

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC DÂN LẬP HẢI PHÒNG**

NGUYỄN THANH TUẤN

**MỘT CÁCH TIẾP CẬN MỚI ĐỂ PHÂN TÍCH
NỘI LỰC, CHUYỂN VỊ BÀI TOÁN TUYẾN TÍNH
KẾT CẤU DÀN CHỊU TẢI TRỌNG TÍNH**

Chuyên ngành: **Kỹ thuật Xây dựng Công trình Dân dụng & Công nghiệp**

Mã số: **60.58.02.08**

LUẬN VĂN THẠC SỸ KỸ THUẬT

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. PHẠM VĂN ĐẠT

Hải Phòng, 2017

LỜI CAM ĐOAN

Tên tôi là: Nguyễn Thanh Tuấn

Sinh ngày: 23/07/1984

Nơi công tác: UBND phường Trần Hưng Đạo, thành phố Hạ Long.

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các số liệu, kết quả trong luận văn là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Hải Phòng, ngày 15 tháng 11 năm 2017

Tác giả luận văn

Nguyễn Thanh Tuấn

LỜI CẢM ƠN

Tác giả luận văn xin trân trọng bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất đối với Tiến sĩ Phạm Văn Đạt vì những ý tưởng khoa học độc đáo, những chỉ bảo sâu sắc về phương pháp mới để phân tích nội lực, chuyển vị bài toán tuyến tính kết cấu dần chịu tải trọng tĩnh của và những chia sẻ về kiến thức cơ học, toán học uyên bác của Tiến sĩ. Tiến sĩ đã tận tình giúp đỡ và cho nhiều chỉ dẫn khoa học có giá trị cũng như thường xuyên động viên, tạo mọi điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu hoàn thành luận văn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các nhà khoa học, các chuyên gia trong và ngoài trường Đại học Dân lập Hải Phòng đã tạo điều kiện giúp đỡ, quan tâm góp ý cho bản luận văn được hoàn thiện hơn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn các cán bộ, giáo viên của Khoa xây dựng, Phòng đào tạo Đại học và Sau đại học - trường Đại học Dân lập Hải Phòng, và các đồng nghiệp đã tạo điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tác giả trong quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Hải Phòng, ngày 15 tháng 11 năm 2017

Tác giả luận văn

Nguyễn Thanh Tuấn

MỤC LỤC

	Trang
LỜI CAM ĐOAN	i
LỜI CẢM ƠN	iii
MỤC LỤC	iii
MỞ ĐẦU	1
Lý do lựa chọn đề tài	1
Mục đích nghiên cứu	2
Đối tượng và phạm vi nghiên cứu	2
Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài	2
Bố cục của đề tài	2
Chương 1: TỔNG QUAN VỀ PHÂN TÍCH KẾT CẤU DÀN	4
1.1 Đặc điểm và ứng dụng kết cấu dàn	4
1.2 Các giả thuyết khi tính toán dàn	7
1.3 Phân loại	8
1.4. Một số phương pháp tính toán kết cấu dàn hiện nay thường sử dụng	8
1.4.1 Phương pháp tách nút	8
1.4.2 Phương pháp mặt cắt	9
1.4.3 Phương pháp mặt cắt phối hợp	9
1.4.4 Phương pháp họa đồ	10
1.4.5 Phương pháp lực	11
1.4.6 Phương pháp chuyển vị	11
1.4.7 Phương pháp phần tử hữu hạn	12
1.5 Mục tiêu nghiên cứu của đề tài	18
Chương 2: LÝ THUYẾT PHÂN TÍCH KẾT CẤU DÀN DỰA TRÊN PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN LÝ CỰC TRỊ GAUSS	19
2.1 Nguyên lý cực trị Gauss	19

2.1.1. Nguyên lý cực tiểu Gauss và bất đẳng thức Gauss	19
2.1.2. Phát biểu nguyên lý cực tiểu Gauss (1829) đối với cơ học chất điểm..	21
2.1.3. Biểu thức thường dùng của nguyên lý cực tiểu Gauss	21
2.2 Áp dụng nguyên lý cực trị Gauss trong việc giải các bài toán cơ học.....	23
2.2.1 Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss với cơ hệ chất điểm.....	23
2.2.2 Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss đối với cơ học công trình.....	25
2.2.2.1 Bài toán kết cấu khi chịu lực tác dụng thẳng góc với mặt trung bình	26
2.2.2.2 Bài toán kết cấu khi chịu lực vuông góc với mặt trung bình và có tác dụng của lực dọc lên mặt trung bình.....	30
2.3 Phân tích bài toán tuyến tính kết cấu dàn dựa theo nguyên lý cực trị Gauss ...	32
2.3.1 Phân tích tuyến tính kết cấu dàn với cách chọn ẩn số chính là các thành phần chuyển vị tại các nút dàn.....	34
2.3.1.1 Kết cấu dàn phẳng	34
2.3.1.2 Kết cấu dàn không gian.....	36
2.3.2 Phân tích tuyến tính kết cấu dàn với cách chọn ẩn số chính là các thành phần nội lực trong các thanh dàn	38
2.3.3 Phương pháp xác định các thành phần chuyển vị tại nút dàn và nội lực trong các thanh dàn đối với bài toán dàn tuyến tính	39
Chương 3: MỘT SỐ VÍ DỤ PHÂN TÍCH KẾT CẤU DÀN.....	42
3.1 Ví dụ tính toán dàn theo cách chọn ẩn số chính là các thành phần chuyển vị tại các nút dàn.....	42
3.2 Ví dụ tính toán dàn theo cách chọn ẩn số chính là nội lực trong các thanh dàn	45
3.3 Bài toán dàn vòm phẳng tĩnh định	48
3.4 Bài toán dàn vòm phẳng tĩnh định trong, siêu tĩnh ngoài	53
KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ	58
TÀI LIỆU THAM KHẢO	59

MỞ ĐẦU

Lý do lựa chọn đề tài

Kết cấu dàn là một trong những dạng kết cấu xuất hiện từ rất sớm và ngày càng được sử dụng rộng rãi trong các công trình xây dựng Dân dụng và Công nghiệp, An ninh Quốc phòng. Ngay từ xa xưa, khi ngành công nghiệp vật liệu chưa phát triển thì các vật liệu như gỗ, tre v.v... đã được sử dụng làm kết cấu dàn cho các cây cầu vượt được nhịp 20-30m. Khi khoa học vật liệu phát triển thì kết cấu dàn càng đóng vai trò to lớn và thường được các Kỹ sư thiết kế lựa chọn làm giải pháp thiết kế trong các công trình vượt được khẩu độ lớn.

Kết cấu dàn là kết cấu có rất nhiều ưu điểm như: tiết kiệm vật liệu, cho vượt khẩu độ lớn, nhẹ, kinh tế và đặc biệt về phương diện kiến trúc có thể tạo được nhiều hình dáng khác nhau như: vòm cầu, vòm trụ, vòm yên ngựa v.v...mà hiện nay có rất nhiều công trình trên thế giới sử dụng các loại hình dáng này. Vì vậy, ngày nay kết cấu dàn được sử dụng rộng rãi trong các công trình cầu, các cột truyền tải điện, cột truyền thông, dàn khoan và làm mái che cho các công trình sân vận động, nhà thi đấu, cung thể thao, trung tâm thương mại, xưởng sửa chữa bảo dưỡng máy bay v.v...

Trước kia, khi tính toán phân tích nội lực cho kết cấu dàn thường được thực hiện tính toán bằng thủ công với các phương pháp đơn giản như: Phương pháp tách mắt, Phương pháp mặt cắt đơn giản, Phương pháp mặt cắt phối hợp, Phương pháp họa đồ - Giải đồ Maxwell-Cremona v.v... Hiện nay do sự phát triển của công nghệ tin học điện tử nên việc tính toán đơn giản và thuận tiện hơn rất nhiều nhờ các phần mềm phân tích tính toán ứng dụng được viết dựa theo phương pháp phân tử hữu hạn như phần mềm Sap, Etabs v.v..., đặc biệt các phần mềm này có thể phân tích tính toán với các kết cấu siêu tĩnh bậc cao. Tuy nhiên để làm phong phú thêm phương pháp phân tích kết cấu dàn, tác giả lựa chọn đề tài : **“Một cách tiếp cận mới trong việc phân tích (nội lực, chuyển vị) bài toán tuyến tính kết cấu dàn”**.

Mục đích nghiên cứu

Nhằm làm phong phú thêm phương pháp giải bài toán kết cấu dàn, khác với các cách giải đã được trình bày trong các tài liệu cơ học hiện nay.

Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đề tài tập trung nghiên cứu phương pháp phân tích tuyến tính kết cấu dàn (dàn phẳng; dàn không gian) chịu tải trọng tĩnh tại các nút dàn với các giả thuyết sau:

Giả thiết 1: Nút của dàn phải nằm tại giao điểm của các trục thanh và là khớp lý tưởng (các đầu thanh quy tụ ở nút có thể xoay một cách tự do không ma sát).

Giả thiết 2: Tải trọng chỉ tác dụng tại các nút dàn.

Giả thiết 3: Trọng lượng bản thân của các thanh không đáng kể so với tải trọng tổng thể tác dụng lên dàn.

Giả thiết 4: Tải trọng tác dụng lên kết cấu dàn được bảo toàn về phương, chiều và độ lớn trong quá trình kết cấu biến dạng.

Phương pháp nghiên cứu

Dựa trên phương pháp nguyên lý cực trị Gauss của GS TSKH Hà Huy Cương và kết hợp phần mềm Matlabs.

Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Vấn đề các phương pháp phân tích kết cấu dàn đã được rất nhiều sách cơ học khác nhau trong nước cũng như nước ngoài giới thiệu. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài nghiên cứu là giới thiệu một cách tiếp cận khác để làm phong phú thêm các phương pháp giải trong bài toán kết cấu dàn.

Bố cục của đề tài

Ngoài phần mở đầu, phần kết luận, tài liệu tham khảo và phụ lục. Nội dung chính của đề tài được bố cục trong 3 chương:

- Chương 1 Tổng quan về kết cấu dàn: Trong chương này trình bày ứng dụng và sự phát triển kết cấu dàn trong các công trình xây dựng. Đồng thời trình bày các phương pháp phân tích kết cấu dàn hiện nay thường được trình bày trong các sách cơ học. Cuối chương là các vấn đề được đặt ra để nghiên cứu trong đề tài

- Chương 2 Lý thuyết phân tích kết cấu dàn dựa trên phương pháp nguyên lý cực trị Gauss: Trong chương này sẽ trình bày phương pháp nguyên lý cực trị Gauss và việc ứng dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss để phân tích kết cấu dàn.

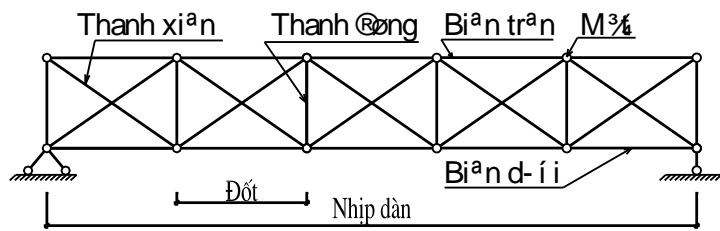
- Chương 3 Một số ví dụ phân tích kết cấu dàn: Dựa trên phương pháp nguyên lý cực trị Gauss đã trình bày trong chương 2 để phân tích chuyển vị, nội lực một số kết cấu dàn (dàn phẳng; dàn không gian) chịu tải trọng tĩnh.

Chương 1

TỔNG QUAN VỀ PHÂN TÍCH KẾT CẤU DÀN

1.1 Đặc điểm và ứng dụng kết cấu dàn

Kết cấu dàn là kết cấu được tạo thành từ các thanh liên kết với nhau tại các nút dàn, nút dàn phải nằm tại giao điểm của các trục thanh (hình 1.1).



Hình 1.1 Kết cấu dàn

Khoảng cách giữa các gối tựa được gọi là nhịp dàn. Giao điểm giữa các thanh dàn được gọi là nút dàn (hoặc mắt dàn). Những thanh dàn nằm trên chu vi của dàn tạo thành đường biên trên (thanh cánh trên) và biên dưới (thanh cánh dưới). Các thanh nằm bên trong các đường biên tạo thành hệ thanh bụng. Hệ thanh bụng gồm các thanh đứng và thanh xiên. Khoảng cách giữa các nút thuộc đường biên gọi là đốt dàn.

Khi lực chỉ đặt tại nút thì các thanh dàn chủ yếu làm việc chịu kéo hoặc nén, do đó ta có thể coi các nút dàn là khớp. Do kết cấu dàn khi chịu lực, các thanh chủ yếu chỉ chịu kéo hoặc nén nên tận dụng hết được khả năng làm việc của vật liệu. Vì vậy kết cấu dàn là kết cấu tiết kiệm vật liệu và về phương diện kiến trúc có thể tạo được nhiều hình dáng khác nhau, nên kết cấu dàn được sử dụng nhiều trong các công trình cầu, dàn khoan, cột truyền tải điện và làm kết cấu mái che cho các công trình nhà thi đấu, sân vận động, nhà hát, sân bay v.v...

Kết cấu dàn đầu tiên trên thế giới được xây dựng năm 1863 là công trình Schwedler Dome tại Berlin do kỹ sư Schwedler người Đức thiết kế, có dạng kết cấu vòm được tạo bởi các lưới ô tam giác và vượt được khẩu độ 30m. Đến

năm 1889 tại Pari Pháp xây dựng tháp Eiffel nằm cạnh sông Seine có chiều cao 325 m trở thành biểu tượng của kinh đô ánh sáng. Năm 1898 tại Việt Nam, các Kỹ sư người Pháp đã thiết kế và xây dựng cây cầu Long Biên, cây cầu dài 2.290m làm bằng dàn thép [2].

Năm 1940 tại Berlin Max Mengerhausen đã nghiên cứu ra hệ kết cấu Mero (System of nodes and beams - MEngeringhausen ROhrbauweise), từ đây trở đi kết cấu dàn không ngừng được nghiên cứu và ứng dụng vào các công trình thực thực tế [2].



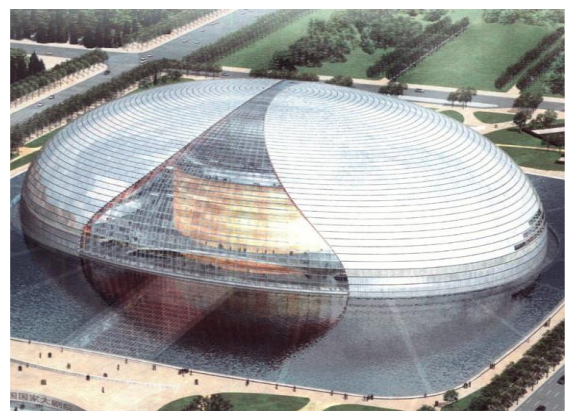
Hình 1.2 Sân vận động AstroDome



Hình 1.3 Nhà thi đấu Superdome



Hình 1.4 Nhà thi đấu Nagoya Dome



Hình 1.5 Nhà hát lớn Bắc kinh

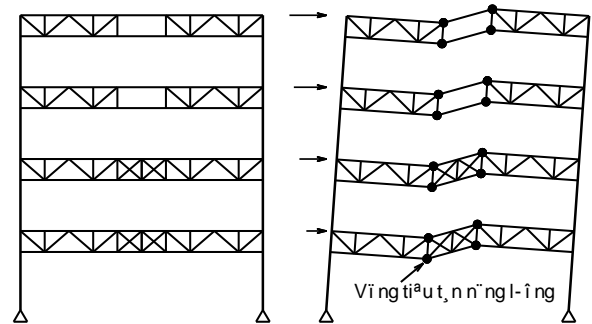
Năm 1965 công trình sân vận động AstroDome được xây dựng tại bang Texas nước Mỹ có sức chứa 42.217 người, chiều dài nhịp dàn là 196m (hình 1.2) [2].

Năm 1975 cũng tại Mỹ các nhà kỹ sư đã thiết kế công trình Superdome là nơi tổ chức các sự kiện thể thao và triển lãm có sức chứa 73.208 người, có chiều dài nhịp dầm là: 207m (hình 1.3) [2].

Năm 2000 tại Nhật Bản đã thiết kế được dàn không gian cho công trình Nagoya Dome có sức chứa 40.500 người với kích thước khẩu độ trên 180m (hình 1.4) [2].

Năm 2007 Trung Quốc đã xây dựng nhà hát lớn tại Bắc Kinh dạng hình Elipsoid, với kích thước một chiều 144m và một chiều 212m. Chiều cao của công trình 46m và công trình có sức chứa 5.452 người (hình 1.5).

Ngoài ứng dụng làm kết cấu cho các công trình nhịp lớn như đã kể trên, kết cấu dàn còn có tác dụng giảm chấn cho các kết cấu công trình chịu động đất. Khi có động đất xảy ra thì trên kết cấu dàn STMFs (Special Truss moment frames) xuất hiện các vị trí biến dạng



Hình 1.6 Kết cấu STMFs

đeo (vùng tiêu tán năng lượng) như hình 1.6, làm tăng khả năng giảm chấn cho công trình [2].

Ngoài ra, do cách tính đơn giản của dàn nên có thể dùng sơ đồ dàn ảo để mô tả tính toán trong kết cấu dầm và bản bê tông (trạng thái có vết nứt): Khi tính toán thiết kế các vùng liên tục theo trạng thái giới hạn độ bền và để thiết kế cấu tạo chi tiết cho các vùng không liên tục theo trạng thái giới hạn độ bền, kiểm tra trạng thái giới hạn sử dụng. Mô hình dàn ảo bao gồm các thanh chéo đại diện cho trường ứng suất nén, các thanh giằng đại diện cho cốt thép và các nút liên kết có vị trí, hướng trùng với cốt thép [2].

1.2 Các giả thuyết khi tính toán dàn

Để tính dàn được đơn giản, ta thừa nhận các giả thuyết sau:

Giả thuyết 1: Nút của dàn phải nằm tại giao điểm của các trục thanh và là khớp lý tưởng (các đầu thanh quy tụ ở nút có thể xoay một cách tự do không ma sát).

Giả thuyết 2: Tải trọng chỉ tác dụng tại các nút dàn.

Giả thuyết 3: Trọng lượng bản thân của các thanh không đáng kể so với tải trọng tổng thể tác dụng lên dàn.

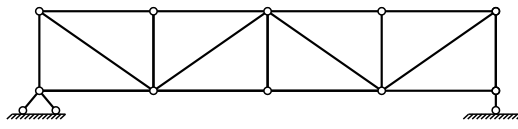
Giả thuyết 4: Góc của các trục thanh trước và sau khi dàn chịu lực là không thay đổi.

Từ các giả thuyết 1, giả thuyết 2 và giả thuyết 3 ta đi đến kết luận quan trọng: Các thanh trong dàn chỉ chịu kéo hoặc chịu nén, nghĩa là trong dàn chỉ tồn tại lực dọc N mà không có mô men uốn M và lực cắt Q .

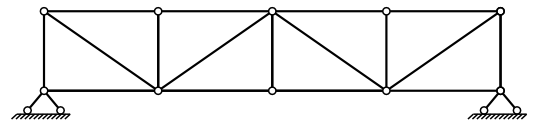
Từ giả thuyết 2 và giả thuyết 3 thì khi phân tích, tính toán kết cấu dàn ta phải tính toán kết cấu dàn như kết cấu khung với các tải trọng đặt ở nút khung và lúc này các nút khung được coi là tuyệt đối cứng. Khi dàn tính toán như kết cấu khung để cho đơn giản trong tính toán thì bài toán ta phải thêm một giả thuyết nữa là: Biến dạng dọc trục thanh là rất nhỏ.

Đặc biệt khi ta có giả thuyết 1, giả thuyết 2 giả thuyết 3 và giả thuyết 4 việc tính toán kết cấu dàn được đơn giản đi rất nhiều mà hiện nay khi tính toán kết cấu dàn với rất các phương pháp khác nhau đều phải sử dụng bốn giả thuyết này.

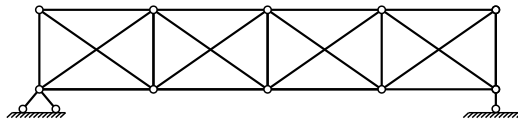
1.3 Phân loại



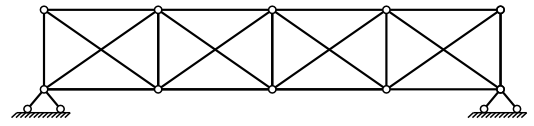
a) Dạng tĩnh định



b) Dạng siêu tĩnh ngoài, tĩnh định trong



c) Dạng siêu tĩnh trong, tĩnh định ngoài



d) Dạng siêu tĩnh ngoài, siêu tĩnh trong

Hình 1.7 Phân loại kết cấu dàn

Dựa vào mức độ phức tạp khi giải của bài toán dàn có thể phân kết cấu dàn thành bốn loại: Dàn tĩnh định (hình 1.7a); Dàn siêu tĩnh trong, tĩnh định ngoài (hình 1.7b); Dàn siêu tĩnh ngoài, tĩnh định trong (hình 1.7c); Dàn siêu tĩnh trong và siêu tĩnh ngoài (hình 1.7d). Ngoài ra còn có rất nhiều cách phân loại khác nhau như nếu căn cứ vào độ vòng của dàn có thể phân thành dàn dầm và dàn vòm, nếu căn cứ vào tọa độ các nút dàn có thể phân thành dàn phẳng và dàn không gian v.v...

1.4. Một số phương pháp tính toán kết cấu dàn hiện nay thường sử dụng

1.4.1 Phương pháp tách nút

Phương pháp tách nút là trường hợp đặc biệt của phương pháp mặt cắt. Trong đó hệ lực cần khảo sát cân bằng là hệ lực đồng quy.

Nội dung phương pháp: Phương pháp tách nút là sự khảo sát sự cân bằng của từng nút được tách ra khỏi dàn.

Thứ tự áp dụng:

- Lần lượt tách từng nút ra khỏi dàn bằng những mặt cắt bao quanh nút.
- Thay thế tác dụng của các thanh bị cắt bằng lực dọc trong thanh đó, sau khi thay thế tại mỗi nút ta có một hệ lực đồng quy.

- Khảo sát sự cân bằng của từng nút chúng ta sẽ xây dựng nên được một hệ phương trình cân bằng các nút mà ẩn số của các hệ này là lực dọc trong các thanh dầm.

- Cuối cùng ta chỉ việc giải hệ sẽ xác định được lực dọc trong các thanh dầm.

Phạm vi áp dụng phương pháp: Phương pháp tách nút chỉ sử dụng tính toán các dầm tĩnh định còn dầm siêu tĩnh không áp dụng được.

1.4.2 Phương pháp mặt cắt

Nội dung phương pháp: Phương pháp mặt cắt đơn giản được thực hiện bằng mặt cắt qua các thanh tìm nội lực (số lực chưa biết không lớn hơn số phương trình cân bằng được lập) và viết phương trình cân bằng cho từng phần của dầm.

Thứ tự áp dụng:

- Thực hiện mặt cắt qua thanh cần tìm nội lực và mặt cắt chia dầm ra làm hai phần độc lập.

- Thay thế tác dụng của các thanh bị cắt bằng các lực dọc tương ứng. Khi chưa biết lực dọc ta giả thiết lực dọc dương nghĩa là hướng ra ngoài mặt cắt đang xét.

- Lập phương trình cân bằng cho một phần dầm bị cắt (phần bên phải hoặc phần bên trái). Từ các phương trình cân bằng sẽ suy ra nội lực cần tìm. Nếu kết quả mang dấu dương thì chiều nội lực hướng theo chiều giả định, tức là kéo. Ngược lại nếu kết quả mang dấu âm thì chiều nội lực hướng ngược chiều giả định, tức là nén.

Phạm vi áp dụng phương pháp: Phương pháp mặt cắt đơn giản chỉ dùng tính toán cho dầm tĩnh.

1.4.3 Phương pháp mặt cắt phối hợp

Nội dung phương pháp:

Phương pháp mặt cắt phối hợp được áp dụng để tính dầm khi không dùng được mặt cắt đơn giản, nghĩa là khi tại một mặt cắt, số lực chưa biết lớn hơn

ba. Mục đích chính của phương pháp này là tìm cách thiết lập một số phương trình cân bằng chỉ chứa một số lực chưa biết bằng số phương trình đó. Khi thiết lập một phương trình cân bằng trong mỗi mặt cắt nói chung ta chỉ có thể loại trừ được hai lực chưa biết.

Bởi vậy, khi chỉ có thể thực hiện mặt cắt qua bốn thanh chưa biết nội lực mới đủ điều kiện là cắt qua thanh cần tìm nội lực và chia dần thành hai phần độc lập thì ta phải dùng hai mặt cắt phối hợp. Với hai mặt cắt thì ta có thể tìm được ngay hai nội lực theo hai phương trình. Muốn vậy:

- Hai mặt cắt cùng phải đi qua hai thanh cần tìm nội lực và mỗi mặt cắt chỉ có thể đi qua hai thanh khác chưa cần tìm nội lực.

- Trong mỗi mặt cắt, thiết lập một phương trình cân bằng sao cho các lực chưa cần tìm không tham gia.

Phạm vi áp dụng phương pháp: Phương pháp mặt cắt phối hợp chỉ dùng tính toán cho dàn tĩnh.

1.4.4 Phương pháp họa đồ

Nội dung phương pháp:

Phương pháp họa đồ hay (còn gọi phương pháp Giảm đồ Maxwell – Cremona) là phương pháp vẽ để giải bài toán. Có thể dùng phương pháp này để giải nhiều bài toán khác nhau của cơ học và để xác định phản lực, nội lực cho hệ dàn tĩnh định. Cách giải bài toán được trình bày toàn bộ trên hình vẽ gọi là giảm đồ Maxwell – Remona.

Dựa vào điều kiện cần và đủ để hệ lực đồng quy được cân bằng là đa giác lực của hệ đồng quy này phải khép kín. Lần lượt áp dụng điều kiện này cho từng nút của dàn bị tách ra theo thứ tự sao cho tại mỗi nút của dàn chỉ có hai nội lực chưa biết trị số nhưng đã biết phương thì ta xác định được nội lực của tất cả các thanh dàn.

Phạm vi áp dụng phương pháp: Phương pháp họa đồ chỉ dùng tính toán cho dàn tĩnh.

1.4.5 Phương pháp lực

Nội dung phương pháp:

Phương pháp lực được áp dụng trong việc tính toán hệ dàn siêu tĩnh. Để tính toán hệ dàn siêu tĩnh, ta không tính trực tiếp trên hệ đó mà tính trên một hệ thay thế khác cho phép dễ dàng xác định nội lực. Hệ thay thế này suy ra từ hệ siêu tĩnh đã cho bằng cách loại bớt các liên kết thừa gọi là hệ cơ bản. Hệ cơ bản của phương pháp lực phải là hệ bất biến hình suy ra từ hệ siêu tĩnh đã cho bằng cách loại bỏ tất cả hay một số liên kết thừa. Nếu loại bỏ tất cả các liên kết thừa thì hệ cơ bản là tĩnh định còn nếu chỉ loại bỏ một số liên kết thừa thì hệ cơ bản là siêu tĩnh có bậc thấp hơn. Điều quan trọng là hệ cơ bản phải là bất biến hình và cho phép ta xác định nội lực của các thanh dễ dàng. Vì vậy, trong đại đa số trường hợp ta thường chọn hệ cơ bản là tĩnh định.

Để đảm bảo cho hệ cơ bản làm việc giống hệ siêu tĩnh đã cho cần bổ sung thêm các điều kiện. Trong hệ cơ bản đặt các lực X_1, X_2, \dots, X_n tương ứng với vị trí và phương của các liên kết bị loại bỏ. Những lực này liên kết giữ vai trò là ẩn. Thiết lập điều kiện chuyển vị trong hệ cơ bản tương ứng với vị trí và phương của các liên kết bị loại bỏ bằng không.

Phạm vi áp dụng phương pháp: Phương pháp lực thường áp dụng để giải các bài toán dàn siêu tĩnh.

1.4.6 Phương pháp chuyển vị

Nội dung phương pháp:

Phương pháp chuyển vị cũng là phương pháp dùng để xác định nội lực trong hệ dàn siêu động (Hệ siêu động là những hệ khi chịu chuyển vị cưỡng bức, nếu chỉ dùng các điều kiện động học không thôi thì chưa đủ để xác định tất cả các chuyển vị tại các nút hệ). Khác với phương pháp lực, trong phương

pháp chuyển vị ta dùng tập hợp các biến dạng ở hai đầu thanh làm đại lượng cần tìm. Những đại lượng này sẽ tìm được nếu biết chuyển vị tại các nút của hệ. Như vậy theo phương pháp này ta chọn ẩn là chuyển vị của các nút của hệ. Chính vì lẽ đó mà phương pháp được gọi là phương pháp chuyển vị (còn gọi là phương pháp biến dạng). Sau khi xác định chuyển vị tại các nút, tức là chuyển vị tại đầu thanh ta sẽ xác định được nội lực.

Theo phương pháp chuyển vị, để tính hệ siêu động ta không tính trên hệ đó mà thực hiện tính toán trên hệ cơ bản đồng thời bổ sung các điều kiện đảm bảo cho hệ cơ bản làm việc giống hệ thực.

Hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị là hệ suy ra từ hệ siêu động đã cho bằng cách đặt thêm vào hệ những liên kết phụ nhằm ngăn cản chuyển vị xoay và chuyển vị thẳng của các nút trong hệ (những liên kết phụ gồm hai loại: liên kết mômen và liên kết lực). Hệ cơ bản có thể là hệ xác định động hoặc hệ siêu động. Nếu số liên kết được đặt thêm vào hệ bằng số bậc siêu động thì hệ cơ bản là hệ xác định động. Nếu số liên kết đặt thêm vào hệ ít hơn số bậc siêu động ta được hệ cơ bản là hệ siêu động với bậc thấp hơn.

Nếu hệ cơ siêu động có n liên kết đặt thêm, lần lượt ký hiệu các chuyển vị $Z_1, Z_2, \dots, Z_k, \dots, Z_n$ với Z_k là chuyển vị cưỡng bức tại liên kết thứ k đặt vào hệ. Các chuyển vị này giữ vai trò là ẩn số của phương pháp chuyển vị.

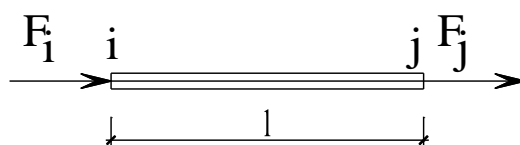
Phạm vi áp dụng phương pháp: Phương pháp chuyển vị thường áp dụng để giải các bài toán dàn siêu động.

1.4.7 Phương pháp phần tử hữu hạn

Phương pháp phần tử hữu hạn là phương pháp rời rạc hóa kết cấu công trình thành một số hữu hạn các phần tử. Các phần tử này được nối với nhau tại các điểm định trước thường tại đỉnh phần tử (thậm trí tại các điểm trên biên phần tử) gọi là nút. Như vậy việc tính toán kết cấu công trình được đưa về tính toán trên các phần tử của kết cấu sau đó kết nối các phần tử này lại với

nhau ta được lời giải của một kết cấu công trình hoàn chỉnh. Dưới đây tác giả giới thiệu cách xây dựng cách giải bài toán dần theo phương pháp phần tử hữu hạn [16].

Xây dựng phương trình cân bằng cho phần tử



Hình 1.8 Phần tử ij trong hệ trục tọa độ riêng

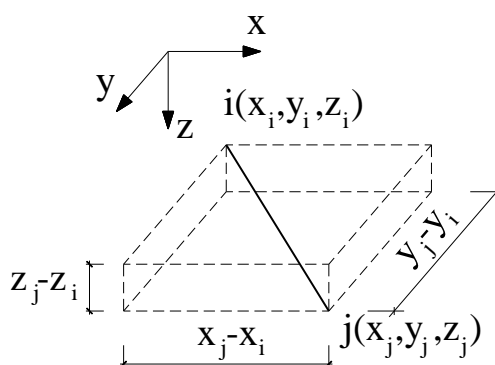
Phương trình cân bằng của phần tử chịu kéo nén đúng tâm (hình 1.8):

$$\begin{bmatrix} F_{ij} \\ F_{ji} \end{bmatrix} = \frac{EF}{l_{ij}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{bmatrix} \quad (1.1a)$$

$$\text{hay: } [\bar{F}] = [\bar{k}] [\bar{\delta}] \quad (1.1b)$$

trong đó: $[\bar{k}] = \frac{EF}{l_{ij}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$: là độ cứng của phần tử trong hệ trục tọa độ riêng.

Bây giờ trong trường hợp tổng quát hệ trục tọa độ chung không trùng với hệ trục tọa độ riêng. Xét phần tử thanh ij (hình 1.9) có tọa độ các nút là $i(x_i, y_i, z_i), j(x_j, y_j, z_j)$.



Hình 1.9 Phần tử ij trong hệ trục tọa độ chung

Chiều dài của phần tử là:

$$l_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (1.2)$$

Các cosin chỉ phương của phần tử:

$$\begin{cases} l = \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} \\ m = \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} \\ n = \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} \end{cases} \quad (1.3)$$

Giả sử F_{ij} , F_{ji} có phương dọc thành thì:

$$\begin{bmatrix} F_{ij}^{(x)} & F_{ij}^{(y)} & F_{ij}^{(z)} & F_{ji}^{(x)} & F_{ji}^{(y)} & F_{ji}^{(z)} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & m & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & m & n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F_{ij} \\ F_{ji} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

$$\text{hay:} \quad \{F\}_{ij} = [T]\{\bar{F}\} \quad (1.5)$$

Trong đó: $[T]$ là ma trận chuyển trục.

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & m & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & m & n \end{bmatrix}^T \quad (1.6)$$

Tương tự ta cũng có:

$$\{\delta\}_{ij} = [T]\{\bar{\delta}\} \text{ hay } \{\bar{\delta}\} = [T]^T \{\delta\}_{ij} \quad (1.7)$$

Thay (1.7) vào (1.1b) được:

$$\{\bar{F}\} = [\bar{k}][T]^T \{\delta\}_{ij} \quad (1.8)$$

Thay (1.8) vào (1.5) được:

$$\{F\}_{ij} = [T][\bar{k}][T]^T \{\delta\}_{ij} \text{ hay } \{F\}_{ij} = [k]_{ij} \{\delta\}_{ij} \quad (1.9)$$

Trong đó:

$$[k] = [T][\bar{k}][T]^T = \frac{EF}{l_{ij}} \begin{bmatrix} l^2 & & & & & \\ lm & m^2 & & dx & & \\ ln & mn & n^2 & & & \\ -l^2 & -ml & -nl & l^2 & & \\ -lm & -m^2 & -nm & lm & m^2 & \\ -ln & -mn & -n^2 & ln & mn & n^2 \end{bmatrix} \quad (1.10a)$$

Ma trận $[k]$ là ma trận bậc 6x6 có thể phân thành gồm 4 ma trận 3x3 như sau:

$$[k] = \begin{bmatrix} [k]_{ii} & [k]_{ij} \\ [k]_{ji} & [k]_{jj} \end{bmatrix} \quad (1.10b)$$

$$\text{trong đó: } [k]_{ii} = [k]_{jj} = -[k]_{ij} = -[k]_{ji} = \begin{bmatrix} l^2 & & dx \\ lm & m^2 & \\ ln & mn & n^2 \end{bmatrix} \quad (1.10c)$$

Như vậy (1.9) có thể được viết lại như sau:

$$\begin{bmatrix} \{F_{ij}\} \\ \{F_{ji}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [k]_{ii} & [k]_{ij} \\ [k]_{ji} & [k]_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\delta_{ij}\} \\ \{\delta_{ji}\} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

trong đó:

$\{F_{ij}\}$: véc tơ tải trọng tác dụng lên nút i theo phương ij và $\{F_{ij}\} = [F_{ij}^x, F_{ij}^y, F_{ij}^z]$

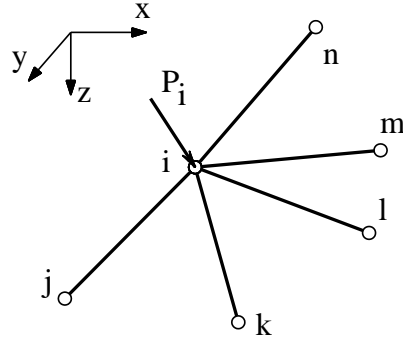
$\{F_{ji}\}$: véc tơ tải trọng tác dụng lên nút j theo phương ij và $\{F_{ji}\} = [F_{ji}^x, F_{ji}^y, F_{ji}^z]$

$\{\delta_i\}$: véc tơ chuyển vị nút i theo phương ij và $\{\delta_i\} = [u_i, v_i, w_i]$

$\{\delta_j\}$: véc tơ chuyển vị nút j theo phương ij và $\{\delta_j\} = [u_j, v_j, w_j]$

Xây dựng phương trình cân bằng cho toàn bộ kết cấu dàn

Phần trên đã xây dựng phương trình cân bằng cho một phần tử, trong mục này sẽ xây dựng phương trình cân bằng cho toàn bộ kết cấu dàn. Nếu xét tại nút i của dàn có các thanh quy tụ là $ij, ik, il, im, \dots, in$ (hình 1.10).



Hình 1.10 Cân bằng nút i

Như vậy điều kiện liên tục là chuyển vị tại nút i của tất cả các thanh quy tụ tại nút i phải bằng nhau:

$$\{\delta_i^j\} = \{\delta_i^k\} = \{\delta_i^l\} = \{\delta_i^m\} = \dots = \{\delta_i^n\} = \{\delta_i\} \quad (1.12)$$

trong đó:

$\{\delta_i^j\}; \{\delta_i^k\}; \{\delta_i^l\}; \{\delta_i^m\}; \dots; \{\delta_i^n\}$: lần lượt là các véc tơ chuyển vị tại nút i của các thanh ij, ik, il, im, ..., in ;

$\{\delta_i\}$: véc tơ chuyển vị tại nút i.

Ngoài ra tại nút i còn cần phải đảm bảo điều kiện cân bằng lực:

$$\{P_i\} = \{F_{ij}\} + \{F_{ik}\} + \{F_{il}\} + \{F_{im}\} + \dots + \{F_{in}\} \quad (1.13)$$

trong đó:

$\{P_i\}$: là véc tơ tải trọng tác dụng tại nút i $\{P_i\} = [P_{ix} \ P_{iy} \ P_{iz}]^T$;

P_{ix}, P_{iy}, P_{iz} : là các thành phần tải trọng theo phương x, y, z.

Theo (1.11) ta có phương trình cân bằng cho tất cả các thanh tại nút i:

Thanh ij: $\{F_{ij}\} = [k_{ii}^j]\{\delta_i\} + [k_{ij}]\{\delta_j\}$

Thanh ik: $\{F_{ik}\} = [k_{ii}^k]\{\delta_i\} + [k_{ik}]\{\delta_k\}$

Thanh in: $\{F_{in}\} = [k_{ii}^n]\{\delta_i\} + [k_{in}]\{\delta_n\}$

thay các lực trên vào công thức (1.13) được:

$$\{P_i\} = [k_{ij}]\{\delta_{ij}\} + [k_{ik}]\{\delta_{ik}\} + [k_{il}]\{\delta_{il}\} + [k_{im}]\{\delta_{im}\} + \dots + [k_{in}]\{\delta_{in}\} \quad (1.14)$$

trong đó: $k_{ii} = k_{ii}^j + k_{ii}^k + k_{ii}^l + k_{ii}^m + \dots + k_{ii}^n$

Biểu thức (1.14) là điều kiện viết cho cân bằng tại nút i . Nếu dàn có n nút thì ta có được $3n$ phương trình và có thể viết như sau:

$$\begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{12}] & \dots & [k_{1i}] & \dots & [k_{1n}] \\ & [k_{22}] & \dots & [k_{2i}] & \dots & [k_{2n}] \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & [k_{ii}] & \dots & [k_{in}] \\ \text{đx} & & & & \vdots & \\ & & & & & [k_{nn}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \vdots \\ \{\delta_i\} \\ \vdots \\ \{\delta_n\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{P_1\} \\ \{P_2\} \\ \vdots \\ \{P_i\} \\ \vdots \\ \{P_n\} \end{bmatrix} \quad (1.15a)$$

hay:

$$[K]\{\delta\} = \{P\} \quad (1.15b)$$

trong đó:

$[K]$: là ma trận độ cứng của toàn bộ kết cấu dàn;

$\{\delta\} = [\{\delta_1\} \{\delta_2\} \dots \{\delta_i\} \dots \{\delta_n\}]^T = [u_1 v_1 w_1 u_2 v_2 w_2 \dots u_i v_i w_i \dots u_n v_n w_n]^T$: là véc tơ chuyển vị tại các nút dàn.

Xử lý điều kiện biên

Biên cố định: Tại những biên cố định thì sẽ có các bậc tự do bằng không. Trong phương trình cân bằng tại những bậc tự do nào bằng không thì trong ma trận $[K]$, $\{\delta\}$ và $\{P\}$ bỏ đi những hàng và cột tương ứng với bậc tự do đó.

Biên chuyển vị cưỡng bức: Giả sử tại nút biên bậc tự do m có chuyển vị cưỡng bức $\delta_m = a$ thì trong ma trận độ cứng tổng thể $[K]$ và vectơ tải trọng nút tổng thể $\{P\}$ ta gán một số A có độ lớn bằng vô cùng lần lượt vào các vị trí k_{mm} thay bằng $(k_{mm} + A)$, P_m thay bằng $(k_{mm} + A)a$.

Nếu sử dụng phương pháp phân tử hữu hạn để tính toán cho kết cấu dàn tuyến tính thì theo phương trình (1.15) các K_{ij} là các hằng số do đó dễ dàng xác định được các thành phần chuyển vị trong các nút.

Phạm vi áp dụng phương pháp: Phương pháp phân tử hữu hạn áp dụng để giải các bài toán dàn tĩnh định cũng như dàn siêu tĩnh.

1.5 Mục tiêu nghiên cứu của đề tài

Qua các phân tích ở các phần trên của đề tài, nhằm làm phong phú cho các cách phân tích kết cấu dàn cũng như có một cách tiếp cận khác cho việc phân tích tuyến tính bài toán kết cấu dàn chịu tải trọng tĩnh tại các nút dàn mục tiêu nghiên cứu của đề tài như sau:

1) Dựa trên phương pháp nguyên lý cực trị Gauss xây dựng được phương pháp phân tích tuyến tính cho bài toán kết cấu dàn chịu tải trọng tĩnh tại các nút dàn theo hai cách tiếp cận: chọn các thành phần chuyển vị tại các nút dàn làm ẩn số; chọn các thành phần nội lực trong các thanh dàn làm ẩn số.

2) Áp dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss để phân tích tuyến tính một số ví dụ kết cấu dàn chịu tải trọng tĩnh tại các nút dàn. Các kết quả phân tích này được so sánh với các cách giải khác để thấy được độ tin cậy của phương pháp.

3) Ứng dụng phần mềm Matlab để tự động hóa phân tích tuyến tính kết cấu dàn chịu tải trọng tĩnh dựa trên phương pháp nguyên lý cực trị Gauss.

Chương 2

LÝ THUYẾT PHÂN TÍCH KẾT CẤU DÀN DỰA TRÊN PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN LÝ CỰC TRỊ GAUSS

Trong chương này của đề tài, tác giả sẽ trình bày Nguyên lý cực trị Gauss và việc áp dụng Nguyên lý cực trị Gauss trong việc giải các bài toán cơ học biến dạng. Cuối chương tác giả trình bày chi tiết cách áp dụng Nguyên lý cực trị Gauss trong việc phân tích nội lực, chuyển vị các bài toán tuyến tính kết cấu dàn chịu tải trọng tĩnh tại các nút dàn theo hai cách tiếp cận bài toán: Chọn ẩn số chính là các thành phần chuyển vị tại các nút dàn; Chọn ẩn số chính là các thành phần nội lực trong các thanh dàn.

2.1 Nguyên lý cực trị Gauss

2.1.1. Nguyên lý cực tiểu Gauss và bất đẳng thức Gauss

Trước khi trình bày nguyên lý của mình, nhà toán học người Đức K.F.Gauss (1777 – 1855) đã đưa ra các nhận xét sau:

+ Tại sao ngay từ đầu lại không xét liên kết không giữ. Cho nên nguyên lý cực trị Gauss nhằm thỏa mãn điều kiện này, liên kết không giữ và xem liên kết giữ là trường hợp riêng.

+ Gauss viết tiếp: “Nguyên lý D’Alembert đưa bài toán động lực học về bài toán tĩnh học, còn nguyên lý vận tốc ảo biến vấn đề tĩnh học thành vấn đề toán học thuần túy và mọi nguyên lý của cơ học hoặc nhiều hoặc ít đều có thể trực tiếp rút ra từ hai nguyên lý trên”.

Nguyên lý cực tiểu Gauss được xây dựng đối với cơ hệ có liên kết không giữ (là cơ hệ cơ liên kết một chiều, điều kiện liên kết thường được biểu thị dưới dạng bất đẳng thức) và liên kết giữ là liên kết hai chiều (khi phản lực liên kết theo chiều này thì cũng có phản lực liên kết theo chiều ngược lại, điều kiện liên kết thường được biểu thị dưới dạng đẳng thức).

Đối với liên kết không giữ thì tổng công các lực tác dụng thực hiện trên các chuyển vị ảo là đại lượng không dương. Vì vậy điều kiện cần và đủ để hệ ở trạng thái cân bằng trong trường hợp liên kết không giữ là:

$$\sum (X_i \delta u_i + Y_i \delta v_i + Z_i \delta w_i) \leq 0 \quad (2.1)$$

trong đó: X_i, Y_i, Z_i là các lực trong hệ tọa độ vuông góc tác dụng lên chất điểm i và u_i, v_i, w_i là các chuyển vị tương ứng.

Biểu thức (2.1) do Fourier (1798), Gauss và Ostrogradsky (1834) độc lập đưa ra và tác giả [1] gọi là bất đẳng thức Fourier.

Từ nguyên lý công ảo có thể nhận được bất đẳng thức Fourier bằng cách xét phản lực liên kết:

$$\sum [(X_i \delta u_i + Y_i \delta v_i + Z_i \delta w_i) + (X_{rj} \delta u_j + Y_{rj} \delta v_j + Z_{rj} \delta w_j)] = 0 \quad (2.2)$$

trong đó: X_{rj}, Y_{rj}, Z_{rj} là các phản lực liên kết.

Từ biểu thức (2.2) ta có:

$$\sum (X_i \delta u_i + Y_i \delta v_i + Z_i \delta w_i) = -\sum (X_{rj} \delta u_j + Y_{rj} \delta v_j + Z_{rj} \delta w_j) \quad (2.3)$$

Trường hợp liên kết giữ thì công ảo của phản lực liên kết bằng không (định lý Lanczos [13, tr.87]), nên ta có:

$$\sum (X_i \delta u_i + Y_i \delta v_i + Z_i \delta w_i) = 0 \quad (2.4)$$

Trong trường hợp liên kết không giữ, biểu thức liên kết (hữu hạn hoặc vô phân) là các bất đẳng thức, công ảo của các phản lực liên kết là các đại lượng dương cho nên ta có:

$$\sum (X_n \delta u_i + Y_n \delta v_i + Z_n \delta w_i) \geq 0 \quad (2.5)$$

Cho nên để hệ cân bằng, công ảo của các lực tác dụng phải là đại lượng không dương, ta có bất đẳng thức Fourier - Gauss - Ostrogradsky (2.1) hay còn gọi là bất đẳng thức Gauss.

Như trình bày trên cho thấy rằng để có liên kết không giữ thì phải dùng bất đẳng thức Gauss (2.1), liên kết giữ là trường hợp riêng khi bất đẳng thức trở thành đẳng thức.

Bất đẳng thức Gauss, trong trường hợp dùng liên kết không giữ được gọi là nguyên lý chuyển vị ảo, không nên nhầm lẫn với nguyên lý công ảo, nguyên lý công khả dĩ hay nguyên lý chuyển vị khả dĩ.

2.1.2. Phát biểu nguyên lý cực tiểu Gauss (1829) đối với cơ học chất điểm

Nhà toán học người Đức K.F.Gauss năm 1829 đã đưa ra nguyên lý sau đây đối với các cơ hệ chất điểm: *“Chuyển động của hệ chất điểm có liên kết tùy ý chịu tác động bất kỳ ở mỗi thời điểm sẽ xảy ra phù hợp nhất một cách có thể với chuyển động của hệ đó khi hoàn toàn tự do, nghĩa là chuyển động xảy ra với lượng ràng buộc tối thiểu nếu như số đo lượng ràng buộc lấy bằng tổng các tích khối lượng chất điểm với bình phương độ lệch vị trí chất điểm so với vị trí khi chúng hoàn toàn tự do.”*

Gọi m_i là khối lượng chất điểm, A_i là vị trí của nó, B_i là vị trí sau thời đoạn vô cùng bé do tác động lực ngoài và vận tốc ở đầu thời điểm gây ra, C_i là vị trí có thể (ràng buộc bởi liên kết) thì lượng ràng buộc được viết như sau:

$$Z = \sum_i m_i (\overline{B_i C_i})^2 \rightarrow \min \quad (2.6)$$

Do hệ cần tính và hệ hoàn toàn tự do đều chịu lực giống nhau, nên trong biểu thức lượng cường bức không xuất hiện lực tác dụng. Lượng ràng buộc có dạng bình phương tối thiểu là phương pháp toán do Gauss đưa ra.

2.1.3. Biểu thức thường dùng của nguyên lý cực tiểu Gauss

Trong tài liệu cơ học [13, tr.107] dùng lập luận sau để đưa ra biểu thức giải tích của nguyên lý cực tiểu Gauss.

Xét chất điểm m_i có liên kết tùy ý chịu tác dụng của lực F_i . Ở thời điểm t chất điểm có vị trí r_i , vận tốc \dot{r}_i và gia tốc \ddot{r}_i . Sau thời gian dt chất điểm có vị trí:

$$r_i + \dot{r}_i dt + \frac{1}{2} \ddot{r}_i dt^2 \quad (2.7)$$

(dựa trên khai triển triển theo chuỗi Taylor)

Giả sử tại thời điểm t , ta giải phóng liên kết nhưng vẫn giữ lực tác dụng thì vị trí chất điểm khi hoàn toàn tự do sau thời gian dt là:

$$r_i + \dot{r}_i dt + \frac{1}{2} \frac{F_{0i}}{m_i} dt^2 \quad (2.8)$$

Hiệu (2.7) và (2.8) cho ta độ lệch vị trí của chất điểm so với vị trí của nó hoàn toàn tự do.

$$\frac{1}{2} \ddot{r}_i dt^2 - \frac{1}{2} \frac{F_{0i}}{m_i} dt^2 = \frac{1}{2} \left(\ddot{r}_i - \frac{F_{0i}}{m_i} \right) dt^2 \quad (2.9)$$

Có thể xem dt là hằng thì lượng ràng buộc Z theo (2.9) được viết dưới dạng lực như sau:

$$Z_i = \frac{1}{4} m_i \left(\ddot{r}_i - \frac{F_{0i}}{m_i} \right)^2 dt^4 \quad (2.10)$$

Lượng ràng buộc cho toàn bộ hệ chất điểm:

$$Z = \frac{1}{4} \sum_i m_i \left(\frac{F_{0i}}{m_i} - \ddot{r}_i \right)^2 dt^4 \rightarrow \min \quad (2.11)$$

Vì dt^4 là số bất kỳ nên (2.11) tương đương với:

$$Z = \sum_i m_i \left(\frac{F_{0i}}{m_i} - \ddot{r}_i \right)^2 \rightarrow \min \quad (2.12a)$$

$$\text{hay: } Z = \sum_i \frac{1}{m_i} (F_{0i} - m_i \ddot{r}_i)^2 = \sum_i \frac{1}{m_i} (F_{0i} - F_i)^2 \rightarrow \min \quad (2.12b)$$

Trong biểu thức (2.12) $(F_{0i} - F_i)$ là lực liên kết hoặc lực cản chuyển động so với chuyển động của hệ tự do.

Nguyên lý Gauss (2.6) hoặc (2.12) có dạng của phương pháp bình phương tối thiểu là phương pháp cũng do Gauss đưa ra và được dùng rộng rãi

trong toán học hiện đại, trong giải tích cũng như lời giải số. Có lẽ vì vậy nguyên lý Gauss thu hút sự chú ý của nhiều nhà khoa học, ví dụ, Hertz (năm 1894) dựa trên ý tưởng lượng ràng buộc đưa ra nguyên lý đường thẳng nhất (đường có độ cong nhỏ nhất) hoặc Prigogine (năm 1954) và Gyarmati (năm 1965) đã xây dựng được lượng ràng buộc của các quá trình không hồi phục trong nhiệt động lực học.

2.2 Áp dụng nguyên lý cực trị Gauss trong việc giải các bài toán cơ học

Nguyên lý cực trị Gauss được GS. TSKH. Hà Huy Cương phát triển nhằm mục đích xây dựng các phương trình cân bằng và các phương trình chuyển động của cơ hệ có liên kết tổng quát là liên kết không giữ xem liên kết giữ là trường hợp riêng.

Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss là phương pháp so sánh với nghĩa là tìm min của lượng cưỡng bức, giữa chuyển động của hệ cần tính với chính hệ đó khi hoàn toàn tự do (giải phóng liên kết) trên cơ sở bất đẳng thức Gauss (còn gọi là bất đẳng thức Fourier).

2.2.1 Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss với cơ hệ chất điểm

Mục đích trình bày sau đây nhằm chỉ ra rằng, phương pháp nguyên lý cực trị Gauss không chỉ dùng biến phân là gia tốc và còn dùng chuyển vị và vận tốc là đại lượng biến phân.

Xét hệ chất điểm có liên kết tùy ý ở một thời điểm bất kỳ nào đó có nghĩa là phải đưa lực quán tính f_i của hệ tại thời điểm nào đó tác dụng lên hệ. Đối với hệ hoàn toàn tự do lực quán tính f_{oi} của nó bằng với ngoại lực (chỉ số '0' ở chân ký tự chỉ rằng ký tự đó ở hệ so sánh, trường hợp này hoàn toàn tự do có cùng khối lượng và cùng chịu tác dụng lực ngoài giống như hệ có liên kết). Như vậy, các lực tác dụng lên hệ có liên kết gồm các lực $f_i = m_i \cdot \ddot{x}_i$ và các lực $f_{oi} = m_i \cdot \ddot{x}_{oi}$ (thay cho ngoại lực). Theo nguyên lý chuyển vị ảo đối với liên

kết giữ (liên kết dưới dạng đẳng thức) và không giữ (liên kết dưới dạng bất đẳng thức) điều kiện cân và đủ để hệ ở trạng thái cân bằng là:

$$\delta Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) \delta r_i \leq 0 \quad (2.13)$$

Để nhận được biểu thức (2.13) cần xem các chuyển vị r_i độc lập đối với lực tác dụng. Cho nên biểu thức (2.13) có thể viết:

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) r_i \rightarrow \min \quad (2.14)$$

Nếu như chuyển vị ảo r_i thỏa mãn các điều kiện liên kết đã cho của hệ cần tính thì ta có thể dùng vận tốc ảo \dot{r}_i làm đại lượng biến phân, nghĩa là:

$$\delta Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) \delta \dot{r}_i \leq 0 \quad (2.15)$$

$$\text{hay:} \quad Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) \dot{r}_i \rightarrow \min \quad (2.16)$$

Trong biểu thức (2.15), (2.16) vận tốc của chất điểm là đại lượng biến phân.

Cuối cùng khi chuyển vị ảo r_i thỏa mãn các điều kiện liên kết đã cho của hệ cần tính thì ta có thể dùng gia tốc ảo \ddot{r}_i làm đại lượng biến phân, ta có:

$$\delta Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) \delta \ddot{r}_i \leq 0 \quad (2.17)$$

$$\text{hay:} \quad Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) \ddot{r}_i \rightarrow \min \quad (2.18)$$

Ta biến đổi thuần túy về mặt toán học biểu thức (2.18):

$$\begin{aligned} Z &= \sum_i (f_i - f_{0i}) \ddot{r}_i \rightarrow \min \\ Z &= \sum_i (f_i - f_{0i}) (\ddot{r}_i - \ddot{r}_{0i}) \rightarrow \min \\ Z &= \sum_i (f_i - f_{0i}) \left(\frac{f_i}{m_i} - \frac{f_{0i}}{m_i} \right) \rightarrow \min \end{aligned}$$

$$Z = \sum_i \frac{1}{m_i} (f_i - f_{0i})^2 \rightarrow \min \quad (2.19)$$

$$Z = \sum_i m_i \left(\frac{f_i}{m_i} - \ddot{r}_{0i} \right)^2 \rightarrow \min \quad (2.20)$$

Hai biểu thức (2.19), (2.20) là hai biểu thức thường dùng của nguyên lý cực tiểu Gauss với đại lượng biến phân là gia tốc.

Các biểu thức (2.14), (2.16), (2.18) và (2.20) là tương đương và được gọi là lượng ràng buộc chuyển động của cơ hệ cần tính.

2.2.2 Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss đối với cơ học công trình

Như đã trình bày ở trên cho thấy phương pháp nguyên lý cực trị Gauss do GS. TSKH. Hà Huy Cương đưa ra là phương pháp sử dụng trực tiếp nguyên lý cực tiểu Gauss vào cơ hệ bằng cách:

- So sánh chuyển động của cơ hệ đang xét với chuyển động của nó khi hoàn toàn tự do. So sánh được hiểu theo nghĩa là tìm cực trị của lượng ràng buộc.

- Phương pháp nguyên lý chuyển vị ảo với bất đẳng thức Gauss đối với liên kết không giữ, xem liên kết giữ là trường hợp riêng.

Những nội dung trên là nội dung tổng quát của phương pháp nguyên lý cực trị Gauss.

Môn cơ học công trình nghiên cứu trạng thái ứng suất và trạng thái biến dạng của kết cấu thanh, tấm và vỏ v.v... là các kết cấu có một hoặc hai kích thước nhỏ hơn nhiều lần kích thước còn lại. Sau đây ta xét hai bài toán sau:

- Bài toán trên mặt cắt ngang của kết cấu chỉ có mômen M và lực cắt Q.
- Bài toán khi kết cấu chịu lực trên mặt cắt ngang của kết cấu có lực dọc, mômen M và lực cắt Q.

2.2.2.1 Bài toán kết cấu khi chịu lực tác dụng thẳng góc với mặt trung bình

Trong trường hợp này để đơn giản những kết quả tính toán vẫn đảm bảo độ chính xác đủ dùng trong thực tế (kiểm tra bằng thực nghiệm) dựa trên giả thuyết của Kronecker sau đây:

+ Mặt trung bình của tấm không bị biến dạng do đó ứng suất tại các điểm nằm trên mặt trung bình bằng không và mặt phẳng vuông góc với mặt trung bình vẫn phẳng và vuông góc với mặt trung bình:

$$\varepsilon_{33} = 0 \quad (2.21)$$

+ Mặt phẳng trung bình chỉ có chuyển vị theo phương vuông góc với nó, còn các chuyển vị theo các phương khác là rất nhỏ nên có thể bỏ qua:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ v_0 = 0 \\ w \neq 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

+ Ứng suất pháp σ_{33} theo phương vuông góc với mặt trung bình là rất nhỏ so với các ứng suất khác nên có thể bỏ qua trong tính toán.

Các phương trình cân bằng

Tại điểm K nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục x_1 của tấm có các ứng suất: $\sigma_{11}; \sigma_{12}; \sigma_{13}$.

Nội lực của tấm trên một đơn vị chiều dài của mặt cắt vuông góc với ox_1 :

$$N_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} dx_3 ; \quad M_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} x_3 dx_3 ; \quad M_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} x_3 dx_3 \quad (2.23a)$$

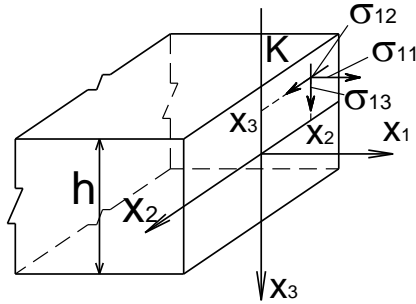
$$Q_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} dx_3 ; \quad S_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} dx_3 \quad (2.23b)$$

Nội lực của tấm trên một đơn vị chiều dài của mặt cắt vuông góc với ox_2 :

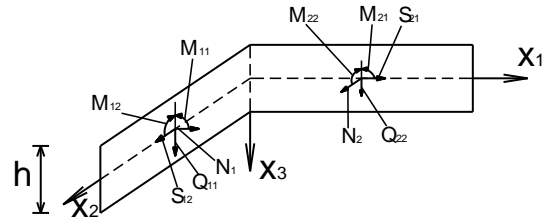
$$N_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} dx_3 ; \quad M_{21} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{21} x_3 dx_3 ; \quad M_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} x_3 dx_3 \quad (2.24a)$$

$$S_{21} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{21} dx_3; \quad Q_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23} dx_3 \quad (2.24b)$$

Trong trường hợp tấm cứng, chịu uốn do tải trọng ngang, ta chỉ xét các lực uốn xoắn: $M_{11}; M_{22}; Q_{11}; Q_{22}; M_{12}; M_{21}$.



Hình 2.1 Các ứng suất trong tấm



Hình 2.2 Các nội lực trong tấm

Xét cân bằng phân tử diện tích $dx_1 dx_2$ trên mặt trung bình. Cạnh trái đi qua điểm $M(x_1; x_2)$ có các ứng lực: $Q_{11}; M_{11}; M_{12}$. Cạnh phải đi qua điểm

$N(x_1 + dx_1; x_2)$ có các ứng lực: $Q_{11}^* = Q_{11} + \frac{\partial Q_{11}}{\partial x_1} dx_1$; $M_{11}^* = M_{11} + \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} dx_1$;

$$M_{12}^* = M_{12} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} dx_1.$$

Cạnh sau $M(x_1; x_2)$ có các ứng lực $Q_{22}; M_{22}; M_{21}$ cạnh trước đi qua điểm

$P(x_1; x_2 + dx_2)$ có các thành phần ứng lực: $Q_{22}^* = Q_{22} + \frac{\partial Q_{22}}{\partial x_2} dx_2$;

$$M_{22}^* = M_{22} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} dx_2; \quad M_{21}^* = M_{21} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} dx_2.$$

Phương trình cân bằng hình chiếu lên các phương:

$$\begin{cases} \sum F_{x_3} = \frac{\partial Q_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_{22}}{\partial x_2} + p = 0 \\ \sum M_{x_2} = \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} = Q_{11} \\ \sum M_{x_1} = \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} = Q_{22} \end{cases} \quad (2.25)$$

Các quan hệ về vật lý

Khi vật liệu làm việc trong giới hạn đàn hồi thì mối quan hệ giữa ứng suất và biến dạng tại một điểm bất kỳ trong kết cấu hoàn toàn tuân theo định luật Hooke, do đó ta có:

- Mối liên hệ giữa ứng suất và biến dạng:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22}); \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11}); \quad \sigma_{12} = \frac{E}{1+\mu}\varepsilon_{12} \quad (2.26)$$

Thay (2.26) vào (2.23) và (2.25) sẽ xác định được nội lực trong tấm có dạng:

$$\begin{aligned} M_{11} &= D \cdot (\chi_{11} + \mu\chi_{22}); & M_{22} &= D \cdot (\chi_{22} + \mu\chi_{11}); \\ M_{12} &= (1-\mu)D \cdot \chi_{12}; & Q_{11} &= Gh\gamma_{11}; & Q_{22} &= Gh\gamma_{22}. \end{aligned}$$

Xét bài toán biến dạng là bé (bài toán tuyến tính)

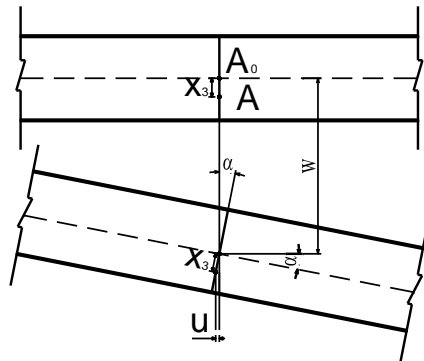
Các quan hệ về hình học

Xét điểm $A(x_1, x_2, x_3)$ nằm trong tấm có chuyển vị là (u, v, w) . Theo giả thuyết trên nên:

$$\varepsilon_3 = \frac{\partial w}{\partial x_3} = 0 \text{ nên } w(x_1, x_2).$$

$$u = x_3 \sin \alpha = x_3 \operatorname{tg} \alpha = x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1}$$

$$v = x_3 \cos \beta = x_3 \operatorname{tg} \beta = x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2}$$



Hình 2.3 Sơ đồ chuyển vị tại một điểm trong tấm

Theo phương trình Cauchy ta có:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x_1} = x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = x_3 \chi_{11} \\ \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial x_2} = x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = x_3 \chi_{22} \\ \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) = x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = x_3 \chi_{12} \end{array} \right. \quad (2.27)$$

trong đó: $\chi_{11}; \chi_{22}; \chi_{12}$ là độ cong, độ xoắn của mặt trung bình sau biến dạng; w là độ võng của tấm.

- Nội lực trong mặt cắt ngang của kết cấu:

$$M_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E \cdot x_3^2}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) dx_3 = \frac{EI}{12(1 - \mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)$$

$$M_{11} = D \cdot (\chi_{11} + \mu \chi_{22}); \quad (2.28a)$$

$$M_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E \cdot x_3^2}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) dx_3 = \frac{EI}{12(1 - \mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)$$

$$M_{22} = D \cdot (\chi_{22} + \mu \chi_{11}); \quad (2.28b)$$

$$M_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E \cdot x_3^2}{1 + \mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} dx_3 = \frac{EI}{12(1 + \mu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = (1 - \mu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$M_{12} = (1 - \mu) D \cdot \chi_{12}; \quad (2.28c)$$

trong công thức (2.28c): D là độ cứng chống uốn, đối với dầm $D = EI = \frac{Eh^3}{12}$

và đối với tấm $D = \frac{EI}{(1 - \mu^2)} = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}$; $D(1 - \mu)$ là độ cứng chống xoắn.

Thay (2.8a), (2.8b) và (2.8c) vào (2.5) được:

$$Q_{11} = D \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla^2 w) = D \left(\frac{\partial \chi_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \chi_{12}}{\partial x_2} \right); \quad (2.28d)$$

$$Q_{22} = D \frac{\partial}{\partial x_2} (\nabla^2 w) = D \left(\frac{\partial \chi_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \chi_{22}}{\partial x_2} \right); \quad (2.28e)$$

Từ công thức (2.28b) có thể thấy độ cứng chịu cắt của tiết diện là Gh, do đó “biến dạng” γ_{11} và γ_{22} do lực cắt gây ra sẽ nhận được như sau:

$$Q_{11} = Gh\gamma_{11}; \quad Q_{22} = Gh\gamma_{22}$$

$$\gamma_{11} = \frac{D}{Gh} \left(\frac{\partial \chi_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \chi_{12}}{\partial x_2} \right); \quad \gamma_{22} = \frac{D}{Gh} \left(\frac{\partial \chi_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \chi_{22}}{\partial x_2} \right) \quad (2.29)$$

2.2.2.2 Bài toán kết cấu khi chịu lực vuông góc với mặt trung bình và có tác dụng của lực dọc lên mặt trung bình

Đối với các lực dọc tác dụng lên mặt trung bình của tiết diện thì trên mặt cắt ngang của tiết diện có lực dọc là N_i như vậy tại một điểm trên mặt cắt các biến dạng ε_i ($i=1, 2$). Độ cứng của tiết diện kéo, nén sẽ là Eh.

Trong công thức vừa nêu lấy $i=1, j=1$ đối với bài toán một chiều (thanh, dầm), chiều rộng dầm bằng 1 đơn vị.

Sau khi đã biết các biến dạng tương ứng với các nội lực của tiết diện (mômen uốn, lực cắt, lực dọc trục v.v...) và độ cứng của chúng thì dễ dàng xây dựng các bài toán cơ học kết cấu theo phương pháp phiếm hàm lượng ràng buộc (2.18) hoặc (2.19).

Như vậy, có thể viết tổng quát lượng ràng buộc Z của bài toán cơ học kết cấu dưới dạng tương tự (2.18) (bài toán tĩnh):

$$Z = \int_V \left[(M_{ij} - M_{0ij}) \chi_{ij} + (Q_{ii} - Q_{0ii}) \gamma_{ii} + (N_i - N_{0i}) \varepsilon_i \right] dv \rightarrow \min \quad (2.30a)$$

hoặc dưới dạng bình phương tối thiểu (2.19):

$$Z = \int_V \frac{1}{D_{ocung}} (\text{nội lực hệ cần tính} - \text{nội lực hệ so sánh})^2 dv \rightarrow \min \quad (2.30b)$$

trong đó: $i=1,2; j=1,2; V$ là chiều dài thanh hoặc diện tích tấm. Trong (8.30) cần xem các độ cong χ_{ij} là các đại lượng độc lập đối với nội lực mômen uốn M_{ij} , các biến dạng trượt γ_{11} và γ_{22} là các đại lượng độc lập đối với lực cắt Q_{11}

và Q_{22} , các biến dạng trong mặt trung bình ε_i là các đại lượng độc lập đối với N_i và đều là đại lượng biến phân của bài toán.

Công thức (2.30) có thể áp dụng để giải cho cả bài toán phi tuyến hình học và bài toán tuyến tính vì công thức này được xây dựng dựa trên mối quan hệ ứng suất và biến dạng tuân theo định luật Hooke.

Trong bài toán cơ học kết cấu hệ thanh chịu tải trọng tĩnh dựa vào mối quan hệ vật lý (ứng suất và biến dạng) ta sẽ xây dựng được mối quan hệ giữa nội lực và biến dạng:

$$\begin{aligned} M_x &= EI_x \cdot \chi_x; & M_y &= EI_y \cdot \chi_y; & M_z &= GI_p \cdot \theta; \\ Q_x &= \frac{GA}{\alpha} \cdot \gamma_x; & Q_y &= \frac{GA}{\alpha} \cdot \gamma_y; & N &= EA \cdot \varepsilon_z \end{aligned} \quad (2.31)$$

Như vậy theo (2.19) lượng ràng buộc của bài toán có thể được viết dưới dạng bình phương tối thiểu như sau:

$$\begin{aligned} Z &= \int_0^{l^{(0)}} \frac{(M_x - M_{0x})^2}{EI_x} dz + \int_0^{l^{(0)}} \frac{(M_y - M_{0y})^2}{EI_y} dz + \int_0^{l^{(0)}} \frac{(M_z - M_{0z})^2}{GI_p} dz + \\ &+ \int_0^{l^{(0)}} \frac{\alpha(Q_x - Q_{0x})^2}{GA} dz + \int_0^{l^{(0)}} \frac{\alpha(Q_y - Q_{0y})^2}{GA} dz + \int_0^{l^{(0)}} \frac{(N - N_0)^2}{EA} dz \rightarrow \min \end{aligned} \quad (2.32a)$$

trong đó: α là hệ số tập trung ứng suất tiếp do lực cắt gây ra tại trục dầm [3].

Khi hệ kết cấu bao gồm n thanh và chiều dài của thanh thứ i trước khi biến dạng là $l_i^{(0)}$ thì lượng ràng buộc của bài toán có thể được viết dưới dạng bình phương tối thiểu như sau:

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i^{(0)}} \frac{(M_x^{(i)} - M_{0x}^{(i)})^2}{E_i \cdot I_x^{(i)}} dz + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i^{(0)}} \frac{(M_y^{(i)} - M_{0y}^{(i)})^2}{E_i \cdot I_y^{(i)}} dz + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i^{(0)}} \frac{(M_z^{(i)} - M_{0z}^{(i)})^2}{G_i \cdot I_p^{(i)}} dz + \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i^{(0)}} \frac{\alpha(Q_x^{(i)} - Q_{0x}^{(i)})^2}{G_i A_i} dz + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i^{(0)}} \frac{\alpha(Q_y^{(i)} - Q_{0y}^{(i)})^2}{G_i A_i} dz + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i^{(0)}} \frac{(N_i - N_{0i})^2}{E_i A_i} dz \rightarrow \min \end{aligned} \quad (2.32b)$$

Công thức (2.32) có thể áp dụng để giải cho bài toán phi tuyến hình học cũng như bài toán tuyến tính (vì công thức này được xây dựng dựa trên mối

quan hệ ứng suất và biến dạng tuân theo định luật Hooke). Khi áp dụng (2.32) để giải bài toán phi tuyến hình học thì phải xây dựng được mối liên hệ giữa biến dạng và chuyển vị (mối quan hệ hình học) của bài toán phi tuyến đó. Khi áp dụng (2.32) để giải bài toán tuyến tính thì mối liên hệ giữa biến dạng và chuyển vị (mối quan hệ hình học) của bài toán được xây dựng dựa trên giả thuyết biến dạng bé.

2.3 Phân tích bài toán tuyến tính kết cấu dàn dựa theo nguyên lý cực trị Gauss

Trong nội dung đề tài này, Tác giả trình bày phương pháp giải bài toán dàn dựa trên nguyên lý cực trị Gauss. Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss là phương pháp tính toán nội lực, chuyển vị trên hệ so sánh (hệ so sánh là hệ chịu lực tác dụng giống với hệ cần tính nhưng việc xác định nội lực trên hệ so sánh đơn giản hơn hệ cần tính) sau đó muốn xác định nội lực, chuyển vị trong hệ cần tính bằng cách cho lượng ràng buộc của bài toán đạt cực trị. Phương pháp này do GS.TSKH. Hà Huy Cương đề xuất để giải các bài toán cơ học môi trường liên tục và cơ học kết cấu.

Lượng ràng buộc Z của bài toán cơ học kết cấu đối với bài toán tĩnh được viết:

$$Z = \int_V \left[(M_{ij} - M_{0ij}) \chi_{ij} + (Q_{ij} - Q_{0ij}) \gamma_{ij} + (N_i - N_{0i}) \varepsilon_i \right] dV \rightarrow \min \quad (2.33)$$

trong đó: M_{ij}, Q_{ij}, N_i là nội lực trong hệ cần tính; M_{0ij}, Q_{0ij}, N_{0i} là nội lực trong hệ so sánh.

hoặc viết dưới dạng bình phương tối thiểu:

$$\begin{aligned} Z = & \int_1 \frac{(M_x - M_{0x})^2}{EJ_x} dz + \int_1 \frac{(M_y - M_{0y})^2}{EJ_y} dz + \int_1 \frac{(M_z - M_{0z})^2}{GJ_p} dz + \\ & + \int_1 \frac{\alpha(Q_x - Q_{0x})^2}{GF} dz + \int_1 \frac{\alpha(Q_y - Q_{0y})^2}{GF} dz + \int_1 \frac{(N_z - N_{0z})^2}{EF} dz \rightarrow \min \end{aligned} \quad (2.34)$$

ở đây V là chiều dài thanh hoặc diện tích tấm; α là hệ số xét đến sự không đồng đều ứng suất tiếp do lực cắt gây ra.

Trong (2.33) cần xem các độ cong χ_{ij} là các đại lượng độc lập đối với nội lực mômen uốn M_{ij} , các biến dạng trượt γ_{11} và γ_{22} là các đại lượng độc lập đối với lực cắt Q_1 và Q_2 , các biến dạng trong mặt trung bình ε_i là các đại lượng độc lập đối với N_i và đều là đại lượng biến phân của bài toán.

Trong kết cấu dàn, các thanh chỉ chịu kéo hoặc chịu nén. Như vậy, từ công thức (2.34) suy ra lượng ràng buộc của kết cấu dàn:

$$Z = \sum_{i=1}^n \int_{(l_i)} \frac{(N_i - N_{i0})^2}{E_i F_i} dz \rightarrow \min \quad (2.35)$$

trong đó: N_i là các thành phần nội lực trong các thanh của dàn đang xét (phải thỏa mãn điều kiện biên); N_{i0} là các thành phần nội lực trong các thanh của kết cấu dàn so sánh; n là tổng số thanh trong kết cấu dàn.

Khi hệ so sánh không liên kết và kết cấu dàn có r nút dàn chịu tải trọng tập trung thì phải đưa lực tập trung vào (2.35) và lúc đó lượng ràng buộc được viết như sau:

$$Z = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 l_i}{E_i F_i} - 2 \sum_{j=1}^r P_j v_j = \sum_{i=1}^n \frac{E_i F_i (\Delta l_i)^2}{l_i} - 2 \sum_{j=1}^r P_j v_j \rightarrow \min \quad (2.36)$$

Trong đó: P_j - lực tập trung tại nút thứ j ;

v_j - chuyển vị tại nút thứ j theo phương tải trọng \vec{P}_j ;

Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss có thể giải cho bài toán tuyến tính kết cấu dàn cũng như bài toán phi tuyến hình học kết cấu dàn. Khi giải bài toán kết cấu dàn theo (1.17b), có thể giải theo hai cách là:

- **Cách thứ nhất:** là có thể chọn các ẩn số chính là các thành phần chuyển vị tại các nút dàn.

- **Cách thứ hai:** là có thể chọn các ẩn số chính là nội lực trong các thanh dàn.

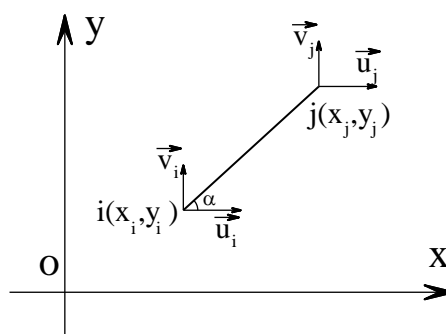
Chú ý khi giải theo cách thứ nhất thì điều kiện liên tục về mặt chuyển vị tại các nút dãn tự động thỏa mãn, nhưng nếu giải theo cách thứ hai thì cần phải đưa thêm điều kiện liên tục về chuyển vị tại các nút dãn. Trong nội dung chuyên đề này sẽ trình bày chi tiết từng cách để giải bài toán kết cấu dãn chịu tải trọng tập trung tại các nút, dựa trên nguyên lý cực trị Gauss và cách đảm bảo điều kiện liên tục về chuyển vị tại các nút dãn.

2.3.1 Phân tích tuyến tính kết cấu dãn với cách chọn ẩn số chính là các thành phần chuyển vị tại các nút dãn

2.3.1.1 Kết cấu dãn phẳng

Xét thanh ij trong dãn phẳng. Gọi tọa độ ban đầu của các nút lần lượt là $i(x_i, y_i), j(x_j, y_j)$. Sau khi dãn chịu lực, nút i có chuyển vị:

$$\begin{aligned} \vec{u}_i' &= u_i + v_i; \text{ nút } j \text{ có chuyển vị:} \\ \vec{u}_j' &= u_j + v_j \quad (\text{hình 2.4}) \end{aligned}$$



Hình 2.4 Sơ đồ chuyển vị của nút thanh trong hệ tọa độ phẳng

đặt:

$$m = \sin \alpha = \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}; \quad l = \cos \alpha = \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} \quad (2.37)$$

Chiều dài của thanh dãn trước khi biến dạng là:

$$l_{ij}^{(0)} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (2.38)$$

Biến dạng dài tuyệt đối của thanh dãn là:

$$\Delta l_{ij} = (l.u_j + m.v_j) - (l.u_i + m.v_i) \quad (2.39)$$

Như vậy nếu hệ dàn bao gồm n thanh và có r_1 nút chịu tải trọng tác dụng theo phương ox và có r_2 nút chịu tải trọng tác dụng theo phương oy thì phiếm hàm lượng ràng buộc (2.36) của bài toán được viết như sau:

$$Z = \sum_{k=1}^n \frac{E_k F_k \cdot (\Delta l_k)^2}{l_k^{(0)}} - \sum_{k_1=1}^{r_1} 2P_x^{(k_1)} \cdot u_{k_1} - \sum_{k_2=1}^{r_2} 2P_y^{(k_2)} \cdot v_{k_2} \rightarrow \min \quad (2.40)$$

hay

$$Z = \sum_{k=1}^n \frac{E_k F_k \left((l_k \cdot u_j + m_k \cdot v_j) - (l_k \cdot u_i + m_k \cdot v_i) \right)^2}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}} - \sum_{k_1=1}^{r_1} 2P_x^{(k_1)} \cdot u_{k_1} - \sum_{k_2=1}^{r_2} 2P_y^{(k_2)} \cdot v_{k_2} \rightarrow \min \quad (2.41)$$

Xét tại nút i có m thanh quy tụ tại nút; $P_x^{(i)}; P_y^{(i)}$ là các thành phần tải trọng tác dụng tại nút i theo phương trục x và phương trục y .

Điều kiện cực trị của bài toán là:

$$\frac{\partial Z}{\partial u_i} = 0; \quad \frac{\partial Z}{\partial v_i} = 0 \quad (2.42a)$$

Suy ra:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m \frac{2E_{ij} F_{ij} \left((l_{ij} \cdot u_j + m_{ij} \cdot v_j) - (l_{ij} \cdot u_i + m_{ij} \cdot v_i) \right) (-l_{ij})}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}} - 2P_x^{(i)} = 0 \\ \sum_{j=1}^m \frac{2E_{ij} F_{ij} \left((l_{ij} \cdot u_j + m_{ij} \cdot v_j) - (l_{ij} \cdot u_i + m_{ij} \cdot v_i) \right) (-m_{ij})}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}} - 2P_y^{(i)} = 0 \end{cases} \quad (2.42b)$$

Nội lực của các thanh dàn được tính bằng công thức sau:

$$N_{ij} = \frac{\Delta l_{ij} \cdot E_{ij} F_{ij}}{l_{ij}^{(0)}} \quad (2.43)$$

Các phương trình (2.42b) chính là các phương trình cân bằng tại các nút dàn có chuyển vị và có thể viết dưới dạng rút gọn lại như sau:

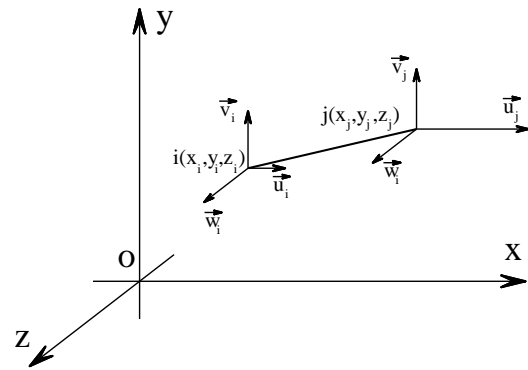
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m N_{ij} \cdot l_{ij} + P_x^{(i)} = 0 \\ \sum_{j=1}^m N_{ij} \cdot m_{ij} + P_y^{(i)} = 0 \end{cases} \quad (2.42c)$$

Nếu bài toán có C liên kết nối đất và S_n nút thì theo điều kiện (2.42) thiết lập được hệ phương trình bao gồm $(2S_n - C)$ phương trình tuyến tính có $(2S_n - C)$ ẩn số là các thành phần chuyển vị u, v . Giải hệ phương trình (2.42) sẽ xác định được các ẩn số u, v là các thành phần chuyển vị tại các nút dãn.

Sau khi tìm được các thành phần chuyển vị tại các nút dãn, thay các thành phần chuyển vị này vào phương trình (2.39), (2.43) sẽ tìm được biến dạng dài tuyệt đối và nội lực của các thanh dãn.

2.3.1.2 Kết cấu dãn không gian

Xét thanh ij trong dãn không gian. Gọi tọa độ ban đầu của các nút lần lượt là $i(x_i, y_i, z_i)$, $j(x_j, y_j, z_j)$. Sau khi dãn chịu lực, nút i có chuyển vị: $\vec{u}_i = u_i + v_i + w_i$; nút j có chuyển vị: $\vec{u}_j = u_j + v_j + w_j$ (hình 2.5)



Hình 2.5 Sơ đồ chuyển vị của nút thanh trong hệ tọa độ không gian

đặt:
$$l = \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}}; \quad (2.44a)$$

$$m = \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}}; \quad (2.44b)$$

$$n = \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}}. \quad (2.44c)$$

(l,m,n) gọi là côsin chỉ phương của thanh ij

Chiều dài của thanh dàn trước khi biến dạng là:

$$l_{ij}^{(0)} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (2.45)$$

Biến dạng dài tuyệt đối của thanh dàn là:

$$\Delta l_{ij} = (l.u_j + m.v_j + n.w_j) - (l.u_i + m.v_i + n.w_i) \quad (2.46)$$

Như vậy nếu hệ dàn bao gồm n thanh và S_n nút trong đó có r_1 nút chịu tải trọng tác dụng theo phương ox, r_2 nút chịu tải trọng tác dụng theo phương oy, r_3 nút chịu tải trọng tác dụng theo phương oz thì phiếm hàm lượng ràng buộc (1.17b) của bài toán được viết như sau:

$$Z = \sum_{k=1}^n \frac{E_k F_k \cdot (\Delta l_k)^2}{l_k^{(0)}} - \sum_{k_1=1}^{r_1} 2P_x^{(k_1)} \cdot u_{k_1} - \sum_{k_2=1}^{r_2} 2P_y^{(k_2)} \cdot v_{k_2} - \sum_{k_3=1}^{r_3} 2P_z^{(k_3)} \cdot w_{k_3} \rightarrow \min \quad (2.47a)$$

hay

$$Z = \sum_{k=1}^n \frac{E_k F_k}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}} \left((l_k.u_j + m_k.v_j + n_k.w_j) - (l_k.u_i + m_k.v_i + n_k.w_i) \right)^2 + \sum_{k_1=1}^{r_1} 2P_x^{(k_1)} \cdot u_{k_1} - \sum_{k_2=1}^{r_2} 2P_y^{(k_2)} \cdot v_{k_2} - \sum_{k_3=1}^{r_3} 2P_z^{(k_3)} \cdot w_{k_3} \rightarrow \min \quad (2.47b)$$

Xét tại nút i có m là số thanh quy tụ; $P_x^{(i)}; P_y^{(i)}; P_z^{(i)}$ là thành phần tải trọng tác dụng tại nút i theo phương trục x, phương trục y và phương trục z; $(l_{ij}, m_{ij}, n_{ij}), (j = 1 \div m)$ là côsin chỉ phương của trục thanh dàn ij.

Điều kiện cực trị của bài toán là:

$$\frac{\partial Z}{\partial u_i} = 0; \frac{\partial Z}{\partial v_i} = 0; \frac{\partial Z}{\partial w_i} = 0; \quad (2.48a)$$

Suy ra:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^m \frac{2E_{ij}F_{ij}(-l_{ij})((l_{ij} \cdot u_j + m_{ij} \cdot v_j + n_{ij} \cdot w_j) - (l_{ij} \cdot u_i + m_{ij} \cdot v_i + n_{ij} \cdot w_i))}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}} - 2P_x^{(i)} = 0 \\ \sum_{j=1}^m \frac{2E_{ij}F_{ij}(-m_{ij})((l_{ij} \cdot u_j + m_{ij} \cdot v_j + n_{ij} \cdot w_j) - (l_{ij} \cdot u_i + m_{ij} \cdot v_i + n_{ij} \cdot w_i))}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}} - 2P_y^{(i)} = 0 \\ \sum_{j=1}^m \frac{2E_{ij}F_{ij}(-n_{ij})((l_{ij} \cdot u_j + m_{ij} \cdot v_j + n_{ij} \cdot w_j) - (l_{ij} \cdot u_i + m_{ij} \cdot v_i + n_{ij} \cdot w_i))}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}} - 2P_z^{(i)} = 0 \end{array} \right. \quad (2.49b)$$

Các phương trình (2.49b) chính là các phương trình cân bằng tại các nút có chuyển vị và có thể viết dưới dạng rút gọn lại như sau:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^m N_{ij} \cdot l_{ij} + P_x^{(i)} = 0 \\ \sum_{j=1}^m N_{ij} \cdot m_{ij} + P_y^{(i)} = 0 \\ \sum_{j=1}^m N_{ij} \cdot n_{ij} + P_z^{(i)} = 0 \end{array} \right. \quad (2.49c)$$

Nếu bài toán có C liên kết nối đất và S_n nút dãn thì theo điều kiện (2.49) ta sẽ có được hệ phương trình bao gồm $(3S_n - C)$ phương trình tuyến tính và có $(3S_n - C)$ ẩn số là các thành phần chuyển vị u, v, w . Giải hệ phương trình (2.49) này sẽ tìm được các ẩn số u, v, w là các thành phần chuyển vị tại các nút của dãn.

Sau khi tìm được các thành phần chuyển vị của các nút dãn thay vào phương trình (2.46) và (2.43) sẽ tính được biến dạng dài tuyệt đối và nội lực của các thanh dãn.

2.3.2 Phân tích tuyến tính kết cấu dãn với cách chọn ẩn số chính là các thành phần nội lực trong các thanh dãn

Xét dãn gồm n thanh, gọi N_i là nội lực trong thanh dãn thứ i . Lượng ràng buộc của dãn (2.36b) được viết như sau:

$$Z = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 l_i}{E_i F_i} - 2 \sum_{j=1}^r P_j v_j \rightarrow \min \quad (2.50)$$

Nếu chỉ thỏa mãn (2.50) thì dàn chưa đảm bảo điều kiện liên tục về mặt chuyển vị tại các nút dàn. Vì vậy cần phải bổ sung điều kiện liên tục là các thanh đồng quy tại nút thì chuyển vị tại nút đó của các thanh phải bằng nhau. Các phương trình bổ sung để dàn thỏa mãn điều kiện liên tục về chuyển vị được viết như sau:

$$g_i = \frac{N_i l_i}{E_i F_i} - \Delta l_i = 0 \quad (2.51)$$

Trong (2.51) Δl_i là biến dạng dài tuyệt đối của thanh dàn được xác định theo (2.39) hoặc (2.46).

Như vậy bài toán phân tích, tính toán dàn trở thành bài toán tìm cực trị của phiếm hàm (2.50) với các ràng buộc (2.51). Bài toán này có thể giải bằng phương pháp thừa số Lagrange với phiếm hàm mở rộng F như sau:

$$F = Z + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i \rightarrow \min \quad (2.52)$$

Trong đó λ_i là thừa số Lagrange và cũng là ẩn số của bài toán.

Điều kiện cực trị của (2.52) là:

$$\frac{\partial F}{\partial N_i} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial v_j} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = 0 \quad (2.53)$$

Giải hệ phương trình tuyến tính (2.53) sẽ tìm được các thành phần chuyển vị tại nút dàn và nội lực trong các thanh.

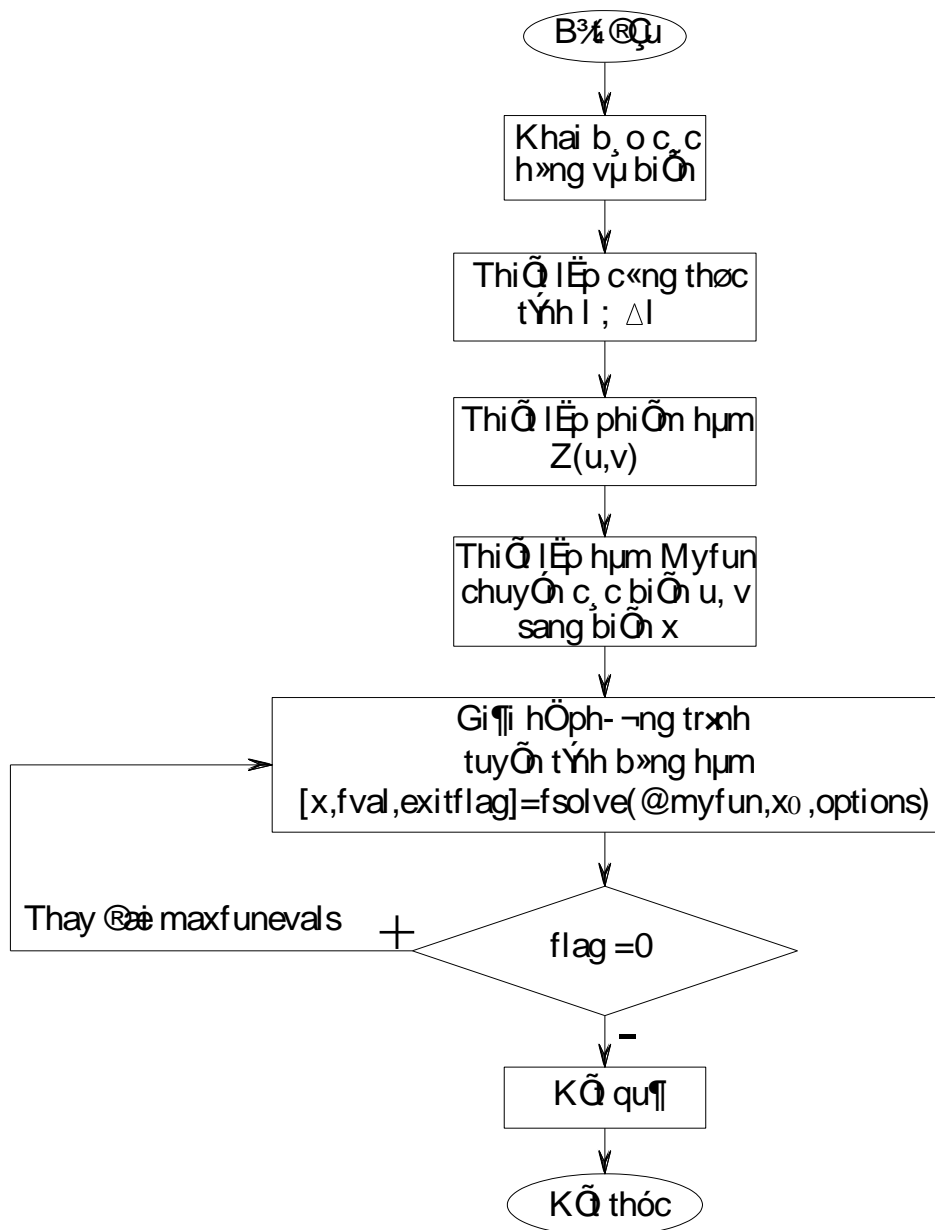
2.3.3 Phương pháp xác định các thành phần chuyển vị tại nút dàn và nội lực trong các thanh dàn đối với bài toán dàn tuyến tính

Theo phương pháp phân tích, tính toán tuyến tính kết cấu dàn dựa trên nguyên lý cực trị Gauss là cuối cùng đưa về giải hệ phương trình (2.53) hoặc (2.49) các phương trình trong các hệ này là các phương trình tuyến tính. Để

giải hệ phương trình tuyến tính rất nhiều phương pháp, trong đề tài nghiên cứu này tác giả sử dụng hàm fsolve trong Optimization Toolbox của phần mềm Matlab 7.0 để giải hệ các phương trình tuyến tính này với các bước thực hiện như sau:

Bước 1: Đánh số thứ tự các nút, số thứ tự các thanh cho kết cấu dầm.

Bước 2: Xác định lượng ràng buộc cho kết cấu áp dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss với các công thức (2.47), (2.52).



Hình 2.6 Sơ đồ khối chương trình.

Bước 3: Từ điều kiện cực trị của phiếm hàm ràng buộc ta nhận được hệ phương trình đạo hàm riêng theo công thức (2.49), (2.53).

Bước 4: Giải hệ phương trình tuyến tính (2.49), (2.53) bằng cách sử dụng hàm `fsolve` trong Optimization toolbox của phần mềm Matlab sẽ xác định được nghiệm của hệ là các thành phần chuyển vị tại các nút của kết cấu dàn đối với bài toán giải theo cách chọn ẩn số chính là chuyển vị, hoặc nội lực trong các thanh dàn và các thành phần chuyển vị của các nút dàn theo cách chọn ẩn số chính là nội lực.

Bước 5: Sau khi xác định được các thành phần chuyển vị tại nút dàn ta sẽ tính được biến dạng dài tuyệt đối và nội lực các thanh theo công thức (2.39) hoặc (2.43) và (2.46).

Như vậy, cách giải chọn ẩn số chính là chuyển vị thì phải tiếp tục làm thêm bước 5. Còn cách giải chọn ẩn số chính là nội lực thì đến bước 4 là đã xác định được cả nội lực trong các thanh dàn và các thành phần chuyển vị tại các nút dàn.

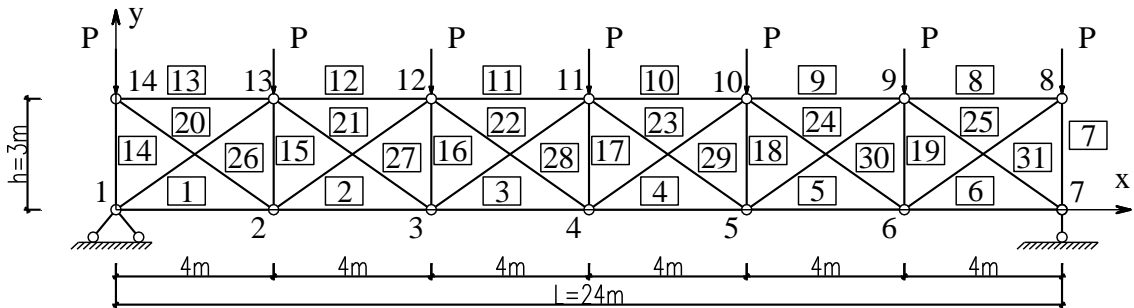
Sơ đồ giải thuật để giải bài toán tuyến tính kết cấu dàn chịu tải trọng tĩnh dựa theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss bằng cách sử dụng ngôn ngữ lập trình Matlab 7.0 được thể hiện như hình 2.6.

Chương 3

MỘT SỐ VÍ DỤ PHÂN TÍCH KẾT CẤU DÀN

3.1 Ví dụ tính toán dàn theo cách chọn ẩn số chính là các thành phần chuyển vị tại các nút dàn

Ví dụ 1: Xác định nội lực trong các thanh dàn chịu lực như (hình 3.1) theo cách chọn ẩn số chính là các thành phần chuyển vị tại các nút dàn. Biết độ cứng kéo (nén) của các thanh dàn $EF = 800000(\text{kN} / \text{cm}^2 \cdot \text{cm}^2)$ và tải trọng tác dụng nút $P=40(\text{kN})$.



Hình 3.1 Dàn ví dụ 1

Bài toán kết cấu dàn có 31 thanh và 14 nút được đánh số hiệu như trong (hình 3.1). Điều kiện biên của bài toán là tại nút 1 không có chuyển vị theo phương x và phương y, tại nút 7 không có chuyển vị theo phương y nên: $u_1 = v_1 = v_7 = 0$.

Như vậy, nếu chọn các chuyển vị chưa biết là ẩn số thì bài toán sẽ có 25 ẩn số: $u_2; v_2; u_3; v_3; u_4; v_4; u_5; v_5; u_6; v_6; u_7; u_8; v_8; u_9; v_9; u_{10}; v_{10}; u_{11}; v_{11}; u_{12}; v_{12}; v_{13}; u_{14}; v_{14}$.

Lượng ràng buộc của bài toán theo (2.40) được viết như sau:

$$Z = \sum_{k=1}^{31} \frac{E_k F_k}{I_k^{(0)}} \times (\Delta l_k)^2 - \sum_{r=8}^{14} 2P_r \cdot w_r \rightarrow \min \quad (3.1)$$

trong công thức (3.1) các biến dạng dài tuyệt đối của các thanh dàn được tính toán theo (2.39).

Điều kiện cực trị của phiếm hàm ràng buộc Z (3.1) theo các chuyển vị chưa biết sẽ là:

$$\frac{\partial Z}{\partial u_i} = 0 \quad (i = 2 \div 14); \quad \frac{\partial Z}{\partial v_j} = 0 \quad \begin{cases} j = 2 \div 6 \\ j = 8 \div 14 \end{cases} \quad (3.2)$$

Từ điều kiện (3.2) lập được hệ phương trình gồm 25 phương trình tuyến tính. Giải hệ phương trình tuyến tính (3.2) tìm được 25 ẩn số là các thành phần chuyển vị chưa biết và kết quả được lập thành (bảng 1.1)

Bảng 3.1 Kết quả các thành phần chuyển vị tại các nút dầm

Nút	2	3	4	5	6	7	8
u (cm)	0	0,0378	0,1258	0,2406	0,3554	0,4434	0,4812
v (cm)	0	-0,6781	-1,1471	-1,3156	-1,1471	-0,6781	0
Nút	9	10	11	12	13	14	
u (cm)	0,0434	0,1288	0,2406	0,3525	0,4378	0,4667	
v (cm)	-0,6823	-1,1530	-1,3214	-1,1530	-0,6823	-0,0312	

Bảng 3.2 Kết quả nội lực trong các thanh dầm

Thanh	1	2	3	4	5	6	7
N (kN)	75,672	175,917	229,652	229,652	175,917	75,672	-83,246
Thanh	8	9	10	11	12	13	14
N (kN)	-57,662	-170,749	-223,681	-223,681	-170,749	-57,662	-83,246
Thanh	15	16	17	18	19	20	21
N (kN)	-11,308	-15,823	-15,522	-15,823	-11,308	72,077	46,770
Thanh	22	23	24	25	26	27	28
N (kN)	12,935	-20,398	-53,230	-94,590	-94,590	-53,230	-20,398
Thanh	29	30	31				
N (kN)	12,935	46,770	72,077				

Sau khi tìm được các thành phần chuyển vị tại các nút dầm, thay các chuyển vị này vào (2.39) và (2.43) sẽ xác định được nội lực trong các thanh dầm. Kết quả nội lực của các thanh dầm được lập thành (bảng 3.2).

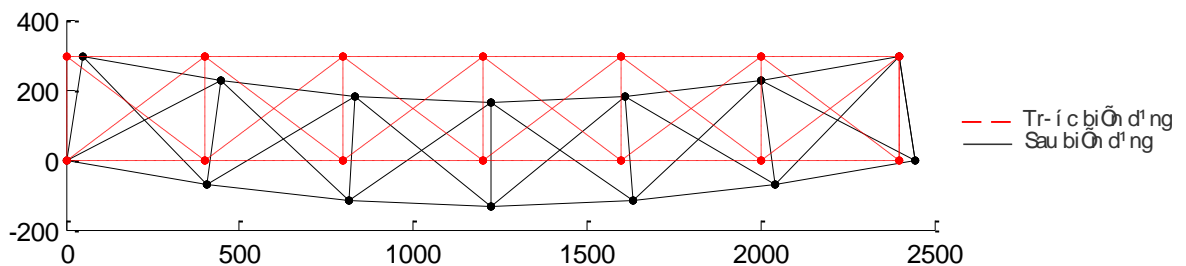
Để kiểm tra độ chính xác kết quả phân tích dầm ví dụ 1 dựa trên phương pháp nguyên lý cực trị Gauss. Tác giả tiến hành kiểm tra điều kiện cân bằng

tại tất cả các nút dàn. Sai số tổng hình chiếu các thành phần nội lực của các thanh quy tụ tại nút và tải trọng tác dụng lên nút theo phương x là $\sum F_x$, theo phương y là $\sum F_y$. Kết quả kiểm tra cân bằng tại các nút dàn được tập hợp và lập thành (bảng 3.3).

Bảng 3.3 Kết quả kiểm tra cân bằng tại các nút của dàn

Nút	1	2	3	4	5
$\sum F_x$	0	-2,63e-13	-3,74e-13	4,49e-13	6,09e-13
$\sum F_y$	0	-8,01e-13	2,42e-13	-7,35e-13	-4,45e-12
Nút	6	7	8	9	10
$\sum F_x$	-2,70e-13	-3,91e-14	9,63e-14	3,21e-13	2,17e-13
$\sum F_y$	-1,15e-12	0	4,93e-14	-2,81e-13	2,03e-12
Nút	11	12	13	14	
$\sum F_x$	7,61e-13	-3,11e-13	-3,69e-13	-6,01e-14	
$\sum F_y$	3,513-12	3,23e-12	-9,55e-13	-1,86e-14	

Với số liệu kiểm tra cân bằng tại các nút (bảng 3.3) cho thấy tất cả các nút đều thỏa mãn điều kiện cân bằng. Như vậy kết quả tính toán là tin cậy. Kết quả hình dạng dàn giữa trước và sau khi biến dạng như hình 3.2.



Hình 3.2 Hình dạng dàn trước và sau khi biến dạng

Trong ví dụ này, tác giả còn so sánh kết quả phân tích theo phương pháp dựa trên nguyên lý cực trị Gauss với với kết quả phân tích bằng phần mềm Sap 2000. Kết quả so sánh nội lực trong các thanh dàn giữa hai cách phân tích được lập trong bảng 3.4:

Bảng 3.4. Kết quả so sánh nội lực trong các thanh dầm

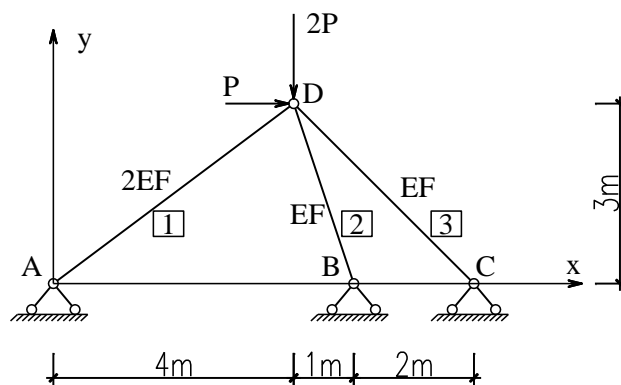
Thanh		1	2	3	4	5	6
N (kN)	Gauss	75,672	175,917	229,652	229,652	175,917	75,672
	Sap2000	75,672	175,917	229,652	229,652	175,917	75,672
Thanh		7	8	9	10	11	12
N (kN)	Gauss	-83,246	-57,662	-170,749	-223,681	-223,681	-170,749
	Sap2000	-83,246	-57,662	-170,749	-223,681	-223,681	-170,749
Thanh		13	14	15	16	17	18
N (kN)	Gauss	-57,662	-83,246	-11,308	-15,823	-15,522	-15,823
	Sap2000	-57,662	-83,246	-11,308	-15,823	-15,522	-15,823
Thanh		19	20	21	22	23	24
N (kN)	Gauss	-11,308	72,077	46,770	12,935	-20,398	-53,230
	Sap2000	-11,308	72,077	46,770	12,935	-20,398	-53,230
Thanh		25	26	27	28	29	30
N (kN)	Gauss	-94,590	-94,590	-53,230	-20,398	12,935	46,770
	Sap2000	-94,590	-94,590	-53,230	-20,398	12,935	46,770
Thanh		31					
N (kN)	Gauss	72,077					
	Sap2000	72,077					

Theo kết quả phân tích trong bảng 3.4 cho thấy, kết quả giữa hai cách phân tích là như nhau.

3.2 Ví dụ tính toán dầm theo cách chọn ẩn số chính là nội lực trong các thanh dầm

Ví dụ 2: Xác định nội lực trong các thanh dầm chịu lực như (hình 3.3), theo cách chọn các ẩn số chính là nội lực trong các thanh dầm. Biết $P = 30(\text{kN})$,

$$EF = 2 \cdot 10^4 \left(\frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \cdot \text{cm}^2 \right).$$



Hình 3.3 Dầm ví dụ 2

Lời giải:

Cách thanh và nút được đánh số hiệu như (hình 3.3). Gọi N_i ($i = 1, 2, 3$) là nội lực trong các thanh dãn; u, v là chuyển vị của nút D.

Lượng ràng buộc (2.52) của bài toán dãn được viết như sau:

$$Z = \frac{N_1 I_1^{(0)}}{2EF} + \frac{N_2 I_2^{(0)}}{EF} + \frac{N_3 I_3^{(0)}}{EF} - 2Pu + 4Pv \rightarrow \min \quad (3.3)$$

Theo điều kiện liên tục về chuyển vị tại các nút dãn:

$$\frac{N_1 I_1^{(0)}}{2EF} - (4u + 3v) / I_1^{(0)} = 0; \quad \frac{N_2 I_2^{(0)}}{EF} - (-u + 3v) / I_2^{(0)} = 0; \quad \frac{N_3 I_3^{(0)}}{EF} - (-3u + 3v) / I_3^{(0)} = 0$$

Như vậy bài toán cực trị của phiếm hàm Z với các ràng buộc về điều kiện liên tục chuyển vị tại nút D được viết dưới dạng bài toán cực trị phiếm hàm mở rộng:

$$F = \frac{N_1 I_1^{(0)}}{2EF} + \frac{N_2 I_2^{(0)}}{EF} + \frac{N_3 I_3^{(0)}}{EF} - 2Pu + 4Pv + \lambda_1 \left(\frac{N_1 I_1^{(0)}}{2EF} - (4u + 3v) / I_1^{(0)} \right) + \lambda_2 \left(\frac{N_2 I_2^{(0)}}{EF} - (-u + 3v) / I_2^{(0)} \right) + \lambda_3 \left(\frac{N_3 I_3^{(0)}}{EF} - (-3u + 3v) / I_3^{(0)} \right) \rightarrow \min \quad (3.4)$$

Điều kiện cực trị của phiếm hàm mở rộng (3.4):

$$\frac{\partial F}{\partial N_1} = \frac{N_1 I_1^{(0)}}{EF} + \lambda_1 \frac{I_1^{(0)}}{2EF} = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial N_2} = \frac{2N_2 I_2^{(0)}}{EF} + \lambda_2 \frac{I_2^{(0)}}{EF} = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial N_3} = \frac{2N_3 I_3^{(0)}}{EF} + \lambda_3 \frac{I_3^{(0)}}{EF} = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = \frac{N_1 I_1^{(0)}}{2EF} - (4u + 3v) / I_1^{(0)} = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = \frac{N_2 I_2^{(0)}}{EF} - (-u + 3v) / I_2^{(0)} = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_3} = \frac{N_3 I_3^{(0)}}{EF} - (-3u + 3v) / I_3^{(0)} = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -2P - \frac{4\lambda_1}{I_1^{(0)}} + \frac{\lambda_2}{I_2^{(0)}} + \frac{3\lambda_3}{I_3^{(0)}} = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = 4P - \frac{3\lambda_1}{I_1^{(0)}} - \frac{3\lambda_2}{I_2^{(0)}} - \frac{3\lambda_3}{I_3^{(0)}} = 0.$$

Như vậy, theo điều kiện cực trị của phiếm hàm mở rộng theo các ẩn số là nội lực trong các thanh dàn, các thành phần chuyển vị tại các nút dàn chưa biết và các thừa số Lagrange được hệ 6 phương trình tuyến tính, chứa 6 ẩn số (nội lực trong các thanh dàn, các thành phần chuyển vị tại nút dàn chưa biết và các thừa số Lagrange).

Giải hệ phương trình này xác định được nội lực trong các thanh dàn:

$$N_1 = -1,9026(\text{kN}); N_2 = -19,5056(\text{kN}); N_3 = -14,6425(\text{kN})$$

$$\text{Chuyển vị của nút D: } u = 0,1713(\text{cm}); v = -0,2680(\text{cm})$$

Giá trị của các thừa số Lagrange: $\lambda_1 = 3,8051$; $\lambda_2 = 39,0112$; $\lambda_3 = 29,2851$. Các thừa số Lagrange có thứ nguyên là [lực] và các trị số của λ_i bằng hai lần giá trị nội lực của thanh thứ i .

Để kiểm tra độ tin cậy của kết quả tính toán. Tác giả kiểm tra điều kiện cân bằng tại nút D: $\sum F_x = -0,0582 \cdot 10^{-6}$; $\sum F_y = -0,2236 \cdot 10^{-6}$ như vậy kết quả phân tích, tích toán tin cậy.

Trong ví dụ này, tác giả cũng so sánh kết quả phân tích theo phương pháp dựa trên nguyên lý cực trị Gauss với với kết quả phân tích bằng phần mềm Sap 2000. Kết quả phân tích nội lực trong các thanh dàn trong ví dụ giữa 2 phương pháp được lập trong bảng 3.5:

Bảng 3.5 Nội lực trong các thanh dàn ví dụ 2

Thanh	AD	BD	CD
Nội lực (kN) - Gauss	-3,805	-39,011	-29,285
Nội lực (kN) - Sap 2000	-3,565	-39,543	-28,775

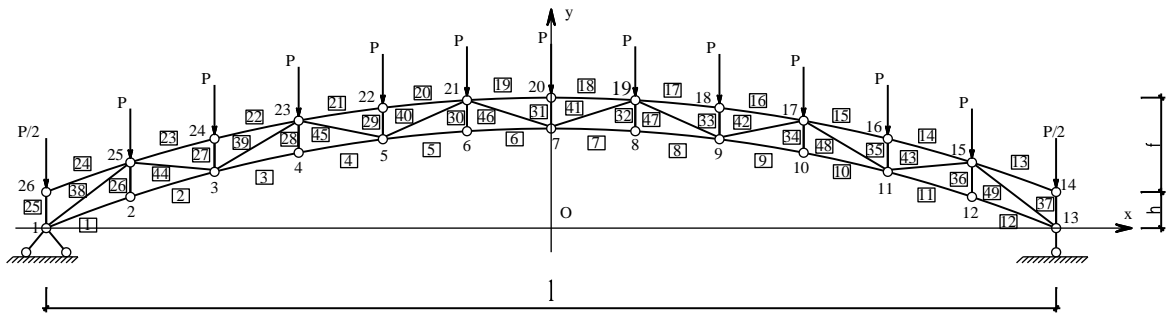
3.3 Bài toán dàn vòm phẳng tĩnh định

Ví dụ 3: Xét dàn vòm phẳng tĩnh định chịu lực như hình 3.4, biết các thanh dàn có mô đun đàn hồi $E=2.10^4(\text{kN/cm}^2)$. Tiết diện thanh cánh trên và thanh cánh dưới dàn là $\phi 180 \times 6(\text{mm})$, các thanh bụng dàn là $\phi 121 \times 3,5(\text{mm})$. Nhịp dàn $l=48(\text{m})$, độ thoải của dàn $k=f/l=1/8$ và chiều cao dàn $h=0,8(\text{m})$. Tải trọng $P=10(\text{kN})$ tác dụng tại các nút dàn theo phương thẳng đứng. Tính toán các thành phần chuyển vị tại nút dàn và nội lực trong các thanh dàn.

Xây dựng tọa độ của các nút dàn

Dàn vòm có nhịp dàn l , độ thoải của dàn $k=f/l$ và chiều cao của dàn là h (xem hình 3.4 và hình 3.5). Bán kính cong của dàn tính theo công thức:

$$r = \frac{l \times (1 + 4k^2)}{8k} \quad (3.5)$$



Hình 3.4 Dàn vòm tĩnh định chịu tải trọng thẳng đứng tại các nút dàn

Tọa độ của các nút thuộc cánh dưới là:

$$\begin{cases} x(i) = r \cdot \sin((i-7) \cdot \alpha) \\ y(i) = r (\cos((i-7) \cdot \alpha) - \cos(6\alpha)) \end{cases} \quad (i = 1 \div 13) \quad (3.6)$$

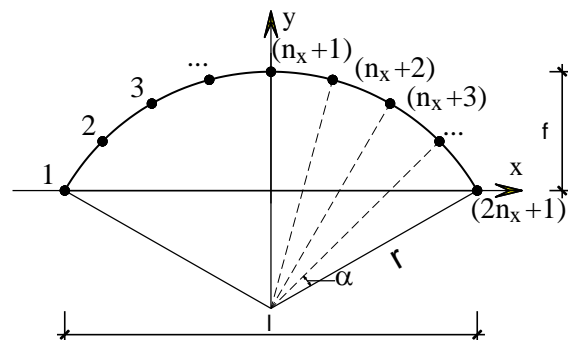
trong đó:

$$\alpha = \frac{1}{n_x} \arctan \frac{1}{2\sqrt{r^2 - l^2/4}}$$

$2n_x$: là số thanh cánh dưới

Tọa độ của các nút thuộc cánh

trên là:



Hình 3.5 Vị trí các nút dàn vòm

$$\begin{cases} x(i+13) = r \cdot \sin((8-i) \cdot \alpha) \\ y(i+13) = r(\cos((8-i) \cdot \alpha) - \cos(6\alpha)) + h \end{cases} \quad (i=1 \div 13) \quad (3.7)$$

Với số liệu trong ví dụ: $l=48(\text{m})$, $k=1/8$, $h=0,8 (\text{m})$ và $n_x = 6$ tính được tọa độ các nút dàn và được lập như bảng 3.6.

Bảng 3.6 Tọa độ các nút của dàn vòm trước khi chịu lực

Điểm	1	2	3	4	5	6
$x_i (\text{m})$	-24,0000	-20,2494	-16,3639	-12,3693	-8,2923	-4,1600
$y_i (\text{m})$	0,0000	1,8077	3,3034	4,4773	5,3213	5,8301
Điểm	7	8	9	10	11	12
$x_i (\text{m})$	0,0000	4,1600	8,2923	12,3693	16,3639	20,2494
$y_i (\text{m})$	6,0000	5,8301	5,3213	4,4773	3,3034	1,8077
Điểm	13	14	15	16	17	18
$x_i (\text{m})$	24,0000	24,0000	20,2494	16,3639	12,3693	8,2923
$y_i (\text{m})$	0,0000	0,8000	2,6077	4,1034	5,2773	6,1213
Điểm	19	20	21	22	23	24
$x_i (\text{m})$	4,1600	0,0000	-4,1600	-8,2923	-12,3693	-16,3639
$y_i (\text{m})$	6,6301	6,8000	6,6301	6,1213	5,2773	4,1034
Điểm	25	26				
$x_i (\text{m})$	-20,2494	-24,0000				
$y_i (\text{m})$	2,6077	0,8000				

Để tránh lặp lại, phần sau của đề tài sẽ không trình bày lại cách xác định tọa độ các nút dàn vòm mà chỉ đưa ra các thông số l , k , h và n_x .

Lời giải

Thiết lập phiếm hàm lượng ràng buộc của kết cấu dàn vòm

Dàn vòm tĩnh định có 49 thanh và 26 nút được đánh số thứ tự như (hình 3.4). Phiếm hàm lượng ràng buộc của dàn theo (2.40) được viết như sau:

$$Z = \sum_{k=1}^{37} \frac{E_k A_k}{I_k^{(0)}} \times (\Delta l_k)^2 - \sum_{r=14}^{26} 2P_r \cdot v_r \rightarrow \min \quad (3.8)$$

trong công thức (3.8) thì các biến dạng dài tuyệt đối được xác định theo công thức (2.39).

Thiết lập hệ phương trình từ điều kiện cực trị của phiếm hàm ràng buộc

Điều kiện biên của bài toán:

$$u_1 = v_1 = v_{13} = 0 \tag{3.9}$$

Điều kiện cực trị của phiếm hàm ràng buộc Z (3.8) theo các chuyển vị chưa biết là:

$$\frac{\partial Z}{\partial u_i} = 0 \quad (i = 2 \div 26); \quad \frac{\partial Z}{\partial v_j} = 0 \quad \begin{cases} j = 2 \div 12 \\ j = 14 \div 26 \end{cases} \tag{3.10}$$

Theo điều kiện cực trị (3.10) thiết lập được hệ phương trình gồm 49 phương trình, chứa 49 ẩn số là các thành phần chuyển vị chưa biết tại các nút.

Xác định các thành phần chuyển vị tại các nút dàn

Giải hệ phương trình (3.10) sẽ tìm được các thành phần chuyển vị tại các nút và kết quả các thành phần chuyển vị tại các nút dàn được lập thành bảng 3.7.

Bảng 3.7 Kết quả chuyển vị theo hai phương tại các nút dàn

Nút		1	2	3	4	5
Chuyển vị (cm)	Phương X	0	9,03248	15,3811	19,9286	22,4292
	Phương Y	0	-18,446	-34,595	-48,995	-59,608
Nút		6	7	8	9	10
Chuyển vị (cm)	Phương X	23,6536	24,1287	24,6039	25,8283	28,3289
	Phương Y	-66,402	-68,661	-66,402	-59,608	-48,995
Nút		11	12	13	14	15

Chuyển vị (cm)	Phương X	32,8764	39,225	48,2575	45	36,1139
	Phương Y	-34,595	-18,446	0	-0,0016	-18,438
Nút		16	17	18	19	20
Chuyển vị (cm)	Phương X	30,1428	26,1443	24,3095	23,8266	24,1287
	Phương Y	-34,584	-48,978	-59,591	-66,38	-68,642
Nút		21	22	23	24	25
Chuyển vị (cm)	Phương X	24,4309	23,948	22,1132	18,1147	12,1436
	Phương Y	-66,38	-59,591	-48,978	-34,584	-18,438
Nút		26				
Chuyển vị (cm)	Phương X	3,25745				
	Phương Y	-0,0016				

Xác định nội lực trong các thanh dầm

Sau khi xác định được các thành phần chuyển vị tại các nút dầm, độ biến dạng dài tuyệt đối của các thanh được tính theo công thức:

$$\Delta l_{ij} = (l.u_j + m.v_j) - (l.u_i + m.v_i) \quad (3.11)$$

$$\text{Nội lực của các thanh là: } N_{ij} = \frac{\Delta l_{ij} \cdot E_{ij} \cdot A_{ij}}{l_{ij}^{(0)}} \quad (3.12)$$

Kết quả tính toán nội lực trong các thanh dầm được lập thành bảng 3.8.

Bảng 3.8 Kết quả nội lực trong các thanh dầm

Thanh	Nội lực (kN)	Thanh	Nội lực (kN)	Thanh	Nội lực (kN)
1	286,23927	18	-882,79884	35	33,40094
2	276,29747	19	-882,79884	36	25,01843
3	678,70822	20	-784,46020	37	-5,00000
4	664,98492	21	-795,09368	38	-314,05197
5	862,52545	22	-496,55596	39	-194,93404
6	856,77709	23	-510,49324	40	-81,27319
7	856,77709	24	0,00000	41	26,29658
8	862,52545	25	-5,00000	42	127,41435
9	664,98492	26	25,01843	43	222,03704
10	678,70822	27	33,40094	44	222,03704
11	276,29747	28	56,53546	45	127,41435
12	286,23927	29	55,34445	46	26,29658
13	0,00000	30	70,41388	47	-81,27319
14	-510,49324	31	62,06893	48	-194,93404
15	-496,55596	32	70,41388	49	-314,05197
16	-795,09368	33	55,34445		
17	-784,46020	34	56,53546		

Kiểm tra cân bằng nút dầm

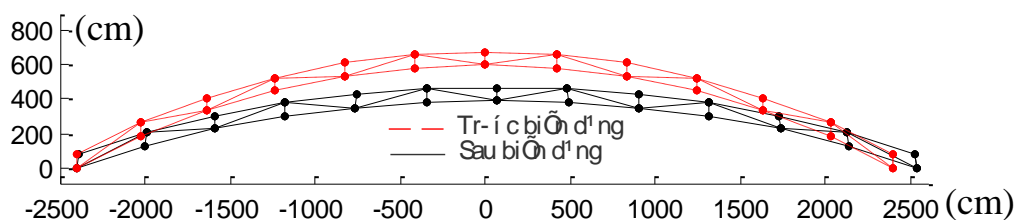
Để kiểm tra độ chính xác kết quả phân tích dầm vòm dựa trên phương pháp nguyên lý cực trị Gauss. Tác giả tiến hành kiểm tra điều kiện cân bằng tất cả các nút dầm vòm. Sai số tổng hình chiếu các thành phần nội lực của các thanh quy tụ tại nút và tải trọng tác dụng lên nút theo phương x là $\sum F_x$, theo phương y là $\sum F_y$. Kết quả cân bằng nút được tập hợp và lập thành bảng 3.9.

Bảng 3.9 Kết quả kiểm tra cân bằng tại các nút dàn

Nút	$\sum F_x$	$\sum F_y$	Nút	$\sum F_x$	$\sum F_y$
1	0.	0.	14	-0,5380e-11	-0,1842e-11
2	-0,6387e-11	-0,4135e-11	15	0,3978e-10	-0,1041e-10
3	-0,9047e-11	.0,2274e-10	16	-0,1677e-10	-0,7066e-11
4	0,1021e-10	-0,1868e-10	17	-0,6004e-10	-0,1349e-10
5	0,1770e-10	0,4640e-10	18	0,1353e-10	-0,88341e-11
6	0,1731e-11	0,2011e-10	19	0,9056e-11	0,2300e-10
7	0,2121e-11	0,7476e-11	20	-0,4848e-11	0,3355e-10
8	-0,2621e-10	0,1429e-10	21	0,2733e-10	0,1304e-10
9	-0,3962e-11	0,3546e-10	22	0,9933e-11	0,2046e-10
10	-0,4459e-10	0,3242e-10	23	-0,4479e-10	0,5234e-10
11	-0,1045e-10	-0,1497e-11	24	-0,53780e-11	-0,1842e-11
12	-0,6419e-11	0,1827e-10	25	0,3978e-10	-0,1041e-10
13	-0,1759e-11	0.	26	-0,1677e-10	-0,7066e-11

Với số liệu kiểm tra cân bằng tại các nút (bảng 3.9) cho thấy tất cả các nút đều thỏa mãn điều kiện cân bằng. Như vậy kết quả tính toán là tin cậy.

Hình dạng dàn trước và sau khi biến dạng: Kết quả hình dạng dàn trước và sau khi biến dạng được thể hiện như hình 3.6.

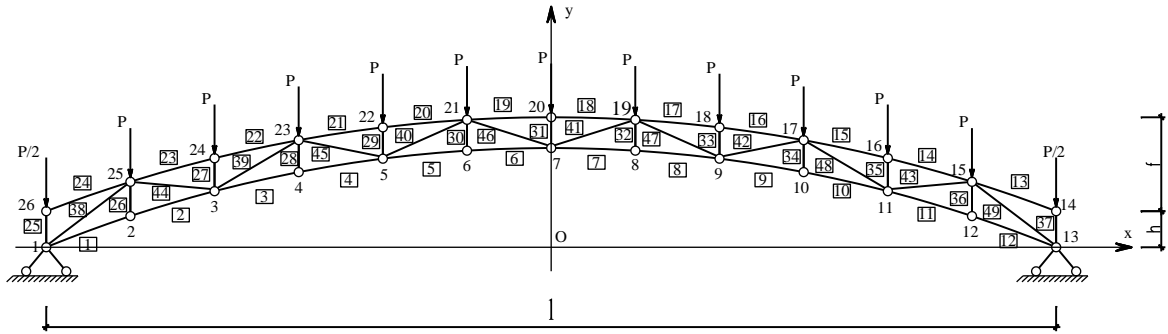


Hình 3.6 Hình dạng dàn trước và sau khi biến dạng

3.4 Bài toán dàn vòm phẳng tĩnh định trong, siêu tĩnh ngoài

Ví dụ 4: Xét dàn vòm phẳng tĩnh định trong, siêu tĩnh ngoài chịu lực như (hình 3.7) biết các thanh dàn có mô đun đàn hồi $E=2.10^4(kN/cm^2)$. Tiết diện

thanh cánh trên và thanh cánh dưới là $\phi 180 \times 6(\text{mm})$, các thanh bụng dãn là $\phi 121 \times 3,5(\text{mm})$. Nhịp dãn $l=48(\text{m})$, độ thoải của dãn $k=f/l=1/8$ và chiều cao dãn $h=0,8(\text{m})$. Tải trọng $P=100(\text{kN})$ tác dụng tại các nút dãn theo phương thẳng đứng. Tính toán các thành phần chuyển vị tại nút dãn và nội lực trong các thanh dãn.



Hình 3.7 Vòm dãn phẳng tĩnh định trong, siêu tĩnh ngoài

Lời giải

Thiết lập phiếm hàm lượng ràng buộc của kết cấu dãn vòm

Dãn vòm gồm 26 nút và 49 thanh được đánh số thứ tự như hình 3.7. Phiếm hàm lượng ràng buộc của dãn vòm (2.40) được viết như sau:

$$Z = \sum_{k=1}^{49} \frac{E_k A_k}{I_k^{(0)}} \times (\Delta l_k)^2 - \sum_{r=14}^{26} 2P_r \cdot v_r \rightarrow \min \quad (3.13)$$

Thiết lập hệ phương trình từ điều kiện cực trị của phiếm hàm ràng buộc

Điều kiện biên của bài toán là tại nút 1 và nút 13 không có chuyển vị theo phương x và phương y: $u_1 = v_1 = u_{13} = v_{13} = 0$ (3.10)

Điều kiện cực trị của phiếm hàm ràng buộc Z (3.13) theo các chuyển vị chưa biết là:

$$\frac{\partial Z}{\partial u_i} = 0 \quad \begin{cases} i = 2 \div 12 \\ i = 14 \div 26 \end{cases}; \quad \frac{\partial Z}{\partial v_j} = 0 \quad \begin{cases} j = 2 \div 12 \\ j = 14 \div 26 \end{cases} \quad (3.14)$$

Theo điều kiện cực trị trên sẽ viết được hệ phương trình gồm 48 phương trình chứa 48 ẩn số là các thành phần chuyển vị tại các nút.

Xác định các thành phần chuyển vị tại các nút dầm

Giải hệ phương trình (3.14) sẽ tìm được các thành phần chuyển vị tại các nút và kết quả các thành phần chuyển vị tại các nút dầm được lập trong (bảng 3.10).

Bảng 3.10 Kết quả chuyển vị theo hai phương tại các nút dầm

Nút		1	2	3	4	5
Chuyển vị (cm)	Phương X	0	-1,24	-0,586	-0,426	0,1212
	Phương Y	0	1,5302	-1,384	-2,845	-6,735
Nút		6	7	8	9	10
Chuyển vị (cm)	Phương X	0,0624	0	-0,062	-0,121	0,4259
	Phương Y	-7,424	-9,367	-7,424	-6,735	-2,845
Nút		11	12	13	14	15
Chuyển vị (cm)	Phương X	0,5862	1,24	0	0,4844	1,2197
	Phương Y	-1,384	1,5302	0	-0,006	1,5194
Nút		16	17	18	19	20
Chuyển vị (cm)	Phương X	0,2733	0,0103	-0,487	-0,272	0
	Phương Y	-1,393	-2,851	-6,74	-7,427	-9,371
Nút		21	22	23	24	25
Chuyển vị (cm)	Phương X	0,2725	0,4873	-0,01	-0,273	-1,22
	Phương Y	-7,427	-6,74	-2,851	-1,393	1,5194
Nút		26				
Chuyển vị (cm)	Phương X	-0,484				
	Phương Y	-0,006				

Xác định nội lực trong các thanh dầm

Theo công thức (2.39), (2.43) sẽ xác định được nội lực trong các thanh dầm. Kết quả phân tích nội lực trong các thanh dầm được lập thành bảng 3.11.

Bảng 3.11 Kết quả nội lực trong các thanh dầm

Thanh	Nội lực (kN)	Thanh	Nội lực (kN)	Thanh	Nội lực (kN)
1	-1013,68710	18	-787,36635	35	-68,94796
2	-978,47928	19	-787,36635	36	-88,60023
3	-577,87592	20	-665,60215	37	-50,00000
4	-566,19143	21	-674,62449	38	-192,47767
5	-319,31596	22	-355,27056	39	-196,19877
6	-317,18785	23	-365,24225	40	-98,23520
7	-317,18785	24	0,00000	41	32,81420
8	-319,31596	25	-50,00000	42	143,86796
9	-566,19143	26	-88,60023	43	185,73302
10	-577,87592	27	-68,94796	44	185,73302
11	-978,47928	28	-48,13627	45	143,86796
12	-1013,68710	29	-44,55626	46	32,81420
13	0,00000	30	-26,06795	47	-98,23520
14	-365,24225	31	-35,72188	48	-196,19877
15	-355,27056	32	-26,06795	49	-192,47767
16	-674,62449	33	-44,55626		
17	-665,60215	34	-48,13627		

Kiểm tra cân bằng nút dầm

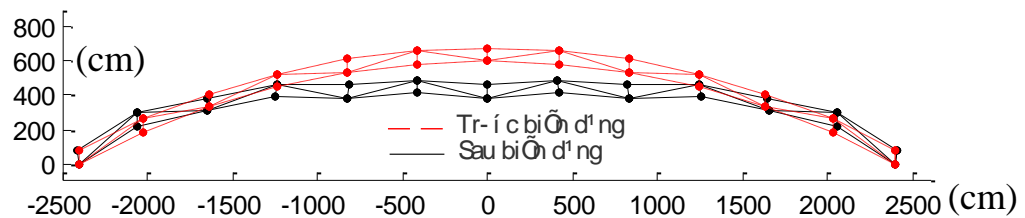
Kết quả kiểm tra cân bằng tại các nút dầm được tập hợp và lập thành bảng 3.12.

Bảng 3.12 Kết quả kiểm tra cân bằng tại các nút dầm

Nút	$\sum F_x$	$\sum F_y$	Nút	$\sum F_x$	$\sum F_y$
1	0	0	14	-0,1681e-12	-0,1146e-13
2	0,6221e-12	0,8434e-12	15	0,2394e-12	0,4582e-12
3	0,1442e-11	0,1346e-11	16	0,3760e-12	-0,2792e-11
4	0,2953e-12	-0,3823e-11	17	0,6497e-13	0,2343e-12
5	0,3456e-12	0,2240e-10	18	0,5318e-12	0,2075e-12
6	-0,2297e-12	-0,5126e-11	19	-0,8903e-13	0,4903e-11
7	0,3542e-12	0,3153e-11	20	0,9323e-13	-0,9678e-11
8	-0,4021e-12	0,3678e-11	21	-0,1303e-12	0,1367e-10
9	-0,1154e-11	0,1264e-10	22	-0,2255e-12	-0,1648e-10
10	-0,4256e-12	0,2427e-11	23	-0,4334e-12	0,6535e-12
11	-0,8721e-12	-0,4234e-12	24	-0,1716e-12	-0,1165e-11
12	-0,6198e-12	-0,5602e-12	25	-0,5551e-12	-0,1453e-11
13	0	0	26	0,1681e-12	0,5799e-13

Với số liệu kiểm tra cân bằng tại các nút (bảng 3.12) cho thấy tất cả các nút đều thỏa mãn điều kiện cân bằng.

Hình dạng dầm trước và sau khi biến dạng: Kết quả hình dạng dầm trước và sau khi biến dạng được thể hiện như hình 3.8.



Hình 3.8 Hình dạng dầm trước và sau khi biến dạng

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Kết luận: Qua các nội dung đã trình bày ở các chương trong đề tài nghiên cứu, có thể rút ra các kết luận sau đây:

1) Dựa trên phương pháp nguyên lý cực trị Gauss đề tài đã xây dựng được phương pháp giải cho bài toán phân tích tuyến tính kết cấu dàn chịu tải trọng tĩnh tại nút dàn theo hai cách tiếp cận bài toán: Chọn ẩn số là các thành phần chuyển vị tại các nút dàn; Chọn ẩn số là các thành phần nội lực trong các thanh dàn.

2) Khi viết phương trình cân bằng cho các nút dàn thì không cần viết phương trình cân bằng cho các điểm biên, mà thay vào đó là viết điều kiện biên về mặt chuyển vị.

3) Khi áp dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss để phân tích kết cấu dàn thì không phải phân bài toán cần phân tích là bài toán tĩnh định và siêu tĩnh như một số phương pháp khác. Nên khi giải bài toán dàn theo phương pháp này có cách nhìn đơn giản hơn.

4) Qua kết quả phân tích các bài toán khác nhau trong đề tài cho thấy áp dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss cho bài toán phân tích tuyến tính kết cấu dàn là tin cậy.

Kiến nghị: Có thể sử dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss như một phương pháp mới trong giảng dạy, học tập và nghiên cứu khi phân tích kết cấu dàn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

- [1] Hà Huy Cương (IV/2005), *Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss*, Tạp chí khoa học và Kỹ thuật, Tr.112-118.
- [2] Phạm Văn Đạt (2015), *Phân tích kết cấu dàn chịu tải trọng tĩnh theo sơ đồ biến dạng*, Luận án Tiến sĩ kỹ thuật, Học viện kỹ thuật quân sự.
- [3] Đoàn Văn Duẩn (2011), *Nghiên cứu ổn định đàn hồi của kết cấu hệ thanh có xét đến biến dạng trượt*, Luận án Tiến sĩ kỹ thuật, Đại học Kiến trúc Hà Nội.
- [4] Trần Thị Kim Huệ (2005), *Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss đối với bài toán Cơ học kết cấu*, Luận văn Thạc sĩ kỹ thuật.
- [5] Vũ Đình Lai, Nguyễn Xuân Lữ, Bùi Đình Nghi (2002), *Sức bền vật liệu*, Nhà xuất bản Giao thông vận tải.
- [6] Nguyễn Thị Thùy Liên (2006), *Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss đối với các bài toán động lực học công trình*, Luận văn thạc sĩ kỹ thuật, Đại học Kiến trúc Hà nội.
- [7] Nguyễn Văn Liên, Nguyễn Phương Thành, Đinh Trọng Bằng (2003), *Sức bền vật liệu*, Nhà xuất bản xây dựng.
- [8] Trần Văn Liên (2011), *Cơ học môi trường liên tục*, Nhà xuất bản Xây dựng.
- [9] Chu Quốc Thắng (1997), *Phương pháp phần tử hữu hạn*, Nhà xuất bản Khoa học và kỹ thuật.
- [10] Lều Thọ Trình (2003), *Cơ học kết cấu, Tập I – Hệ tĩnh định*, Nhà xuất bản Khoa học và kỹ thuật.
- [11] Lều Thọ Trình (2003), *Cơ học kết cấu, Tập II – Hệ siêu tĩnh*, Nhà xuất bản Khoa học và kỹ thuật.
- [12] Phạm Văn Trung (2006), *Phương pháp mới tính hệ kết cấu dầm và mái treo*, Luận án Tiến sĩ kỹ thuật, Đại học Kiến trúc Hà Nội.

Tiếng Anh

[13] Lanczos C. (1952), *The variational principles of mechanics*, University of Toronto Press Toronto.

[14] S. P. Timoshenko, D. H. Young (1965), *Theory of Structures*, Macgraw-Hill International Editions

Tiếng Nga

[15] A. P. Ржаницын (1982), *Строительная механика*, Москва «Высшая школа».

Tiếng trung

[16] 肖焱, 李维滨, 马少华 (1999), *空间结构与施工*, 东南大学出版社.