có số bậc tự do là n_e, có véctơ chuyển vị nút trong hệ tọa độ chung là $\{\delta'\}_e$. Các thành phần của $\{\delta'\}_e$ nằm trong số các thành phần của $\{\delta'\}$. Do đó có sự biểu diễn quan hệ giữa 2 véctơ này như sau:

$$\underset{(n_e \times 1)}{\{\delta'\}_e} = \underset{(n_e \times n)}{[H]_e} \quad \underset{(n \times 1)}{\{\delta'\}} \tag{2.71}$$

trong đó: [H]$_e$ - là ma trận định vị của hần tử e, nó cho thấy hình ảnh sắp xếp các thành phần của véctơ $\{\delta'\}_e$ trong $\{\delta'\}$.

Dựa vào (2.58) ta xác định được thế năng toàn phần cho từng phần tử. Thay (2.71) vào (2.58), sau đó cộng gộp của m phần tử, xác định được thế năng toàn phần của hệ:

$$\Pi = \sum_{e=1}^{m} \left[\frac{1}{2} \{\delta'\}^T [H]_e^T [K']_e [H]_e \{\delta'\} - \{\delta'\}^T [H]_e^T \{F'\}_e \right] \tag{2.72}$$

Biểu thức (2.72) biểu diễn thế năng toàn phần của hệ theo véctơ chuyển vị nút tổng thể $\{\delta'\}$, áp dụng nguyên lí thế năng dừng toàn phần sẽ có điều kiện cân bằng của toàn hệ tại điểm nút:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{\delta'\}} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \Pi}{\partial \delta'_1} \\ \dfrac{\partial \Pi_e}{\partial \delta'_2} \\ \dots \\ \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial \delta'_n} \end{Bmatrix} = 0 \qquad (2.73)$$

Áp dụng phép lấy đạo hàm riêng đối với ma trận thu được:

$$\left(\sum_{e=1}^{m} [H]_e^T [K']_e [H]_e \right) \{\delta'\} - \sum_{e=1}^{m} [H]_e^T \{F'\}_e = \{0\} \qquad (2.74)$$

Nhận thấy đây chính là phương trình cân bằng cho toàn hệ. So sánh với (2.69), thu được:

Ma trận độ cứng tổng thể: $[K'] = \sum_{e=1}^{m} [H]_e^T [K']_e [H]_e$ (2.75)

Véctơ tải trọng nút tổng thể: $\{F'\} = \sum_{e=1}^{m} [H]_e^T \{F'\}_e$ (2.76)

2.1.6.2 Phương pháp đánh số mã

Khi tiến hành ghép nối ma trận độ cứng của kết cấu và véctơ tải trọng tác dụng tại nút, ta làm theo các bước sau:

- **Bước 1:** Tiến hành đánh số mã của các thành phần véctơ chuyển vị nút tại các nút của kết cấu và đánh số mã cho phần tử.

- **Bước 2:** Lập bảng xác định mã cục bộ của các phần tử theo mã tổng thể của kết cấu.

- **Bước 3:** Tính toán xác định các ma trận độ cứng, véctơ tải trọng tác dụng tại các nút của phần tử theo mã cục bộ và tương ứng với mã tổng thể trong hệ tọa độ chung.

- Bước 4: Tiến hành ghép nối ma trận độ cứng và véctơ tải trọng tác dụng nút của các phần tử thành ma trận độ cứng và véctơ tải trọng tác dụng nút của toàn bộ hệ kết cấu trong hệ tọa độ chung theo công thức.

$$k'_{ij} = \sum \left(k'_{ij}\right)_e \tag{2.77}$$

trong đó:

+ i, j: là số hiệu mã tổng thể của toàn bộ kết cấu trong hệ tọa độ chung;

+ k'_{ij}: là hệ số của trong ma trận độ cứng của toàn bộ kết cấu tương ứng với hàng có số hiệu mã tổng thể i và cột có số hiệu mã tổng thể j trong hệ tọa độ chung;

+ $\left(k'_{ij}\right)_e$: là hệ số của ma ma trận độ cứng của phần tử tương ứng với hàng có số hiệu mã tổng thể i và cột có số hiệu mã tổng thể j trong hệ tọa độ chung.

2.2 Hàm Largrange [4]

Xét bài toán quy hoạch toán học với điều kiện ràng buộc là đẳng thức.

Hàm mục tiêu: $Z = F(x_1, x_2, ..., x_n) \rightarrow \min$

Ràng buộc: $g_j(x_1, x_2, ..., x_n) = 0; j = 1 \div m; X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ (2.78)

Hàm mục tiêu mở rộng:

$$L(X, \lambda) = F(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j . g_j(x_1, x_2, ..., x_n) \rightarrow \min \tag{2.79}$$

Điều kiện cần để hàm $L(X, \lambda)$ có cực trị:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0 & i = 1 \div n; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0 & j = 1 \div m; \end{cases} \tag{2.80}$$

Triển khai (2.80) ta có hệ phương trình gồm (n+m) phương trình độc lập với (n+m) ẩn là: $x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$.

2.3 Sử dụng hàm số Largrange để giải bài toán kết cấu có điều kiện biên đa bậc tự do bằng phương pháp phần tử hữu hạn

Giả sử hệ kết cấu được rời rạc hoá thành m phần tử. Số bậc tự do của toàn hệ là n. Thế năng toàn phần của hệ:

$$\Pi = \sum_{e=1}^{m}\left[\frac{1}{2}\{\delta'\}^T[H]_e^T[K']_e[H]_e\{\delta'\} - \{\delta'\}^T[H]_e^T\{F'\}_e\right] \tag{2.81}$$

Khi bài toán không có điều kiện biên đa bậc tự do, thì dựa vào nguyên lý dừng thế năng toàn phần của hệ kết cấu ta xây dựng được phương trình cân bằng cho toàn hệ kết cấu có dạng:

$$[K']\{\delta'\} = \{F'\} \tag{2.82}$$

trong đó:

$$[K'] = \begin{bmatrix} k'_{11} & k'_{12} & \dots & k'_{1n} \\ k'_{21} & k'_{22} & \dots & k'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k'_{n1} & k'_{n2} & \dots & k'_{nn} \end{bmatrix}; \qquad \{\delta'\} = \{\delta'_1 \quad \delta'_2 \quad ... \quad \delta'_n\}^T;$$

$$\{F'\} = \{F'_1 \quad F'_2 \quad ... \quad F'_n\}^T$$

Khi tại một biên nào đó của hệ kết cấu thanh phẳng có điều kiện biên đa bậc tự do và nếu gọi $\delta'_i, \delta'_{i+1}, \delta'_{i+2}$ lần lượt là các số hiệu bậc tự do tại nút biên, thì lúc đó:

$$\delta'_i + k_0.\delta'_{i+1} = a_0 \tag{2.83}$$

hay:
$$\delta'_i + k_0.\delta'_{i+1} - a_0 = 0 \tag{2.84}$$

Như vậy khi áp dụng nguyên lý dừng thế năng toàn phần vào bài toán, ta sẽ được bài toán quy hoạch toán học:

Hàm mục tiêu:

$$\Pi = \sum_{e=1}^{m}\left[\frac{1}{2}\{\delta'\}^T[H]_e^T[K']_e[H]_e\{\delta'\} - \{\delta'\}^T[H]_e^T\{F'\}_e\right] \to \min \tag{2.85}$$

Điều kiện ràng buộc: $g(\delta') = \delta'_i + k_0.\delta'_{i+1} - a_0 = 0$ (2.86)

Áp dụng hàm Largrange (2.79) vào sẽ đưa bài toán quy hoạch toán học có ràng buộc về bài toán quy hoạch toán học không ràng buộc bằng các thêm ẩn số là hàm số Largrange , Hàm Largrange của bài toán lúc này là:

$$L = \sum_{e=1}^{m}\left[\frac{1}{2}\{\delta'\}^T[H]_e^T[K']_e[H]_e\{\delta'\} - \{\delta'\}^T[H]_e^T\{F'\}_e\right] + \lambda\left(\delta_i^{'} + k_0.\delta_{i+1}^{'} - a_0\right) \rightarrow \min$$

(2.87)

Số ẩn số của bài toán lúc này sẽ thêm 1 ẩn số so với số ẩn số ban đầu. Như vậy bài toán lúc này có (n+1) ẩn số:

$$\{\delta'\} = \{\delta'_1 \quad \delta'_2 \quad \dots \quad \delta'_n \quad \lambda\}^T$$

Từ biểu thức (2.87) ta có:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial\{\delta'\}} = \left\{\begin{array}{c} \dfrac{\partial \Pi}{\partial \delta'_1} \\ \dfrac{\partial \Pi_e}{\partial \delta'_2} \\ \cdots \\ \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial \delta'_n} \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial \lambda} \end{array}\right\} = 0 \qquad (2.88)$$

hay viết dưới dạng triển khai:

$$k_{11}^{'}.\delta_1^{'} + k_{12}^{'}.\delta_2^{'} + \dots + k_{1i}^{'}.\delta_i^{'} + k_{1(i+1)}^{'}.\delta_{(i+1)}^{'} + \dots + k_{1n}^{'}.\delta_n^{'} + 0.\lambda = F_1^{'}$$

$$k_{21}^{'}.\delta_1^{'} + k_{22}^{'}.\delta_2^{'} + \dots + k_{2i}^{'}.\delta_i^{'} + k_{2(i+1)}^{'}.\delta_{(i+1)}^{'} + \dots + k_{2n}^{'}.\delta_n^{'} + 0.\lambda = F_2^{'}$$

$$\vdots$$

$$k_{i1}^{'}.\delta_1^{'} + k_{i2}^{'}.\delta_2^{'} + \dots + k_{ii}^{'}.\delta_i^{'} + k_{i(i+1)}^{'}.\delta_{(i+1)}^{'} + \dots + k_{in}^{'}.\delta_n^{'} + 1.\lambda = F_i^{'}$$

$$k_{(i+1)1}^{'}.\delta_1^{'} + k_{(i+1)2}^{'}.\delta_2^{'} + \dots + k_{(i+1)i}^{'}.\delta_i^{'} + k_{(i+1)(i+1)}^{'}.\delta_{(i+1)}^{'} + \dots + k_{(i+1)n}^{'}.\delta_n^{'} + k_0.\lambda = F_i^{'}$$

$$\vdots$$

$$k_{n1}^{'}.\delta_1^{'} + k_{n2}^{'}.\delta_2^{'} + \dots + k_{ni}^{'}.\delta_i^{'} + k_{n(i+1)}^{'}.\delta_{(i+1)}^{'} + \dots + k_{nn}^{'}.\delta_n^{'} + 0.\lambda = F_n^{'}$$

$$0.\delta_1^{'} + 0.\delta_2^{'} + ... + 1.\delta_i^{'} + k_0.\delta_{(i+1)}^{'} + ... + 0.\delta_n^{'} + 0.\lambda = a_0$$

Viết dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} k_{11}^{'} & \cdots & k_{1i}^{'} & k_{1(i+1)}^{'} & \cdots & k_{1n}^{'} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ k_{i1}^{'} & \cdots & k_{ii}^{'} & k_{i(i+1)}^{'} & \cdots & k_{in}^{'} & 1 \\ k_{(i+1)1}^{'} & \cdots & k_{(i+1)i}^{'} & k_{(i+1)(i+1)}^{'} & \cdots & k_{(i+1)n}^{'} & k_0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ k_{n1}^{'} & \cdots & k_{ni}^{'} & k_{n(i+1)}^{'} & \cdots & k_{nn}^{'} & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & k_0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1^{'} \\ \vdots \\ \delta_i^{'} \\ \delta_{i+1}^{'} \\ \vdots \\ \delta_n^{'} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{'} \\ \vdots \\ F_i^{'} \\ F_{i+1}^{'} \\ \vdots \\ F_n^{'} \\ a_0 \end{Bmatrix} \qquad (2.89)$$

Như vậy, khi giải bài toán kết cấu hệ thanh phẳng, có một biên nào đó có điều kiện biên đa bậc tự do. Giả sử gọi $\delta_i^{'}, \delta_{i+1}^{'}, \delta_{i+2}^{'}$ lần lượt là các số hiệu bậc tự do tại nút biên, thì lúc đó điều kiện biên đa bậc tự do được viết dưới dạng biểu thức (2.89) có thể làm theo các bước sau đây:

Bước 1: Rời rạc hóa kết cấu: Tại bước này, ta làm như bài toán bình thường là đánh số mã bậc tự do tại các nút của phần tử từ 1 đến hết, những bậc tự do nào khác không thì đánh mã khác không còn những bậc tự do nào có giá trị bằng không thì đánh mã "0".

Bước 2: Đánh số hiệu mã của các phần tử.

Bước 3: Thiết lập ma trận độ cứng của phần tử.

Bước 4: Xác định ma trận độ cứng tổng thể của kết cấu.

Bước 5: Xác định vécto tải trọng tác dụng nút của toàn bộ kết cấu và xây dựng phương trình cân bằng cho toàn bộ kết cấu:

$$\left[K^{'}\right]\left\{\delta^{'}\right\} = \left\{F^{'}\right\}$$

Bước 6: Xử lý điều kiên biên có chuyển vị bằng không:

Sau khi xác định được ma trận độ cứng tổng thể của kết cấu và véctơ tải trọng tác dụng nút của toàn bộ kết cấu: Xóa bỏ những hàng và cột trong các ma trận (Ma trận độ cứng; Véc tơ tải trọng tác dụng nút; Véc tơ bậc tự do tại các nút của toàn hệ) có số mã tương ứng bằng "0" thì phương trình cân bằng cho toàn hệ sẽ được viết lại dưới dạng $\left[K^*\right]\left\{\delta^*\right\} = \left\{F^*\right\}$.

Bước 7: Xử lý điều kiện biên đa bậc tự do của bài toán.

Xét hệ có n bậc tự do, khi làm đến bước 6 thì ta xác định được: Ma trận $\left[K^*\right]$ là ma trận có bậc $(n \times n)$; $\left\{\delta^*\right\}$ là véc tơ chuyển vị của toàn hệ có bậc $(n \times 1)$; $\left\{F^*\right\}$ là véc tơ tải trọng tác dụng nút có bậc $(n \times 1)$.

Xét khi hệ có 1 điều kiện biên đa bậc tự do:

$$\delta_i^{'} + k_0.\delta_{i+1}^{'} - a_0 = 0 \tag{2.90}$$

Thì lúc đó:

+ Véc tơ nghiệm thêm 1 ẩn là: λ

+ Ma trận độ cứng thêm một hàng một cột, trong đó các số hạng trên hàng và cột được thêm của ma trận độ cứng được xác định:

$$\begin{cases} k_{(n+1)i}^{'} = k_{i(n+1)}^{'} = 1 \\ k_{(n+1)(i+1)}^{'} = k_{(i+1)(n+1)}^{'} = k_0 \end{cases} \tag{2.91}$$

+ Véc tơ tải trọng tác dụng nút thêm 1 hàng và số hạng của hàng được thêm xác định:

$$F_{n+1}^{'} = a_0 \tag{2.92}$$

- Khi hệ có hơn 1 điều kiện biên đa bậc tự do, thì chúng ta xác định véc tơ nghiệm, ma trận độ cứng và véc tơ tải trọng tác dụng lần lượt cho từng điều kiện biên một cho đến hết. Như vậy nếu bài toán có r điều kiện biên đa bậc tự do thì ma trận độ cứng sẽ mở rộng thêm r hàng và r cột, véc tơ nghiệm thêm r ẩn và véc tơ tải trọng tác dụng nút thêm r hàng. Các số hạng trong các hàng và cột của ma trận (độ cứng, tải trọng tác dụng nút) mở rộng được xác định như vừa trình bày trong hệ 1 điều kiện biên đa bậc tự do.

Bước 8: Xác định các thành phần chuyển vị tại các nút.

Bước 9: Xác định các thành phần nội lực trong từng phần tử.

Ví dụ 2.1: Giả sử biết phương trình cân bằng toàn hệ của hệ kết cấu 6 bậc tự do là:

$$\begin{bmatrix} 8 & & & & & (\text{đx}) \\ 1 & 6 & & & & \\ 4 & 3 & 12 & & & \\ -4 & 2 & -2 & 3 & & \\ 2 & -2 & 3 & 1 & -4 & \\ 3 & 1 & 5 & -2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1^{'} \\ \delta_2^{'} \\ \delta_3^{'} \\ \delta_4^{'} \\ \delta_5^{'} \\ \delta_6^{'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \\ 10 \\ 4 \\ 6 \end{Bmatrix}$$

Hãy viết phương trình cân bằng cho toàn hệ biết hệ có 1 điều kiện biên đa bậc tự do là:

$$\delta_1^{'} + 2.\delta_2^{'} - 3 = 0$$

Lời giải:

Khi sử dụng hàm số Largrange để giải bài toán hệ có điều kiện biên đa bậc tự do thì phương trình cân bằng toàn hệ có kể đến điều kiện biên đa bậc tự do được viết như sau:

$$\begin{bmatrix} 8 & & & & & (\text{đx}) & \\ 1 & 6 & & & & & \\ 4 & 3 & 12 & & & & \\ -4 & 2 & -2 & 3 & & & \\ 2 & -2 & 3 & 1 & -4 & & \\ 3 & 1 & 5 & -2 & 3 & 6 & \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1^{'} \\ \delta_2^{'} \\ \delta_3^{'} \\ \delta_4^{'} \\ \delta_5^{'} \\ \delta_6^{'} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \\ 10 \\ 4 \\ 6 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

Ví dụ 2.2: Giả sử biết phương trình cân bằng toàn hệ của hệ kết cấu 6 bậc tự do là:

$$\begin{bmatrix} 8 & & & & & (\text{đx}) \\ 1 & 6 & & & & \\ 4 & 3 & 12 & & & \\ -4 & 2 & -2 & 3 & & \\ 2 & -2 & 3 & 1 & -4 & \\ 3 & 1 & 5 & -2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1^{'} \\ \delta_2^{'} \\ \delta_3^{'} \\ \delta_4^{'} \\ \delta_5^{'} \\ \delta_6^{'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \\ 10 \\ 4 \\ 6 \end{Bmatrix}$$

Hãy viết phương trình cân bằng cho toàn hệ biết hệ có 2 điều kiện biên đa bậc tự do là:

$$\begin{cases} \delta_1^{'} + 2.\delta_2^{'} - 3 = 0 \\ \delta_4^{'} - \delta_5^{'} = 0 \end{cases}$$

Lời giải:

Khi sử dụng hàm số Largrange để giải bài toán hệ có điều kiện biên đa bậc tự do thì phương trình cân bằng toàn hệ có kể đến điều kiện biên đa bậc tự do được viết như sau:

$$\begin{bmatrix} 8 & & & & & & & \\ 1 & 6 & & & & (\text{đx}) & & \\ 4 & 3 & 12 & & & & & \\ -4 & 2 & -2 & 3 & & & & \\ 2 & -2 & 3 & 1 & -4 & & & \\ 3 & 1 & 5 & -2 & 3 & 6 & & \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1^{'} \\ \delta_2^{'} \\ \delta_3^{'} \\ \delta_4^{'} \\ \delta_5^{'} \\ \delta_6^{'} \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \\ 10 \\ 4 \\ 6 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Bước 8: Xác định chuyển vị, nội lực tại các nút của phần tử:

Sau khi xử lý điều kiện biên đa bậc tự do của kết cấu, giải phương trình cân bằng toàn hệ của kết cấu có kể đến các điều kiện biên sẽ xác định được các thành phần chuyển vị tại các nút của phần tử $\{\delta'\}_e$. Sau khi xác định được chuyển vị tại các nút thì ta sẽ xác định được các thành phần nội lực tại các nút của phần tử theo công thức:

$$\{S\}_e = [\lambda]_e.\{\delta'\}_e - \{P_q\}_e \tag{2.93}$$

trong đó: $\{S\}_e = \{N_i \quad Q_i \quad M_i \quad N_j \quad Q_j \quad M_j\}^T$ - véctơ nội lực của phần tử;

$\{P_q\}_e$ - nội lực trong phần tử do tải trọng tác dụng trên phân tử gây ra;

$\{\delta'\}_e$ - véc tơ chuyển vị tại các nút của phần tử.

Công thức tính ma trận $[\lambda]_e$ cho một số loại phần tử thanh:

- Phần tử thanh dàn phẳng:

$$[\lambda]_e = \frac{E_e A_e}{l_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.94}$$

- Phần tử thanh chịu uốn và kéo nén đồng thời hai đầu liên kết cứng:

$$[\lambda]_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l}c & \frac{EA}{l}s & 0 & -\frac{EA}{l}c & -\frac{EA}{l}s & 0 \\ -\frac{12EI}{l^3}s & \frac{12EI}{l^3}c & \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3}s & -\frac{12EI}{l^3}c & \frac{6EI}{l^2} \\ -\frac{6EI}{l^2}s & \frac{6EI}{l^2}c & \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2}s & -\frac{6EI}{l^2}c & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l}c & -\frac{EA}{l}s & 0 & \frac{EA}{l}c & \frac{EA}{l}s & 0 \\ \frac{12EI}{l^3}s & -\frac{12EI}{l^3}c & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3}s & \frac{12EI}{l^3}c & -\frac{6EI}{l^2} \\ -\frac{6EI}{l^2}s & \frac{6EI}{l^2}c & \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2}s & -\frac{6EI}{l^2}c & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \tag{2.95}$$

2.4 Sử dụng phần mềm Matlab để tự động hóa phân tích bài toán có điều kiện biên đa bậc tự do.

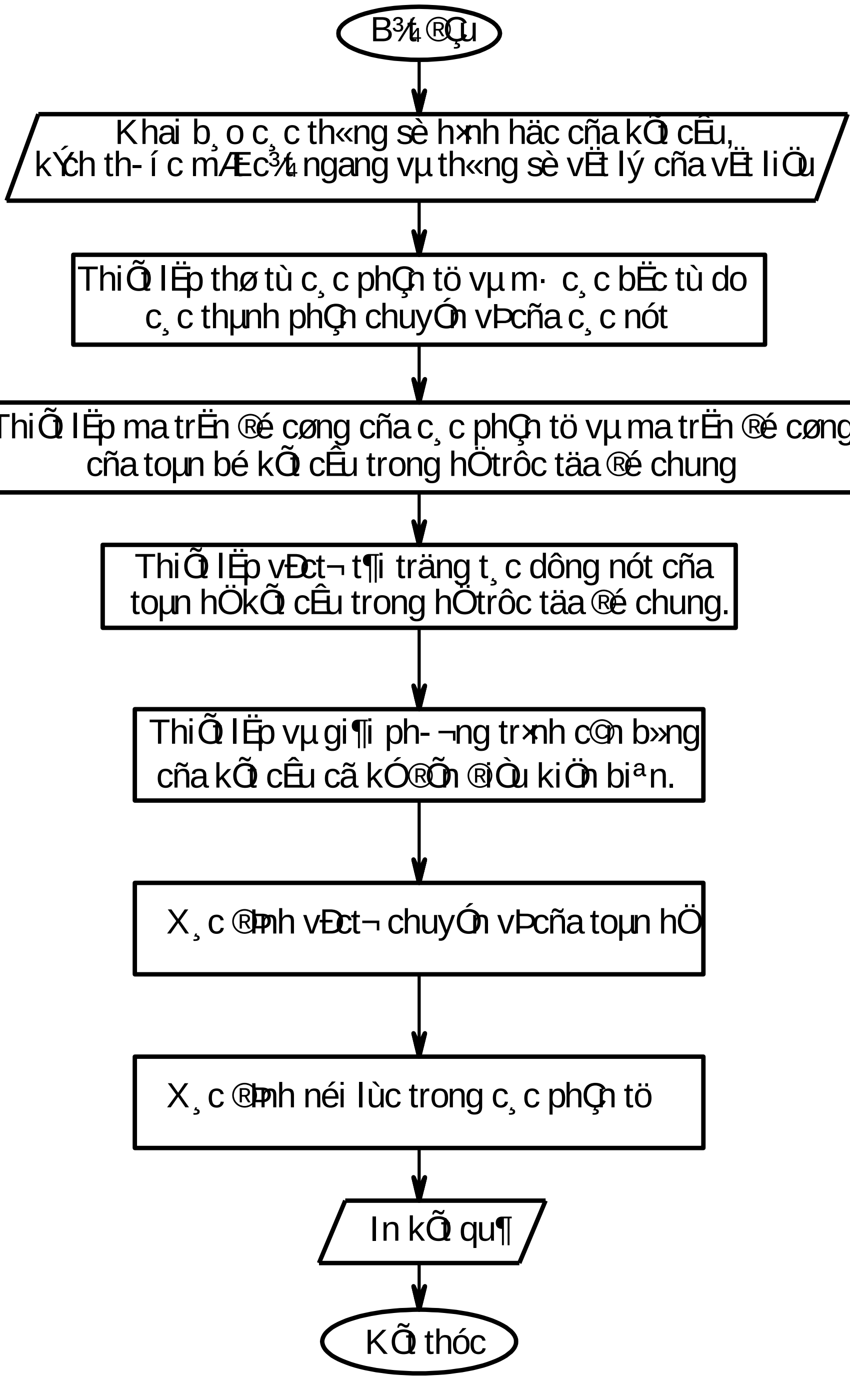
Để áp dụng phần mềm Matlab vào việc giải bài toán kết cấu có điều kiện biên đa bậc tự do bằng phương pháp phần tử hữu hạn, kết hợp với việc sử dụng hàm số Largrange ta có thể thực hiện theo sơ đồ khối như hình 2.19. Theo sơ đồ khối hình 2.19 thì ngoài phần bắt đầu, phần kết thúc thì sơ đồ khối bao gồm 8 khối chính:

Khối thứ 1: Khai báo các biến số và hằng số là các thông số vật liệu, thông số hình học của kết cấu: Căn cứ vào có số liệu hình học của kết cấu cũng như các thông số vật liệu mà bài toán đã cho, ta tiến khai báo các biến và hằng số của bài toán.

Khối thứ 2: Thiết lập mã hiệu phần tử, mã hiệu các bậc tự do và cách ghép nối các phần tử với nhau.

Khối thứ 3: Thiết lập ma trận độ cứng của các phần tử trong hệ trục tọa độ chung và ma trận độ cứng tổng thể của toàn kết cấu: Ở khối này, ta xác định được độ cứng của từng phần tử, sau đó ghép nối các ma trận độ cứng này lại với nhau dựa trên mã bậc tự do của từng phần tử tương ứng với mã bậc tự do tổng thể.

Khối thứ 4: Xác định véc tơ tải trọng tác dụng nút của toàn bộ kết cấu: Đầu tiên ta phải tạo ra ma trận cột rỗng là ma trận vuông có bậc bằng tổng số bậc tự do của toàn hệ cộng với số ràng buộc được xác định từ điều kiện biên đa bậc tự do, sau đó ta tiến hành xác định tải trọng tác dụng tại nút và tải trọng tác dụng trên các phần tử chuyền về nút.



Hình 2.19 Sơ đồ khối chương trình

Khối thứ 5: Xử lý điều kiện biên của bài toán: Trong khối này ta phải xử lý các điều kiện biên của bài toán bao gồm các điều kiện biên có thành phần chuyển vị bằng không và các điều kiện biên làm cho các thành phần chuyển vị thẳng tại biên đó có sự ràng buộc nhau theo cách sử dụng hàm số Largrange .

Khối thứ 6: Xác định bậc tự do của các nút: Dựa vào phương trình cân bằng của toàn hệ, ta sẽ xác định được các thành phần chuyển vị tại các nút của phần tử.

Khối thứ 7: Xác định nội lực trong các phần tử: Sau khi xác định được các thành phần chuyển vị tại các nút dựa vào công thức (2.93) sẽ xác định được các thành phần nội lực tại các nút của phần tử.

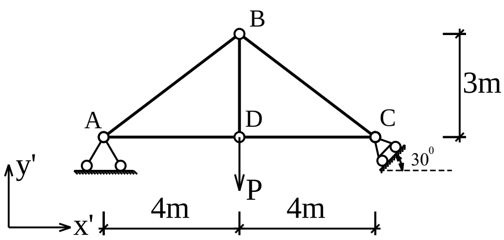
Khối thứ 8: In các kết quả phân tích.

Chương 3:
MỘT SỐ VÍ DỤ PHÂN TÍCH KẾT CẤU DÀN PHẲNG CÓ ĐIỀU KIỆN BIÊN ĐA BẬC TỰ DO

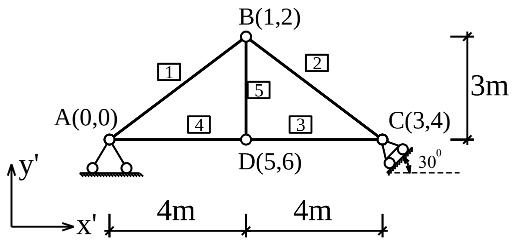
3.1 Ví dụ phân tích kết cấu dàn phẳng có 1 điều kiện biên đa bậc tự do

Ví dụ 3.1: Cho kết cấu dàn chịu lực như hình 3.1 biết: Mô đun đàn hồi vật liệu của các thanh: $E = 2.10^4\left(kN/cm^2\right)$; diện tích mặt cắt ngang các thanh: $A = 10\left(cm^2\right)$; tải trọng tác dụng: P= 10 (kN). Hãy xác định các thành phần chuyển vị tại các nút và nội lực trong các thanh dàn.

Lời giải



Hình 3.1 Ví dụ 3.1



Hình 3.2 Số hiệu bậc tự do và phần tử

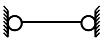
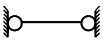
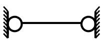
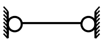
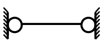
Bước 1: Rời rạc hóa kết cấu dàn thành các phần tử và đánh số thứ tự phần tử và số mã tổng thể cho kết cấu như hình 3.2.

Tại biên C khi hệ chịu lực thì có chuyển vị theo cả hai phương trong hệ tọa độ chung (x’0’y’), do đó tại nút C có hai bậc tự do và được đánh thứ tự như hình 3.2. Tuy nhiên, hai bậc (δ'_3, δ'_4) không độc lập với nhau mà ràng buộc với nhau cho bởi phương trình:

$$\tan 30^0.\delta'_3 - \delta'_4 = 0$$

Như vậy biên C được gọi là biên có điều kiện biên đa bậc tự do trong hệ trục tọa độ chung (x’0’y’).

Bước 2: Lập bảng xác định mã cục bộ của các phần tử theo mã tổng thể của kết cấu.

Phần tử			Mã cục bộ					
TT	Loại	α	1	2	3	4	5	6
			Số mã toàn thể					
1		$36,889^0$	0	0	1	2		
2		$-36,889^0$	1	2	3	4		
3		180^0	3	4	5	6		
4		180^0	5	6	0	0		
5		90^0	5	6	1	2		

Bước 3: Xác định ma trận độ cứng của các phần tử trong hệ trục tọa độ chung:

Phần tử 1: c=0,8; s=0,6; l_1=500(cm); $EA_1 = 2.10^5(kN)$

$$\left[K_1^{'}\right]_e = \frac{EA_1}{l_1}\begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & 256 & 192 \\ x & x & 192 & 144 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

Phần tử 2: c=0,8; s=-0,6; l_2=500(cm); $EA_2 = 2.10^5(kN)$

$$\left[K_2^{'}\right]_e = \frac{EA_2}{l_2}\begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 256 & -192 & -256 & 192 \\ & 144 & 192 & -144 \\ & & 256 & -192 \\ (đx) & & & 144 \end{bmatrix}\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

Phần tử 3: c=-1; s=0; l_3=400(cm); $EA_3 = 2.10^5(kN)$

$$\left[K_3^{'}\right]_e = \frac{EA_3}{l_3}\begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 & 0 & -500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -500 & 0 & 500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

Phần tử 4: c=-1; s=0; l_4=400(cm); $EA_4 = 2.10^5\,(kN)$

$$\left[K_4^{'}\right]_e = \frac{EA_4}{l_4}\begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 500 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

Phần tử 5: c=0; s=1; l_5=300(cm); $EA_5 = 2.10^5\,(kN)$

$$\left[K_5^{'}\right]_e = \frac{EA_5}{l_5}\begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 666,667 & 0 & -666,667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -666,667 & 0 & 666,667 \end{bmatrix}\begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

Bước 4: Xác định ma trận độ cứng của toàn bộ kết cấu trong hệ trục tọa độ chung.

Ma trận độ cứng của toàn kết cấu trong hệ tọa độ chung**:**

$$\left[K^{'}\right] = \begin{bmatrix} 512 & & & & & (đx) \\ 0 & 954,667 & & & & \\ 0 & -192 & 756 & & & \\ -256 & -144 & -192 & 144 & & \\ 192 & 0 & -500 & 0 & 1000 & \\ 0 & -666,667 & 0 & 0 & 0 & 666,667 \end{bmatrix}\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

Bước 5: Xác định véctơ tải trọng tác dụng nút của toàn hệ trong hệ trục tọa độ chung.

$$\left\{F^*\right\} = \left\{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -10\right\}^T$$

Bước 6: Xác định các thành phần chuyển vị tại các nút.

Phương trình cân bằng toàn hệ: $\left[K^*\right]\left\{\delta^*\right\} = \left\{F^*\right\}$

$$\begin{bmatrix} 512 & & & & & (\text{đx}) \\ 0 & 954,667 & & & & \\ 0 & -192 & 756 & & & \\ -256 & -144 & -192 & 144 & & \\ 192 & 0 & -500 & 0 & 1000 & \\ 0 & -666,667 & 0 & 0 & 0 & 666,667 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_B \\ v_B \\ u_C \\ v_C \\ u_D \\ v_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{Bmatrix}$$

Khi kể đến điều kiện biên đa bậc tự do tại nút C:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} u_C - v_C = \frac{\sqrt{3}}{3} \delta_3 - \delta_4 = 0$$

Phương trình cân bằng toàn hệ được viết lại (khi kể đến điều kiện biên đa bậc tự do):

$$\begin{bmatrix} 512 & & & & & & (\text{đx}) \\ 0 & 954,667 & & & & & \\ 0 & -192 & 756 & & & & \\ -256 & -144 & -192 & 144 & & & \\ 192 & 0 & -500 & 0 & 1000 & & \\ 0 & -666,667 & 0 & 0 & 0 & 666,667 & \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_B \\ v_B \\ u_C \\ v_C \\ u_D \\ v_D \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_B \\ v_B \\ u_C \\ v_C \\ u_D \\ v_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,0043(\text{cm}) \\ -0,0404(\text{cm}) \\ 0,0151(\text{cm}) \\ 0,0087(\text{cm}) \\ 0,0076(\text{cm}) \\ -0,0554(\text{cm}) \end{Bmatrix}$$

Bước 7: Xác định nội lực trong các thanh.

Để xác định nội lực trong các thanh, ta sử dụng công thức:

$$N_{ij} = \frac{E_{ij} A_{ij}}{l_{ij}} \left[c.(u_j - u_i) + s.(v_j - v_i) \right]$$

Nội lực trong các thanh dàn:

$$N_1 = \frac{2.10^5}{500}\left[0,8.(0,0043-0)+0,6.(-0,0404-0)\right] = -8,333(\text{kN})$$

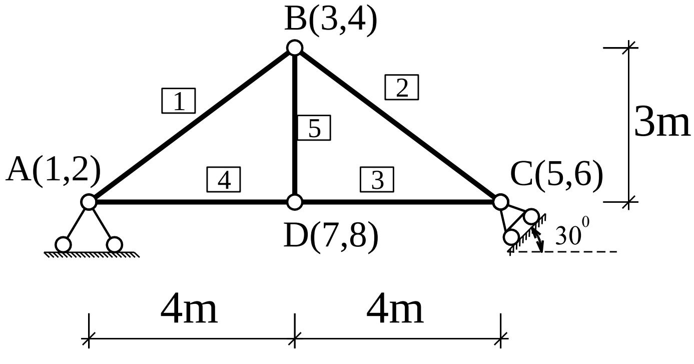
$$N_2 = \frac{2.10^5}{500}\left[0,8.(0,0151-0,0043)-0,6.(0,0087+0,0404)\right] = -8,333(\text{kN})$$

$$N_3 = \frac{2.10^5}{400}\left[(-1).(0,0076-0,0151)+0.(-0,0554-0,0087)\right] = 3,780(\text{kN})$$

$$N_4 = \frac{2.10^5}{400}\left[(-1).(0-0,0076)+0.(0+0,0554)\right] = 3,780(\text{kN})$$

$$N_5 = \frac{2.10^5}{400}\left[0.(0,0043-0,0076)+1.(-0,0404+0,0554)\right] = 10(\text{kN})$$

Đối với bài toán có số ẩn ít việc tính toán bằng tay như trên có thể thực hiện được. Nhưng khi bài toán có số ẩn nhiều hơn thì việc thực hiện tính toán bằng tay để ghép nối các ma trận độ cứng của phần tử để được ma trận độ cứng của toàn bộ kết cấu rất lâu, đặc biệt rất dễ nhầm lẫn. Vì vậy, để thuận tiện cho việc áp dụng phân tích bài toán kết cấu bằng phương pháp phần tử hữu hạn thường sử dụng các ngôn ngữ lập trình để tự động hóa tính toán. Trong đề tài, tác giả đã sử dụng phần mềm lập trình Malabs để tự động hóa thực hiện 7 bước giải bài toán ở trên. Sau đây, tác giả trình bày chi tiết từng bước thực hiện cũng như ý nghĩa của một số cú pháp câu lệnh để giải. Để thuận tiện cho việc giải thích các bước thực hiện, số hiệu bậc tự do của các nút được đánh như hình 3.3:



Hình 3.3 Số hiệu bậc tự do và phần tử

```
% clear memory
clear all
% Khai báo thông số vật liệu
E=2*10^4; % E:Mô đun đàn hồi
A=10;     % A: Diện tích mặt cắt ngang
EA=E*A;
% Cách ghép nối phần tử
nutpt=[1 2;2 3;3 4;4 1;4 2];
% toadonut: Tọa độ các nút
toadonut=[0 0;400 300;800 0;400 0];
% sopt: Số phần tử
sopt=size(nutpt,1);
% sonut: Tổng số nút
sonut=size(toadonut,1);
xx=toadonut(:,1);  yy=toadonut(:,2);
Bactudo=2*sonut+1; % Bactudo: Tổng số bậc tự do
U=zeros(Bactudo,1);  % U: Véc tơ chuyển vị nút
% taitrong: Véc tơ tải trọng tac dụng nút
taitrong=zeros(Bactudo,1);
docung=zeros(Bactudo); % docung: độ cứng
taitrong(8)=-10;
% Xác định ma trận độ cứng của toàn bộ hệ
for e=1:sopt;
chiso=nutpt(e,:)   ;
bactudopt=[ chiso(1)*2-1 chiso(1)*2 chiso(2)*2-1 chiso(2)*2] ;
xa=xx(chiso(2))-xx(chiso(1));
ya=yy(chiso(2))-yy(chiso(1));  chieudaipt=sqrt(xa*xa+ya*ya);
```

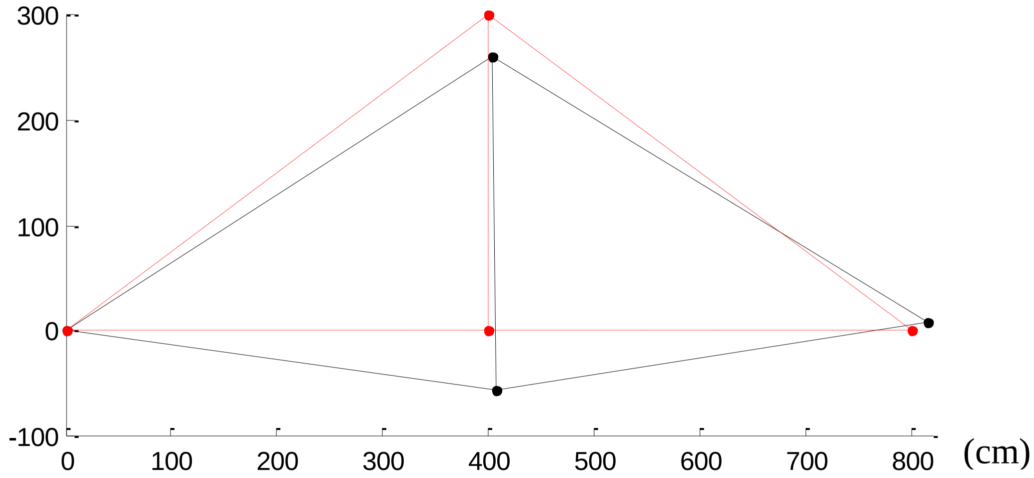
```
  C=xa/chieudaipt;   S=ya/chieudaipt;
 k1=EA/chieudaipt* [C*C C*S -C*C -C*S; C*S S*S -C*S -S*S;
                  -C*C -C*S C*C C*S;
-C*S -S*S C*S S*S];
  docung(bactudopt,bactudopt)= docung(bactudopt,bactudopt)+k1;
end
% Gán điều kiện biên đa bậc tự do
docung(Bactudo,5)=1/sqrt(3);
docung(5,Bactudo)=1/sqrt(3);
docung(Bactudo,6)=-1;
docung(6,Bactudo)=-1;
% Điều kiện biên làm bậc tự do bằng không
btdbien=[1;2];
%  Phân tích kết quả chuyển vị
chuyenvi=phantich(Bactudo,btdbien,docung,taitrong);
%Xuất kết quả chuyển vị tại các nút dàn; Phản lực tại biên
ketquacvpl(chuyenvi,docung,...
Bactudo,btdbien)
%  Nội lực trong các thanh dàn
for e=1:sopt
  chiso=nutpt(e,:);
  bactudopt=[ chiso(1)*2-1 chiso(1)*2 chiso(2)*2-1 chiso(2)*2] ;
  xa=xx(chiso(2))-xx(chiso(1));  ya=yy(chiso(2))-yy(chiso(1));
  chieudaipt=sqrt(xa*xa+ya*ya);   C=xa/chieudaipt;   S=ya/chieudaipt;
  noiluc(e)=E/chieudaipt*[-C  -S C S]*chuyenvi(bactudopt);
end
disp('Noi luc')
```

```
A*noiluc'
% Vẽ hình dạng dàn trước và sau khi biến dạng
us=1:2:2*sonut-1;
vs=2:2:2*sonut;
figure
L=xx(2)-xx(1);
XX=chuyenvi(us);YY=chuyenvi(vs);
dispNorm=max(sqrt(XX.^2+YY.^2));
scaleFact=100*dispNorm;
clf
hold on
drawingMesh(toadonut+1000*[XX YY],nutpt,'L2','k.-');
drawingMesh(toadonut,nutpt,'L2','r.--');
% File Phân tích chuyển vị
function chuyenvi=phantich(Bactudo,btdbien,docung,taitrong)
bactudotoanhe=setdiff([1:Bactudo]', ...
   [btdbien]);
% bactudotoanhe: Bậc tự do toàn hệ
U=docung(bactudotoanhe,bactudotoanhe)\taitrong(bactudotoanhe);
chuyenvi=zeros(Bactudo,1); chuyenvi(bactudotoanhe)=U;
% File ketquacvpl: Kết quả chuyển vị, phản lực
function ketquacvpl...
   (chuyenvi,docung,Bactudo,btdbien)
% Kết quả chuyển vị
disp('Chuyenvi')
jj=1:Bactudo; format
[jj' chuyenvi]
```

```
Chuyenvi
ans =
    1.0000         0
    2.0000         0
    3.0000    0.0043
    4.0000   -0.0404
    5.0000    0.0151
    6.0000    0.0087
    7.0000    0.0076
    8.0000   -0.0554
    9.0000    5.0000
phanluc
ans =
    1.0000    2.8868
    2.0000    5.0000
Noi luc
ans =
   -8.3333
   -8.3333
    3.7799
    3.7799
   10.0000
```

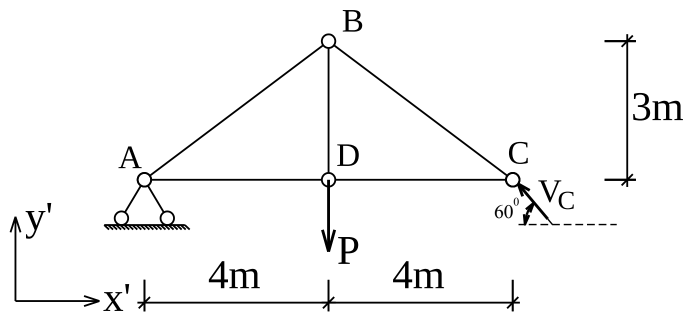
Kết quả hình dáng kết cấu dàn trước và sau khi biến dạng: (như hình 3.4).

(cm)



Hình 3.4 Kết quả hình dạng kết cấu dàn trước và sau khi biến dạng

Để kiểm tra độ tin cậy của kết quả phân tích, đề tài sẽ so sánh kết quả phân tích theo phương pháp phần tử hữu hạn với kết quả phân tích bằng phương pháp tách mắt như sau:



Hình 3.5 Phản lực tại C

Xác định nội lực trong các thanh dàn bằng phương pháp tách mắt:

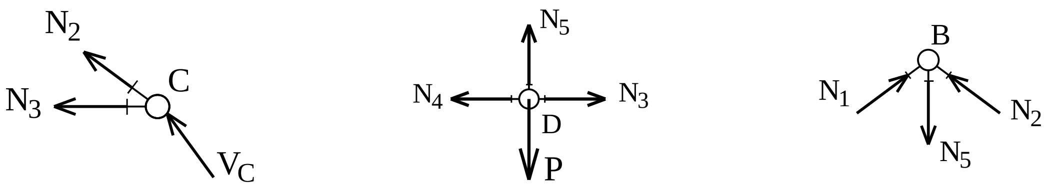
- Xét cân bằng toàn hệ (hình 3.5):

$$\sum M_A = 4.P - 8.\sin 60^0.V_C = 0 \quad \rightarrow \quad V_C \approx 5{,}7735(kN)$$

- Xét cân bằng nút C (hình 3.6a):

$$\sum F_Y = 0{,}6.N_2 + \sin 60^0.V_C = 0 \quad \rightarrow \quad N_2 \approx -8{,}3333(kN)$$

$$\sum F_X = N_3 + 0{,}8.N_2 + \cos 60^0.V_C = 0 \quad \rightarrow \quad N_3 \approx 3{,}7799(kN)$$



a) Nút C b) Nút D c) Nút B

Hình 3.6 Tách nút

- Xét cân bằng nút D (hình 3.6b):

$$\sum F_Y = N_5 - P = 0 \qquad \rightarrow \qquad N_5 = 10(kN)$$

$$\sum F_X = N_3 - N_4 = 0 \qquad \rightarrow \qquad N_3 = N_4 \approx 3,7799(kN)$$

- Xét cân bằng nút B (hình 3.6c):

$$\sum F_X = 0,8.N_1 - 0,8.N_2 = 0 \qquad \rightarrow \qquad N_1 = N_2 \approx -8,3333(kN)$$

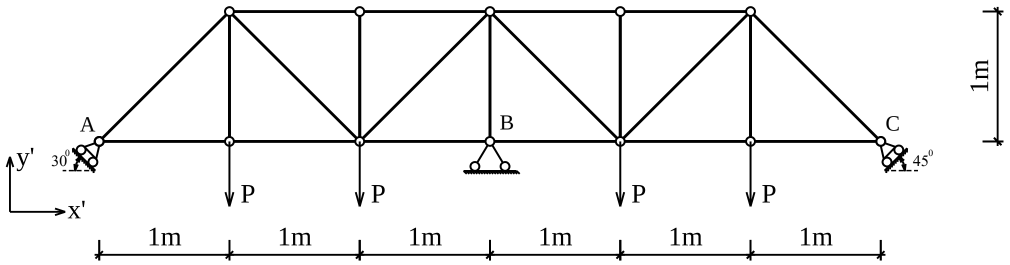
Bảng 3.1 Bảng so sánh kết quả nội lực ví dụ 3.1

Nội lực	N_1(kN)	N_2(kN)	N_3(kN)	N_4(kN)	N_5(kN)
Phương pháp PTHH	-8,3333	-8,3333	3,7799	3,7799	10
Phương pháp tách mắt	-8,3333	-8,3333	3,7799	3,7799	10

Theo kết quả so sánh trong bảng 3.1 cho thấy, khi Áp dụng thừa số Largrange để giải ví dụ 3.1 theo phương pháp phần tử hữu hạn cho kết qua hoàn toàn tin cậy.

3.2 Ví dụ phân tích kết cấu dàn phẳng có 2 điều kiện biên đa bậc tự do

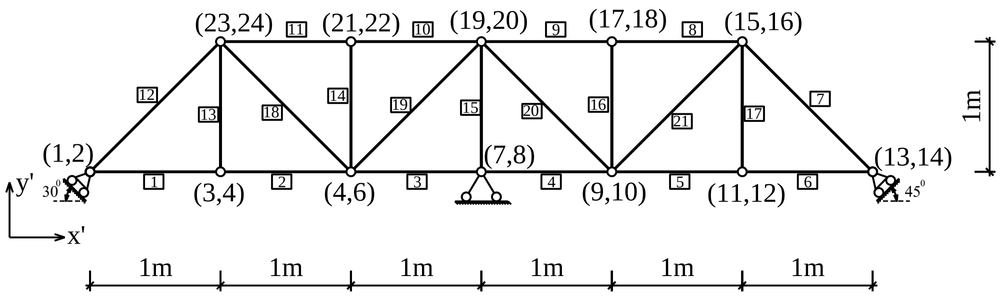
Ví dụ 3.2: Cho kết cấu chịu lực như hình 3.7 biết: các thanh có mô đun đàn hồi: $E = 2.10^4\left(kN/cm^2\right)$; diện tích mặt cắt ngang các thanh là: $A = 18\left(cm^2\right)$; tải trọng tác dụng: $P = 20\left(kN\right)$. Hãy xác định các thành phần chuyển vị tại các nút và nội lực trong các thanh.



Hình 3.7 Ví dụ 3.2

Lời giải

Trong ví dụ này số ẩn của bài toán lớn, để thuận tiên đề tài sử dụng phần mềm Matlab để lập trình tự động hóa tính toán.



Hình 3.8 Số hiệu bậc tự do và phần tử

Rời rạc hóa kết cấu dàn thành các phần tử và đánh số thứ tự phần tử và số mã tổng thể cho kết cấu như hình 3.8.

Tại biên A khi hệ chịu lực thì có chuyển vị theo cả hai phương trong hệ tọa độ chung (x’0’y’), do đó tại nút A có hai bậc tự do và được đánh thứ tự như hình 3.8. Tuy nhiên, hai bậc (δ'_1, δ'_2) không độc lập với nhau mà ràng buộc với nhau cho bởi phương trình:

$$\tan 30^0.\delta'_1 + \delta'_2 = 0$$

Như vậy biên A được gọi là biên có điều kiện biên đa bậc tự do trong hệ trục tọa độ chung (x’0’y’).

Tương tự như vậy, tại biên C có hai bậc tự do không độc lập với nhau mà ràng buộc với nhau cho bởi phương trình:

$$\delta'_{13} - \delta'_{14} = 0$$

Như vậy biên C được gọi là biên có điều kiện biên đa bậc tự do trong hệ trục tọa độ chung (x’0’y’).

Kết quả phân tích

```
Chuyenvinut
ans =
    1.0000   -0.0020
    2.0000    0.0012
    3.0000    0.0021
    4.0000   -0.0562
    5.0000    0.0063
    6.0000   -0.0571
    7.0000         0
    8.0000         0
    9.0000   -0.0104
   10.0000   -0.0581
   11.0000   -0.0104
   12.0000   -0.0584
   13.0000   -0.0104
   14.0000   -0.0104
   15.0000   -0.0207
   16.0000   -0.0484
```

17.0000	-0.0111
18.0000	-0.0581
19.0000	-0.0015
20.0000	-0.0204
21.0000	0.0081
22.0000	-0.0571
23.0000	0.0177
24.0000	-0.0462
25.0000	-19.5938
26.0000	19.5938

Noi luc

ans =

8.2813
8.2813
-12.5311
-20.8124
-0.0000
0
-27.7098
-19.1876
-19.1876
-19.1876
-19.1876
-27.7098
20.0000
-0.0000
-40.8124

-0.0000

20.0000

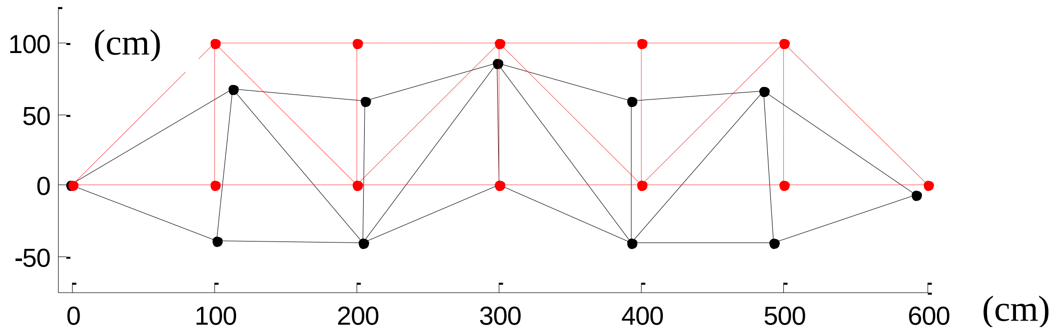
-0.5744

28.8587

28.8587

-0.5744

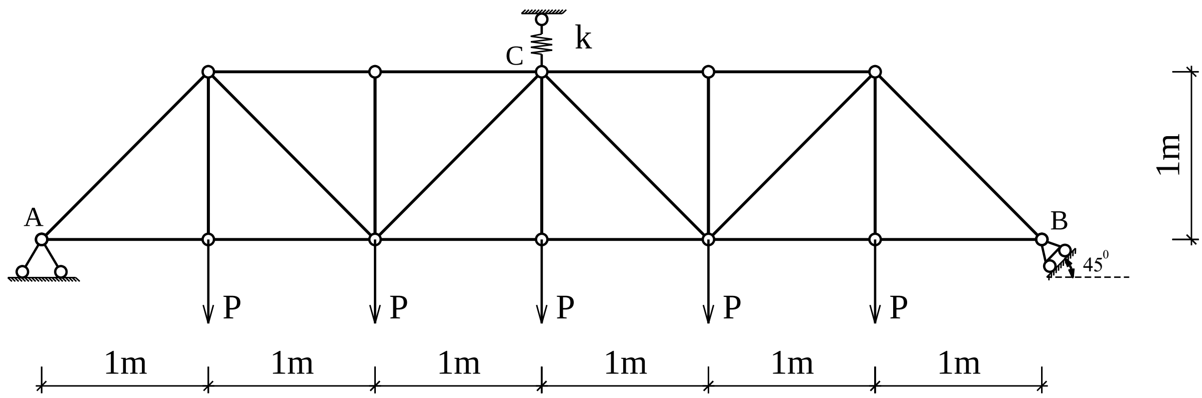
Kết quả hình dáng kết cấu dàn trước và sau khi biến dạng: (như hình 3.7).



Hình 3.9 Kết quả hình dạng kết cấu dàn trước và sau khi biến dạng

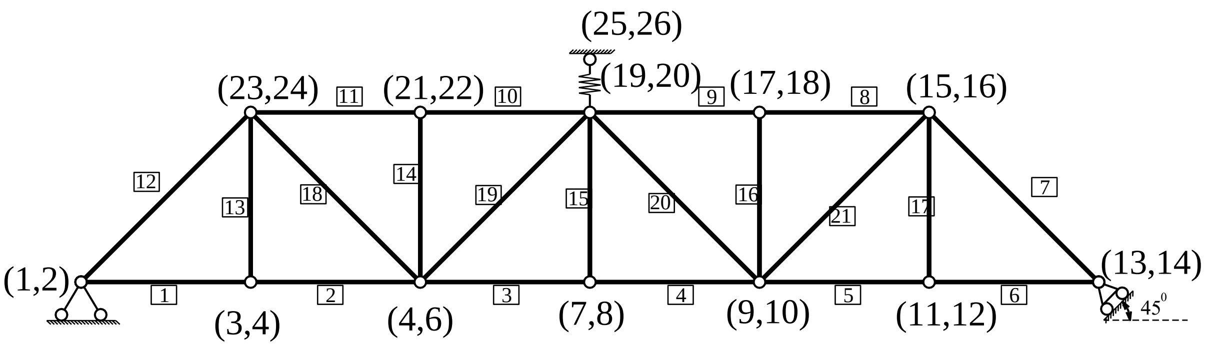
3.3 Ví dụ phân tích kết cấu dàn phẳng có 1 điều kiện biên đa bậc tự do và một điều kiện biên là gối lò xo đàn hồi

Ví dụ 3.3: Cho kết cấu chịu lực như hình 3.10 biết: các thanh có mô đun đàn hồi: $E = 2.10^4\left(kN/cm^2\right)$; diện tích mặt cắt ngang các thanh là: $A = 18\left(cm^2\right)$; tải trọng tác dụng: $P = 18\left(kN\right)$; độ cứng của lò xo k = 1800 (kN/cm). Hãy xác định các thành phần chuyển vị tại các nút và nội lực trong các thanh.



Hình 3.10 Hình ví dụ 3.3

Lời giải



Hình 3.11 Số hiệu bậc tự do và số hiệu phần tử

Trong ví dụ này số ẩn của bài toán lớn, để thuận tiên đề tài sử dụng phần mềm Matlab để lập trình tự động hóa tính toán.

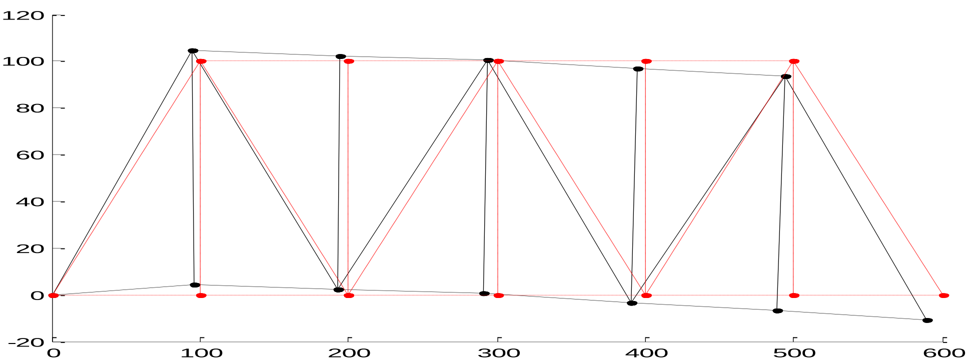
Rời rạc hóa kết cấu dàn thành các phần tử và đánh số thứ tự phần tử và số mã tổng thể cho kết cấu như hình 3.11.

Tại biên B khi hệ chịu lực thì có chuyển vị theo cả hai phương trong hệ tọa độ chung (x’0’y’), do đó tại nút B có hai bậc tự do và được đánh thứ tự như hình 3.11. Tuy nhiên, hai bậc (δ'_1, δ'_2) không độc lập với nhau mà ràng buộc với nhau cho bởi phương trình:

$$\delta'_{13} - \delta'_{14} = 0$$

Như vậy biên B được gọi là biên có điều kiện biên đa bậc tự do trong hệ trục tọa độ chung (x’0’y’).

Kết quả phân tích



Hình 3.12 Hình dạng dàn trước và sau khi biến dạng

Chuyenvinut

ans =

1.0000	0
2.0000	0
3.0000	-0.0250
4.0000	0.0300
5.0000	-0.0450
6.0000	0.0150
7.0000	-0.0580
8.0000	0.0041
9.0000	-0.0659
10.0000	-0.0220
11.0000	-0.0709
12.0000	-0.0439
13.0000	-0.0709
14.0000	-0.0709
15.0000	-0.0411
16.0000	-0.0439
17.0000	-0.0390
18.0000	-0.0220
19.0000	-0.0370
20.0000	0.0041
21.0000	-0.0349
22.0000	0.0150
23.0000	-0.0329
24.0000	0.0300
25.0000	0

26.0000	0
27.0000	-3.6757

Noi Luc

-90.0000
-72.0000
-46.6486
-28.6486
-18.0000
0
-5.1982
-7.3514
-7.3514
-7.3514
-7.3514
-5.1982
0
0.0000
0
0.0000
0
5.1982
-5.1982
-5.1982
5.1982

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Kết luận: Qua các nội dung đã trình bày ở các chương trong đề tài nghiên cứu, có thể rút ra các kết luận sau đây:

1) Dựa trên nguyên lý dừng thế năng toàn phần và phương pháp thừa số Largange trong bài toán quy hoạch toán học, đề tài đã trình bày cách xây dựng phương trình cân bằng cho bài toán kết cấu hệ thanh có điều kiện biên đa bậc tự do khi giải bằng phương pháp phần tử hữu hạn.

2) Đề tài nghiên cứu đã xây dựng được cách mở rộng ma trận độ cứng của toàn hệ, véc tơ tải trọng tác dụng nút toàn hệ trong hệ trục tọa độ chung của bài toán kết cấu có một điều kiện biên đa bậc tự do hoặc có nhiều điều kiện biên đa bậc tự do khi giải bằng phương pháp phần tử hữu hạn.

3) Khi sử dụng hàm số Largrange để giải bài toán kết cấu có điều kiên biên phức tạp bằng phương pháp phần tử hữu hạn không phải sửa lại số hiệu của các bậc tự do tại các nút của phần tử và đây là ưu điểm so với phương pháp khử ẩn chính phụ và phương pháp Panalty.

4) Sử dụng hàm số Largrange để giải bài toán kết cấu có điều kiên biên phức tạp bằng phương pháp phần tử hữu hạn, do ma trận độ cứng và véc tơ tải trọng tác dụng tại các nút không phải sắp xếp lại mà chỉ có mở rộng thêm cấp của ma trận. Do đó có thể tránh được những khó khăn phải tăng vùng bộ nhớ để lưu trữ ma trận độ cứng cũng như việc chọn ẩn số chính trong bài toán nhiều điều kiện biên đa bậc tự do như khi sử dụng phương pháp khử thành phần chính phụ.

5) Sử dụng hàm số Largrange để giải bài toán kết cấu có điều kiên biên phức tạp bằng phương pháp phần tử hữu hạn cho kết quả chính xác và không phải phụ thuộc vào giá trị của trọng số như phương pháp Panalty.

Kiến nghị: Do cách tính đơn giản và sử dụng tương đối hiệu quả trong việc giải các bài toán kết cấu có điều kiện biên đa bậc tự do bằng phương pháp phần tử hữu hạn, nên phương pháp sử dụng hàm số Largrange này có thể đưa vào giảng dậy cho các sinh viên khi phải giải các bài toán kết cấu có điều kiện biên đa bậc tự do bằng phương pháp phần tử hữu hạn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tài liệu Tiếng việt

[1] Phạm Văn Đạt (2017), *Tính kết cấu hệ thanh theo phương pháp phần tử hữu hạn*, Nhà Nhà xuất bản Xây dựng.

[2] Võ Như Cầu (2004), *Tính kết cấu theo phương pháp ma trận,* Nhà xuất bản Xây dựng.

[3] Võ Như Cầu (2005), *Tính kết cấu theo phương pháp phần tử hữu hạn,* Nhà xuất bản Xây dựng.

[4] Lê Xuân Huỳnh (2006), *Tính toán kết cấu theo lý thuyết tối ưu*, Nhà xuất bản Khoa học và kỹ thuật.

[5] Vũ Đình Lai, Nguyễn Xuân Lựu, Bùi Đình Nghi (2002), *Sức bền vật liệu,* Nhà xuất bản Giao thông vận tải.

[6] Nguyễn Văn Liên, Nguyễn Phương Thành, Đinh Trọng Bằng (2003), *Sức bền vật liệu*, Nhà xuất bản xây dựng.

[7] Trịnh Tự Lực (2010), *Bài giảng các phương pháp số*, Trường đại học Kiến trúc Hà Nội.

[8] Chu Quốc Thắng (1997), *Phương pháp phần tử hữu hạn,* Nhà xuất bản Khoa học và kỹ thuật.

[9] Nguyễn Trâm (2013), *Phương pháp phần tử hữu hạn và dải hữu hạn,* Nhà xuất bản Xây dựng.

[10] Lều Thọ Trình (2003), *Cơ học kết cấu, Tập I – Hệ tĩnh định*, Nhà xuất bản Khoa học và kỹ thuật.

[11] Lều Thọ Trình (2003), *Cơ học kết cấu, Tập II – Hệ siêu tĩnh*, Nhà xuất bản Khoa học và kỹ thuật.

Tài liệu dịch

[12] T.Karamanxki (1985), *Phương pháp số trong cơ học kết cấu*, Nguyễn Tiến Cường dịch, Nhà xuất bản Khoa học Kỹ thuật.

Tài liệu Tiếng Anh

[13] A.J.M Ferreira (2009), *Matlab codes for Finite Element Analysis,* Springer.

[14] B.Reza, S.Farhad (2013), *Advanced Finite Element Method*, Public web site for the graduate core course ASEN 6367.

[15] C. Felippa (2016), *Introduce Finite Element Method,* Public web site for the graduate core course ASEN 5007.

[16] D.V. Hutton (2004), *Fundamentals of Finite Element Analysis*, The McGraw−Hill Companies.

[17] G. R. Liu , Nguyen Thoi Trung (2010), *Smoothed Finite Element Methods*, CRC Press.

[18] K.J. Bathe (1996), *Finite Element Procedure*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458.

[19] R.L. Taylor (2000), *The Finite Element Method* - *Volume 1*, Butterworth-Heinemann Publishing.

[20] R.L. Taylor (2000), *The Finite Element Method* - *Volume 2*, Butterworth-Heinemann Publishing.

[21] R.L. Taylor (2000), *The Finite Element Method* - *Volume 3*, Butterworth-Heinemann Publishing.

[22] S. R. Singiresu (2009), *Engineering Optimization Theory and Practice*, John Wiley & Sons, Inc.

[23] W. Ch. Peter, K. Anders (2009), *An Introduction to Structural Optimization*, Springer Science + Business Media B.V.