BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC DÂN LẬP HẢI PHÒNG

NGUYỄN THANH TÙNG

ỔN ĐỊNH CỦA THANH THẲNG CHỊU UỐN DỌC

LUẬN VĂN THẠC SĨ KỸ THUẬT

CHUYÊN NGÀNH: KỸ THUẬT XÂY DỰNG CÔNG TRÌNH DÂN DỤNG & CÔNG NGHIỆP

MÃ SỐ: 14.82.20.80.24

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

GS. TS. TRẦN HỮU NGHỊ

Hải Phòng, 2017

MỤC LỤC

LỜI CẢM ƠN

Tác giả xin trân trọng cảm ơn GS. TS. NGƯT. Trần Hữu Nghị, đã hướng dẫn và tạo mọi điều kiện tốt nhất cho tác giả hoàn thành luận văn này.

Xin chân thành cảm ơn toàn thể quý Thầy Cô trong Khoa xây dựng của Trường Đại Học Dân lập Hải Phòng đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cũng như tạo mọi điều kiện thuận lợi nhất cho tôi trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và cho đến khi thực hiện đề tài luận văn này.

Cuối cùng, tôi xin chân thành bày tỏ lòng cảm ơn đến các anh chị và các bạn đồng nghiệp đã hỗ trợ cho tôi rất nhiều trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và cung cấp những tài liệu cũng như những góp ý quý báu để tôi có thể hoàn thành luận văn.

Xin chân thành cảm ơn!

Hải Phòng, tháng 4 năm 2017

Tác giả

Nguyễn Thanh Tùng

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan Luận văn này là công trình nghiên cứu của bản thân tôi, các số liệu nêu trong Luận văn là trung thực. Những kiến nghị đề xuất trong Luận văn là của cá nhân không sao chép của bất kỳ tác giả nào.

Nguyễn Thanh Tùng

MỞ ĐẦU

1. Sự cần thiết của vấn đề nghiên cứu

Hiện nay, yêu cầu phát triển kinh tế đòi hỏi phải xây dựng các công trình lớn và nhẹ, trong đó thường dùng các thanh chịu nén chiều dài lớn dễ bị mất ổn định. Mặt khác khi thiết kế công trình, nếu chỉ kiểm tra điều kiện bền và điều kiện cứng không thôi thì chưa đủ để phán đoán khả năng làm việc của công trình. Trong nhiều trường hợp, đặc biệt là các kết cấu chịu nén hoặc nén cùng với uốn, tuy tải trọng chưa đạt đến giá trị phá hoại và có khi còn nhỏ hơn giá trị cho phép về điều kiện bền và điều kiện cứng nhưng kết cấu vẫn có thể mất khả năng bảo toàn dạng cân bằng ban đầu. Do đó, việc nghiên cứu ổn định công trình là cần thiết và có ý nghĩa thực tiễn.

Bài toán ổn định của kết cấu đã được giải quyết theo nhiều hướng khác nhau, phần lớn xuất phát từ nguyên lý năng lượng mà theo đó kết quả phụ thuộc rất nhiều vào cách chọn dạng của hệ ở trạng thái lệch khỏi dạng cân bằng ban đầu.

Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss do GS. TSKH. Hà Huy Cương đề xuất là phương pháp cho phép áp dụng nguyên lý cực trị Gauss - vốn được phát biểu cho hệ chất điểm - để giải các bài toán cơ học vật rắn biến dạng nói riêng và bài toán cơ học môi trường liên tục nói chung. Đặc điểm của phương pháp này là bằng một cách nhìn đơn giản luôn cho phép tìm được kết quả chính xác của các bài toán.

2. Đối tượng, phương pháp và phạm vi nghiên cứu

Trong đề tài này, tác giả áp dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss để giải bài toán ổn định đàn hồi của thanh thẳng đàn hồi tuyến tính, chịu tác dụng của tải trọng tĩnh.

3. Mục đích nghiên cứu

Xác định lực tới hạn của thanh thẳng chịu tác dụng của tải trọng tĩnh

4. Nội dung nghiên cứu

- Trình bày tổng quan về lý thuyết ổn định công trình
- Trình bày phương pháp nguyên lý cực trị Gauss

– Áp dụng phương pháp nguyên lý cực trị gauss để xây dựng giải bài toán ổn định đàn hồi của thanh chịu uốn dọc, chịu tác dụng của tải trọng tĩnh.

CHƯƠNG 1
TỔNG QUAN VỀ LÝ THUYẾT ỔN ĐỊNH CÔNG TRÌNH

1.1. Khái niệm về ổn định và ổn định công trình

1.1.1. Khái niệm về ổn định và mất ổn định

1.1.1.1. Định nghĩa về ổn định

– Theo Euler - Lagrange:

Ổn định là khả năng của công trình bảo toàn được vị trí ban đầu của nó cũng như dạng cân bằng ban đầu tương ứng với tải trọng trong trạng thái biến dạng, luôn luôn giữ, khi có các nhiễu loạn tuỳ ý từ bên ngoài gần với trạng thái không biến dạng ban đầu và hoàn toàn trở về trạng thái đó trong giai đoạn đàn hồi, còn trong giai đoạn đàn dẻo thì theo thường lệ, sẽ trở về trạng thái đó một cách từng phần, nếu như các nguyên nhân ngẫu nhiên gây ra nhiễu loạn công trình bị triệt tiêu [10].

Nói cách khác, ổn định là tính chất của công trình chống lại các tác nhân ngẫu nhiên từ bên ngoài và tự nó khôi phục hoàn toàn hoặc một phần vị trí ban đầu và dạng cân bằng của nó trong trạng thái biến dạng, khi các tác nhân ngẫu nhiên bị mất đi[10].

– Theo Liapunov [54]

"Trạng thái cân bằng của một hệ là ổn định nếu khi và chỉ khi hệ trở lại hình dạng này sau một nhiễu loạn nhỏ tạm thời nào đó. Nhiễu loạn như thế có thể sinh ra bởi một lực nhỏ tác động lên hệ trong một thời gian rất ngắn và bỏ ra sau đó".

Định nghĩa này được hiểu trong ý nghĩa động lực : Điều này ám chỉ là dao động của hệ tắt dần do động năng đưa vào nhờ nhiễu loạn tiêu tán nhanh. Bởi vậy sau một thời gian ngắn chuyển động dừng lại và sự cân bằng tĩnh ban đầu được phục hồi.

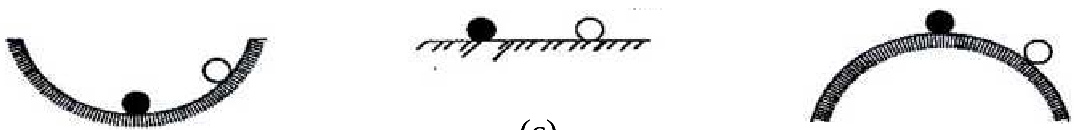
Như vậy theo hai định nghĩa trên ta đi đến kết luận: Vị trí của công trình hay dạng cân bằng ban đầu trong trạng thái biến dạng của công trình được gọi là ổn định hay không ổn định dưới tác dụng của tải trọng nếu như sau khi gây cho công trình một độ lệch rất nhỏ khỏi vị trí ban đâù hoặc dạng cân bằng ban đầu bằng một nguyên nhân bất kỳ nào đó ngoài tải trọng đã có (còn gọi là nhiễu) rồi bỏ nguyên-nhân đó đi thì công trình sẽ có hay không có khuynh hướng quay trở về trạng thái ban đầu.

Bước quá độ của công trình từ trạng thái ổn định sang trạng thái không ổn định gọi là mất ổn định. Giới hạn đầu của bước quá độ đó gọi là trạng thái tới hạn của công trình. Tải trọng tương ứng với trạng thái tới hạn gọi là tải trọng tới hạn.

1.1.1.2. Các trường hợp mất ổn định

– Trường hợp 1: Mất ổn định về vị trí [31]

Hiện tượng mất ổn định về vị trí xảy ra khi toàn bộ công trình được xem là tuyệt đối cúng, không giữ nguyên được vị trí ban đầu mà buộc phải chuyển sang vị trí cân bằng mới khác vị trí ban đầu.



(a) (c) (b)

Hình 1.1.

Xét một viên bi cứng trên một bề mặt cứng, Hình 1.1.

Rõ ràng là trong trường hợp (a) sự cân bằng của viên bi là ổn định. Sau một nhiễu loạn nhỏ cuối cùng nó sẽ trở về đáy cốc, tuy vậy sự suy giảm nhỏ có thể xảy ra.

Trong trường hợp (b) sự cân bằng là không ổn định, bởi vì sau một nhiễu loạn nhỏ viên bi sẽ không bao giờ có thể phục hồi vị trí ban đầu của nó.

Trong trường hợp (c), kích viên bi ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu thì nó lăn trên mặt phẳng ngang đến khi ngừng chuyển động, nó có vị trí cân bằng mới khác với trạng thái cân bằng ban đầu. Trong trường hợp này ta nói rằng trạng thái cân bằng ban đầu là phiếm định (không phân biệt).

• Trường hợp 2: Mất ổn định về dạng cân bằng [l 1]

Hiện tượng mất ổn định về dạng cân bằng ở trạng thái biến dạng xảy ra khi dạng biến dạng ban đầu của vật thể biến dạng tương ứng với tải trọng còn nhỏ, buộc phải chuyển sang dạng biến dạng mới khác trước về tính chất nếu tải trọng đạt đến một giá trị nào đó hoặc xảy ra khi biến dạng của vật thể phát triển nhanh mà không xuất hiện dạng biến dạng mới khác trước về tính chất nếu tải trọng đạt đến một giá trị nào đó. Trong những trường hợp này, sự cân bằng giữa các ngoại lực và nội lực không thể thực hiện được tương ứng với dạng biến dạng ban đầu mà chỉ có thể thực hiện được tương ứng với dạng biến dạng mới khác dạng ban đầu về tính chất hoặc chỉ có thể thực hiện được khi giảm tải trọng. Hiện tượng này khác với hiện tượng mất ổn định về vị trí *ở* các điểm sau: Đối tượng nghiên cứu là vật thể biến dạng chứ không phải tuyệt đối cứng, sự cân bằng cần được xét với cả ngoại lực và nội lực.

Mất ổn định về dạng cân bằng gồm hai loại:

Mất ổn định loại một (mất ổn định Euler), có các đặc trưng sau:

Dạng cân bằng có khả năng phân nhánh

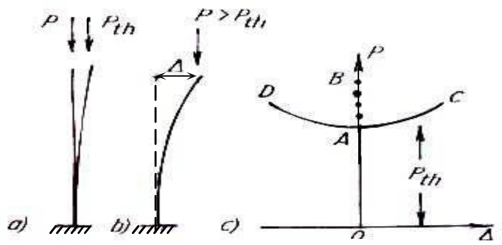
- Phát sinh dạng cân bằng mới khác dạng cân bằng ban đầu về tính chất

Trước trạng thái tói hạn dạng cân bằng ban đầu là duy nhất và ổn định; sau trạng thái tới hạn dạng cân bằng là không ổn định.

Sự minh hoạ của trường hợp này thể hiện qua các ví dụ sau:

Ví dụ 1: Ổn định của thanh một đầu ngàm một đầu tự do [11]

Khi p <P_{lh} thanh vẫn thẳng, trạng thái chịu nén của thanh là trạng thái ban đầu; duy nhất và là dạng cân bằng ổn định. Trạng thái cân bằng ổn định này được mô tả bởi đoạn OA trên đồ thị liên hệ giữa chuyển vị A và tải trọng p (Hình 1-2c)



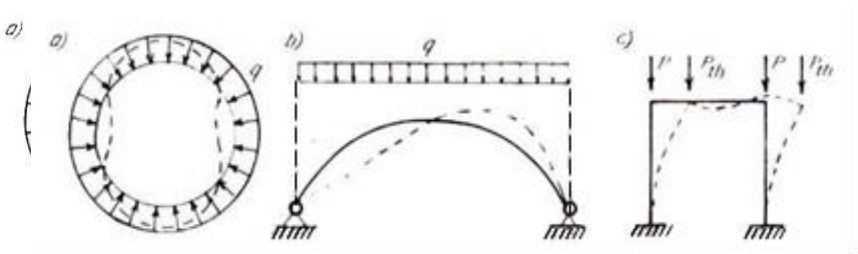
Hình 1.2.

Khi p = P_{th} , thanh ở trạng thái tới hạn. Lúc nay, ngoài trạng thái cân bằng chịu nén còn có khả năng phát sinh phát sinh đồng thời trạng thái cân băng uốn dọc, nghĩa là thanh ở trạng thái cân bằng trung tính. Như vậy, dạng cân bằng bị phân nhánh thành hai dạng biến dạng. Trạng thái này tương ứng với điểm phân nhánh A trên đồ thị (hình l-2c).

- Khi P > Pth, trạng thái cân bằng chịu nén vẫn có khả năng tiếp tục tồn tại song không ổn định vì nếu nếu đưa hệ ra khỏi dạng cân bằng ban đầu bằng một nguyên nhân nào đó rồi bỏ nguyên nhân đó đi thì hệ sẽ không có khả năng trở về dạng thẳng ban đầu. Dạng cân bằng không ổn định này tương ứng với nhánh AB trên đồ thị (nhánh có điểm thêm các dấu chấm trên hình l-2c). Trong hệ cũng phát sinh đồng thời trạng thái cân bằng uốn dọc khi biến dạng của thanh là hữu hạn (hình l-2 b). Dạng cân bằng này là ổn định và được mô tả bởi nhánh AC hoặc AD trên đồ thị (hình l-2c).
- Nếu tiếp tục tăng lực P thì về mặt lý thuyết trong thanh sẽ phát sinh những dạng cân bằng mới dưới dạng uốn dọc tương ứng với những lực tới hạn bậc cao. Tuy nhiên, ngoài dạng cân bằng thứ nhất tương ứng với lực tới hạn nhỏ nhất, những dạng cân bằng tương úng với lực tới hạn bậc cao đều là

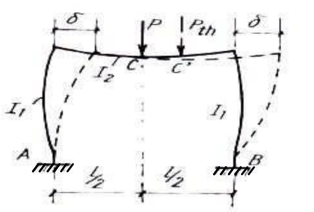
không ổn định, hiếm khi xảy ra và không có ý nghĩa thực tế. Bởi vậy trong thực tế ta chỉ cần tìm lực tới hạn nhỏ nhất. Hiện tượng mất ổn định loại một có thể xảy ra tương ứng với các dạng sau:

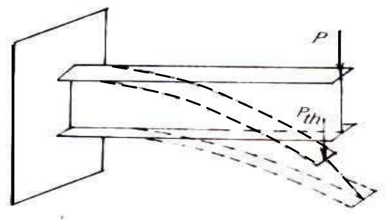
- Mất ổn định dạng nén đúng tâm. Ngoài ví dụ vừa xét, trên (hình 1-3) giới thiệu một số ví dụ khác về mất ổn định dạng nén đúng tâm như : Vành tròn kín (hình l-3a) chịu áp lực phân bố đều hướng tâm (áp lực thuỷ tĩnh); vòm parabol chịu tải trọng phân bố đều theo phương ngang (hình l-3b). Đó là những hệ chỉ chịu nén đúng tâm nếu bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng nén đàn hồi khi hệ còn ổn định. Nếu tải trọng q vượt quá q_{lh} thì trong hệ sẽ phát sinh dạng cân bằng mới theo đường đứt nét. Trong trường hợp khung chịu tải trọng như trên (hình l-3c): khi p <P_{th}, khung có dạng cân bằng chịu nén ; khi p > P_{lh}, dạng cân bằng chịu nén không ổn định và khung có dạng cân bằng mới chịu nén cùng vói uốn theo đường đứt nét trên hình vẽ.



Hình 1-3.

- Mất ổn định dạng biến dạng đối xứng: Để làm ví dụ, ta xét khung đối xứng chịu tải trọng tác dụng đối xứng như trên





Hình 1.4 Hình 1.5

Khi p <p_{th}, khung có dạng cân bằng ổn định là đối xứng (đường liền nét);khi

p > p_h dạng cân bằng đối xứng không ổn định và khung có dạng cân bằng mới không đối xứng (đường đứt nét).

- Mất ổn định dạng uốn phẳng. Để làm ví dụ, ta xét dầm chữ I chịu uốn phẳng do tải trọng p (hình 1-5). Khi p <P_{th}, dầm có dạng cân bằng ổn định là dạng uốn phẳng; khi P >P_{lh}, dạng uốn phẳng không ổn định và dầm có dạng cân bằng mới là dạng uốn cùng với xoắn (đường đứt nét).

1.2. Lịch sử phát triển của lý thuyết ổn định công trình

Thực tế cho thấy nhiều công trình bị sập đổ do mất ổn định, chiếc cầu đường sắt đầu tiên ở Kevđa – Nga là cầu dàn hở đã bị phá hủy năm 1875 do hệ thanh biên trên bị mất ổn định, cầu Menkhienxtein ở Thụy sĩ bị phá hủy năm 1891 do mất ổn định, Cầu dàn Quebéc qua sông St. Laurent ở Canada, bị phá hủy vì mất ổn định của thanh chịu nén trong khi xây dựng vào năm 1907[10, trg 5], bể chứa khí ở Hamburg bị phá hủy năm 1907 do thanh ghép chịu nén bị mất ổn định, cầu dàn Mojur ở Nga bị phá hủy năm 1925 do thanh ghép chịu nén bị mất ổn định, riêng ở Pháp theo số liệu của kỹ sư Girard trong khoảng thời gian từ 1955-1965 đã có 24 cầu bị phá hủy, phần lớn là do nguyên nhân mất ổn định, Cầu Tacoma ở Mỹ xây dựng hoàn thành ngày 1/7/1940 và bị phá hủy 7/11/1940 do bị mất ổn định vì tác dụng của gió [32, trg 277] v.v…

Vấn đề ổn định kết cấu được bắt đầu từ công trình nghiên cứu bằng thực nghiệm do Piter Musschenbroek công bố năm 1729, đã đi đến kết luận rằng lực tới hạn tỷ lệ nghịch với bình phương chiều dài thanh. Ba mươi năm sau bằng phân tích toán học Leonhard Euler cũng nhận được kết quả như vậy. Đầu tiên các kỹ sư không chấp nhận kết quả thí nghiệm của Piter Musschenbroek và kết quả của lý thuyết Euler ngay cả Culông [31, trg 185] cũng tiếp tục cho rằng độ cứng của cột tỷ lệ thuận với diện tích mặt cắt ngang và không phụ thuộc vào chiều dài thanh. Những quan điểm đó dựa trên các kết quả thí nghiệm của cột gỗ và cột sắt lắp ghép có chiều dài tương đối ngắn, những thanh loại này thường bị phá hoại với tải trọng nhỏ thua tải trọng Euler do vật liệu bị phá hoại mà không phải do mất ổn định ngang gây ra. E.Lamac là người đầu tiên giải thích một cách thỏa đáng sự không phù hợp giữa kết quả lý thuyết và kết quả thực nghiệm, ông ấy chỉ ra rằng lý thuyết Euler là hoàn toàn phù hợp với thực nghiệm khi bảo đảm rằng những giả thiết cơ bản của Euler về xem vật liệu là đàn hồi và điều kiện lý tưởng của các đầu cuối cần phải được bảo đảm. Những thí nghiệm sau này khi người ta rất chú ý bảo đảm của đầu cuối của thanh và bảo đảm cho lực đặt đúng tâm của thanh đã khẳng định tính đúng đắn của công thức Euler.

1.3. Các phương pháp xây dựng bài toán ổn định công trình

1.3.1. Phương pháp tĩnh

Theo phương pháp này tải trọng tới hạn sẽ là tải trọng nhỏ nhất để xẩy ra phân nhánh dạng cân bằng, tức là bên cạnh dạng cân bằng ban đầu tồn tại dạng cân bằng lân cận. Để xác định tải trọng này chỉ cần nghiên cứu sự cân bằng của hệ ở trạng thái lân cận khi cho hệ chuyển vị bé và đi tlm tải trong bé nhất tương ứng với dạng cân bằng lân cận đó.

Khảo sát cân bằng của một hệ ở trạng thái lệch khỏi dạng cân bằng ban đầu. Tính giá trị của lực ở trạng thái lệch để đối chiếu với giá trị của lực đã cho ở trạng thái cân bằng ban đầu.

Giả sử: P là lực đã cho ở trạng thái cân bằng ban đầu

P* là lực ứng với trạng thái lệch khỏi dạng cân bằng ban đầu (lực cần có để giữ hệ ở trạng thái lệch).

- Nếu P < * thì hệ cân bằng ổn định
- Nếu P = P* thì hệ cân bằng phiếm đinh
- Nếu P > P* thì hệ cân bằng không ổn định

Xét hệ một bậc tự do, một đầu ngàm đàn hồi, một đầu tự do

Sau khi khảo sát cân bằng của hệ ở trạng thái cân lệch ta có:

$P = \frac{k}{l}$ do đó:

- Với P < $\frac{k}{l}$ thì hệ cân bằng ổn định

- Với $P = \frac{k}{l}$ thì hệ cân bằng bằng phiếm định

- Với $P = \frac{k}{l}$ hệ cân bằng không ổn định

1.3.2. Phương pháp năng lượng

Phương pháp này dựa trên việc nghiên cứu năng lượng toàn phần của hệ. Khi nó đạt' cực tiểu thì hệ ở trạng thái cân bằng ổn định. Sự lệch khỏi trang thái cân bằng ổn định sẽ làm tăng năng lượng. Tải trọng tới hạn ứng với năng lượng cực tiểu.

Nguyên lý Larange - Dirichlet:

" Nếu hệ ở trạng thái cân bằng ổn định thì thế năng toàn phần đạt cực tiểu so với tất cả các vị trí lân cận vô cùng bé kể từ trạng thái cân bằng đó.

Nếu hệ ở trạng thái cân bằng không ổn định thì thế năng toàn phần đạt cực đại so với tất cả các vị trí lân cận vô cùng bé kể từ trạng thái cân bằng đó.

Nếu hệ ở trạng thái cân bằng phiếm định thì thế năng toàn phần không đổi".

Thế năng toàn phần U* của hệ ở trạng thái biến dạng gồm:

- Thế năng biến dạng của nội lực u
- Thế năng của ngoại lực U_P= -T (trái dấu với công của ngoại lực T)

$$U^* = U + U_P = U - T$$

Độ biến thiên δU* của thế năng toàn phần của hệ khi chuyển từ trạng thái đang xét sang trạng thái lân cận sẽ là

$\delta U^* = \delta U - \delta T$

Trong đó: δLP- biến thiên của thế năng toàn phần

δU - độ biến thiên của thế năng biến dạng δT - độ biến thiên của công các ngoại lực Như vậy, theo nguyên lý Lagrange - Dirichlet:

Nếu $\delta U > \delta T$ thì hệ ở trạng thái cân bằng ổn định Nếu $\delta U < \delta T$ thì hệ ở trạng thái cân bằng không ổn định Nếu $\delta U = \delta T$ thì hệ ở trạng thái cân bằng phiếm định

1.3.3. Phương pháp động lực học

Đây là phương pháp chung nhất, dựa trên việc nghiên cứu chuyển động của hệ sau khi có kích động ban đầu. Nếu chuyển động là dao động có biên độ tăng không ngừng theo thời gian thì dạng cân bằng ban đầu là không ổn định. Ngược lại, nếu hệ luôn dao động bé quanh trạng thái cân bằng ban đầu hoặc tắt dần thì đó là dạng cân bằng ổn định.

1.4. Bài toán ổn định uốn dọc của thanh và phương pháp giải

Phương trình cân bằng của thanh thẳng có tiết diện không đổi chịu tác dụng của lực P đặt ở đầu thanh có thể được viết như sau:

$$EJ\frac{d^4y}{dx^4} + P\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \qquad (1.1)$$

Phương trình trên là phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất (không có vế phải).Phương trình dao động tự do của thanh được trình bày ở chương 3 cũng thuộc loại phương trình này. Vì vậy, để tổng quát ở đây trình bày phương pháp chung tìm

nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính bậc n thuần nhất có các hệ số là hằng số [29]:

$$a_0\frac{d^ny}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_ny = 0 \quad (a_0 \neq 0) \qquad (1.2)$$

Để giải phương trình vi phân trên thì giải phương trình đặc tính của nó là:

$$a_0r^n + a_1r^{n-1} + \ldots + a_{n-1}r + a_n = 0 \qquad (1.3)$$

a) Trường hợp phương trình đặc tính có n nghiệm phân biệt thì nghiệm của phương trình vi phân (a) viết dưới dạng sau:

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + ... + c_n e^{r_n x} \qquad (1.4)$$

Các hệ số c_i được xác định từ điều kiện biên của bài toán

b) Nếu như một nghiệm r_k nào đó có nghiệm lặp lại m_k lần thì thành phần tương ứng trong nghiệm trên được thay bằng

$$(c_k + c_{k1}x + c_{k2}x^2 + ... + c_{k(m_k-1)}x^{m_k-1})e^{r_k x} \quad (1.5)$$

Trong trường hợp có hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\varphi_{j1}(\frac{d}{dx})y_1 + \varphi_{j2}(\frac{d}{dx})y_2 + ... + \varphi_{jn}(\frac{d}{dx})y_n = 0 \quad (j = 1, \quad 2, \quad 3,...n) \qquad (1.6)$$

Ở đây $\varphi_{jk}(\frac{d}{dx})$ là đa thức của $(\frac{d}{dx})$. Mỗi hàm $y_k = y_k(x)$ (k=1...n) đều có dạng (1.46) và (1.47), còn các số mũ r_l sẽ là nghiệm của hệ các phương trình đặc tính

$$D(r) \equiv \det\lfloor \varphi_{jk}(r) \rfloor = 0 \qquad (1.7)$$

Đây là hệ phương trình đặc trưng của hệ phương trình vi phân. Từ phương trình (1.7) tìm được r_{jk}, đưa các nghiệm y dạng (1.4) và (1.5) vào hệ phương trình (1.6) sẽ xác định được các tương quan của các hệ số, các hệ số tự do được xác định từ các điều kiện biên.Đó là phương pháp chung để giải phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất có hệ số là hằng số.

Trở lại phương trình uốn dọc của thanh. Phương trình (1.1) hoàn toàn giải được bằng cách giải phương trình đặc tính (1.3),tìm nghiệm theo (1.4) và (1.5), các hệ số của (1.4) và (1.5) xác định từ các điều kiện biên của thanh. Tuy nhiên, một cách giải ngắn gọn hơn khi viết hàm độ võng y của thanh dưới dạng sau

$$y = a\sin(kx) + b\cos(kx) + cx + d \qquad (1.8)$$

$$k = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$$

Thật vậy, đưa hàm (1.8) vào phương tình (1.1) ta thấy phương trình (1.1) được thỏa mãn. Vấn đề còn lại là xác dịnh các hệ số a,b,c,d. Bốn hệ số a,b,c,d của hàm y được xác định tùy theo 4 điều kiện biên y, y', y'', y''' tại hai đầu cuối thanh. Dưới đây trình bày các lời giải thanh có các điều kiện biên khác nhau.

Ví dụ: Xác định lực tới hạn của thanh hai đầu khớp

Các điều kiên biên tại liên kết khớp là chuyển vị và momen uốn bằng không. Ta có :

$$y(x=0)=0; \frac{d^2y}{dx^2}(x=0)=0 \ ; y(x=l)=0; \frac{d^2y}{dx^2}(x=l)=0$$

Đưa 4 điều kiện trên vào (1.8), nhận được 4 phương trình sau

$$b+d=0; b=0; a\sin(kl)+cl=0; ak^2\sin(kl)=0$$

Ta có $b=c=d=0$, $a\sin(kl)=0$

Nếu $a=0$ thì $y=0$, đó là nghiệm tầm thường của (1.1). Để có được nghiệm không tầm thường ($y \neq 0$), ta cho

$$\sin(kl)=0 \text{ hay } kl=n\pi, \ldots .(n=1,2,3,\ldots)$$

Thay k vào phương trình (1.8) ta có

$$P = \frac{n^2\pi^2 EJ}{l^2} \tag{1.9}$$

Với các giá trị P xác định trên, thanh có trạng thái cân bằng mới, trạng thái uốn dọc với

$$y = a\sin(\frac{n\pi}{l}x) \tag{1.10}$$

khác với trạng thái ban đầu là trạng thái nén, thanh thẳng. Ta nói thanh mất ổn định và lực P là lực tới hạn Euler. Chú ý rằng với P tới hạn xác định theo

(1.9), độ võng (1.10) của thanh vẫn hữu hạn. Tuy nhiên, theo lí thuyết dầm-cột trình bày ở trên, độ võng của thanh với lực P xác định theo (1.9) sẽ tăng lên vô cùng, nên (1.10)là biểu thức xác định lực tới hạn của thanh. Kixelov cho rằng lực P tới hạn (1.10) vẫn nằm trong miền ổn định.

Để thỏa mãn 4 điều kiện biên y, y', y'', y''' của phương trình (1.1) ta có thể dùng 4 thông số chuyển vị, góc xoay, momen uốn và lực cắt chưa biết tại hai đầu thanh làm ẩn thay cho các hệ số a,b,c,d của phương trình (1.8).Ta có phương pháp thông số ban đầu được giáo sư Kixelov sử dụng trong giáo trình động lực học và ổn định công trình của mình.

1.5. Nhận xét chương 1:

Ở trên đã trình bày các phương pháp chung để xây dựng bài toán ổn định công trình. Các phương pháp đó là: Phương tĩnh, phương pháp năng lượng và phương động lực học. Các phương pháp nói trên hoàn toàn tương đương nhau. Đã giới thiệu các định nghĩa, các khái niệm và các định lý về ổn định nhằm mục đích hiểu rõ bản chất của bài toán ổn định công trình. Đã trình bày phương pháp chung để giải các phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất và áp dụng để nghiên cứu ổn định của thanh thẳng chịu lực nén P tác dụng ở đầu thanh. Có thể nói đây là phương pháp toán duy nhất và do đó phổ biến nhất trong nghiên cứu ổn định công trình hiện nay.

CHƯƠNG 2
PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN LÝ CỰC TRỊ GAUSS

Chương này trình bày nguyên lý Gauss, sau đó trình bày phương pháp mới dựa trên nguyên lý cực trị Gauss để xây dựng và giải các bài toán cơ học dưới dạng tổng quát, chủ yếu là của cơ hệ vật rắn biến dạng. Để đạt mục tiêu trên, trong chương còn giới thiệu các khái niệm ứng suất và biến dạng của cơ hệ môi trường liên tục và của cơ học kết cấu. Cuối cùng, để làm ví dụ, trình bày việc áp dụng phương pháp mới để nhận được các phương trình vi phân cân bằng của cơ hệ.

2.1. Nguyên lí cực trị Gauss

Năm 1829 nhà toán học người Đức K.F. Gauss đã đưa ra nguyên lý sau đây đối với cơ hệ chất điểm [1,tr. 171]:

"*Chuyển động thực của hệ chất điểm có liên kết tùy ý chịu tác động bất kì ở mỗi thời điểm xảy ra một cách phù hợp nhất có thể với chuyển động của hệ đó khi hoàn toàn tự do, nghĩa là chuyển động thực xảy ra với lượng cưỡng bức tối thiểu nếu như số đo lượng cưỡng bức lấy bằng tổng các tích khối lượng chất điểm với bình phương độ lệch vị trí chất điểm so với vị trí khi chúng hoàn toàn tự do".*

Gọi m_i là khối lượng chất điểm, A_i là vị trí của nó, B_i là vị trí sau thời đoạn vô cùng bé do tác động lực ngoài và do vận tốc ở đầu thời đoạn gây ra, C_i là vị trí có thể (bị ràng buộc bởi liên kết) thì lượng cưỡng bức được viết như sau:

$$Z = \sum_i m_i \left(\overline{B_i C_i}\right)^2 \rightarrow Min \qquad (2.1)$$

Dấu tổng trong (2.1) lấy theo số chất điểm.

Sử dụng nguyên lý vận tốc ảo và nguyên lý D 'Alembert, xét hệ ở trạng thái cân bằng và cho rằng có lực với độ lớn tỉ lệ với độ dài $\overline{B_i C_i}$ tác dụng theo chiều từ C_i đến B_i, Gauss đã chứng minh nguyên lý của mình [1,tr. 172] .

Để có thể sử dụng nguyên lý Gauss cần biết đại lượng biến phân của nó. Theo [1,tr. 889], Gibbs (năm 1879) và Appell (năm 1899) đi từ các lập luận khác nhau đều nhận được nguyên lý Gauss và chỉ ra rằng đại lượng biến phân của nguyên lý này là gia tốc. Điều này có nghĩa là:

$$\delta r_i = 0 ; \quad \delta \dot{r}_i = 0 ; \quad \delta \ddot{r}_i \neq 0 \tag{2.2}$$

ở đây δ là kí hiệu biến phân (lấy vi phân khi cố định thời gian), r_i, $\dot{r}_i$ và $\ddot{r}_i$ lần lượt là vectơ toạ độ, vectơ vận tốc và vectơ gia tốc của điểm i. Chuyển dịch của chất điểm của hệ có liên kết dưới tác dụng của lực F_i sau thời đoạn dt tính theo công thức sau đây:

$$r_i + \dot{r}_i dt + \frac{1}{2}\ddot{r}_i dt^2 \tag{2.3}$$

Vì $\delta r_i = 0$ và $\delta \dot{r}_i = 0$ nên chuyển dịch của chất điểm hoàn toàn tự do (có thể hình dung ở đầu thời đoạn dt liên kết được giải phóng nhưng vẫn giữ lực tác dụng) sau thời đoạn dt là :

$$r_i + \dot{r}_i dt + \frac{1}{2}\frac{F_i}{m_i} dt^2 \tag{2.4}$$

Hiệu của (2.4) và (2.3) cho ta độ lệch vị trí của chất điểm có liên kếtso với vị trí của nó khi hoàn toàn tự do.

Có thể xem dt là hằng thì lượng cưỡng bức Z theo (2.1) được viết dưới dạng lực như sau (với độ chính xác bằng thừa số $dt^4 / 4$) :

$$Z = \sum_i m_i \left(\frac{F_i}{m_i} - \ddot{r}_i \right)^2 \rightarrow Min \tag{2.5}$$

hoặc

$$Z = \sum_i \frac{1}{m_i} \left(F_i - m_i \ddot{r}_i\right)^2 \rightarrow Min \tag{2.5a}$$

Khi tính lượng cưỡng bức theo (2.5) cần xem gia tốc là đại lượng biến phân (biến phân kiểu Gauss theo cách nói của Boltzmann). Như vậy, phương pháp tìm cực tiểu của các bài toán cơ học được xây dựng theo nguyên lý (2.5) không thể là bất kỳ mà phải là (khi không có ràng buôc nào khác):

$$\frac{\partial Z}{\partial \ddot{r}_i} = 0 \tag{2.6}$$

Điều kiện (2.6) sẽ cho ta phương trình cân bằng. Thật vậy, áp dụng (2.6) vào (2.5) ta nhận được phương trình cân bằng của hệ (ở đây lực tác dụng bằng lực quán tính). Appell và Boltzmann (năm 1897) còn cho biết nguyên lý Gauss đúng cho hệ liên kết holonom và cả hệ liên kết không holonom [1,tr. 890].

Nguyên lý Gauss (2.1) hoặc (2.5) có dạng của phương pháp bình phương tối thiểu là phương pháp cũng do Gauss đưa ra và được dùng rộng rãi trong toán học hiện đại, trong giải tích cũng như trong lời giải số. Có lẽ vì vậy nguyên lý Gauss thu hút sự chú ý của nhiều nhà khoa học, thí dụ, Hertz (năm 1894) dựa trên ý tưởng lượng cưỡng bức đưa ra nguyên lý đường thẳng nhất (đường có độ cong nhỏ nhất) hoặc Prigogine (năm 1954) và Gyarmati (năm 1965) đã xây dựng được lượng cưỡng bức của các quá trình không hồi phục trong nhiệt động lực học [2].

Các tài liệu giáo khoa về cơ học thường giới thiệu nguyên lý Gauss dưới dạng (2.5) là dạng dùng được để tính toán. Nhưng nguyên lý (2.5) với đại lượng biến phân là gia tốc chỉ là một biểu thị của nguyên lý Gauss (2.1) bởi vì đại lượng biến phân trong cơ học còn có thể là chuyyển vị và vận tốc như trình bày sau đây.

2.2. Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss

Trong bài viết của mình Gauss nêu nhận xét rằng *nguyên lý vận tốc ảo biến vấn đề tĩnh học thành vấn đề toán học thuần tuý, còn nguyên lý* D’Alembert *đưa bài toán động lực học về bài toán tĩnh học và mọi nguyên lý của cơ học hoặc nhiều hoặc ít đều có thể trực tiếp rút ra từ hai nguyên lý* *trên.* Dưới đây trình bày phương pháp dựa trên nguyên lý chuyển vị ảo để nhận được biểu thức (2.1) của nguyên lý Gauss.

Xét hệ chất điểm có liên kết tuỳ ý ở một thời điểm bất kì nào đó có nghĩa là phải đưa lực quán tính f_i của hệ tại thời điểm đó tác dụng lên hệ. Đối với hệ hoàn toàn tự do lực quán tính f_{0i} của nó bằng với ngoại lực (chỉ số ‘0’ ở chân kí tự chỉ rằng kí tự đó thuộc hệ so sánh, trường hợp này là hệ hoàn toàn tự do có cùng khối lượng và cùng chịu tác dụng lực ngoài giống như hệ có liên kết). Như vậy, các lực tác dụng lên hệ có liên kết gồm các lực $f_i = m_i\ddot{r}_i$ và các lực $f_{0i} = m_i\ddot{r}_{0i}$ (thay cho ngoại lực). Theo nguyên lý chuyển vị ảo đối với liên kết giữ (liên kết dưới dạng đẳng thức) và không giữ (liên kết dưới dạng bất đẳng thức) điều kiện cần và đủ để hệ ở trạng thái cân bằng là [1,tr. 887] :

$$\sum_i \left(f_i - f_{0i}\right)\delta r_i \le 0 \qquad (2.7)$$

Biểu thức (2.7) cũng được Fourier (năm 1798) và Ostrogradsky (năm 1838) độc lập đưa ra.

Có thể nhận xét ngay rằng phần trong ngoặc đơn của (2.7) biểu thị lực tác dụng lên hệ nên phải bằng không để hệ ở trạng thái cân bằng.

Trong biểu thức (2.7) cần xem các chuyển vị r_i độc lập đối với lực tác dụng. Cho nên từ (2.7) có thể viết:

$$Z = \sum_i \left(f_i - f_{0i}\right) r_i \to Min \qquad (2.8)$$

Trong (2.8) r_i là các biến độc lập cần tìm để bảo đảm cho Z cực tiểu. Vì chuyển vị r_{0i} của hệ hoàn toàn tự do đã biết nên biểu thức (2.8) tương đương với các biểu thức dưới đây:

$$Z = \sum_i \left(f_i - f_{0i}\right)\left(r_i - r_{0i}\right) \to Min \qquad (2.8a)$$

hoặc

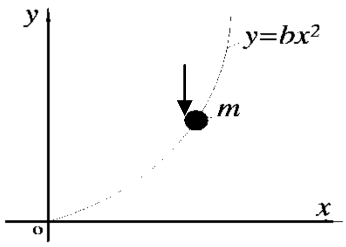
$$Z = \sum_i m_i \left[\frac{f_i}{m_i} - \ddot{r}_{0i}\right]\left(r_i - r_{0i}\right) \to Min \qquad (2.8b)$$

Dễ dàng nhận thấy (2.8b) là tích của khối lượng m_i với bình phương độ lệch vị trí chất điểm và do đó Z xác định theo (2.8) là lượng cưỡng bức của nguyên lý Gauss (với độ chính xác bằng thừa số $dt^2/2$). So với (2.5), lượng cưỡng bức Z xác định theo (2.8) biểu thị đầy đủ và rõ ràng tư tưởng của nguyên lý Gauss thể hiện ở chỗ, thứ nhất, nó cho phép so sánh hệ có liên kết với hệ hoàn toàn tự do, thứ hai, đại lượng không biết (đại lượng biến phân) trong (2.8) là chuyển vị giống như trong (2.1). Cực tiểu của (2.8) cần và phải được tìm từ điều kiện (khi không có các ràng buộc nào khác):

$$\frac{\partial Z}{\partial r_i} = 0 \qquad (2.9)$$

Điều kiện (2.9) áp dụng vào (2.8) cho ta phương trình cân bằng của cơ hệ.

Ví dụ 1 Ví dụ này lấy từ [3,tr. 64]. Viết phương trình chuyển động của khối lượng m chạy trên đường cong $y= bx^2$ trong mặt phẳng (xy), không có lực ma sát, dưới tác dụng của trường gia tốc g (Hình 1.1).



Hình 1.1

Các lực tác dụng lên khối lượng m bao gồm: lực quán tính theo chiều y, lực trọng trường theo chiều âm của y, lực quán tính theo x. Chọn hệ so sánh là hệ có cùng khối lượng m nằm trong trường gia tốc g nhưng hoàn toàn tự do. Lượng cưỡng bức được viết theo (2.8) như sau:

$$Z \;=\; (m\ddot{y} + mg)y + (m\ddot{x})x \to Min \qquad (a)$$

Thế $y = bx^2$ vào (a) ta có

$$Z \;=\; (m\ddot{y} + mg)bx^2 + (m\ddot{x})x \to Min \qquad (b)$$

Xem chuyển vị x là biến độc lập và từ điều kiện $\frac{\partial Z}{\partial x} = 0$ nhận được:

$$2bx\ddot{y} + 2bgx + \ddot{x} = 0 \qquad (c)$$

Thay $\ddot{y} = 2bx\ddot{x} + 2b\dot{x}^2$ vào (c) nhận được phương trình chuyển động của khối lượng m

$$(4b^2x^2 + 1)\ddot{x} + 4b^2x\dot{x}^2 + 2bgx = 0 \qquad \text{(d)}$$

Phương trình (d) là kết quả cần tìm.

Như nhận xét của Gauss nêu trên, có thể nói biểu thức (2.7) đã biến vấn đề tĩnh học (cân bằng lực) thành vấn đề toán học thuần tuý. Thật vậy, nếu ta dùng gia tốc là đại lượng biến phân thì tương tự như (2.7) có thể viết

$$\sum_i (f_i - f_{0i})\delta \ddot{r}_i \leq 0 \qquad (2.10)$$

với điều kiện gia tốc $\ddot{r}_I$ là đại lượng độc lập đối với lực tác dụng.

Từ (1.10) có thể viết

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i})\ddot{r}_i \to Min \qquad (2.11)$$

Trong (2.11) cần xem gia tốc $\ddot{r}_i$ là đại lượng biến phân để bảo đảm cho Z cực tiểu. Vì gia tốc $\ddot{r}_{0i}$ của hệ hoàn toàn tự do đã biết nên biểu thức (2.11) tương đương với các biểu thức dưới đây:

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i})(\ddot{r}_i - \ddot{r}_{0i}) \to Min \qquad (2.11a)$$

hoặc
$$Z = \sum_i m_i\left(\frac{f_i}{m_i} - \ddot{r}_{0i}\right)(\ddot{r}_i - \ddot{r}_{0i}) \to Min$$

$$Z = \sum_i m_i.(\ddot{r}_i - \ddot{r}_{0i})^2 \to Min \qquad (2.11b)$$

Ta thấy (2.11b) trùng với (2.5). Các gia tốc $\ddot{r}_i$ phải thỏa mãn các liên kết nếu có và điều kiện cực tiểu của (2.11) là biểu thức (2.6).

Ví dụ 2 . Làm lại ví dụ 1 (Hình 1) theo nguyên lí (2.5) hoặc biểu thức (2.11)

Khối lượng m vừa chuyển động theo x, vừa chuyển động theo y, nhưng do có liên kết $y = bx^2$ nên chỉ có một bậc tự do, thí dụ là *x*. Các lực tác dụng lên *m* bao gồm: Lực quán tính theo chiều *y*, lực trọng trường theo chiều âm của *y*, lực quán tính theo *x*. Lượng cưỡng bức *Z* viết theo (2.5) là:

$$Z = m(\frac{mg}{m} + \ddot{y})^2 + m\ddot{x}^2 \rightarrow Min \qquad \text{(a)}$$

Lấy đạo hàm ràng buộc *y=bx²* theo thời gian hai lần ta có :

$$\ddot{y} = 2bx\ddot{x} + 2b\dot{x}^2 \qquad \text{(b)}$$

Thay $\ddot{y}$ trong (a) bằng (b), nhận được

$$Z = (g + 2bx\ddot{x} + 2b\dot{x}^2)^2 + \ddot{x}^2 \rightarrow Min \qquad \text{(c)}$$

Xem gia tốc $\ddot{x}$ là biến độc lập và từ điều kiện $\partial Z / \partial \ddot{x} = 0$ ta có phương trình chuyển động của khối lượng m như sau :

$$(4b^2x^2 + 1)\ddot{x} + 4b^2x\dot{x}^2 + 2bgx = 0 \qquad \text{(d)}$$

Phương trình (d) là kết quả cần tìm.

Tương tự, cũng có thể dùng vận tốc $\dot{r}_i$ là đại lượng biến phân, khi đó lượng cưỡng bức Z được viết :

$$Z = \sum_i \left(f_i - f_{0i}\right) \dot{r}_i \rightarrow Min \qquad (2.12)$$

với điều kiện vận tốc $\dot{r}_i$ là biến độc lập và thoả mãn các liên kết nếu có. Trong trường hợp này điều kiện cực tiểu của nguyên lý(2.12) sẽ là (khi không có ràng buộc nào khác) :

$$\frac{\partial Z}{\partial \dot{r}_i} = 0 \qquad (2.13)$$

Làm lại bài toán của ví dụ 1 với đại lượng biến phân là vận tốc (biểu thức 2.12) cũng cho ta kết quả đúng đắn.

Tóm lại, các nguyên lý (2.5) hoặc (2.11) với đại lượng biến phân là gia tốc độc lập đối với lực tác dụng, nguyên lý (2.8) với đại lượng biến phân là chuyển vị độc lập đối với lực tác dụng và nguyên lý (2.12) với đại lượng biến phân là vận tốc độc lập đỗi với lực tác dụng đã biến phương trình cân bằng lực (vấn đề cơ học) thành các bài toán toán học thuần tuý và có thể được phát biểu như sau : *Chuyển động thực của cơ hệ xảy ra khi lượng cưỡng bức Z*

- *xác định theo (2.5) thì được tìm theo gia tốc , điều kiện (2.6)*
- *xác định theo (2.8) thì được tìm theo chuyển vị, điều kiện (2.9)*

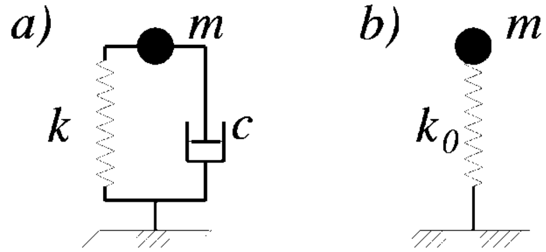
xác định theo (2.12) thì được tìm theo vận tốc, điều kiện (2.13) là cực tiểu.

Đương nhiên, các đại lượng biến phân gia tốc, chuyển vị và vận tốc phải thỏa mãn các điều kiện liên kết của hệ.

Để có thể áp dụng cho cả các bài toán tĩnh của môi trường liên tục ta sẽ dùng nguyên lý (2.8) với đại lượng biến phân là chuyển vị và điều kiện cực tiểu là (2.9). Nguyên lí (2.5) không cho phép giải các bài toán tĩnh. Do đó, cách trình bày nguyên lý Gauss dưới dạng này đã hạn chế việc sử dụng nguyên lý trong cơ học.

Có thể mở rộng nguyên lý Gauss bằng cách so sánh hệ cần tính với hệ có liên kết tuỳ ý chịu tác dụng của lực giống như hệ cần tính mà lời giải của nó đã biết. Khi đó thay cho lực ngoài ta dùng lực liên kết và lực quán tính của hệ so sánh với dấu ngược lại để tác động lên hệ cần tính. Điều này là hiển nhiên bởi vì ngoại lực luôn cân bằng với nội lực. Xét ví dụ minh họa sau

Ví dụ 3 Hệ cần tính là khối lượng m có liên kết lò xo độ cứng k và liên kết nhớt với hệ số nhớt c chịu tác dụng lực p(t) (Hình 2.2). Xét dao động thẳng đứng u(t) của m so với vị trí cân bằng tĩnh của nó. Bài toán có một bậc dao động tự do. Ta chọn hệ so sánh có khối lượng m_0 và liên kết lò xo độ cứng k_0 cùng chịu lực p(t) (Hình 2.2.b).



Hình 2.2 a) Hệ cần tính; b) Hệ so sánh.

Dao động $u_0(t)$ của hệ so sánh (so với vị trí cân bằng tĩnh của nó) xác định từ phương tình cân bằng sau :

$$m_0\ddot{u}_0 + k_0u_0 = p(t) \qquad \text{(a)}$$

Lực tác dụng lên khối lượng m gồm có: lực quán tính $m\ddot{u}$, lực cản lò xo ku, lực cản nhớt $c\dot{u}$ và lực p(t) được thay bằng nội lực của hệ so sánh. Lượng cưỡng bức theo (2.8) viết được:

$$Z = (m\ddot{u} + c\dot{u} + ku - m_0\ddot{u}_0 - k_0u_0)u \to Min \qquad \text{(b)}$$

Phần trong dấu ngoặc đơn của (b) biểu thị lực tác dụng và theo nguyên lý chuyển vị (2.8) cần xem chuyển vị u là biến độc lập đối với lực tác dụng thì từ điều kiện $\partial Z/\partial u = 0$ nhận được phương trình cân bằng của hệ cần tính

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = m_0\ddot{u}_0 + k_0u_0 \qquad \text{(c)}$$

hay chú ý tới (a) ta có

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \qquad \text{(d)}$$

Nhìn vào (c) và (d) thấy rằng thay cho việc giải phương trình vi phân cân bằng (d) của hệ cần tính ta có thể giải phương trình (c) ứng với từng thời điểm. Vế phải của (c) có thể là nghiệm riêng hoặc nghiệm cơ bản (trường hợp p(t) là xung đơn vị) của (d) hoặc, một cách tổng quát, là thể hiệncủa p(t) trên hệ bất kì nào khác (lời giải của hệ bất kì khi chịu tác động của p(t)). Nhận xét này rất hữu ích bởi vì nó cho ta một phương pháp nữa để giải các phương trình vi phân phức tạp, đặc biệt là đối với các bài toán có điều kiện biên ở vô hạn hoặc là khi giải bằng số.

Lượng cưỡng bức Z theo (b) có thể viết dưới dạng sau:

$$Z = Z1 + Z2 + Z3 \to Min \qquad \text{(e)}$$

$$Z1 = \frac{1}{k}(ku - k_0u_0)^2,\ Z2 = 2c\dot{u}u,\ Z3 = 2m(\ddot{u} - \ddot{u}_0)u \qquad \text{(f)}$$

Ở đây Z1 viết dưới dạng bình phương tối thiểu. Vì Z1 được viết dưới dạng bình phương tối thiểu nên các đại lượng Z2 và Z3 phải nhân với hệ số 2. Các biểu thức lượng cưỡng bức (b) và (e), (f) là tương đương.

Những nhận xét rút ra từ ví dụ minh họa nêu trên áp dụng đúng cho bất kì hệ nào khác.

Trình bày trên cho thấy có thể dùng hệ có liên kết bất kì để làm hệ so sánh cho nên có thể mở rộng biểu thức (2.8) như sau :

$$Z = \sum_i \left(f_i - f_{0i} \right) r_i \rightarrow Min \qquad (2.14)$$

với f_i là nội lực bao gồm lực quán tính và lực liên kết nếu có của hệ cần tính, f_{0i} là nội lực và lực liên kết đã biết của hệ so sánh bất kỳ chịu tác dụng lực ngoài giống như hệ cần tính.

Chú ý rằng khi sử dụng biểu thức (2.14) cần xem chuyển vị r_i là đại lượng độc lập đối với lực và phải thỏa mãn các điều kiện liên kết nếu có. Bởi vì cực tiểu của lượng cưỡng bức Z phải được tìm theo (2.9) (khi không có các ràng buộc nào khác) nghĩa là phải giải phương trình cân bằng của cơ hệ nên bài toán luôn có nghiệm và nghiệm là duy nhất

Phương pháp của nguyên lý (2.14) cho phép dùng hệ so sánh bất kì. Đại lượng biến phân của (2.14) là chuyển vị, điều kiện cực tiểu của nó là biểu thức (2.9). Phương pháp này do GS. TSKH Hà Huy Cương đề xuất và được gọi là phương pháp nguyên lý cực trị Gauss.

Biểu thức (2.7) trong các giáo trình cơ học thường mang dấu bằng, nghĩa là chỉ xét trường hợp liên kết giữ và khi đó từ (2.7) sẽ nhận được nguyên lý công ảo. Có thể nói biểu thức (2.7) với dấu nhỏ thua hoặc bằng là sự khác biệt cơ bản giữa nguyên lý cơ học của Gauss với cơ học dựa trên nguyên lý công ảo hiện dùng.

2.3. Cơ hệ môi trường liên tục: ứng suất và biến dạng

Trong mục này trình bày phương pháp nguyên lý Gauss đối với cơ hệ môi trường liên tục. Muốn vậy cần biết khái niệm ứng suất và biến dạng của môi trường liên tục. Để trình bày gọn dưới đây dùng các đại lượng tenxơ với cách hiểu như sau [4 ,tr.196]:

$$a_i a_i = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$a_{kk} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

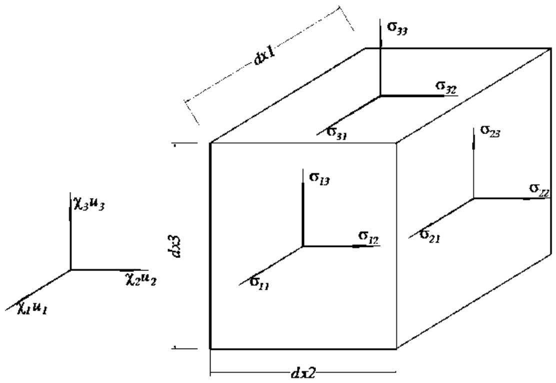
và hệ số Kronecker

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{khi} \quad i = j$$

$$\delta_{ij} = 0 \quad \text{khi} \quad i \neq j$$

với i = 1,2,3 ; j = 1,2,3 ; k = 1,2,3 đối với không gian 3 chiều.

Có thể nói đối tượng nghiên cứu của cơ hệ môi trườngliên tục trong toạ độ vuông góc là phân tố khối chữ nhật (ba chiều, kích thước vô cùng bé) hoặc phân tố chữ nhật (hai chiều, kích thước vô cùng bé) được tách ra từ môi trường (hình 2.3).



Hình 2.3. Trạng thái ứng suất phân tố

Khi đó lí thuyết ứng suất cho thấy ngoài các lực thông thường (lực gây các chuyển vị tịnh tiến trong cơ hệ chất điểm) trên bề mặt phân tố còn có các ứng suất tác dụng . Có 9 ứng suất σ_{ij} tác dụng lên bề mặt phân tố. Thứ nguyên cuả ứng suất bằng lực chia cho đơn vị diện tích.

Từ điều kiện cân bằng lực và momen sẽ nhận được phương trình cân bằng tĩnh của phân tố

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \qquad (2.15)$$

Trong (2.15) σ_{ij} là ứng suất , $\sigma_{ij,j}$ biểu thị đạo hàm của ứng suất theo toạ độ không gian, $\partial\sigma_{ij}/\partial x_j = \sigma_{ij,j}$, b_i là lực khối (lực khối xem như là lực cản). Nếu không có lực momen khối thì từ phương trình cân bằng sẽ có :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \qquad (2.16)$$

Số ứng suất độc lập tác dụng lên bề mặt phân tố chỉ còn 6 . Lí thuyết ứng suất cho thấy khi biết trạng thái ứng suất phân tố thì sẽ xác định được trạng thái lực tại điểm đó của môi trường và ngươc lại .

Khi chịu tác dụng ngoại lực, phân tố chuyển động và biến hình. Lý thuyết biến dạng cho thấy ngoài các chuyển vị ui phân tố còn chịu các biến dạng εi j . Nếu xem biến dạng là bé (bình phương hoặc tích hai biến dạng là nhỏ so với chính nó) thì các biến dạng được xác định theo các phương trình sau:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} \right) \qquad (2.17)$$

Các ε_{ij} là các đại lượng không thứ nguyên. Tương tự như tenxơ σ_{ij}, tenxơ ε_{ij} đối xứng và có 6 biến dạng độc lập tương ứng với 6 ứng suất.

Từ (2.17) thấy rằng trạng thái chuyển vị xác định duy nhất trạng thái biến dạng, nhưng ngược lại không đúng bởi vì có những chuyển vị không gây biến dạng (chuyển vị của vật rắn tuyệt đối). Ngoài các phương trình nêu trên, để bảo đảm tính liên tục của môi trường còn có các các phương trình về điều kiện không bị gián đoạn.

Tùy theo tính chất cơ học của vật liệu môi trường mà có các liên hệ khác nhau giữa ứng suất và biến dạng. Do có 6 ứng suất và 6 biến dạng nên một cách tổng quát cần biết 36 thông số tính chất vật liệu. Tuy nhiên từ điều kiện biểu thị năng lượng biến dạng phải giống nhau con số 36 rút xuống còn 21. Đối với vật liệu đẳng hướng chỉ còn 2 thông số tính chất vật liệu độc lập được chọn trong số các thông số sau: hai hằng số Lamé μ và λ , môđun Young E , môđun trượt G và hệ số Poisson ν, giữa chúng có các liên hệ sau đây :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad , \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2.18}$$

Đối với vật liệu đồng nhất , đẳng hướng, tuân theo định luật Húc (Hooke) thì liên hệ giữa ứng suất và biến dạng sẽ là :

$$\sigma_{ij} = 2G\,(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}) \tag{2.19}$$

Từ công thức (2.19) thấy rằng ứng suất σ_{ij} không những phụ thuộc vào biến dạng ε_{ij} theo phương của nó mà còn phụ thuộc vào các biến dạng theo các phương khác thông qua hệ số Poisson ν. Hệ số 2G để tiện trình bày sau này sẽ được gọi là *độ cứng của biến dạng*.

Những trình bày trên cho thấy đối với cơ hệ môi trường liên tục cần xem các biến dạng ε_{ij} là độc lập đối với nhau và được xác định theo phương trình (2.17), cần xét các phương trình về điều kiện không bị gián đoạn của môi trường và liên hệ giữa ứng suất và biến dạng. Đối với môi trường đàn hồi, đồng nhất, đẳng hướng liên hệ ứng suất - biến dạng lấy theo (2.19) và điều kiện không bị gián đoạn của môi trường tự động thoả mãn khi biểu thị ứng suất qua chuyển vị.

Tóm lại, khác với cơ hệ chất điểm, trong môi trường liên tục ngoài lực khối và lực quán tính là các lực tác dụng gây chuyển vị, còn phải xét thêm các ứng suất σ_{ij} gây ra các biến dạng ε_{ij} .

Từ nhận xét vừa nêu, có thể sẽ có ích đối với nhận thức khi đưa ra các nhận định tổng quát về mối tương quan giữa cơ học chất điểm và cơ hệ môi trường liên tục như sau:

− Khái niệm cơ bản của cơ chất điểm là chất điểm, các lực tác dụng lên chất điểm gây ra các chuyển vị, đặc trưng của chất điểm là khối lượng;

− Khái niệm cơ bản của cơ hệ môi trường liên tục là mặt cắt phân tố, các ứng suất gây ra các biến dạng, các đặc trưng của mặt cắt phân tố là các độ cứng biến dạng tương ứng với các ứng suất. Các độ cứng này xác định tùy theo tính chất vật liệu môi trường. Trong cơ hệ môi trường liên tục còn có lực khối và lực quán tính gây chuyển vị giống như trong cơ hệ chất điểm. Do đó, có thể tóm tắt mối tương quan vừa nêu dưới dạng:

Chất điểm	$\Leftrightarrow$	*Mặt cắt phân tố*
Lực	$\Leftrightarrow$	*Lực*
		Các ứng suất
Chuyển vị	$\Leftrightarrow$	*Chuyển vị*
		Biến dạng
Khối lượng	$\Leftrightarrow$	*Khối lượng*
		Các độ cứng biến dạng

Kí hiệu $\Leftrightarrow$ chỉ sự tương đương giữa các khái niệm. Với cách hiểu này cũng dễ dàng xây dựng phiếm hàm lượng cưỡng bức tương tự như (2.14) đối với cơ hệ môi trường liên tục bất kỳ được trình bày sau đây.

Trước tiên, ta dùng hệ so sánh là hệ chất điểm có cùng khối lượng, cùng chịu tác dụng lực ngoài và hoàn toàn tự do. Đối với môi trường liên tục cần xét thêm ứng suất và biến dạng nên lượng cưỡng bức Z của hệ viết tương tự (2.14) như sau:

$$Z....=..Z1+Z2 \rightarrow Min$$

$$Z1=\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dV \quad , \quad Z2=\int_V(\rho\ddot{u}_i u_i + b_i u_i - \rho\ddot{u}_{0i}u_i)dF \qquad (2.20)$$

Trong (2.20) V là thể tích vật thể, ρ là khối lượng đơn vị. Lực quán tính là lực cản nên trong (2.20) mang dấu cộng. Lượng cưỡng bức *Z1* xét ứng suất của môi trường liên tục cần tính, hệ chất điểm so sánh không có ứng suất. Lượng cưỡng bức *Z2* xét lực khối và lực quán tính của môi trường liên tục, lực quán tính của hệ chất điểm so sánh. Các lực này đều gây chuyển vị *u*.

Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, trong (2.20) cần xem các biến dạng ε_{ij} là độc lập đối với các ứng suất σ_{ij} và các chuyển vị u_i là độc lập đối với lực tác dụng (ở đây là lực khối và lực quán tính) và độc lập đối với nhau. Điều kiện cực tiểu của (2.20) là

$$\frac{\partial Z1}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial Z2}{\partial u_i} = 0 \qquad (2.21.a)$$

Nếu biến dạng ε_{ij} biểu thị qua chuyển vị (công thức (2.17)) thì điều kiện cực tiểu của (2.20) được viết như sau:

$$\frac{\partial Z1}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial u_i} + \frac{\partial Z2}{\partial u_i} = 0 \qquad (2.21.b)$$

Từ điều kiện (2.21.a) nhận được

$$\sigma_{ij,j} + b_i + \rho \ddot{u}_i - \rho \ddot{u}_{0i} = 0 \qquad (2.22)$$

Phương trình (2.22) là phương trình vi phân cân bằng của cơ hệ môi trường liên tục dưới dạng ứng suất.

Nếu tại điểm đang xét không có lực ngoài tác dụng thì $\rho \ddot{u}_{0y}$ bị triệt tiêu, phương trình (2.22) là phương trình cân bằng động lực học thường gặp của cơ hệ môi trường liên tục. Trường hợp bài toán tĩnh, $\rho \ddot{u}_i$ cũng bằng không, phương trình (2.22) khi đó trùng với (2.15).

Dễ dàng nhận được phương trình vi phân cân bằng dưới dạng chuyển vị bằng cách đưa liên hệ ứng suất - biến dạng vào phương trình (2.22) hoặc vào phiếm hàm (2.20).Trong mục (2.5) dưới đây sẽ trở lại vấn đề này.

Cần nêu nhận xét rằng biểu thức (2.20) cho phép so sánh cơ hệ môi trường liên tục với cơ hệ chất điểm hoàn toàn tự do khi hai hệ cùng chịu lực ngoài như nhau. Trong (2.20) không chứa các thông số tính chất vật liệu của môi trường nên nó đúng với môi trường bất kỳ.

Xét các trường hợp khác của phiếm hàm lượng cưỡng bức (2.20):

− Trường hợp không dùng hệ so sánh thì phải đưa lực ngoài pi vào (2.20). Lực pi thường tác dụng lên bề mặt Ω của vật nên ta viết

$$Z = \int_V (\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + \rho\ddot{u}_i u_i - b_i u_i)dv - \int_\Omega p\ u_i d\Omega \rightarrow Min \qquad (2.23)$$

– Có thể dùng hệ so sánh cũng là cơ hệ môi trường liên tục có liên kết bất kỳ với điều kiện hai hệ cùng chịu lực ngoài giống nhau:

$$Z = \int_V \left[(\sigma_{ij} - \sigma_{0ij})\varepsilon_{ij} + (\rho\ddot{u}_i - \rho_0\ddot{u}_{0i})u_i - (b_i - b_{0i})u_i\right]dv \rightarrow Min \qquad (2.24)$$

Giống như đã trình bày ở ví dụ 3, thực chất của phương pháp nguyên lý cực trị Gauss là dùng nội lực của hệ so sánh tác dụng lên hệ cần tìm.

– Đối với bài toán tĩnh, lực quán tính triệt tiêu, khi không xét lực khối, biểu thức (2.24) có dạng:

$$Z = \int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{0ij})\varepsilon_{ij} dv \rightarrow Min \qquad (2.25)$$

– Đối với bài toán tĩnh, không xét lực khối, không dùng hệ so sánh, từ (2.23) ta có:

$$Z = \int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dv - \int_\Omega p_i u_i d\Omega \rightarrow Min \qquad (2.26)$$

Các chuyển vị u_i và biến dạng ε_{ij} (xác định theo (2.17)) trong các phiếm hàm (2.20, 2.23, 2.24, 2.25) và (2.26) là những đại lượng độc lập đối với lực tác dụng và ứng suất và phải thoả mãn các điều kiện liên kết nếu có. Chuyển động thực của cơ hệ môi trường liên tục xảy ra khi cực tiểu các phiếm hàm lượng cưỡng bức vừa nêu theo điều kiện (2.21) nếu không có các điều kiện liên kết nào khác.

Đối với môi trường đàn hồi, quan hệ ứng suất – biến dạng xác định theo (2.19), ta có thể viết lượng cưỡng bức dưới dạng bình phương tối thiểu như nhận xét đã nêu ở ví dụ 3:

$$Z = \int_V \frac{1}{2G}(\sigma_{ij} - \sigma_{0ij})^2 dv + 2\int_V (f_{mi} - f_{0mi})u_i dv \rightarrow Min \qquad (2.27a)$$

hoặc $$Z = \int_V 2G(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{0ij})^2 dv + 2\int_V m_i(\ddot{u}_i - \ddot{u}_{0i})u_i dv \rightarrow Min$$

Tương tự, khi không dùng hệ so sánh thì phải xét lực ngoài, có thể viết lại (2.26) như dưới đây

$$Z = \int_V \frac{1}{2G}(\sigma_{ij})^2 dv + 2\int_V f_{mi} u_i dv - 2\int_\Omega p_i u_i d\Omega \rightarrow Min \qquad (2.27b)$$

hoặc
$$Z = \int_V 2G(\varepsilon_{ij})^2 dv + 2\int_V (m_i \ddot{u}_i) u_i dv - 2\int_\Omega p_i u_i d\Omega \rightarrow Min$$

Trong (2.27) $f_{mi} = m_i \ddot{u}_i$ và $f_{0mi} = m_{0i} \ddot{u}_{0i}$ là lực quán tính của hệ cần tính và hệ so sánh, liên hệ giữa ứng suất và biến dạng xác định theo biểu thức (2.19). Trong (2.27), cần xem các biến dạng ε_{ij} là các đại lượng biến phân độc lập đối với các ứng suất σ_{ij}, các chuyển vị u_i là độc lập đối với lực tác dụng p và lực quán tính.

Tích phân thứ nhất trong (2.27) liên quan đến ứng suất đàn hồi có trọng số là 2G, Trở lên trình bày các phiếm hàm lượng cưỡng bức, đối với cơ hệ chất điểm là các biểu thức (2.14), đối với môi trường liên tục là biểu thức (2.20) và các trường hợp khác của nó là các biểu thức (2.23), (2.24), (2.25), (2.26) và (2.27). Trongcác phiếm hàm này cầnxem các biến dạng ε_{ij}xác định theo (2.17) và các chuyển vị $u_i$là các đại lượng không biết độc lập đối với ứng suất và lực tác dụng, thỏa mãn các điều kiện liên kết nếu có và các điều kiện không bị gián đoạn (riêng đối với môi trường liên tục). Cực tiểu các phiếm hàm này theo điều kiện (2.21) cho ta chuyển vị thực của cơ hệ cần tính.

Phương pháp nguyên lí cực trị Gauss là phương pháp mới trong cơ học môi trường liên tục.

2.4. Cơ học kết cấu

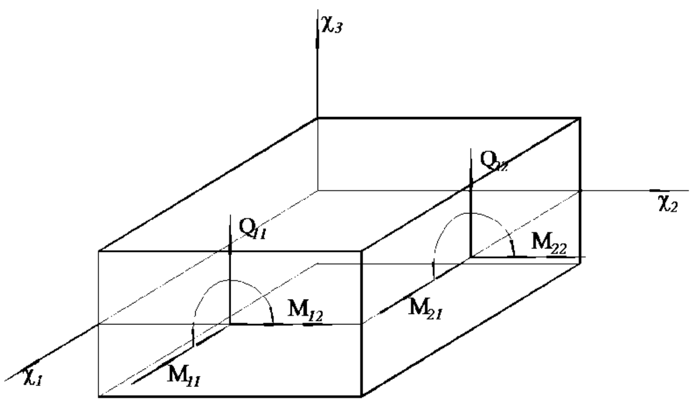
Môn sức bền vật liệu và cơ học kết cấu nghiên cứu trạng thái ứng suất biến dạng của dầm, thanh, tấm, khung, dàn v.v…là những kết cấu có một hoặc hai kích thước nhỏ thua nhiều lần so với các kích thước còn lại. Trong trường hợp này để đơn giản nhưng kết quả tính vẫn bảo đảm độ chính xác đủ dùng trong thực tế (kiểm tra bằng thí nghiệm), có thể dùng mặt cắt kết cấu thay cho mặt cắt phân tố và các ứng suất tác dụng lên mặt cắt được qui về thành các nội lực tác dụng lên mặt trung bình (đường trung bình đối với dầm) như lực dọc N, momen uốn M, lực cắt Q v.v… Muốn vậy cần đưa vào các giả thiết sau đây:

- Khi chịu lực dọc trục, ứng suất pháp được xem là phân bố đều trên tiết diện.
- Khi chịu lực ngang (tác dụng thẳng góc với mặt trung bình) có các giả thiết sau đây:

Mặt trung bình của tấm và trục trung bình của dầm không có nội lực và do đó không bị biến dạng.

Giả thiết tiết diện phẳng: tiết diện sau khi biến dạng vẫn phẳng.

Không xét ứng suất nén giữa các lớp theo chiều cao tiết diện, nghĩa là xem các lớp song song với mặt trung bình (tấm) làm việc ở trạng thái ứng suất phẳng.



Hình 2.4. Nội lực của phân tố tấm

Sử dụng các giả thiết trên, các momen uốn và xoắn và lực cắt tác dụng lên mặt cắt kết cấu xác định theo các biểu thức dưới đây (hình 2.4):

$$M_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} x_3 dx_3 \,, \quad M_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} x_3 dx_3 \,, \quad M_{12} = M_{21} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} x_3 dx_3$$

$$Q_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} dx_3 \,, \quad Q_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23} dx_3 \qquad (2.28)$$

ở đây h là chiều cao tiết diện.

Để có thể áp dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss cần biết các 'biến dạng' của tiết diện do momen uốn gây ra. Với các giả thiết nêu trên chỉ cần biết chuyển vị thẳng đứng w của trục hoặc mặt trung bình của kết cấu (còn gọi là đường độ võng, đường đàn hồi) thì trong trường hợp uốn thuần tuý có thể tính được các chuyển vị theo các phương còn lại và dùng các phương trình (2.17) để xác định các biến dạng. Kết quả cho thấy các biến dạngtrong mặt phẳng tấm (hoặc thớ dầm) phân bố tuyến tính theo chiều cao và tỉ lệ với độ cong χ_{ij} của mặt võng (i=1,2; j=1,2):

$$\varepsilon_{ij} = x_3 \chi_{ij} \;;$$

$$\chi_{11} = -w_{,11} \,, \quad \chi_{22} = -w_{,22} \,, \quad \chi_{12} = -w_{,12} \,. \qquad (2.29)$$

Dấu trừ trong công thức xác định độ cong (2.29) là do xem chuyển vị w có chiều dương hướng xuống dưới và dấu nội lực như trên hình 2.4. Như vậy, độ cong χ_{ij} của các lớp song song với mặt trung bình là giống nhau và đó là 'biến dạng' do momen M_{ij} gây ra. Biết được biến dạng ε_{ij} xác định theo (2.29) sẽ tính được momen M_{ij} theo (2.28). Liên hệ giữa momen uốn và 'biến dạng uốn' của tiết diện như sau:

$$M_{11} = D(\chi_{11} + \nu\chi_{22}) \,, \quad M_{22} = D(\chi_{22} + \nu\chi_{11}) \,, \quad M_{12} = D(1-\nu)\chi_{12} \qquad (2.30)$$

ở đây D là độ cứng uốn

$$\text{đối với dầm } D = EJ = \frac{Eh^3}{12}, \quad \text{đối với tấm } D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

và D (1 - ν) được gọi là độ cứng xoắn (độ cứng của biến dạng xoắn).

(ở đây cần chú ý rằng do có liên kết gối tựa nên mặt trung bình có thể bị biến dạng trong mặt phẳng của nó, giả thiết mặt trung bình là mặt trung hoà nêu trên không được thoả mãn.Trong trường hợp này độ võng phải là bé so với chiều cao dầm hoặc chiều dày tấm để có thể bỏ qua ứng suất tác dụng trong mặt trung bình).

Trong trường hợp có lực cắt Q_{ii} thì chúng được xác định từ điều kiện cân bằng phân tố, ta có:

$$Q_{11} = \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2}, \qquad Q_{22} = \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_1}$$

hay $Q_{11} = D\,[(\chi_{11})_{,1} + (\chi_{12})_{,2}]$,$Q_{22} = D[\,(\chi_{12})_{,1} + (\chi_{22})_{,2}]$ (2.31)

Từ công thức (2.28) có thể thấy độ cứng chịu cắt cuả tiết diện là Gh và biến dạng trượt γ_{11} và γ_{22} tương ứng với lực cắt sẽ bằng góc xoay của đường đàn hồi:

$$\gamma_{11} = w_{,1} = \frac{\partial w}{\partial x_1}, \qquad \gamma_{22} = w_{,2} = \frac{\partial w}{\partial x_2} \tag{2.32}$$

Trong lý thuyết kết cấu chịu uốn nêu trên, độ võng của kết cấu chỉ do mo-men uốn gây ra, không xét biến dạng trượt do lực cắt gây ra.

Đối với các lực N_{ij} tác dụng lên mặt trung bình của tiết diện thì các biến dạng ε_{ij} (i=1,2;j=1,2) vẫn xác định theo (2.17). Độ cứng của tiết diện chịu nén kéo sẽ là Eh.

Trong các công thức vừa nêu lấy i=1,j=1 đối với bài toán một chiều (thanh, dầm), chiều rộng dầm bằng đơn vị.

Do sử dụng momen uốn của tiết diện nên phải đưa thêm các liên kết về xoay để mô tả các điều kiện biên của nó: liên kết khớp cho phép tiết diện xoay tự do, momen bằng không; liên kết ngàm không cho tiết diện xoay, momen khác không.

Sau khi đã biết 'các biến dạng' tương ứng với các nội lực của tiết diện (momen uốn, lực cắt, lực dọc trục v.v..) và độ cứng của chúng thì dễ dàng xây dựng các bài toán cơ học kết cấu theo phương pháp nguyên lí cự trị Gauss.

Ta có thể viết một cách tổng quát lượng cưỡng bức Z của bài toán cơ học kết cấu dưới dạng tương tự như (2.25) (bài toán tĩnh):

$$Z= \int_V [(M_{ij}-M_{0ij})\chi_{ij} + (Q_{ii}-Q_{0ii})\gamma_{ii} + (N_{ij}-N_{0ij})\varepsilon_{ij}\}dv \to Min \qquad (2.33a)$$

hoặc dưới dạng bình phương tối thiểu

$$Z= \int_V \frac{1}{Docung}\,(\text{Nội lực hệ cần tính- Nội lực hệ so sánh})^2\, dv \to Min \qquad (2.33b)$$

và trong trường hợp không dùng hệ so sánh ta có

$$Z= \int_V \frac{1}{Docung}(\text{ Nội lực hệ cần tính})^2\, dv - 2\int_\Omega p_i w_i d\Omega \to Min \qquad (2.33c)$$

ở đây V là chiều dài dầm hoặc diện tích tấm, Ω là chiều dài hoặc diện tích phạm vi đặt lực. Trong (2.33) cần xem các độ cong χ_{ij} là các đại lượng độc lập đối với nội lực momen uốn M_{ij}, các biến dạng trượt γ_{11} và γ_{22} là các đại lượng độc lập đối với lực cắt Q_{11} và Q_{22}, các biến dạng trong mặt trung bình ε_{ij} là các đại lượng độc lập đối với N_{ij} và đều là các đại lượng biến phân của bài toán. Điều đó chỉ ra rằng cực tiểu của lượng cưỡng bức Z , biểu thức(2.33) , chỉ có thể tìm từ điều kiện:

$$\frac{\partial Z}{\partial \chi_{ij}}\frac{\partial \chi_{ij}}{\partial W} + \frac{\partial Z}{\partial \gamma_{ii}}\frac{\partial \gamma_{ii}}{\partial W} + \frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_{ij}}\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial W} + \frac{\partial Z}{\partial W} = 0 \qquad (2.34)$$

Bởi vì các biến dạng uốn, biến dạng cắt v.v…là hàm của độ võng và độ võng là hàm của tọa độ nên điều kiện (2.34) được tính bằng phép tính biến phân và sẽ cho ta phương trình cân bằng tĩnh của kết cấu (xem mục 2.5 dưới đây).

Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss với biểu thức lượng cưỡng bức Z viết theo (2.33) và điều kiện cực tiểu (2.34) là phương pháp mới, tổng quát trong cơ học kết cấu.

2.5. Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss và các phương trình cân bằng của cơ hệ

Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, nếu như biết được các lực và nội lực của cơ hệ và các chuyển vị và biến dạng do chúng gây ra thì có thể viết được lượng cưỡng bức Z của hệ. Dùng phép tính biến phân với đại lượng biến phân là các chuyển vị độc lập đối với lực tác dụng và biến dạng độc lập với ứng suất sẽ nhận được phương trình vi phân cân bằng của hệ (phương trình Ơ-le (Euler) của phiếm hàm Z). Sau đây trình bày các ví dụ sử dụng phương pháp vừa nêu để tìm phương trình cân bằng.

2.5.1. Phương trình cân bằng tĩnh đối với môi trường đàn hồi, đồng nhất, đẳng hướng

Ba phương trình vi phân cân bằng của cơ hệ dưới dạng ứng suất là phương trình (2.22). Thế các ứng suất σ_{ij} xác định theo (2.19) vào (2.22) sẽ có các phương trình vi phân cân bằng của cơ hệ đàn hồi đồng nhất đẳng hướng dưới dạng chuyển vị. Ở đây trình bày cách tính trực tiếp để nhận được các phương trình đó (trường hợp bài toán tĩnh).

Liên hệ biến dạng - chuyển vị (2.17) và ứng suất - biến dạng (2.19) được viết lại trong hệ tọa độ (x,y,z) dưới dạng thường dùng với u ,v và w là các chuyển vị tương ứng theo các chiều (x,y,z) như sau:

$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$, $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$, $\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} +$ $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$,

$$\sigma_x = 2G\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right),\ \sigma_y = 2G\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right),\ \sigma_z = 2G\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right)$$

$$\tau_{xy} = G\,\gamma_{xy},\ \tau_{xz} = G\,\gamma_{xz},\ \tau_{yz} = G\,\gamma_{yz} \qquad (2.34)$$

ở đây $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ - biến dạng thể tích của phân tố.

Ta viết lượng cưỡng bức Z theo (2.25) cho mỗi ứng suất và lực khối b:

$$Z1 = \int_V 2G\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right)\frac{\partial u}{\partial x}\,dV, \qquad Z2 = \int_V 2G\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right)\frac{\partial v}{\partial y}\,dV$$

,

$$Z3 = \int_V 2G\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right)\frac{\partial w}{\partial z}\,dV, \qquad Z4 = \int_V G\,\gamma_{xy}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)dV,$$

$$Z5 = \int_V G\,\gamma_{xz}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)dV, \qquad Z6 = \int_V G\,\gamma_{yz}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)dV$$

$$Z7 = \int_V b_x u\,dV,\ Z8 = \int_V b_y v\,dV,\ Z9 = \int_V b_z w\,dV \qquad (2.35)$$

Lượng cưỡng bức Z bằng tổng các lượng cưỡng bức thành phần :

$$Z = Z1+Z2+Z3+Z4+Z5+Z6+Z7+Z8+Z9 \quad \rightarrow Min$$

Từ điều kiện cực tiểu (1.21) của phiếm hàm Z viết lại dưới dạng

$$\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_{ij}}\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial u} + \frac{\partial Z}{\partial u} = 0,\ \frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_{ij}}\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial v} = 0,\ \frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_{ij}}\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial w} + \frac{\partial Z}{\partial w} = 0 \qquad (2.36)$$

sẽ nhận được ba phương trình vi phân cân bằng tĩnh. Bởi vì u, v và w là các hàm của tọa độ (x,y,z), không phải là biến độc lập , nên phép tính (2.36) là phép tính biến phân. Phương trình cân bằng thứ nhất với u là hàm chưa biết nhận được với chú ý rằng

- đại lượng biến phân của Z1 (ứng với σ_x) là ε_x hay $\frac{\partial u}{\partial x}$, như vậy $\frac{\partial Z1}{\partial \varepsilon_x} = -\frac{\partial}{\partial x}$

$$2G(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta) = -2G(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\nu}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x}\theta)$$

- đại lượng biến phân của Z4 (ứng với τ_{xy}) là γ_{xy} có thành phần $\frac{\partial u}{\partial y}$, nên

$$\frac{\partial Z4}{\partial \gamma_{xy}} = -G\frac{\partial}{\partial y}\gamma_{xy} = -G(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y})$$

- đại lượng biến phân của Z5 (ứng với τ_{xz}) là γ_{xz} có thành phần $\frac{\partial u}{\partial z}$, nên

$$\frac{\partial Z5}{\partial \gamma_{xz}} = -G\frac{\partial}{\partial z}\gamma_{xz} = -G(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x})$$

- đại lượng biến phân của Z7 là u, nên

$$\frac{\partial Z7}{\partial u} = b_x$$

Tổng cộng

$$\frac{\partial Z1}{\partial u} + \frac{\partial Z4}{\partial u} + \frac{\partial Z5}{\partial u} + \frac{\partial Z7}{\partial u} = 0$$

sau khi rút gọn sẽ là :

$$G(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}) + \frac{G}{1-2\nu}(\frac{\partial}{\partial x}\theta) + b_x = 0 \qquad (2.37)$$

Phương trình cân bằng thứ hai nhận được với v là hàm chưa biết. Trong (2.35) các đại lượng biến phân của v có ở Z2, Z4, Z6 và Z8. Phương trình cân bằng thứ ba nhận được với w là hàm chưa biết. Trong (2.35) các đại lượng biến phân của w có ở Z3, Z5, Z6 và Z9. Bằng cách tính biến phân tương tự sẽ có thêm hai phương trình cân bằng sau:

$$G(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}) + \frac{G}{1-2\nu}(\frac{\partial}{\partial y}\theta) + b_y = 0 \qquad (2.38)$$

$$G\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+\frac{G}{1-2\nu}\left(\frac{\partial}{\partial z}\theta\right)+b_z=0 \qquad (2.39)$$

Ba phương trình (2.37), (2.38) và (2.39) là các phương trình vi phân cân bằng của cơ hệ đàn hồi, đồng nhất và đẳng hướng và được gọi là phương trình Navier [4] Dưới dạng tenxơ các phương trình này được viết gọn như sau:

$$Gu_{j,kk}+\frac{G}{1-2\nu}u_{k,kj}+b_j=0 \qquad (2.40)$$

2.5.2 Phương trình vi phân của mặt võng của tấm chịu uốn

Xét tấm có chiều dày không dổi Viết lại các biểu thức (2.30) đối với các nội lực momen uốn và xoắn và (2.31) đối với lực cắt tác dụng lên phân tố tấm trong hệ tọa độ (x,y) ta có :

$$M_x=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\ M_y=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),\ M_{xy}=-D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

$$Q_x=-D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right),Q_y=-D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right) \qquad (2.41)$$

Biết được các lực tác dụng lên phân tố thì dễ dàng viết được lượng cưỡng bức Z, thí dụ, dưới dạng bình phương tối thiểu theo (2.33.b) (khi không có ngoại lực):

$$Z1=\int_\Omega D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 d\Omega\ ,\quad Z2=\int_\Omega D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 d\Omega,$$

$$Z3=2\int_\Omega D(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2 d\Omega \qquad (2.42)$$

ở đây Ω là diện tích tấm. Lượng cưỡng bức Z bằng tổng các lượng cưỡng bức do mỗi thành phần nội lực momen uốn và xoắn gây ra :

$$Z = Z1 + Z2 + Z3 \to Min \qquad (2.43)$$

Chú ý rằng trong (2.43) ta chỉ xét nội lực momen, chưa xét tới lực cắt , phân tố không có lực ngoài tác dụng. Hệ số 2 trong Z3 để xét momen xoắn tác dụng bằng nhau lên hai chiều x,y. Các 'biến dạng' tương ứng với các nội lực momen xác định theo (2.29) :

$$\chi_{xx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \chi_{yy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\ \chi_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \qquad (2.44)$$

Các 'biến dạng' này cần được xem là độc lập đối với các nội lực momen uốn và xoắn và là các đại lượng biến phân của bài toán. Do đó từ điều kiện cực tiểu (2.36) ta có :

$$\frac{\partial Z1}{\partial \chi_{xx}} \frac{\partial \chi_{xx}}{\partial w} = 2D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 2D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right),$$

$$\frac{\partial Z2}{\partial \chi_{yy}} \frac{\partial \chi_{yy}}{\partial w} = 2D \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 2D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right),$$

$$\frac{\partial Z3}{\partial \chi_{xy}} \frac{\partial \chi_{xy}}{\partial w} = 4D(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) = 4D(1-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \qquad (2.45)$$

Tổng cộng các thành phần của (1.45) nhận được phương trình vi phân độ võng của tấm chịu uốn :

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \qquad (2.46)$$

Phương trình (2.46) thường được gọi là phương trình Sophie Germain (năm 1811).

Khi xây dựng lượng cưỡng bức Z (biểu thức 2.43) không xét tới lực cắt bởi vì lý thuyết kết cấu chịu uốn trình bày trên không xét biến dạng của lực cắt.Tuy nhiên, trong phạm vi của lý thuyết này, nếu dùng lực cắt xác định theo (2.31) và biến dạng trượt theo (2.32) thì lượng cưỡng bức Z được viết như sau

$$Z = \int_\Omega Q_{xx}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) d\Omega + \int_\Omega Q_{yy}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) d\Omega \rightarrow Min \qquad (2.47)$$

Xem các góc xoay $\frac{\partial w}{\partial x}$ và $\frac{\partial w}{\partial y}$ là các đại lượng biến phân độc lập đối với lực cắt Q_x và Q_y và bằng phép tính biến phân lại nhận được phương trình vi phân (2.46).

Đối với dầm, lượng cưỡng bức viết theo (2.33.a) sẽ là :

$$Z = -\int_l EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(\chi_{xx})\,dl - \int_{l_q} qw\,dl_q \tag{2.48}$$

Trong (2.48) l là chiều dài dầm, $\chi_{xx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ là biến dạng uốn (độ cong) của dầm, l_q là chiều dài đoạn dầm có lực q tác dụng. Phương trình vi phân đường độ võng của dầm:

$$\frac{\partial Z}{\partial \chi_{xx}}\frac{d\chi_{xx}}{dw} + \frac{\partial Z}{\partial w} = EJ\frac{d^4 w}{dx^4} - q = 0 \tag{2.49}$$

CHƯƠNG 3
PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN LÝ CỰC TRỊ GAUSS ĐỐI VỚI CÁC BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH UỐN DỌC CỦA THANH

3.1. Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss để giải bài toán ổn định công trình

Xét một thanh chịu tải trọng dọc trục P, dầm có chiều dài 1, độ cứng mặt cắt là EJ_X.

Phương trình đường đàn hồi của thanh có dạng: y = y(x) phải thoả mãn điều kiện biên và điều kiện ban đầu (nếu có).

Khi tải trọng dọc trục P tăng lên đến một giá trị nào đó thì trong thanh xuất hiện đồng thời hai thành phần ứng suất, do uốn và do nén.

Lượng cưỡng bức do mômen uốn

$$Z_1 = \int_0^l \frac{1}{EJ_x}(M_x)^2 dx$$

Lượng cưỡng bức do lực nén

$$Z_2 = \int_0^l \frac{1}{EF}(N)^2 dx$$

Lượng cưỡng bức toàn bộ:

$$Z = Z_1 + Z_2$$

3.1.1. Bài toán thanh chịu nén uốn đồng thời

Xét một thanh chịu tải trọng dọc trục P, thanh có chiều dài l, độ cứng mặt cắt là EJx

Lượng cưỡng bức của cột chịu nén uốn đồng thời được viết như sau:

$$Z = \int_0^l \left[\frac{1}{EJx}(M_x)^2 + \frac{1}{EF}(N^2) \right] dx \tag{3.1}$$

Chuyển động của dầm đang xét sẽ rất gần với chuyển động tự do nếu như lượng cưỡng bức đạt cực tiểu (Z $\rightarrow$min) hay $\delta Z = 0$.

3.1.2. Bài toán thanh chịu nén uốn và cắt đồng thời

Xét một cột chịu tải trọng dọc trục P, dầm có chiều dài 1, độ cứng mặt cắt là EJx

Lượng cưỡng bức của cột chịu uốn nén đồng thời được viết như sau

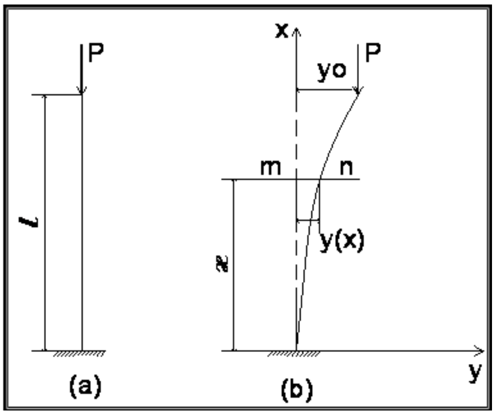
$$Z = \int_0^l \left[\frac{1}{EJx}(M_x)^2 + \frac{1}{GF}(Q_y)^2 + \frac{1}{EF}(N^2) \right] dx \qquad (3.2)$$

Chuyển động của dầm đang xét sẽ rất gần với chuyển động tự do nếu như lượng cưỡng bức đạt cực tiểu (Z $\rightarrow$min) hay $\delta Z = 0$.

3.2. Bài toán ổn định của thanh chịu nén

Phương pháp chung để đánh giá sự mất ổn định của cơ hệ là đưa hệ ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu của nó và kiểm tra xem nó có tồn tại trạng thái cân bằng mới không. Nếu như tìm được trạng thái cân bằng mới khác với trạng thái cân bằng ban đầu thì có thể xem hệ là mất ổn định và lực giữ cho hệ ở trạng thái cân bằng mới này gọi là lực tới hạn, trường hợp ngược lại hệ là ổn định.

Để đơn giản trình bày mà không mất đi tính tổng quát của phương pháp, ta xét thanh chịu nén một đầu ngàm một đầu tự do, chịu lực như (hình 3.1a). Thanh có trạng thái cân bằng ban đầu là trạng thái chịu nén thẳng đứng.Ởtrạng thái cân bằng này thanh bị co ngắn lại mộtđoạn là $\Delta = Pl/EF$, EF làđộ cứng kéo nén của thanh, E là mô đun đàn hồi của vật liệu, l là chiều dài ban đầu của thanh,P là lực tác dụng.



Hình 3.1. Thanh ngàm – Tự do

Để xét trạng thái cân bằng này của thanh có ổn định hay không ta cho một điểm bất kỳ trên thanh lệch ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu một đoạn y_0 nào đó. Khi đó thanh sẽ bị chuyển vị theo đường đàn hồi y(x) và lực P ngoài tác dụng nén còn gây ra mômen uốn $M_p = P(y-y_0)$. Bây giờ trong thanh có nội lực mômen uốn M và lực cắt Q khác với trạng thái ban đầu chỉ chịu nén (hình 3.1b) và momen ngoại lực M_p. Độ co ngắn Δ của thanh thường là nhỏ so với chiều dài thanh cho nên để đơn giản ta xem chiều dài thanh sau biến dạng vẫn bằng l.

Lượng cưỡng bức theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss của bài toán này được viết như sau:

$$Z = \int_l (M - M_p)\chi dx \rightarrow \min \tag{3.3}$$

Biến dạng uốn $\chi = -\dfrac{d^2 y}{dx^2}$, $M = EJ\chi$ (3.4)

Chú ý: momen nội lực và momen ngoại lực luôn khác dấu nhau. Trong (3.3), χ đại lượng biến phân, do đó điều kiện cần và đủ để thanh ở trạng thái cân bằng là

$$\delta Z = \int_l (M - M_p)\delta\chi dx = 0 \tag{3.5}$$

Hay
$$\delta Z = \int_l (M - M_p)\delta\left(-\frac{d^2 y}{dx^2}\right)dx = 0 \tag{3.5a}$$

Sử dụng phép tính biến phân đối với phương trình (3.5a) nhận được hai phương trình cân bằng sau

$$-\frac{d^2(M - M_p)}{dx^2} = 0 \tag{3.6a}$$

$$\left(-\frac{d(M - M_p)}{dx}\right) = 0 \tag{3.6b}$$

Thay M xác định theo (3.4) vào hai phương trình (3.6) ta có

$$EJ\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) + P\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \qquad (3.7a)$$

$$EJ\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + P\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (3.7b)$$

Hai phương trình (3.7) là hai phương trình vi phân cân bằng của thanh chịu uốn dọc bởi lực P đặt ở đầu thanh. Đó là hai phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất (không có vế phải) mà phương pháp giải chúng cùng với các điều kiện biên ở hai đầu thanh đã được trình bày ở chương 1.

Dưới đây trình bày phương pháp chuyển vị cưỡng bức giải hệ phương trình (3.7).

3.3. Phương pháp chuyển vị cưỡng bức

Phương pháp chuyển vị cưỡng bức nhằm đưa phương trõnh ổn định uốn dọc của thanh (3.7) là phương trõnh cõn bằng giữa nội lực và ngoại lực về phương trõnh cú vế phải bằng cỏch cho một điểm nào đó trong thanh, ví dụ điểm $x=x_1$, một chuyển vị y_0:

$$g = y_{x=x1} - y_0 = 0 \qquad (3.8)$$

Đưa bài toán tõm cực trị của (3.3) với điều kiện ràng buộc (3.8) về bài toán cực trị không ràng buộc bằng cách xây dựng phiếm hàm mở rộng Lagrange F như sau:

$$F = Z + \lambda g \rightarrow \min$$

$$F = \int_l (M - M_p)\chi dx + \lambda(y_{x=x1} - y_0) \rightarrow \min \qquad (3.9)$$

Trong đó λ là thừa số Lagrange và cũng là ẩn của bài toán.Từ điều kiện

$$\delta F = \int_l (M - M_p)\delta\chi dx + \delta(\lambda g) = 0$$

nhận được hai phương trõnh sau:

$$EJ\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) + P\frac{d^2y}{dx^2} = \begin{cases} -\lambda & khi \quad x = x_1 \\ 0 & khi \quad x \neq x_1 \end{cases} \qquad (3.10a)$$

$$EJ\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)+P\frac{dy}{dx}=0 \qquad (3.10b)$$

cùng với phương trõnh (3.8). Phương trõnh (3.10a) là phương trõnh cú vế phải. Để nó trở thành phương trõnh uốn dọc (3.7a) của thanh thỡ

$$\lambda=0 \qquad (3.11)$$

Về mặt toán học, phương trõnh (3.11) là phương trõnh đa thức xác định các trị riêng của hệ (3.7) bởi vỡ nghiệm của nú cũng là nghiệm của (3.7). Về cơ học, λ có thứ nguyên là lực. Đó là lực giữ để cho thanh có chuyển vị y_0 tại điểm $x=x_1$. Lực giữ phải bằng không, suy ra phương trõnh (3.11). Trị riờng của (3.7) phụ thuộc vào thụng số P, suy ra λ cũng là hàm của P. Cho nên giải phương trõnh (3.11) theo P, sẽ nhận được các lực tới hạn của thanh bị uốn dọc.

3.4. Các bước thực hiện khi tìm lực tới hạn bằng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss

Trong quá trình toán, ta sử dụng các giả thiết sau:

- Vật liệu làm việc trong giai đoạn đàn hồi, do đó quá trình tăng tải và giảm tải là hoàn toàn thuận nghịch, đồng thời vật liệu tuân theo quy định luật Húc, tức là có quan hệ tuyến tính giữa ứng xuất và biến dạng. Trong quá trình chiu tải, năng lượng hoàn toàn được bảo toàn.
- Vật liệu là đồng nhất tại tất cả các điểm trong vật thể và đẳng hướng, tức tính chất cơ lý theo các phương như nhau. Đồng thời vật liệu được coi là liên tục, tức là trong vật thể không có chỗ trống, trước cũng như sau khi biến dạng.
- Vật thể ở trạng tự nhiên trước khi chịu đựng, tức là trong vật thể do biến dạng gây ra là nhỏ so với kích thước của nó.

Bước 1: Giả thiết đường độ võng của dầm đang xét với biểu thức đường độ võng phải thoả mãn điều kiện biên.

Chẳng hạn, biểu thức đường độ võng có thể viết dước dạng đa thức chuỗi lượng giác đơn.

Dạng đa thức: $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_n = a_0 + a_1 x + a_2 x + a_3 x + a_4 x_4 + ...$

Dạng hàm lượng giác theo Timosehnko: $y_n = a_n \cos(kx) + b_n \sin(kx) + c_n + d_n$

Bước 2: Viết biểu thức lượng cưỡng bức của hệ theo (3.3)

Bước 4: Viết các điều kiện biên và điều kiện ràng buộc. Ngoài ra, ta phải đưa thêm ràng buộc, đó là điều kiện có nghiệm (tức là hệ phải có kích chuyển vị y_0).

Bước 5: Đưa bài toán cực trị có điều kiện ràng buộc về bài toán cực trị không có điều kiện ràng buộc bằng cách xây dựng phiếm hàm Lagrange F.

Gọi λ_k là thừa số Langrange để đưa bài toán cực trị có điều kiện ràn buộc về bài toán cực trị không ràng buộc.

Sau khi cực tiểu hoá lượng cưỡng bức F theo các thành phần cơ bản, nhận được biểu thức λ_k có chứa lực tới hạn P_{th}.

Bước 6: Cho λ_k =0 nhận được các giá trị P $_{th}$ Ứng với các giá trị (i=1,2,3....n), với các giá trị (i=1,2,3....n), ta có các $P_{1th}, P_{2th} .... P_{nth}$.

3.5 Xác định lực tới hạn của thanh chịu nén có các điều kiện biên khác nhau.

Như đã trình bày ở trên, bài toán ổn định của thanh chịu nén bởi lực dọc trục P đặt ở đầu thanh dẫn về tìm cực trị của (3.3), viết lại dưới đây.

$$Z = \int_0^l (M - M_p)\chi dx \to \min \qquad (3.12)$$

$$M_p = P(y - y_0) \qquad (3.13)$$

y_0 là chuyển vị của đầu thanh có lực P. Nếu đầu thanh có liên kết cố định thì y_0 bằng không. Các đại lượng M, χ xác định theo các biểu thức (3.4). Có hai phương pháp chung giải bài toán (3.12): giải các phương trình vi phân cân bằng (các phương trình Euler) của phiếm hàm hoặc giải trực tiếp trên phiếm hàm (3.12). Phương pháp giải trực tiếp có ưu điểm ở chỗ sử dụng được các phương pháp của quy hoạch toán. Khi giải trực tiếp thì cần xấp xỉ hai hàm y và Q theo dạng hàm lượng giác hoặc dạng hàm đa thức. Bài toán (3.12) không còn là bài toán biến phân nữa mà trở thành bài toán tối ưu thông số.

Để giải bài toán ổn định uốn dọc của thanh ta sử dụng phương pháp chuyển vị cưỡng bức bằng cách đưa thêm ràng buộc (3.8), viết lại dưới đây

$$g = y_{x=x1} - y_0 = 0 \qquad (3.14)$$

Tóm lại, bài toán ổn định của thanh dẫn về tìm cực trị của (3.12) với các đại lượng biến phân là y, χ và ràng buộc (3.14). Các hàm xấp xỉ của y phải thỏa mãn các điều kiện biên ở hai đầu thanh. Trường hợp các hàm y chưa thỏa mãn một trong các điều kiện biên thì có thể đưa thêm điều kiện đó vào ràng buộc. Những kết quả nghiên cứu đối với các thanh có liên kết khác nhau được trình bày sau đây.

Ví dụ 1: Thanh đầu ngàm đầu tự do

Hàm độ võng y và hàm lực cắt Q viết theo dạng đa thức bậc 9 sau

$$y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7 + a_8x^8 + a_9x^9 \text{(a1)}$$

Các hệ số $a_i, (i=1:9)$ là các ẩn của bài toán. Theo các biểu thức (3.4) tính được M và biến dạng uốn χ. Momen do lực dọc trục P gây ra tính theo (3.13) với y_0 là độ võng ở đầu tự do của thanh. y_0 tính được bằng cách thay x=l vào (a1), theo ngôn ngữ lập trình MATLAB viết như sau

$$y_0 = subs(y, x, l) \qquad \text{(b1)}$$

Biểu thức $subs(y, x, l)$ nói rằng: thay trong hàm y(x) tọa độ x bằng *l*.

Hàm y thỏa mãn điều kiện chuyển vị tại ngàm (x=0) bằng không, ta còn phải thêm ba điều kiện biên là góc xoay dy/dx tại ngàm (x=0) bằng không, momen tại đầu tự do của thanh (x=l) bằng không. Ngoài ra, tại đầu tự do của thanh (x=l) ta đặt chuyển vị cưỡng bức y_0. Viết các điều kiện trên như sau

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= subs(\frac{dy}{dx}, x, 0) = 0 \\ g_2 &= subs(\chi, x, l) = 0 \\ g_3 &= subs(y, x, l) - y_0 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (c1)$$

Các điều kiện (c1) cùng với 4 thừa số Lagrange λ_1 , λ_2 , λ_3 , của chúng được viết gọn lại như sau

$$Z_1 = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 \qquad (d1)$$

Bây giờ viết điều kiện cực tiểu của phiếm hàm Lagrange của bài toán như sau

$$\delta F = \int_l (M - M_p)\delta\chi dx + \delta(Z_1) = 0 \qquad (e1)$$

ẩn của bài toán là các hệ số a_i, và 3 thừa số λ_1, λ_2, λ_3, (tổng cộng 12 ẩn) được đặt vào vectơ v(i), i=1,2,...12. Do đó bài toán biến phân (e1) trở thành bài toán tối ưu thông số. Ta viết lại điều kiện (e1)

$$h_i = \int_l (M - M_p)\frac{\partial\chi}{\partial v(i)} dx + \frac{\partial Z_1}{\partial v(i)} = 0 \quad .....(i = 1,2,...12) \qquad (f1)$$

Ta nhận dược 12 phương trình bậc nhất để xác định 12 ẩn nói trên. Thừa số λ_3 tương ứng với chuyển vị cưỡng bức đặt ở đầu tự do của thanh là đa thức đối với P. Giải phương trình:

$$\lambda_4(P) = 0 \qquad (g1)$$

sẽ nhận được các lực tới hạn P của thanh.

Chương trình máy tính được viết theo ngôn ngữ lập trình Symbolic của Matlab.Một số kết quả trình bày dưới đây.

Trong bài toán này λ_3 có dạng là một thương số, để thỏa mãn (g1) ở đây chỉ cần giới thiệu phần tử số, ta có:

$\lambda_3(P) = 42614./l^3y_0(.18090x10^{26}EJ^8-.83246\ x10^{12}P^7EJl^{14}+.12408\ x10^{16}EJ^2P^6l^{12}-.63112\ x10^{18}EJ^3P^5l^{10}+.14009\ x10^{21}EJ^4P^4l^8-.14184\ x10^{23}EJ^5P^3l^6+.60996\ x10^{24}EJ^6P^2l^4-.87521\ x10^{25}EJ^7Pl^2+.12626\ x10^6P^8l^{16})=0$ (g1)

Hàm λ_3 là đa thức bậc 8 đối với P. Giải phương trình (i1) theo P nhận được 8 nghiệm sau:

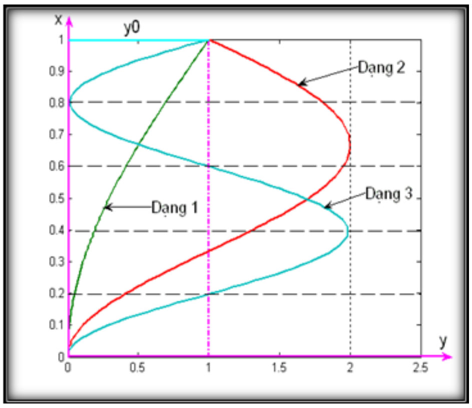
2.4674 EJ $/l^2$; 22.2066 EJ $/l^2$; 61.6863 EJ $/l^2$; 121.1593 EJ $/l^2$

205.0265 EJ $/l^2$; 360.8347 EJ $/l^2$; 717.4242 EJ $/l^2$; 6591985.4EJ$/l^2$

đó là các trị riêng của bài toán ổn định và cũng là lực tới hạn của thanh. Trong đó P_1, P_2, P_3 trùng với lời giải giải tích như trình bày ở chương 1. Sở dĩ như vậy vì ở đây chỉ sử dụng hàm y là đa thức bậc chín muốn có nhiều kết quả và nhiều kết quả chính xác hơn thì dùng đa thức bậc cao hơn.

Các đường độ võng của thanh (véc tơ riêng) tương ứng với các lực tới hạn (trị riêng).

Các hệ số a_i phụ thuộc vào P. Do vậy, khi đã có các trị riêng P (các lực tới hạn) ta thay giá trị của nó vào trong các thông số $a_i(P)$ ta sẽ nhận được các trị số thật của nó và đường độ võng của thanh được xác định theo (a1). Dạng của trục võng (véc tơ riêng) tương ứng với 3 lực tới hạn chính xác (3 trị riêng chính xác) đầu tiên như,hình 3.2.

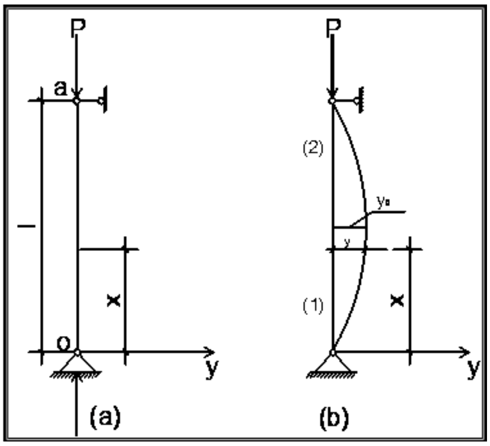


Hình 3.2.Đường độ võng

Nhận xét: Kết quả tính toán hoàn toàn chính xác so với các phương pháp truyền thống.

Ví dụ 2: Thanh hai đầu khớp,

Xác định lực tới hạn cho thanh chịu lực như hình 3.3a.



Hình 3.3. Thanh hai đầu khớp

Lời giải:Chia thanh thành 2 đoạn (1và 2) như (hình 3.3b). Đoạn 1 $(0 \le x \le l_1)$, đoạn 2 $(0 \le x \le l_2)$. Nếu như tại điểm ($x=l_1$) cho lệch một đoạn y_0 nào đó thì thanh sẽ bị cong đi theo đường đàn hồi $y_1(x)$ và $y_2(x)$ như hình 3.3b do tác dụng của lực mômen uốn Py_1 và Py_2.

Gọi M_{1x}, M_{2x} là mômen uốn lần lượt trong thanh 1 và 2 lúc này trạng thái cân bằng của thanh là trạng thái cân bằng nén uốn, hình 3.3b.

Viết biểu thức đường độ võng cho các đoạn thanh dưới dạng đa thức như sau:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \sum_{i=1}^{9} a_i x^i = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + a_7 x^7 + a_8 x^8 + a_9 x^9; \\ y_2 &= \sum_{i=0}^{9} c_i x^i = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + b_5 x^5 + b_6 x^6 + b_7 x^7 + b_8 x^8 + b_9 x^9; \end{aligned}\right\} \qquad (a2)$$

trong đó a_i, b_i là các hệ số cần xác định.

Gọi χ là biến dạng uốn trong thanh

$$\chi_1 = -\frac{d^2 y_1}{dx^2}; \quad \chi_2 = -\frac{d^2 y_2}{dx^2}$$

Như vậy trong thanh sẽ có nội lực mômen uốn M_x bằng

$$M_{x1} = EJ\chi_1; \quad M_{x2} = EJ\chi_2$$

và lực P sẽ gây ra mômen uốn trong thanh bằng

$$M_{P1} = Py_1; \quad M_{P2} = Py_2$$

và góc xoay do momen uốn sinh ra

$$\theta_1 = \frac{dy_1}{dx}; \quad \theta_2 = \frac{dy_2}{dx}$$

Lượng cưỡng bức theo (3.3) được viết như sau:

$$Z = \int_0^{l_1} [M_{x1} - M_{P1}](\chi_1) dx + \int_0^{l_2} [M_{x2} - M_{P2}](\chi_2) dx \rightarrow \min \qquad \text{(b2)}$$

với 6 các điều kiện ràng buộc:

$$\left.\begin{array}{l} g_1 = EJ\left[-\dfrac{d^2y_1}{dx^2}\right]\Bigg|_{x=0} = 0; \quad g_2 = \left(\dfrac{dy_1}{dx}\right)\Bigg|_{x=l1} - \left(\dfrac{dy_2}{dx}\right)\Bigg|_{x=0} = 0 \\ g_3 = y_1\big|_{x=l1} - y_2\big|_{x=0} = 0; \quad g_4 = EJ\left[-\dfrac{d^2y_2}{dx^2}\right]\Bigg|_{x=l2} = 0; \quad g_5 = y_2\big|_{x=l2} = 0 \\ g_6 = y_1\big|_{x=l1} - y_0 = 0 \end{array}\right\} \qquad \text{(c2)}$$

Ta đưa bài toán tìm cực trị của (b2) có 6 điều kiện ràng buộc (c2) về bài toán cực trị không có ràng buộc bằng cách đưa thừa số Lagrange vào phiếm hàm mở rộng như sau:

$$\left.\begin{array}{l} F = Z + \sum\limits_{k=1}^{6} g_k\lambda_k \rightarrow \min \\ Hay: \int_0^{l_1} [M_{x1} - M_{P1}](\chi_1) dx + \int_0^{l_2} [M_{x2} - M_{P2}](\chi_2) dx + \\ + g_1\lambda_1 + g_2\lambda_2 + g_3\lambda_3 + g_4\lambda_4 + g_5\lambda_5 + g_6\lambda_6 \rightarrow \min \end{array}\right\} \qquad \text{(d2)}$$

Trong đó: λ_6 là thừa số Lagrange và cũng là ẩn của bài toán và đó là lực để giữ cho hệ ở trạng thái lệch. Bài toán có 45 ẩn số là a_1, a_2, a_3, ..., a_9, b_0, b_1, b_2,..., b_9, c_0, c_1, c_2, c_3, ..., c_9, d_0, d_1, d_2,..., $d_9$và λ_1, λ_2,... λ_6. Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss xem các biến dạng uốn là độc lập với mômen tác dụng cho nên điều kiện cực trị của phiếm hàm mở rộng F là:

$$\left.\begin{array}{ll} h_i = \int_0^{l_1} [M_{x1} - M_{P1}] \dfrac{\partial}{\partial a_i}(\chi_1) dx + \dfrac{\partial}{\partial a_i}\sum\limits_{k=1}^{6}(g_k\lambda_k) = 0; a_i\,(i = 1, 2, 3, ..., 9) & \\ k_i = \int_0^{l_1} [M_{x2} - M_{P2}] \dfrac{\partial}{\partial b_i}(\chi_2) dx + \dfrac{\partial}{\partial b_i}(g_k\lambda_k) = 0; \quad b_i\,(i = 0, 1, 2, ..., 9) & \\ u_i = \dfrac{\partial}{\partial \lambda_k}\sum\limits_{k=1}^{6}(g_k\lambda_k) = 0; \qquad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6 & \end{array}\right\} \qquad \text{(e2)}$$

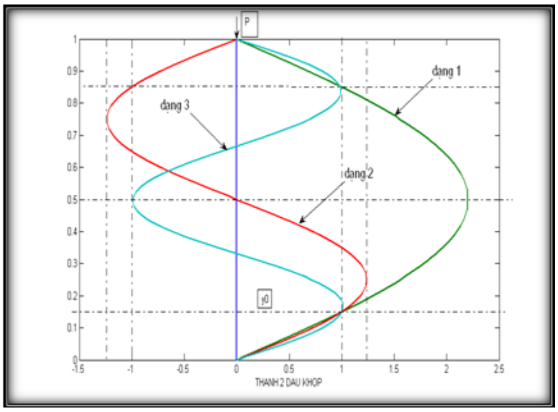
Như vậy, từ điều kiện cực trị của phiếm hàm mở rộng F ta sẽ nhận được 25 phương trình đại số tuyến tính để xác định các ẩn số. Có thể giải bài toán trên bằng cách sử dụng phần mềm Symbolic của Matlab. Khi giải phương trình xong thấy rằng các thông số a_1, a_2, a_3, ..., a_9, b_0, b_1, b_2,..., b_9, và λ_6, λ_2,... λ_6 đều là hàm của lực P. ở đây chỉ đưa ra giá trị của thừa số Lagrange λ_6, ta có:

$$\lambda_6=.27778x10^9EJy_0(.2502910^{73}EJ^{16}+.72390x10^{16}P^{16}l^{32}+.16909x10^{30}EJ^2P^{14}l^{28}-.44612x10^{44}EJ^5P^{11}l^{22}+.20784x10^{67}EJ^{12}P^4l^8+.60434x10^{48}EJ^6P^{10}l^{20}-.41454\,x10^{52}EJ^7P^9l^{18}+.15560x10^{71}EJ^{14}P^2l^4+.14130x10^{56}EJ^8P^8l^{16}-.8765x10^{64}EJ^{11}P^5l^{10}-.23564\,x10^{59}EJ^9P^7l^{14}+.19792\,x10^{62}EJ^{10}P^6l^{12}-.38395\,x10^{72}EJ^{15}Pl^2-.69992\,x10^{23}EJxP^{15}l^{30}-.27914\,x10^{35}EJ^3P^{13}l^{26}+.16447\,x10^{40}EJ^4P^{12}l^{24}-.25802\,x10^{69}EJ^{13}P^3l^6)=0 \qquad (f2)$$

Ta thấy rằng trong trường hợp này, λ_6 là đa thức bậc 16 của P. Giải (f2) theo P ta sẽ nhận được 16 nghiệm. Cách giải phương trình (f2) như đã trình bày ở chương 1, ta có thể dùng phương pháp lặp Newton hoặc phương pháp Cát tuyến để giải. ở đây ta dùng chương trình sẵn có của Matlab để giải.

Giải phương trình (λ_6=0) theo P ta nhận được 16 nghiệm là 16 lực tới hạn P_{th} của hệ, ở đây chỉ đưa ra ba nghiệm đầu tiên lần lượt là:P_{1th}= $9.8696\dfrac{EJ}{l^2}$;

P_{2th}= $39.4784\dfrac{EJ}{l^2}$;P_{3th}= $88.8341\dfrac{EJ}{l^2}$;



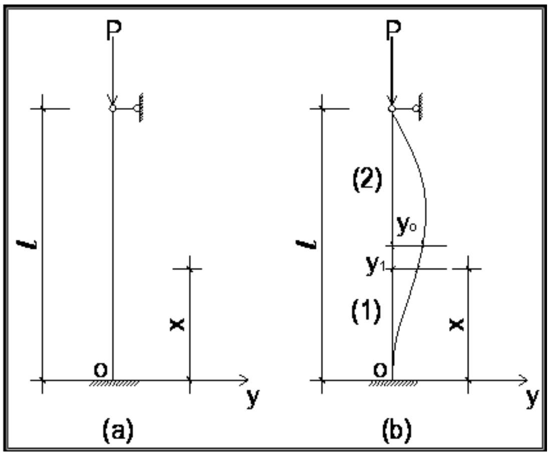
Hình 3.4Ba đường độ võng

Dạng của trục võng (véc tơ riêng) tương ứng với 3 lực tới hạn chính xác (3 trị riêng chính xác) đầu tiên như hình 3.4.

Ví dụ 3: Thanh đầu ngàm - đầu khớp:

Xác định lực tới hạn cho thanh chịu lực như (hình 3.5a).

Lời giải: Chia thanh thành 2 đoạn 1 và 2 như hình 3.5. Đoạn 1 $(0 \le x \le l_1)$, đoạn 2 $(0 \le x \le l_2)$.Nếu như tại điểm ($x=l_1$) cho lệch một đoạn y_0 nào đó thì thanh sẽ bị cong đi theo đường đàn hồi $y_1(x)$ và $y_2(x)$ như hình 3.5b do tác dụng của lực mômen uốn Py_1 và Py_2.



Hình 3.5. Thanh ngàm - khớp

Gọi M_{1x} , M_{2x} là mômen uốn lần lượt trong thanh 1 và 2 lúc này trạng thái cân bằng của thanh là trạng thái cân bằng nén uốn (hình 3.5b).

Viết biểu thức đường độ võng cho các đoạn thanh dưới dạng đa thức như sau:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \sum_{i=1}^{9} a_i x^i = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7 + a_8x^8 + a_9x^9; \\ y_2 &= \sum_{i=0}^{9} b_i x^i = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + b_5x^5 + b_6x^6 + b_7x^7 + b_8x^8 + b_9x^9; \end{aligned}\right\} \text{(a3)}$$

trong đó a_i, b_i, là các hệ số cần xác định.

Biến dạng uốn χ trong các đoạn thanh

$$\chi_1 = -\frac{d^2y_1}{dx^2}; \quad \chi_2 = -\frac{d^2y_2}{dx^2}$$

Như vậy trong thanh sẽ có nội lực mômen uốn M_x bằng

$$M_{x1} = EJ\chi_1; \quad M_{x2} = EJ\chi_2$$

và lực P sẽ gây ra mômen uốn trong thanh bằng

$$M_{P1} = Py_1; \quad M_{P2} = Py_2$$

và góc xoay do momen uốn sinh ra

$$\theta_1 = \frac{dy_1}{dx}; \quad \theta_2 = \frac{dy_2}{dx}$$

Lượng cưỡng bức theo (3.3) được viết như sau:

$$Z=\int_0^{l_1}\left[M_{x1}-M_{P1}\right]\left(\chi_1\right)dx+\int_0^{l_2}\left[M_{x2}-M_{P2}\right]\left(\chi_2\right)dx\to\min \qquad \text{(b3)}$$

với 6 các điều kiện ràng buộc:

$$\left.\begin{array}{l} g_1=\left.\left(\dfrac{dy_1}{dx}\right)\right|_{x=0}=0; g_2=\left.\left(\dfrac{dy_1}{dx}\right)\right|_{x=l1}-\left.\left(\dfrac{dy_2}{dx}\right)\right|_{x=0}=0; g_3=\left.y_1\right|_{x=l1}-\left.y_2\right|_{x=0}=0; \\ g_4=EJ\left.\left[-\dfrac{d^2y_2}{dx^2}\right]\right|_{x=l2}=0;\quad g_5=\left.y_2\right|_{x=l2}=0; g_6=\left.y_1\right|_{x=l1}-y_0=0 \end{array}\right\} \qquad \text{(c3)}$$

Ta đưa bài toán tìm cực trị của (b3) có 6 điều kiện ràng buộc (c3) về bài toán cực trị không có ràng buộc bằng cách đưa thừa số Lagrange vào phiếm hàm mở rộng như sau:

$$\left.\begin{array}{ll} & F=Z+\sum_{k=1}^{6}g_k\lambda_k\to\min \\ Hay: & \int_0^{l_1}\left[M_{x1}-M_{P1}\right]\left(\chi_1\right)dx+\int_0^{l_2}\left[M_{x2}-M_{P2}\right]\left(\chi_2\right)dx+ \\ & +g_1\lambda_1+g_2\lambda_2+g_3\lambda_3+g_4\lambda_4+g_5\lambda_5+g_6\lambda_6\to\min \end{array}\right\} \qquad \text{(d3)}$$

Trong đó: λ_6 là thừa số Lagrange và cũng là ẩn của bài toán và đó là lực để giữ cho hệ ở trạng thái lệch. Bài toán có 45 ẩn số là a_1, a_2, a_3, ..., a_9, b_0, b_1, b_2,..., b_9, c_0, và λ_1, λ_2,... λ_6. Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss xem các biến dạng uốn là độc lập với mômen tác dụng cho nên điều kiện cực trị của phiếm hàm mở rộng F là:

$$\left.\begin{array}{l} h_i=\int_0^{l_1}\left[M_{x1}-M_{P1}\right]\dfrac{\partial}{\partial a_i}(\chi_1)dx+\dfrac{\partial}{\partial a_i}\sum_{k=1}^{6}(g_k\lambda_k)=0; a_i(i=1,2,3,...,9) \\ k_i=\int_0^{l_1}\left[M_{x2}-M_{P2}\right]\dfrac{\partial}{\partial b_i}(\chi_2)dx+\dfrac{\partial}{\partial b_i}(g_k\lambda_k)=0;\quad b_i(i=0,1,2,...,9) \\ u_i=\dfrac{\partial}{\partial\lambda_k}\sum_{k=1}^{6}(g_k\lambda_k)=0; \qquad\qquad k=1,2,3,4,5,6 \end{array}\right\} \qquad \text{(e3)}$$

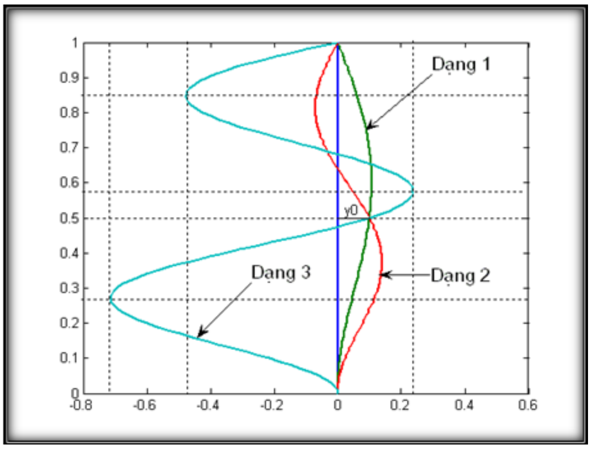
Như vậy, từ điều kiện cực trị của phiếm hàm mở rộng F ta sẽ nhận được 25 phương trình đại số tuyến tính để xác định các ẩn số. Có thể giải bài toán trên bằng cách sử dụng phần mềm Symbolic của Matlab. Khi giải phương trình xong thấy rằng các thông số a_1, a_2, a_3, ..., a_9, b_0, b_1, b_2,..., b_9, và λ_6, λ_2,... λ_6 đều là hàm của lực P. ở đây chỉ đưa ra giá trị của thừa số Lagrange λ_6.

$$\lambda_6=2777.8(.91761\text{x}10^{15}P^{17}l^{34}-.88868\text{x}10^{25}EJP^{16}l^{32}+.14502\text{x}10^{33}EJ^2P^{15}l^{30}-.53676\text{x}10^{39}EJ^3P^{14}l^{28}+.11596\text{x}10^{45}EJ^4P^{13}l^{26}-.91910\text{x}10^{49}EJ^5P^{12}l^{24}+.33502\text{x}10^{54}EJ^6P^{11}l^{22}-.61348\text{x}10^{58}EJ^7P^{10}l^{20}+.57778\text{x}10^{62}EJ^8P^9l^{18}-.27586\text{x}10^{66}EJ^9P^8l^{16}+.64944\text{x}10^{69}EJ^{10}P^7l^{14}-.75431\text{x}10^{72}EJ^{11}P^6l^{12}+.45183\text{x}10^{75}EJ^{12}P^5l^{10}-.14389\text{x}10^{78}EJ^{13}P^4l^8+.24221\text{x}10^{80}EJ^{14}P^3l^6-.2045\text{x}10^{82}EJ^{15}P^2l^4+.7581\text{x}10^{83}EJ^{16}Pl^2-.8740\text{x}10^{84}EJ^{17})=0 \quad (f3)$$

Ta thấy rằng trong trường hợp này, λ_6 là đa thức bậc 17 của P. Giải (f3) theo P ta sẽ nhận được 17 nghiệm. Đó là các lực tới hạn P_{th} cần tìm của hệ, ở đây chỉ đưa ra ba nghiệm đầu tiên lần lượt là:

$P_{1th}= 20.1907\dfrac{EJ}{l^2}$;$P_{2th}= 59.6795\dfrac{EJ}{l^2}$;$P_{3th}= 118.9907\dfrac{EJ}{l^2}$;

Dạng của trục võng (véc tơ riêng) tương ứng với 3 lực tới hạn chính xác (3 trị riêng chính xác) đầu tiên như hình 3.6.

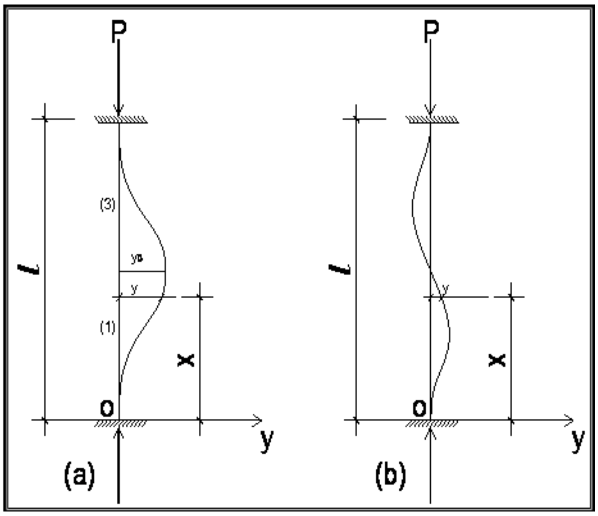


Hình 3.6. Đường độ võng

Ví dụ 4: Thanh hai đầu ngàm

Xác định lực tới hạn cho thanh chịu nén đúng tâm hai đầu liên kết ngàm và chịu lực P, hình 3.7a.

Tương tự như các ví dụ trên, ta viết được biểu thức đường độ võng cho các đoạn thanh dưới dạng đa thức như sau:



Hình 3.7. Thanh hai đầu ngàm

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \sum_{i=1}^{9} a_i x^i = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + a_7 x^7 + a_8 x^8 + a_9 x^9; \\ y_2 &= \sum_{i=0}^{9} b_i x^i = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + b_5 x^5 + b_6 x^6 + b_7 x^7 + b_8 x^8 + b_9 x^9; \end{aligned}\right\} \quad \text{(a4)}$$

trong đó a_i, b_j, c_i, d_i là các hệ số cần xác định.

Lượng cưỡng bức theo (3.3) được viết như sau:

$$Z = \int_0^{l_1} [M_{x1} - M_{P1}](\chi_1)dx + \int_0^{l_2} [M_{x2} - M_{P2}](\chi_2)dx \to \min \qquad \text{(b4)}$$

với 6 các điều kiện ràng buộc:

$$\left.\begin{aligned} & g_1 = \left(\frac{dy_1}{dx}\right)\Bigg|_{x=0} = 0; \quad g_2 = \left(\frac{dy_1}{dx}\right)\Bigg|_{x=l1} - \left(\frac{dy_2}{dx}\right)\Bigg|_{x=0} = 0 \\ & g_3 = y_1|_{x=l1} - y_2|_{x=0} = 0; \quad g_4 = \left(\frac{dy_2}{dx}\right)\Bigg|_{x=l2} = 0; \quad g_5 = y_2|_{x=l2} = 0 \\ & g_6 = y_1|_{x=l1} - y_0 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(c4)}$$

Ta đưa bài toán tìm cực trị của (b4) có 6 điều kiện ràng buộc (c4) về bài toán cực trị không có ràng buộc bằng cách đưa thừa số Lagrange vào phiếm hàm mở rộng như sau:

$$
\left.\begin{aligned}
&F = Z + \sum_{k=1}^{6} g_k \lambda_k \rightarrow \min \\
Hay: \quad &\int_0^{l_1} \left[M_{x1} - M_{P1} \right] (\chi_1) dx + \int_0^{l_2} \left[M_{x2} - M_{P2} \right] (\chi_2) dx \\
&+ g_1\lambda_1 + g_2\lambda_2 + g_3\lambda_3 + g_4\lambda_4 + g_5\lambda_5 + g_6\lambda_6 \rightarrow \min
\end{aligned}\right\} \qquad (d4)
$$

Trong đó: λ_6 là thừa số Lagrange và cũng là ẩn của bài toán và đó là lực để giữ cho hệ ở trạng thái lệch. Bài toán có 25 ẩn số là a_1, a_2, a_3, ..., a_9, b_0, b_1, b_2,..., $b_9$và λ_1, λ_2,... λ_6. Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss xem các biến dạng uốn là độc lập với mômen tác dụng cho nên điều kiện cực trị của phiếm hàm mở rộng F là:

$$
\left.\begin{aligned}
&h_i = \int_0^{l_1} \left[M_{x1} - M_{P1} \right] \frac{\partial}{\partial a_i} (\chi_1) dx + \frac{\partial}{\partial a_i} \sum_{k=1}^{6} (g_k \lambda_k) = 0; a_i (i = 1, 2, 3, ..., 9) \\
&k_i = \int_0^{l_1} \left[M_{x2} - M_{P2} \right] \frac{\partial}{\partial b_i} (\chi_2) dx + \frac{\partial}{\partial b_i} (g_k \lambda_k) = 0; \quad b_i (i = 0, 1, 2, ..., 9) \\
&u_i = \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \sum_{k=1}^{6} (g_k \lambda_k) = 0; \qquad\qquad\qquad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6
\end{aligned}\right\} \qquad (e4)
$$

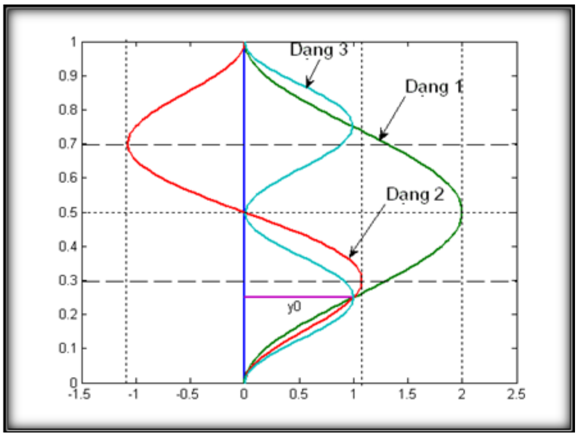
Như vậy, từ điều kiện cực trị của phiếm hàm mở rộng F ta sẽ nhận được 25 phương trình đại số tuyến tính để xác định các ẩn số. Có thể giải bài toán trên bằng cách sử dụng phần mềm Symbolic của Matlab. Khi giải phương trình xong thấy rằng các thông số a_1, a_2, a_3, ..., a_9, b_0, b_1, b_2,..., b_9, và λ_6, λ_2,... λ_6 đều là hàm của lực P. ở đây chỉ đưa ra giá trị của thừa số Lagrange λ_6.

λ_6=-.27778x10^9(.21741x10^{20}x$l^{32}$$P^{16}$-.65451 x$10^{27}xl^{30}$$P^{15}$EJ+.44161 x$10^{34}xl^{28}$$P^{14}$$EJ^2$-.97663e39x$l^{26}$$P^{13}$$EJ^3$+.78445 x$10^{44}xl^{24}$$P^{12}$$EJ^4$-.29005 x$10^{49}xl^{22}$$P^{11}$$EJ^5$+.54209 x$10^{53}xl^{20}$$P^{10}$$EJ^6$-.52785 x$10^{57}xl^{18}$$P^9$$EJ^7$+.26715 x$10^{61}xl^{16}$$P^8$$EJ^8$-.69703 x$10^{64}xl^{14}$$P^7$$EJ^9$+.95246x 10^{67}x$l^{12}$$P^6$$EJ^{10}$-.70260x$10^{70}xl^{10}$$P^5$$EJ^{11}$+.28323x$10^{73}xl^8$$EJ^{12}$$P^4$-.61903x$10^{75}xl^6$$EJ^{13}$$P^3$+ .70298x$10^{77}xl^4$$EJ^{14}$$P^2$-.37198x$10^{79}xl^2$$EJ^{15}$P+.69135x$10^{80}$$EJ^{16}$)=0 (f4)

Ta thấy rằng trong trường hợp này, λ_6 là đa thức bậc 16 của P. Giải (f4) theo P ta sẽ nhận được 16 nghiệm. Đó là các lực tới hạn P_{th} cần tìm của hệ, ở đây chỉ đưa ra ba nghiệm đầu tiên lần lượt là:

$P_{1th}= 39.4784\dfrac{EJ}{l^2}$;$P_{2th}= 80.7637\dfrac{EJ}{l^2}$;$P_{3th}= 158.3106\dfrac{EJ}{l^2}$;

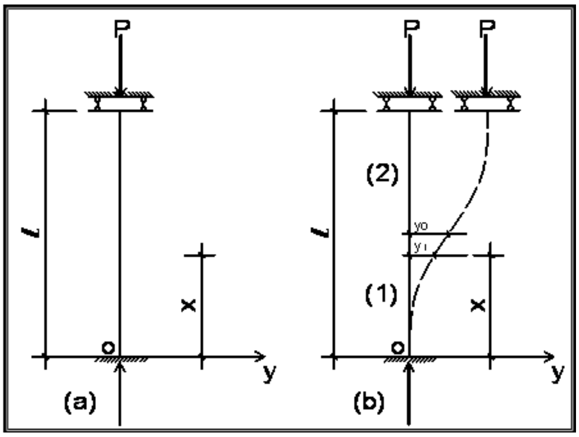
Dạng của trục võng (véc tơ riêng) tương ứng với 3 lực tới hạn chính xác (3 trị riêng chính xác) đầu tiên như hình 3.8.



Hình 3.8.Đường độ võng

Ví dụ 5: Thanh ngàm - ngàm trượt

Xác định lực tới hạn cho thanh chịu lực như (hình 3.9a). Chia thanh thành 2 đoạn (1 và 2) như (hình 3.9b).



Hình 3.9. Thanh ngàm - ngàm trượt

Tương tự như các ví dụ trên, ta viết được biểu thức đường độ võng cho các đoạn thanh dưới dạng đa thức như sau:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \sum_{i=2}^{9} a_i x^i = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + a_7 x^7 + a_8 x^8 + a_9 x^9; \\ y_2 &= \sum_{i=0}^{9} c_i x^i = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + c_6 x^6 + c_7 x^7 + c_8 x^8 + c_9 x^9; \end{aligned}\right\} \text{(a5)}$$

trong đó a_i, b_i, c_i, d_i là các hệsố cần xác định.

Biến dạng uốn χ trong các đoạn thanh

$$\chi_1 = -\frac{d^2 y_1}{dx^2}; \quad \chi_2 = -\frac{d^2 y_2}{dx^2}$$

Như vậy trong thanh sẽ có nội lực mômen uốn M_x bằng

$$M_{x1} = EJ\chi_1; \quad M_{x2} = EJ\chi_2$$

và lực P sẽ gây ra mômen uốn trong thanh bằng

$$M_{P1} = P\left(y_1 - y_2\big|_{x=l2}\right); \quad M_{P2} = P\left(y_2 - y_2\big|_{x=l2}\right)$$

và góc xoay do momen uốn sinh ra

$$\theta_1 = \frac{dy_1}{dx}; \quad \theta_2 = \frac{dy_2}{dx}$$

Lượng cưỡng bức theo (3.3) được viết như sau:

$$Z = \int_0^{l_1} \left[M_{x1} - M_{P1}\right](\chi_1)dx + \int_0^{l_2} \left[M_{x2} - M_{P2}\right](\chi_2)dx \to \min \tag{b5}$$

với 6 các điều kiện ràng buộc:

$$\left.\begin{array}{l} g_1 = \left(\dfrac{dy_1}{dx}\right)\Bigg|_{x=0} = 0; \quad g_2 = \left(\dfrac{dy_1}{dx}\right)\Bigg|_{x=l1} - \left(\dfrac{dy_2}{dx}\right)\Bigg|_{x=0} = 0 \\ g_3 = y_1\big|_{x=l1} - y_2\big|_{x=0} = 0; \quad g_4 = \left(\dfrac{dy_2}{dx}\right)\Bigg|_{x=l2} = 0; \quad g_5 = y_2\big|_{x=l2} - y_0 = 0 \end{array}\right\} \tag{c5}$$

Ta đưa bài toán tìm cực trị của (b5) có 6 điều kiện ràng buộc (c5) về bài toán cực trị không có ràng buộc bằng cách đưa thừa số Lagrange vào phiếm hàm mở rộng như sau:

$$\left.\begin{array}{l} F = Z + \sum\limits_{k=1}^{5} g_k \lambda_k \to \min \\ Hay: \int_0^{l_1} \left[M_{x1} - M_{P1}\right](\chi_1)dx + \int_0^{l_2} \left[M_{x2} - M_{P2}\right](\chi_2)dx + \\ + g_1\lambda_1 + g_2\lambda_2 + g_3\lambda_3 + g_4\lambda_4 + g_5\lambda_5 \to \min \end{array}\right\} \tag{d5}$$

Trong đó: λ_5 là thừa số Lagrange và cũng là ẩn của bài toán và đó là lực để giữ cho hệ ở trạng thái lệch. Bài toán có 24 ẩn số là a_1, a_2, a_3, ..., a_9, b_0, b_1, b_2,..., b_9, và λ_1, λ_2,... λ_5. Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss xem các biến dạng uốn là độc lập với mômen tác dụng cho nên điều kiện cực trị của phiếm hàm mở rộng F là:

$$\left.\begin{aligned} h_i &= \int_0^{l_1}\left[M_{x1}-M_{P1}\right]\frac{\partial}{\partial a_i}(\chi_1)dx+\frac{\partial}{\partial a_i}\sum_{k=1}^{6}(g_k\lambda_k)=0; a_i(i=1,2,3,...,9)\\ k_i &= \int_0^{l_1}\left[M_{x2}-M_{P2}\right]\frac{\partial}{\partial b_i}(\chi_2)dx+\frac{\partial}{\partial b_i}(g_k\lambda_k)=0; \quad b_i(i=0,1,2,...,9)\\ u_i &= \frac{\partial}{\partial \lambda_k}\sum_{k=1}^{6}(g_k\lambda_k)=0; \qquad k=1,2,3,4,5. \end{aligned}\right\} \tag{e5}$$

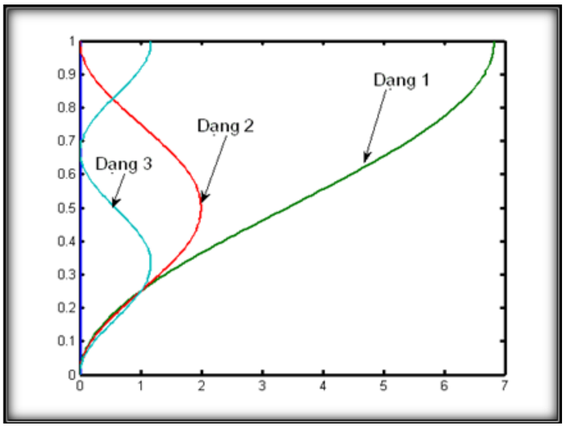
Như vậy, từ điều kiện cực trị của phiếm hàm mở rộng F ta sẽ nhận được 24 phương trình đại số tuyến tính để xác định các ẩn số. Có thể giải bài toán trên bằng cách sử dụng phần mềm Symbolic của Matlab. Khi giải phương trình xong thấy rằng các thông số a_1, a_2, a_3, ..., a_9, b_0, b_1, b_2,..., b_9, và λ_5, λ_2,... λ_5 đều là hàm của lực P. ở đây chỉ đưa ra giá trị của thừa số Lagrange λ_5. λ_5=22500.y_0(-.43998x$10^{35}l^{28}P^{14}EJ^3$+.91761 x$10^{15}l^{34}P^{17}$+.19859 x$10^{30}l^{30}P^{15}EJ^2$+ .35406x$10^{40}l^{26}P^{13}EJ^4$-.24065x$10^{53}l^{20}P^{10}EJ^7$+.24601x$10^{49}l^{22}P^{11}EJ^6$- .28846x$10^{23}l^{32}P^{16}EJ$+ .14076x$10^{69}l^{10}P^5EJ^{12}$-.23149$E^{75}l^4P^2EJ^{15}$-.33887x$10^{66}l^{12}P^6EJ^{11}$+.44936 x$10^{63}l^{14}P^7EJ^{10}$-.32360x$10^{60}l^{16}P^8EJ^9$+.38919x$10^{73}l^6P^3EJ^{14}$+.56711x$10^{76}l^2PEJ^{16}$- .32100x$10^{71}l^8P^4EJ^{13}$-.13122 x$10^{45}l^{24}P^{12}EJ^5$+.12266 x$10^{57}l^{18}P^9EJ^8$-.36872 x$10^{77}EJ^{17}$)=0(f5)

Ta thấy rằng trong trường hợp này, λ_5 là đa thức bậc 17 của P. Giải (f5) theo P ta sẽ nhận được 17 nghiệm. Đó là các lực tới hạn P_{th} cần tìm của hệ, ở đây chỉ đưa ra ba nghiệm đầu tiên lần lượt là:

$P_{1th} = 9.8696\dfrac{EJ}{l^2}$; $P_{2th} = 39.4784\dfrac{EJ}{l^2}$;

$P_{3th} = 88.8285\dfrac{EJ}{l^2}$;

Dạng của trục võng (véc tơ riêng) tương ứng với 3 lực tới hạn chính xác (3 trị riêng chính xác) đầu tiên như hình 3.10.



Hình 3.10. Đường độ võng

KẾT LUẬN

1. Sử dụng thành công phương pháp nguyên lý cực trị Gauss đối với bài toán ổn định uốn dọc của thanh thẳng đàn hồi tuyến tính, chịu tác dụng của tải trọng tĩnh.

2. Các kết quả tính toán hoàn toàn trùng khớp với các kết quả nhận được bằng phương pháp khác.

3. Phương pháp dùng chuyển vị cưỡng bức để giải bài toán ổn định của thanh cho ta ngay phương trình đa thức xác định lực tới hạn mà không phải thông qua các phép biến đổi phức tạp để đưa ma trận về ma trận đường chéo. Về mặt toán học, do dùng chuyển vị cưỡng bức nên bài toán ổn định thanh là bài toán có vế phải nên ở đây không phải dùng phương pháp giải phương trình vi phân thuần nhất đã trình bày ở chương 1.

DANH MỤC TÀI LIỆU THAM KHẢO

I. TIẾNG VIỆT

[1] Hà Huy Cương (2005), *Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss*, Tạp chí Khoa học và kỹ thuật, IV/ Tr. 112 ÷118.

[2] Nguyễn Văn Liên, Nguyễn Phương Thành, Đinh Trọng Bằng (2003), *Giáo trình Sức bền vật liệu*, Nhà xuất bản xây dựng, tái bản lần thứ 3, 330 trang.

[3] Nguyễn Phương Thành(2002), *Nghiên cứu trạng thái ứng suất – biến dạng tấm nhiều lớp chịu tải trọng động có xét lực ma sát ở các mặt tiếp xúc*, Luận án tiến sỹ kỹ thuật.

[4] Vương Ngọc Lưu(2002), *Nghiên cứu trạng thái ứng suất – biến dạng của tấm sàn Sandwich chịu tải trọng tĩnh và động*, Luận án tiến sỹ kỹ thuật.

[5] Trần Hữu Hà(2006), *Nghiên cứu bài toán tương tác giữa cọc và nền dưới tác dụng của tải trọng*, Luận án tiến sỹ kỹ thuật.

[6] Phạm Văn Trung (2006), *Phương pháp mới Tính toán hệ dây và mái treo*, Luận án Tiến sỹ kỹ thuật.

[7] Vũ Hoàng Hiệp (2007), *Nghiên cứu trạng thái ứng suất - biến dạng của dầm nhiều lớp chịu tải tĩnh và động*, Luận án tiến sỹ kỹ thuật, Hà nội.

[8] Nguyễn Văn Đạo (2001), *Cơ học giải tích*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà nội, 337 trang.

[9] Nguyễn Văn Đạo, Trần Kim Chi, Nguyễn Dũng (2005), *Nhập môn Động lực học phi tuyến và chuyển động hỗn độn*. Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà nội.

[10] Lều Thọ Trình, Đỗ Văn Bình (2006), *Giáo trình ổn định công trình*, Nhà xuất bản Khoa học kỹ thuật.

[11] Vũ Hoàng Hiệp (2008), *Tính kết cấu có xét biến dạng trượt*, Tạp chí xây dựng số7.

[12] Đoàn Văn Duẩn, Nguyễn Phương Thành (2007), *Phương pháp mới tính toán ổn định của thanh*, Tạp chí Xây dựng số 12 (Tr41-Tr44).

[13] Đoàn Văn Duẩn (2007), *Phương pháp nguyên lý Cực trị Gauss đối với các bài toán ổn định công trình*, Luận văn thạc sỹ kỹ thuật.

[14] Đoàn Văn Duẩn (2008), *Phương pháp mới tính toán ổn định của khung,* Tạp chí Xây dựng số 01 (Tr35-Tr37).

[15] Đoàn Văn Duẩn (2008), *Nghiên cứu ổn định uốn dọc của thanh có xét biến dạng trượt*, Tạp chí Xây dựng số 12 (Tr33-Tr37).

[16] Đoàn Văn Duẩn (2009), *Phương pháp nghiên cứu ổn định tổng thể của dàn,* Tạp chí Xây dựng số 03 (Tr86-Tr89).

[17] Đoàn Văn Duẩn (2010), Phương pháp phần tử hữu hạn nghiên cứu ổn định uốn dọc của thanh, Tạp chí kết cấu và Công nghệ xây dựng, số 05, Qúy IV(Tr30-Tr36).

[18] Đoàn Văn Duẩn (2011), Nghiên cứu ổn định đàn hồi của kết cấu hệ thanh có xét đến biến dạng trượt, Luận án Tiến sỹ kỹ thuật.

[19] Đoàn Văn Duẩn (2012), Phương pháp mới tính toán dây mềm, Tạp chí kết cấu và công nghệ Xây dựng số 09, Qúy II (Tr56-Tr61).

[20] Đoàn Văn Duẩn (2014), Phương pháp chuyển vị cưỡng bức giải bài toán trị riêng và véc tơ riêng,Tạp chí Xây dựng số 11 (Tr82-Tr84).

[21] Đoàn Văn Duẩn (2015), Phương pháp mới nghiên cứu ổn định động lực học của thanh,Tạp chí Xây dựng số 01 (Tr86-Tr88).

[22] Đoàn Văn Duẩn (2015), Bài toán cơ học kết cấu dưới dạng tổng quát,Tạp chí Xây dựng số 02 (Tr59-Tr61).

[23] Đoàn Văn Duẩn (2015), Phương pháp so sánh nghiên cứu nội lực và chuyển vị của hệ dầm,Tạp chí Xây dựng số 11 (Tr56-Tr58).

[24] Đoàn Văn Duẩn (2015),Tính toán kết cấu khung chịu uốn bằng phương pháp so sánh,Tạp chí Xây dựng số 12 (Tr62-Tr64).

[25] Trần Thị Kim Huế (2005), *Phương pháp nguyên lý Cực trị Gauss đối với các bài toán cơ học kết cấu,* Luận văn thạc sỹ kỹ thuật.

[26] Nguyễn Thị Liên (2006), *Phương pháp nguyên lý Cực trị Gauss đối với các bài toán động lực học công trình,* Luận văn thạc sỹ kỹ thuật.

[27] Vũ Thanh Thủy (2009), *Xây dựng bài toán dầm khi xét đầy đủ hai thành phần nội lực momen và lực cắt*. Tạp chí Xây dựngsố 4.

[28] Vũ Thanh Thủy (2009), *Dao động tự do của dầm khi xét ảnh hưởng của lực cắt*. Tạp chí Xây dựng, số 7.

[29] Timoshenko C.P, Voinópki- Krige X, (1971), *Tấm và Vỏ*. Người dịch, Phạm Hồng Giang, Vũ Thành Hải, Đoàn Hữu Quang, Nxb Khoa học và kỹ thuật, Hà Nội.