

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC DÂN LẬP HẢI PHÒNG

PHẠM MINH TUẤN

NGHIÊN CỨU ỔN ĐỊNH ĐÀN HỒI CỦA THANH
THĂNG CHỊU UỐN DỌC

Chuyên ngành: **Kỹ thuật Xây dựng Công trình Dân dụng & Công nghiệp**

Mã số: **60.58.02.08**

LUẬN VĂN THẠC SĨ KỸ THUẬT
NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. ĐOÀN VĂN DUẤN

Hải Phòng, 2015

MỤC LỤC

LỜI CẢM ƠN	4
MỞ ĐẦU.....	5
LỜI CAM ĐOAN	7
DANH MỤC KÝ HIỆU.....	8
CHƯƠNG 1. TỔNG QUAN VỀ ỔN ĐỊNH CÔNG TRÌNH	10
1. SỰ RA ĐỜI VÀ TÌNH HÌNH NGHIÊN CỨU ỔN ĐỊNH CÔNG TRÌNH TRÊN THẾ GIỚI VÀ VIỆT NAM	10
1.1. SỰ RA ĐỜI.....	10
1.2. TÌNH HÌNH NGHIÊN CỨU ỔN ĐỊNH KẾT CẤU CÔNG TRÌNH TRÊN THẾ GIỚI VÀ VIỆT NAM... ..	10
1.2.1. Tình hình nghiên cứu ổn định kết cấu công trình trên Thế giới	10
1.2.2. Tình hình nghiên cứu ổn định kết cấu công trình tại Việt nam.....	11
1.3. Ý NGHĨA VÀ TẦM QUAN TRỌNG CỦA VIỆC NGHIÊN CỨU ỔN ĐỊNH CÔNG TRÌNH	11
1.3.1. Ý nghĩa của việc nghiên cứu ổn định công trình	11
1.3.2. Tầm quan trọng của việc nghiên cứu ổn định công trình.....	12
1.4. KHÁI NIỆM CƠ BẢN VÀ CÁC PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU ỔN ĐỊNH CÔNG TRÌNH.....	13
1.4.1. Khái niệm về ổn định và mất ổn định	13
1.4.1.1. Định nghĩa về ổn định.....	13
1.4.1.2. Các trường hợp mất ổn định	14
1.4.1.3. Các tiêu chuẩn về ổn định.....	24
1.4.2. Các phương pháp nghiên cứu ổn định công trình.....	26
1.4.2.1. Phương pháp tĩnh (Phương pháp Euler).....	26
1.4.2.2. Phương pháp năng lượng	27
1.4.2.3. Phương pháp động lực học	28
CHƯƠNG 2. PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN LÝ CỰC TRỊ GAUSS.....	29
2.1. NGUYÊN LÝ CỰC TRỊ GAUSS	29
2.2. PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN LÝ CỰC TRỊ GAUSS	31
2.3. CƠ HỆ MÔI TRƯỜNG LIÊN TỤC: ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG.....	37
2.4. CƠ HỌC KẾT CẤU.....	44
2.5. PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN LÝ CỰC TRỊ GAUSS VÀ CÁC PHƯƠNG TRÌNH CÂN BẰNG CỦA CƠ HỆ	47
2.5.1. Phương trình cân bằng tĩnh đối với môi trường đàn hồi, đồng nhất, đẳng hướng	47
2.5.2. Phương trình vi phân của mặt võng của tấm chịu uốn	50
CHƯƠNG 3. ỔN ĐỊNH ĐÀN HỒI CỦA THANH THẲNG CHỊU UỐN DỌC.....	52
3.1. PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN LÝ CỰC TRỊ GAUSS ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH CÔNG TRÌNH.....	52
3.1.1. Bài toán thanh chịu nén uốn đồng thời	52
3.1.2. Bài toán thanh chịu nén uốn và cắt đồng thời	52
3.2. SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN LÝ CỰC TRỊ GAUSS THIẾT LẬP PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CÂN BẰNG.....	53

3.2.1. Các ví dụ tính toán.....	53
Ví dụ 1: Thanh đầu ngàm đầu tự do.....	53
Ví dụ 2: Thanh hai đầu khớp.....	54
3.2.2. Nhận xét và kết luận:.....	56
3.3. CÁC BƯỚC THỰC HIỆN KHI TÌM LỰC TỚI HẠN BẰNG PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN LÝ CỰC TRI GAUSS.....	56
3.3.1. Các bước thực hiện.....	56
3.3.2. Nhận xét và kết luận.....	58
3.4. CÁC VÍ DỤ TÍNH TOÁN.....	59
3.4.1. Xác định lực tới hạn của thanh.....	59
Ví dụ 1 - Thanh một đầu ngàm một đầu tự do.....	59
Ví dụ 2. Bài toán thanh hai đầu khớp.....	64
Ví dụ 3: Bài toán thanh hai đầu ngàm.....	72
KẾT LUẬN VÀ HƯỚNG NGHIÊN CỨU TIẾP THEO.....	78
1. KẾT LUẬN:.....	78
2. HƯỚNG NGHIÊN CỨU TIẾP THEO:.....	78
DANH MỤC TÀI LIỆU THAM KHẢO.....	79

LỜI CẢM ƠN

Với tất cả sự kính trọng và biết ơn sâu sắc nhất, tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn của mình tới sự hướng dẫn tận tình và chu đáo của thầy hướng dẫn TS. Đoàn Văn Duẩn, các thầy cô trong khoa Sau đại học, khoa Xây dựng và toàn thể các thầy cô giáo trường Đại học Dân Lập Hải Phòng những người đã tạo điều kiện cho tôi hoàn thành luận văn này.

Do những hạn chế về kiến thức, thời gian, kinh nghiệm và tài liệu tham khảo nên thiếu sót và khuyết điểm là điều không thể tránh khỏi. Vì vậy, tôi rất mong nhận được sự góp ý, chỉ bảo của các thầy cô giáo đó chính là sự giúp đỡ quý báu mà tôi mong muốn nhất để cố gắng hoàn thiện hơn trong quá trình nghiên cứu và công tác sau này.

Xin trân trọng cảm ơn!

Tác giả luận văn

Phạm Minh Tuấn

MỞ ĐẦU

Những năm gần đây, do kinh tế phát triển, ngày càng xuất hiện nhiều công trình cao tầng, công trình có khẩu độ lớn, công trình đặc biệt. Trong những công trình đó người ta thường dùng các thanh có chiều dài lớn, tầm - vô chịu nén và do đó điều kiện ổn định trong miền đàn hồi có tầm quan trọng đặc biệt, đòi hỏi phải nghiên cứu đầy đủ cả về mặt lý thuyết và thực nghiệm.

Bài toán ổn định của kết cấu đã được giải quyết theo nhiều hướng khác nhau, phần lớn xuất phát từ nguyên lý năng lượng mà theo đó kết quả phụ thuộc rất nhiều vào cách chọn dạng của hệ ở trạng thái lệch khỏi dạng cân bằng ban đầu.

Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss do GS.TSKH. Hà Huy Cương đề xuất là phương pháp cho phép áp dụng nguyên lý cực trị Gauss - vốn được phát biểu cho hệ chất điểm - để giải các bài toán cơ học vật rắn biến dạng nói riêng và bài toán cơ học môi trường liên tục nói chung. Đặc điểm của phương pháp này là bằng một cái nhìn đơn giản luôn cho phép tìm được kết quả chính xác của các bài toán.

Đối tượng, phương pháp và phạm vi nghiên cứu của luận văn

Trong luận văn này, tác giả sử dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss nói trên để xây dựng và giải bài toán ổn định đàn hồi của thanh thẳng chịu uốn dọc

Do sự cần thiết của việc nghiên cứu ổn định của thanh thẳng chịu uốn dọc, mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu của luận văn này là:

Mục đích nghiên cứu của luận văn

“Nghiên cứu ổn định công đàn hồi của thanh thẳng chịu uốn dọc”

Nhiệm vụ nghiên cứu của luận văn

1. Tìm hiểu khái niệm về ổn định công trình và các phương pháp giải bài toán ổn định công trình.
2. Trình bày phương pháp nguyên lý cực trị Gauss.
3. Dùng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss để xây dựng và giải các bài toán ổn định đàn hồi của thanh thẳng chịu uốn dọc.
4. Lập chương trình máy tính điện tử cho các bài toán nêu trên.

Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài nghiên cứu

Vấn đề ổn định đàn hồi của kết cấu thanh đã được nhiều tác giả trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu, kể cả bài toán có xét đến lực cắt ngang Q . Tuy nhiên, ý nghĩa khoa học của luận văn này nằm ở chỗ dùng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss do GS. TSKH. Hà Huy Cương đề xuất để nghiên cứu ổn định đàn hồi của thanh thẳng đàn hồi tuyến tính chịu uốn dọc.

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của bản thân, được thực hiện trên cơ sở nghiên cứu, tính toán dưới sự hướng dẫn khoa học của TS. Đoàn Văn Duẩn.

Các số liệu trong luận văn có nguồn trích dẫn, kết quả trong luận văn là trung thực.

Tác giả luận văn

Phạm Minh Tuấn

DANH MỤC KÝ HIỆU

Ký hiệu	Đại lượng
P_{th}	Lực tới hạn.
P	Lực tập trung
M	Mômen uốn
N	Lực dọc
Q	Lực cắt
σ	Ứng suất pháp
τ	Ứng suất tiếp
F	Diện tích mặt cắt
E	môđun Young
G	Modun trượt
J	Mô men quán tính tiết diện
EJ	Độ cứng uốn của tiết diện dầm
V	Chiều dài dầm hoặc diện tích tấm
U^*	Thế năng toàn phần
U	Thế năng biến dạng của nội lực
U_P	Thế năng của ngoại lực
m	Khối lượng chất điểm
ρ	Khối lượng đơn vị
Ω	Chiều dài hoặc diện tích phạm vi đặt lực
r_i	Vectơ tọa độ
\dot{r}_i	Vectơ vận tốc
\ddot{r}_i	Vectơ gia tốc
Z	Lượng cường bức
k	Độ cứng lò xo
χ	Độ cong của thanh
$\lambda(x)$	Nhân tử Lagrange
ε	Biến dạng của vật liệu
δ	Biến phân
θ	Biến dạng thể tích
κ	Biến dạng uốn (độ cong đường đàn hồi)

μ, λ	Hệ số Lamé
ν	Hệ số Poisson
u	Chuyển vị theo trục x
Z	Lượng cường bức
D	Độ cứng uốn
$D(1-\nu)$	Độ cứng xoắn

CHƯƠNG 1. TỔNG QUAN VỀ ỔN ĐỊNH CÔNG TRÌNH

1. Sự ra đời và tình hình nghiên cứu ổn định công trình trên Thế giới và Việt nam

1.1. Sự ra đời

Vấn đề ổn định kết cấu được bắt đầu từ công trình nghiên cứu bằng thực nghiệm do Piter Musschenbroek công bố năm 1729, đã đi đến kết luận rằng “lực tới hạn tỷ lệ nghịch với bình phương chiều dài thanh”. Người đặt nền móng cho việc nghiên cứu lý thuyết bài toán ổn định là Leonhard Euler qua công trình công bố đầu tiên vào năm 1744. Tuy nhiên, cho mãi đến cuối thế kỷ XIX vấn đề công trình mới được phát triển mạnh mẽ qua những cống hiến của các nhà khoa học như Giáo sư F.s. Iaxinski, Viện sỹ A. N. Đinnik, Viện sỹ V. G. Galerkin... Cho đến nay, đã có rất nhiều công trình nghiên cứu về lĩnh vực này và đã giải quyết tốt những yêu cầu cơ bản của thực tế. Mặc dù vậy, cũng tồn tại nhiều vấn đề chưa được giải quyết đến cùng và còn tiếp tục lôi cuốn sự quan tâm của các nhà nghiên cứu.

1.2. Tình hình nghiên cứu ổn định kết cấu công trình trên Thế giới và Việt Nam

1.2.1. Tình hình nghiên cứu ổn định kết cấu công trình trên Thế giới

Cách đây khoảng gần 300 năm, Euler đã tìm ra công thức xác định lực tới hạn và đã giải những bài toán đầu tiên về hiện tượng mất ổn định xảy ra khi uốn dọc các thanh chịu nén và trong một thời gian dài nó là đề tài của các cuộc thảo luận. Các cuộc tranh luận kéo dài gần 70 năm. Một trong những nguyên nhân chính của các cuộc tranh luận là trong một số trường hợp công thức Euler không được thí nghiệm xác nhận. Điều đó có thể giải thích là khi xác định công thức xác định lực tới hạn Euler đã giả thiết là vật liệu làm việc trong miền đàn hồi và tuân theo định luật Hook.

Trong trường hợp thanh làm việc ngoài miền đàn hồi, việc xác định ứng suất tới hạn bằng lý thuyết vô cùng phức tạp. Vì vậy người ta phải tiến hành các nghiên cứu thực nghiệm. Trên cơ sở các kết quả thực nghiệm F.s. Iasinski đã đưa ra công

thức thực nghiệm để xác định ứng suất tới hạn cho trường hợp này.

Ngoài L.Euler, F. s. Iasinski nghiên cứu ổn định cho thanh chịu nén làm việc trong và ngoài miền đàn hồi còn có A. M. Liapunov cũng đưa ra định nghĩa toán học về ổn định chuyển động được xem là tổng quát và bao trùm cho mọi lĩnh vực.

Euler- Lagrange đưa ra định nghĩa về ổn định công trình, độc lập với định nghĩa về ổn định chuyển động của Liapunov và cũng đủ để giải quyết phần lớn các bài toán ổn định công trình. Chúng ta đặc biệt quan tâm đến định nghĩa về ổn định chuyển động của Liapunov khi gặp các bài toán ổn định của hệ không bảo toàn, ổn định động và ổn định không đàn hồi.

1.2.2. Tình hình nghiên cứu ổn định kết cấu công trình tại Việt nam

Trước đây do nền kinh tế còn nghèo nàn nên các công trình xây dựng khi đó chủ yếu được xây dựng bằng các loại vật liệu như gỗ, đá vì cường độ của những loại vật liệu này tương đối thấp, các cấu kiện cần phải có tiết diện lớn nên việc tính toán ổn định chưa phải là vấn đề cấp thiết đối với người kỹ sư thiết kế và chưa thu hút được sự quan tâm của các nhà nghiên cứu.

Ngày nay, các cán bộ khoa học nghiên cứu và giảng dạy động lực học, dao động và ổn định công trình, các kỹ sư cơ khí, xây dựng, giao thông vận tải công tác ở các viện nghiên cứu, các nhà máy lớn đã tích cực tham gia các hoạt động khoa học trong lĩnh vực dao động và ổn định.

1.3. Ý nghĩa và tầm quan trọng của việc nghiên cứu ổn định công trình

1.3.1. Ý nghĩa của việc nghiên cứu ổn định công trình

Thực tế cho thấy, công trình chỉ làm việc an toàn khi đồng thời thoả mãn ba điều kiện: Điều kiện bền, điều kiện cứng và điều kiện ổn định. Do vậy, bài toán ổn định và phân tích ổn định của kết cấu luôn luôn có ý nghĩa rất lớn và đóng vai trò rất quan trọng trong lĩnh vực nghiên cứu, phân tích kết cấu và thiết kế. Tùy thuộc vào những đặc tính của vật liệu, môi trường làm việc, phương pháp và quá trình chất tải, ... mà người nghiên cứu đặt ra các bài toán ổn định sau :

- Ổn định của kết cấu vật liệu đàn hồi
- Ổn định của kết cấu vật liệu đàn - dẻo
- Ổn định của kết cấu vật liệu từ biến

Trong bài toán ổn định đàn hồi, cần tìm tải trọng tới hạn, mà khi tải trọng bé hơn tải trọng tới hạn thì hệ luôn ổn định. Các phương pháp nghiên cứu ổn định của hệ đàn hồi đã được nhiều tác giả nghiên cứu theo các hướng khác nhau. Có thể phân loại theo các hướng khác nhau, chẳng hạn phân loại theo toán học (phương pháp giải tích, phương pháp nửa giải tích, phương pháp số) hoặc phân loại theo trạng thái trước khi hệ mất ổn định (có xét đến sự lệch ban đầu và xét hệ lý tưởng chịu các kích động v.v...)

1.3.2. Tầm quan trọng của việc nghiên cứu ổn định công trình

Nếu công thức của Euler đơn thuần mang tính hàn lâm, thì vấn đề mất ổn định của cấu kiện chịu nén có tầm quan trọng to lớn trong thực tế đối với kết cấu công trình (từ khoảng năm 1880) của rất nhiều cầu đường sắt. Việc sử dụng thép tất yếu dẫn đến các cấu kiện thành mỏng chịu nén, tấm và vỏ mỏng. Nhiều công trình bị sụp đổ và những tai nạn khủng khiếp đã xảy ra (từ chiếc cầu đường sắt đầu tiên ở Kevđa (Nga) là cầu dàn hờ đã bị phá huỷ năm 1875 do hệ thanh biên trên bị mất ổn định, cầu Menkientain ở Thụy sĩ bị phá huỷ năm 1891 do mất ổn định, Cầu dàn Quebec ở Canada 1907, bể chứa khí ở Hamburg 1907, cầu dàn Mojur ở Nga 1925 bị phá huỷ do thanh ghép chịu nén bị mất ổn định cho đến sự phá huỷ của 24 chiếc cầu ở Pháp cũng do nguyên nhân mất ổn định) cho thấy vấn đề mất ổn định khó mà tầm quan trọng của nó lớn dần hàng năm, sự mất ổn định có mặt ở mọi nơi, từ cột hay vòm sụp đổ do uốn trong mặt phẳng của nó, đến dầm và vòm bị sụp đổ bởi mất ổn định xoắn ngang ra ngoài mặt phẳng của chúng. Trong những trường hợp vỏ mỏng, tầm quan trọng về quân sự của nó hiển nhiên là to lớn, sự phân tích tuyến tính lúc ban đầu cho kết quả thực tế có thể chấp nhận được .

Theo năm tháng tầm quan trọng tăng lên của ổn định công trình có được là nhờ một vài yếu tố phụ giúp :

- Sự tăng ứng suất cho phép
 - Sự giảm chiều dày do sử dụng các loại thép cường độ cao hay hợp kim nhôm
 - Sự tăng cường sử dụng tấm đặc biệt trong cầu thay cho thép hình cán sẵn
- Tầm quan trọng hiện nay của ổn định công trình được thể hiện bằng ba yếu tố:

- Số công trình khoa học dành cho lĩnh vực này mở rộng theo hàm số mũ
- Các kỹ sư kết cấu không còn thoả mãn với các mô hình phân nhánh đàn hồi của thời kỳ 1744-1930 hay với công thức thực nghiệm về mất ổn định của cột nữa. Họ sử dụng toàn bộ những khả năng của máy tính điện tử để xác lập những giá trị thực tế của ứng suất tới hạn của cấu kiện hay kết cấu bị ảnh hưởng bởi sự khiếm khuyết về hình học và cấu trúc.

- Những tổ chức khác nhau của các quốc gia và quốc tế phát triển nhanh chóng (Hội đồng nghiên cứu ổn định kết cấu Mỹ, uỷ ban về ổn định của các quy ước Châu Âu cho kết cấu thép (1955), uỷ ban nghiên cứu cột của Nhật Bản). Ba uỷ ban này cộng với uỷ ban thứ tư đại diện cho các nước khối Comecom tổ chức từ tháng 9/76 đến 10/77 cuộc “hội đàm du lịch”. Đó là nỗ lực nghiên cứu đầu tiên được thể hiện phổ biến trên toàn thế giới trong lĩnh vực ổn định Công trình [31].

1.4. Khái niệm cơ bản và các phương pháp nghiên cứu ổn định công trình

1.4.1. Khái niệm về ổn định và mất ổn định

1.4.1.1. Định nghĩa về ổn định

➤ Theo Euler - Lagrange :

Ổn định là khả năng của công trình bảo toàn được vị trí ban đầu của nó cũng như dạng cân bằng ban đầu tương ứng với tải trọng trong trạng thái biến dạng, luôn luôn giữ, khi có các nhiễu loạn tùy ý từ bên ngoài gần với trạng thái không biến dạng ban đầu và hoàn toàn trở về trạng thái đó trong giai đoạn đàn hồi, còn trong giai đoạn đàn dẻo thì theo thường lệ, sẽ trở về trạng thái đó một cách từng phần, nếu như các nguyên nhân ngẫu nhiên gây ra nhiễu loạn công trình bị triệt tiêu [4].

Nói cách khác, ổn định là tính chất của công trình chống lại các tác nhân ngẫu nhiên từ bên ngoài và tự nó khôi phục hoàn toàn hoặc một phần vị trí ban đầu và dạng cân bằng của nó trong trạng thái biến dạng, khi các tác nhân ngẫu nhiên bị mất đi.[4]

➤ Theo Liapunov [31]

“Trạng thái cân bằng của một hệ là ổn định nếu khi và chỉ khi hệ trở lại hình dạng này sau một nhiễu loạn nhỏ tạm thời nào đó. Nhiễu loạn như thế có

thể sinh ra bởi một lực nhỏ tác động lên hệ trong một thời gian rất ngắn và bỏ ra sau đó”.

Định nghĩa này được hiểu trong ý nghĩa động lực : Điều này ám chỉ là dao động của hệ tắt dần do động năng đưa vào nhờ nhiễu loạn tiêu tán nhanh. Bởi vậy sau một thời gian ngắn chuyển động dừng lại và sự cân bằng tĩnh ban đầu được phục hồi.

Như vậy theo hai định nghĩa trên ta đi đến kết luận: Vị trí của công trình hay dạng cân bằng ban đầu trong trạng thái biến dạng của công trình được gọi là ổn định hay không ổn định dưới tác dụng của tải trọng nếu như sau khi gây cho công trình một độ lệch rất nhỏ khỏi vị trí ban đầu hoặc dạng cân bằng ban đầu bằng một nguyên nhân bất kỳ nào đó ngoài tải trọng đã có (còn gọi là nhiễu) rồi bỏ nguyên-nhân đó đi thì công trình sẽ có hay không có khuynh hướng quay trở về trạng thái ban đầu.

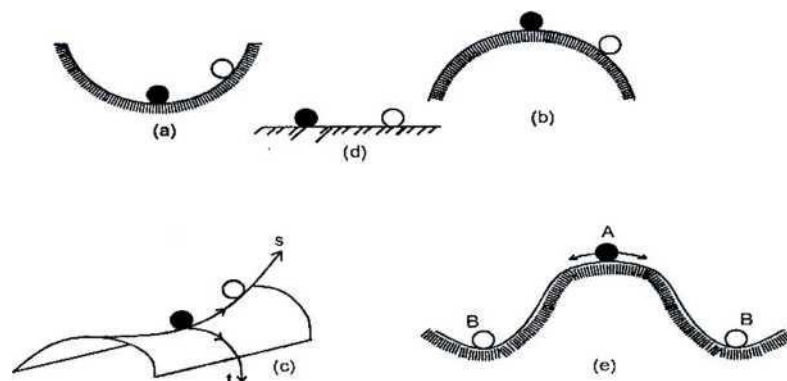
Bước quá độ của công trình từ trạng thái ổn định sang trạng thái không ổn định gọi là mất ổn định. Giới hạn đầu của bước quá độ đó gọi là trạng thái tới hạn của công trình. Tải trọng tương ứng với trạng thái tới hạn gọi là tải trọng tới hạn.

1.4.1.2. Các trường hợp mất ổn định

- Trường hợp 1: Mất ổn định về vị trí [31]

Hiện tượng mất ổn định về vị trí xảy ra khi toàn bộ công trình được xem là tuyệt đối cứng, không giữ nguyên được vị trí ban đầu mà buộc phải chuyển sang vị trí cân bằng mới khác vị trí ban đầu.

Sự minh họa của trường hợp này như sau:



Hình 1 - 1

Xét một viên bi cứng trên một bề mặt cứng (Hình 1-1).

Rõ ràng là trong trường hợp (a) sự cân bằng của viên bi là ổn định. Sau một nhiễu loạn nhỏ cuối cùng nó sẽ trở về đáy cốc, tuy vậy sự suy giảm nhỏ có thể xảy ra.

Trong trường hợp (b) sự cân bằng là không ổn định, bởi vì sau một nhiễu loạn nhỏ viên bi sẽ không bao giờ có thể phục hồi vị trí ban đầu của nó.

Trong trường hợp (c) sự cân bằng là ổn định được tuân thủ khi một gậy nhiễu loạn theo phương s, và là không ổn định theo phương t, bởi vậy trạng thái cân bằng (c) là không ổn định bởi vì sự ổn định của trạng thái cân bằng phải là thật đúng đối với nhiễu loạn nào đó.

Trong trường hợp (d) sau một nhiễu loạn viên bi lăn trên mặt phẳng ngang bằng đến khi sự suy giảm ngừng chuyển động, bởi vậy đạt tới một vị trí cân bằng mới nó khác biệt với trạng thái ban đầu (do vậy là không ổn định), nhưng nếu sự nhiễu loạn là đủ nhỏ vị trí cân bằng mới sẽ gần một cách tùy ý với trạng thái ban đầu. Trong trường hợp này ta nói rằng trạng thái cân bằng ban đầu là phiếm định.

Trong trường hợp (e) trạng thái A là không ổn định một nhiễu loạn nhỏ có thể làm viên bi lăn xuống và một trạng thái cân bằng mới là B đạt được. Nhưng nếu có thể có một nhiễu loạn nhỏ thì trạng thái cân bằng mới này sẽ không bao giờ có thể gần với trạng thái ban đầu của nó cho nên nó là không ổn định chứ không phải là phiếm định.

- Trường hợp 2: Mất ổn định về dạng cân bằng [1 1]

Hiện tượng mất ổn định về dạng cân bằng ở trạng thái biến dạng xảy ra khi dạng biến dạng ban đầu của vật thể biến dạng tương ứng với tải trọng còn nhỏ, buộc phải chuyển sang dạng biến dạng mới khác trước về tính chất nếu tải trọng đạt đến một giá trị nào đó hoặc xảy ra khi biến dạng của vật thể phát triển nhanh mà không xuất hiện dạng biến dạng mới khác trước về tính chất nếu tải trọng đạt đến một giá trị nào đó. Trong những trường hợp này, sự cân bằng giữa các ngoại lực và nội lực không thể thực hiện được tương ứng với dạng biến dạng ban đầu mà chỉ có thể thực hiện được tương ứng với dạng biến dạng mới khác dạng ban đầu về tính chất hoặc chỉ có thể thực hiện được khi giảm tải trọng. Hiện tượng này khác với hiện tượng mất ổn định về vị trí ở các điểm sau: Đối tượng nghiên cứu là vật

thể biến dạng chứ không phải tuyệt đối cứng, sự cân bằng cần được xét với cả ngoại lực và nội lực.

Mất ổn định về dạng cân bằng gồm hai loại:

Mất ổn định loại một (mất ổn định Euler), có các đặc trưng sau:

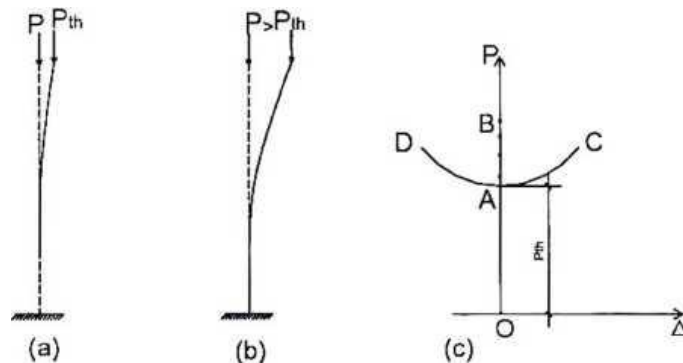
Dạng cân bằng có khả năng phân nhánh

- Phát sinh dạng cân bằng mới khác dạng cân bằng ban đầu về tính chất Trước trạng thái tới hạn dạng cân bằng ban đầu là duy nhất và ổn định; sau trạng thái tới hạn dạng cân bằng là không ổn định.

Sự minh họa của trường hợp này thể hiện qua các ví dụ sau:

Ví dụ 1: Ổn định của thanh một đầu ngàm một đầu tự do [11]

Khi $p < P_{th}$ thanh vẫn thẳng, trạng thái chịu nén của thanh là trạng thái ban đầu; duy nhất và là dạng cân bằng ổn định. Trạng thái cân bằng ổn định này được mô tả bởi đoạn OA trên đồ thị liên hệ giữa chuyển vị A và tải trọng p (Hình 1-2c)



Khi $p = P_{th}$, thanh ở trạng thái tới hạn. Lúc này, ngoài trạng thái cân bằng chịu nén còn có khả năng phát sinh đồng thời trạng thái cân bằng uốn dọc, nghĩa là thanh ở trạng thái cân bằng trung tính. Như vậy, dạng cân bằng bị phân nhánh thành hai dạng biến dạng. Trạng thái này tương ứng với điểm phân nhánh A trên đồ thị (hình 1-2c).

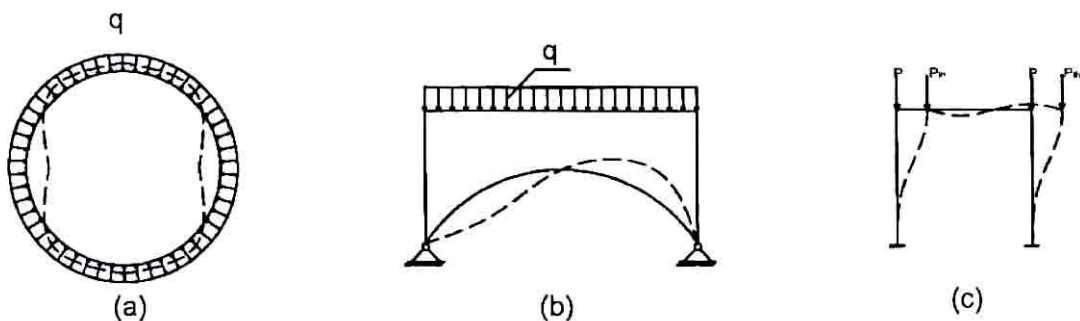
- Khi $P > P_{th}$, trạng thái cân bằng chịu nén vẫn có khả năng tiếp tục tồn tại song không ổn định vì nếu đưa hệ ra khỏi dạng cân bằng ban đầu bằng một nguyên nhân nào đó rồi bỏ nguyên nhân đó đi thì hệ sẽ không có khả năng trở về dạng thẳng ban đầu. Dạng cân bằng không ổn định này tương ứng với nhánh AB trên đồ

thị (nhánh có điểm thêm các dấu chấm trên hình 1-2c). Trong hệ cũng phát sinh đồng thời trạng thái cân bằng uốn dọc khi biến dạng của thanh là hữu hạn (hình 1-2 b). Dạng cân bằng này là ổn định và được mô tả bởi nhánh AC hoặc AD trên đồ thị (hình 1-2c).

- Nếu tiếp tục tăng lực P thì về mặt lý thuyết trong thanh sẽ phát sinh những dạng cân bằng mới dưới dạng uốn dọc tương ứng với những lực tới hạn bậc cao. Tuy nhiên, ngoài dạng cân bằng thứ nhất tương ứng với lực tới hạn nhỏ nhất, những dạng cân bằng tương ứng với lực tới hạn bậc cao đều là không ổn định, hiếm khi xảy ra và không có ý nghĩa thực tế. Bởi vậy trong thực tế ta chỉ cần tìm lực tới hạn nhỏ nhất.

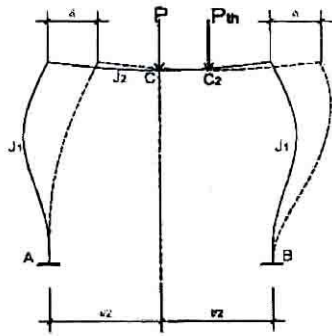
Hiện tượng mất ổn định loại một có thể xảy ra tương ứng với các dạng sau:

- Mất ổn định dạng nén đúng tâm. Ngoài ví dụ vừa xét, trên (hình 1-3) giới thiệu một số ví dụ khác về mất ổn định dạng nén đúng tâm như : Vành tròn kín (hình 1-3a) chịu áp lực phân bố đều hướng tâm (áp lực thủy tĩnh); vòm parabol chịu tải trọng phân bố đều theo phương ngang (hình 1-3b). Đó là những hệ chỉ chịu nén đúng tâm nếu bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng nén đàn hồi khi hệ còn ổn định. Nếu tải trọng q vượt quá q_{lh} thì trong hệ sẽ phát sinh dạng cân bằng mới theo đường đứt nét. Trong trường hợp khung chịu tải trọng như trên (hình 1-3c): khi $p < P_{th}$, khung có dạng cân bằng chịu nén ; khi $p > P_{th}$, dạng cân bằng chịu nén không ổn định và khung có dạng cân bằng mới chịu nén cùng với uốn theo đường đứt nét trên hình vẽ.

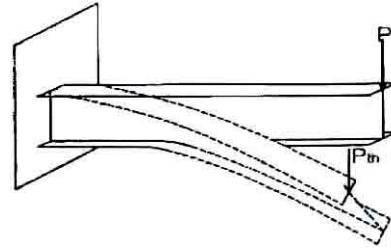


Hình 1-3.

- Mất ổn định dạng biến dạng đối xứng: Để làm ví dụ, ta xét khung đối xứng chịu tải trọng tác dụng đối xứng như trên



Hình 1-4



Hình 1-5

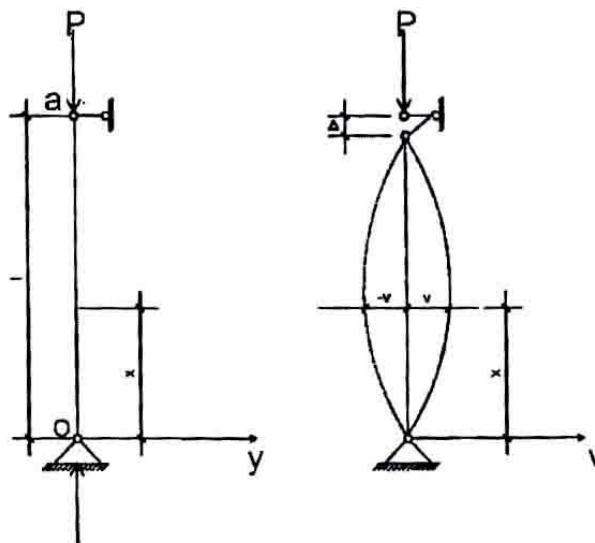
Khi $p < p_{th}$, khung có dạng cân bằng ổn định là đối xứng (đường liền nét); khi $p > p_{th}$ dạng cân bằng đối xứng không ổn định và khung có dạng cân bằng mới không đối xứng (đường đứt nét).

- Mất ổn định dạng uốn phẳng. Để làm ví dụ, ta xét dầm chữ I chịu uốn phẳng do tải trọng p (hình 1-5). Khi $p < P_{th}$, dầm có dạng cân bằng ổn định là dạng uốn phẳng; khi $P > P_{th}$, dạng uốn phẳng không ổn định và dầm có dạng cân bằng mới là dạng uốn cùng với xoắn (đường đứt nét).

Ví dụ 2: ổn định thanh hai đầu khớp - Công thức Euler

Ta sẽ xác định tải trọng nén tới hạn cho thanh trục thẳng, mặt cắt ngang không đổi theo chiều dài thanh.

Giả sử đầu o của thanh có gối tựa cố định, đầu kia a có gối tựa di động. Ta sẽ coi lực nén đặt đúng trọng tâm mặt cắt và luôn thẳng đứng



Hình 1-6.

Với các giá trị nhỏ của p , trục thanh vẫn giữ là thẳng và trong thanh xuất hiện ứng suất nén $\sigma = P/F$. Trong lúc tăng dần trị số, lực P đạt giá trị tới hạn, thì ngoài dạng cân bằng thẳng còn có một dạng cân bằng khác, dạng cong như Hình 1-6. Ta giả thiết rằng P không thay đổi khi chuyển từ dạng thẳng sang dạng cong, nghĩa là chiều dài đường trục không thay đổi song khi đó điểm a có chuyển vị Δ nào đó, nên ta có thể nói rằng, với các độ võng Δ nhỏ, Δ tỉ lệ bậc 2 với mũ tên võng của đường đàn hồi và như vậy, Δ là đại lượng nhỏ bậc 2.

Sau này trong các hình vẽ ta quy ước rằng điểm a nói chung không chuyển vị theo phương thẳng đứng.

Ta sẽ viết biểu thức độ cong của trục cong của thanh :

$$X = + \frac{M}{- EJ} \quad (1-1)$$

Biểu thức tổng quát của thanh cong có dạng:

$$X = + \frac{\frac{d^2}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{d^2}{dx^2}\right)^2\right]^{2/3}} \quad (1-2)$$

với $V = V(x)$

ở đây ta sẽ coi các độ võng các độ võng là nhỏ so với chiều dài thanh.

Trục cong sẽ là đường cong lồi; cho rằng $\frac{d^2}{dx^2} \ll 1$, khi đó có:

$$X = + \frac{d^2}{- dx^2} \quad (1-3)$$

Phương trình vi phân có dạng:

$$EJ \frac{d^2}{dx^2} = - P.v \quad (1-4)$$

Như hình 1-6 khi thanh bị uốn (đường liền nét), độ võng V dương, và đạo hàm cấp 2 âm ; như vậy, trong phương trình dạng (1-5) độ võng và đạo hàm cấp 2 mang dấu khác nhau. Từ đó theo quy ước dấu X và M , ta đi đến chính phương trình (1-5).

Trong các giáo trình SBVL, người ta tiến hành việc giải tiếp theo bài toán xuất phát từ phương trình cấp 2 dạng (1-5). ở đây chúng ta chuyển từ (1-5) đến một phương trình cấp 4 bởi vì điều đó làm cho lời giải có tính chất tổng quát hơn và cho phép mở rộng bài toán cho các điều kiện biên khác.

Chấp nhận $EJ=Const$, đạo hàm hai lần (1-5) theo X ta có:

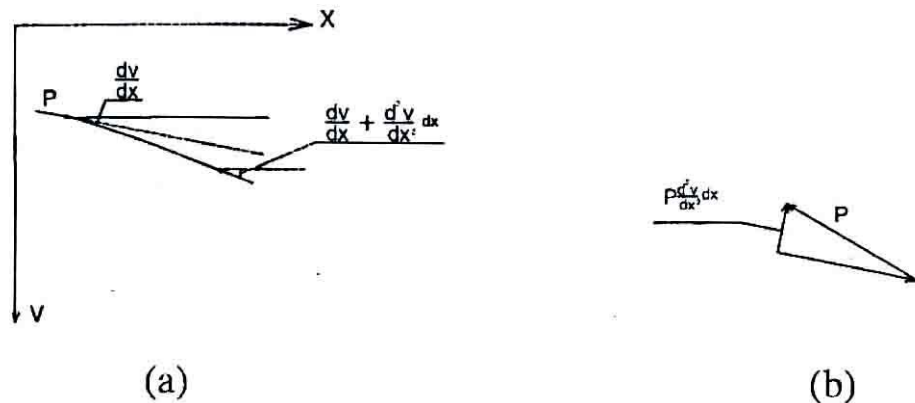
$$EJ \frac{d^4}{dx^4} = -P \frac{d^2}{dx^2} \quad (1-6)$$

Quan hệ này cũng có thể nhận được trực tiếp từ phương trình quen biết của đường đàn hồi:

$$EJ \frac{d^4}{dx^4} = q \quad (1-6a)$$

Bằng cách đưa vào tải trọng giả tạo cường độ q .

Xét phương trình biến dạng của thanh chịu các lực nén p



Hình 1-7.

Hợp của các lực này phương pháp truyền, theo (Hình 1-7b) bằng $-(\frac{d^2}{dx^2}) dx$ dẫn đến (1-6)

đặt
$$K^2 = \frac{P}{EJ} \quad (1-7)$$

Từ (1-6) \rightarrow
$$\frac{d^4}{dx^4} + \frac{d^2}{dx^2} = 0 \quad (1-8)$$

Phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất (1-6) tương ứng với phương trình đặt trung:

$$S^2 (S^2 + k^2) = 0$$

$$S_1=S_2=0; S_3=S_3= + 2k$$

Do đó tích phân (1-6) sẽ là:

$$v = A \sin kx + B \cos kx + Cx + D \quad (1-9)$$

Giả thiết rằng các nghiệm $S_{1,4}$ là ảo đó là do các đại lượng v và $\frac{d^2}{dx^2}$ tham gia phương trình dạng (1-5) với các dấu khác nhau, nghiệm (1-9) phải thoả mãn các điều kiện biên:

$$v=0; \frac{d^2}{dx^2} = 0 \text{ khi } x = 0, l \quad (1-10)$$

$$\left. \begin{aligned} B+D=0, B=0 \\ \rightarrow v = A \sin kx + B \cos kx + Cx + D = 0 \\ A \sin kx + B \cos kx = 0 \end{aligned} \right\} (1-11)$$

$\rightarrow B=C=D=0$ với $A \neq 0 \rightarrow \sin kl=0 \rightarrow kl = k\pi$ (n là số nguyên tùy ý).

Loại nghiệm $kl=0$ vì không phù hợp với các số liệu ban đầu của bài toán, ta được $k^2 \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$ $n = 1, 2, 3, \dots$

Hoặc theo (1-6):

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{l^2} \quad (1-12)$$

Thay đổi số n, ta có một loạt các giá trị của lực p, tương ứng với các dạng cân bằng cong khác nhau.

Ta quy ước gọi lực tới hạn là lực mà ứng với nó dạng cân bằng thẳng của thanh không còn là ổn định nữa. Do đó, trong tất cả các giá trị có thể của lực p, phải chọn giá trị nhỏ nhất và lấy $n=1$.

Ta cho rằng uốn dọc có thể xảy ra trong mặt phẳng có độ cứng nhỏ nhất của thanh, nên J là mômen quán tính cực tiểu của mặt cắt ngang

$$P_{th} = \frac{n^2 \pi^2 EJ \min}{l^2} \quad (1-13)$$

Trở lại phương trình trục cong của thanh :

$$v = A \sin kx = A \sin \frac{n\pi x}{l}$$

Đây là hình sin nói chung có n nửa bước sóng. Lực tới hạn tương ứng với hình sin có một nửa bước sóng ($n=1$):

$$v = A \sin \frac{n\pi x}{l} = \int \sin \frac{n\pi x}{l}$$

với $n=2,3,\dots$ ta được hình sin với $2,3,\dots$ nửa bước sóng trong phạm vi chiều dài thanh. Khi đó lực p sẽ gấp $4,9,\dots$ lần lực tới hạn.

Các dạng cân bằng này, nói chung là không ổn định, nhưng có thể thực hiện chúng nếu chuyển sang một hệ mới sau khi thêm các liên kết khớp bổ sung tại các điểm uốn của hình sin.

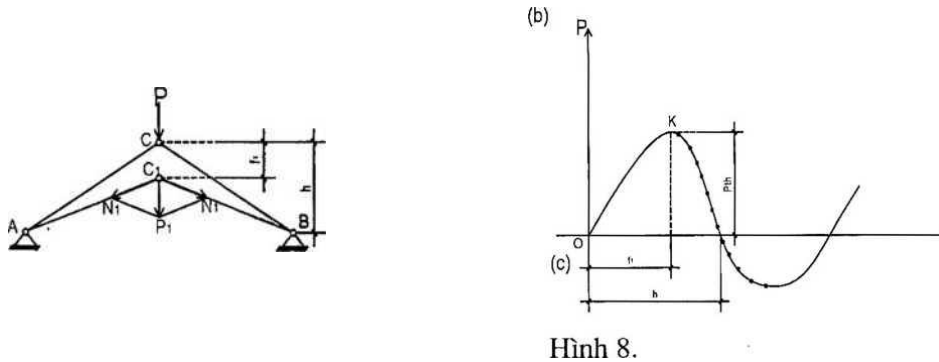
Ta ngầm định rằng lực nén trong thanh nằm trong phạm vi tác dụng của định luật Hook nghĩa là không vượt quá giới hạn đàn hồi của vật liệu; do đó công thức Euler chỉ được thực hiện với điều kiện này. Ta cũng nhớ lại rằng ta sử dụng biểu thức gần đúng (1-2) đối với độ cong của trục điều này chỉ đúng với các độ võng khá nhỏ so với chiều dài thanh. Chính vì thế mà giá trị của mũ tên võng f trong tính toán cuối cùng là không xác định. Ta thấy rằng : nếu đi từ phương trình “chính xác” của đường đàn hồi thì kết quả nhận được sẽ khác : mỗi giá trị lực $P > P_{th}$ sẽ tương ứng với các dạng cân bằng với các độ võng hoàn toàn xác định. Tuy nhiên, trong lân cận điểm phân nhánh các trạng thái cân bằng thì các dạng cong của thanh gần với dạng thẳng bao nhiêu cũng được, chính vì thế khi xác định lực tới hạn ta có quyền xuất phát từ biểu thức gần đúng của độ cong.

Theo quan điểm toán học, về các trị riêng của phương trình thuần nhất tuyến tính dạng (1-5), nghiệm tầm thường $V = 0$ thuộc về trạng thái cân bằng ban đầu, không cong của thanh. Nghiệm không tầm thường tương ứng với cái gọi là các hàm riêng của bài toán mà trong trường hợp đã cho có dạng (1-14).

Các lực tới hạn thứ nhất và tiếp theo (1-12) là các giá trị riêng của thông số p mà ứng với nó phương trình này có nghiệm không tầm thường thoả mãn tất cả các điều kiện biên của bài toán.

❖ Mất ổn định loại hai, có các đặc trưng sau:

- Dạng cân bằng không phân nhánh
- Biến dạng và dạng cân bằng của hệ không thay đổi về tính chất.



Hình 8.

Để đơn giản ta xét một ví dụ là trường hợp dàn Mises có ba khớp A, B, c chịu lực p đặt tại khớp c như trên (hình 8a). Đồ thị liên hệ giữa lực P và chuyển vị thẳng đứng f tại c như trên (hình 8b).

Để dựng đồ thị này ta cần tìm tọa độ của các điểm trên đường cong $p = P(f)$ ứng với mỗi điểm ta thực hiện như sau: tương ứng với mỗi giá trị của chuyển vị f ta dễ dàng tìm được biến dạng dọc trục của các thanh AC, BC; tiếp đó từ biến dạng đã biết tìm được giá trị lực dọc NI trong các thanh và suy ra giá trị P1 tương ứng theo tổng hình học của các lực NI. Ta nhận thấy ở giai đoạn đầu lực p tăng lên cùng với độ võng f nhưng khi $f = h$ tức là khi ba khớp A, B, c nằm trên cùng đường thẳng thì $p = 0$. Sự liên hệ giữa p và chuyển vị f là liên tục nên đường cong $p = P(f)$ phải có dạng như trên (hình 8b).

Giá trị lực p tương ứng với khi độ võng tăng mà không cần tăng tải trọng gọi là lực tới hạn. Khi $p = P_{th}$, sự cân bằng giữa ngoại lực và nội lực đạt đến trạng thái giới hạn. Khi $p > P_{th}$, sự cân bằng chỉ có thể xảy ra khi giảm tải trọng p. Trạng thái giới hạn được xác định từ điều kiện: $dp/df = 0$.

Đó là hiện tượng mất ổn định loại hai hay hiện tượng mất khả năng chịu lực theo trạng thái giới hạn thứ nhất. Trong trường hợp này ta thấy biến dạng của hệ phát triển nhưng không thay đổi về tính chất, không phân nhánh. Sự mất ổn định loại hai có thể xảy ra khi vật liệu làm việc trong giới hạn đàn hồi cũng như ngoài giới hạn đàn hồi.

Trong thực tế, các cấu kiện của công trình thường không đơn thuần chịu nén mà chịu uốn cùng với nén nên các cấu kiện này thường bị mất ổn định loại hai với tải

trọng nhỏ hơn tải trọng tới hạn loại một. Tuy vậy, khi xác định khả năng chịu lực của các cấu kiện chịu uốn cùng với nén ta vẫn cần biết giá trị tới hạn của lực dọc trong các cấu kiện đó tương ứng với sự mất ổn định loại một. Do đó sự nghiên cứu sự mất ổn định loại một không những chỉ có ý nghĩa lý thuyết mà còn có ý nghĩa thực tế.

1.4.1.3. Các tiêu chuẩn về ổn định

Cơ học giải tích Lagrange cũng như cơ học kết cấu được xây dựng dựa trên hai khái niệm, động năng và thế năng. Cho nên khi giải quyết các bài toán ổn định của kết cấu thường dùng định lý của Lagrange - Dirichlet.

Định lý Lagrange - Dirichlet: (Tiêu chuẩn ổn định)

“Giả sử tại một vị trí nào đó của hệ bảo toàn mà thế năng của nó là một hàm của chuyển vị q . Nếu hàm đó có cực tiểu riêng biệt (tại một điểm) thì vị trí đó là vị trí cân bằng” Định lý trên chỉ cho được điều kiện đủ của hệ cân bằng của hệ bảo toàn, nó tương ứng với cực trị của hàm thế năng, những điều kiện cần và đủ của ổn định cân bằng của hệ bảo toàn cho đến nay chưa được tìm ra. Người ta đưa ra những tiêu chí không ổn định của hệ bảo toàn.

Để xét ổn định của cơ hệ kết cấu thì định lý nổi tiếng của Liapunov là định lý chung nhất đối với mỗi tiêu chuẩn định lý này được phát biểu như sau:

■ Tiêu chuẩn không ổn định [3]

Định lý 1: “Nếu như thế năng của hệ bảo toàn ở trạng thái cân bằng không có cực tiểu và nếu như điều đó được xác định bằng cách chỉ xét từ đạo hàm bậc hai trở đi của thế năng theo chuỗi Taylor... thì vị trí đó là vị trí cân bằng không ổn định”.

Định lý trên chỉ cho được điều kiện đủ của hệ cân bằng của hệ bảo toàn, nó tương ứng với cực trị của hàm thế năng, những điều kiện cần và đủ của ổn định cân bằng của hệ bảo toàn cho đến nay chưa được tìm ra. Người ta đưa ra những tiêu chí không ổn định của hệ bảo toàn.

Để xét ổn định của cơ hệ kết cấu thì định lý nổi tiếng của Liapunov là định lý chung nhất đối với mỗi tiêu chuẩn định lý này được phát biểu như sau:

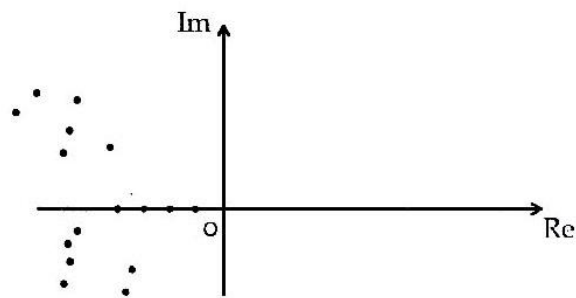
■ Tiêu chuẩn không ổn định [3]

Định lý 1: “Nếu như thế năng của hệ bảo toàn ở trạng thái cân bằng không có cực tiểu và nếu như điều đó được xác định bằng cách chỉ xét từ đạo hàm bậc hai trở đi của thế năng theo chuỗi Taylor... thì vị trí đó là vị trí cân bằng không ổn định”.

Định lý 2: “Nếu như ở vị trí cân bằng của hệ bảo toàn mà hàm thế năng theo chuyển vị $V(q)$ có $I \text{ Max } I$ được xét khi m^2 (m là khai triển của hàm $V(q)$ theo chuyển vị) thì vị trí đó là không ổn định”.

■ Tiêu chuẩn ổn định (đối với hệ tuyến tính) [3]

Nếu như tất cả các nghiệm của phương trình đặc tính của phương trình vi phân tuyến tính hóa có các phần thực là âm (hình 1-9) thì vị trí cân bằng ban đầu là ổn định. Nếu dù chỉ một nghiệm nào đó của phương trình đặc tính có phần thực là dương thì vị trí cân bằng đó là vị trí cân bằng không ổn định (P là nghiệm của PTĐT: $p > 0$ thì hệ mất ổn định).



Hình 1-9. (trục tọa độ thực-ảo)

Định lý của Liapunov tổng quát:

Tìm nghiệm ổn định của hệ phương trình vi phân trạng thái sau:

$$x_i = X_i(x) \quad (i=1 \div N) \text{ tọa độ} \quad (1-16)$$

X là bất kỳ (là một hàm của chuyển vị), tất cả các phương trình cơ học đều dẫn về (1-16).

Nếu như có thể tìm được một hàm $V(x)$ nào đó mà:

a) Hàm đó có giá trị dương ở lân cận gốc tọa độ và chỉ bằng không ở gốc tọa độ.

b) Đạo hàm toàn phần của hàm ấy theo thời gian tính như sau:

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i(x) \quad (1-17)$$

không âm trong tất cả các điểm lân cận gốc tọa độ thì vị trí cân bằng đó là ổn định. Nếu như đạo hàm đó mà âm trong tất cả các điểm lân cận gốc tọa độ và chỉ bằng không ở gốc tọa độ thì vị trí cân bằng đó là vị trí cân bằng tiệm cận (tức là khi $t \rightarrow \infty$ thì vị trí ấy trùng với vị trí cân bằng) [3].

1.4.2. Các phương pháp nghiên cứu ổn định công trình

1.4.2.1. Phương pháp tĩnh (Phương pháp Euler)

Theo phương pháp này tải trọng tới hạn sẽ là tải trọng nhỏ nhất để xảy ra phân nhánh dạng cân bằng, tức là bên cạnh dạng cân bằng ban đầu tồn tại dạng cân bằng lân cận. Để xác định tải trọng này chỉ cần nghiên cứu sự cân bằng của hệ ở trạng thái lân cận khi cho hệ chuyển vị bé và đi tìm tải trọng bé nhất tương ứng với dạng cân bằng lân cận đó.

Khảo sát cân bằng của một hệ ở trạng thái lệch khỏi dạng cân bằng ban đầu. Tính giá trị của lực ở trạng thái lệch để đối chiếu với giá trị của lực đã cho ở trạng thái cân bằng ban đầu.

Giả sử: P là lực đã cho ở trạng thái cân bằng ban đầu

P^* là lực ứng với trạng thái lệch khỏi dạng cân bằng ban đầu (lực cần có để giữ hệ ở trạng thái lệch).

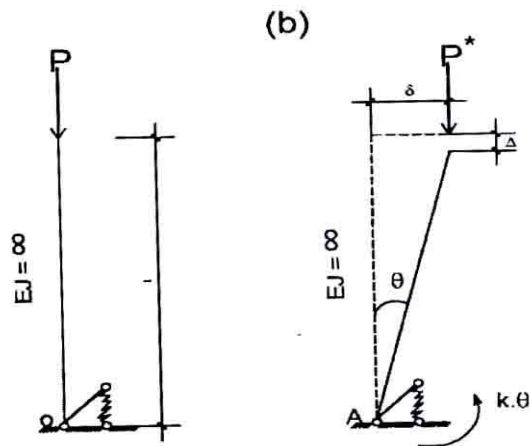
- Nếu $P < P^*$ thì hệ cân bằng ổn định
- Nếu $P = P^*$ thì hệ cân bằng phiếm định
- Nếu $P > P^*$ thì hệ cân bằng không ổn định

Xét hệ một bậc tự do, một đầu ngàm đàn hồi, một đầu tự do

Sau khi khảo sát cân bằng của hệ ở trạng thái cân lệch ta có:

$$P = \frac{k}{l} \text{ do đó:}$$

- Với $P < \frac{k}{l}$ thì hệ cân bằng ổn định
- Với $P = \frac{k}{l}$ thì hệ cân bằng phiếm định
- Với $P > \frac{k}{l}$ hệ cân bằng không ổn định



Hình 1-10

1.4.2.2. Phương pháp năng lượng

Phương pháp này dựa trên việc nghiên cứu năng lượng toàn phần của hệ. Khi nó đạt cực tiểu thì hệ ở trạng thái cân bằng ổn định. Sự lệch khỏi trạng thái cân bằng ổn định sẽ làm tăng năng lượng. Tải trọng tới hạn ứng với năng lượng cực tiểu.

Nguyên lý Lagrange - Dirichlet:

“Nếu hệ ở trạng thái cân bằng ổn định thì thế năng toàn phần đạt cực tiểu so với tất cả các vị trí lân cận vô cùng bé kể từ trạng thái cân bằng đó.

Nếu hệ ở trạng thái cân bằng không ổn định thì thế năng toàn phần đạt cực đại so với tất cả các vị trí lân cận vô cùng bé kể từ trạng thái cân bằng đó.

Nếu hệ ở trạng thái cân bằng phiếm định thì thế năng toàn phần không đổi”.

Thế năng toàn phần U^* của hệ ở trạng thái biến dạng gồm:

- Thế năng biến dạng của nội lực U
- Thế năng của ngoại lực $U_p = -T$ (trái dấu với công của ngoại lực T)

$$U^* = U + U_p = U - T$$

Độ biến thiên δU^* của thế năng toàn phần của hệ khi chuyển từ trạng thái đang xét sang trạng thái lân cận sẽ là

$$\delta U^* = \delta U - \delta T$$

Trong đó: δU - biến thiên của thế năng toàn phần

δU - độ biến thiên của thế năng biến dạng δT - độ biến thiên của công các

ngoại lực Như vậy, theo nguyên lý Lagrange - Dirichlet:

Nếu $\hat{O}U > \hat{O}T$ thì hệ ở trạng thái cân bằng ổn định Nếu $\hat{O}U < \hat{O}T$ thì hệ ở trạng thái cân bằng không ổn định Nếu $\hat{O}U = \hat{O}T$ thì hệ ở trạng thái cân bằng phiếm định

1.4.2.3. Phương pháp động lực học

Đây là phương pháp chung nhất, dựa trên việc nghiên cứu chuyển động của hệ sau khi có kích động ban đầu. Nếu chuyển động là dao động có biên độ tăng không ngừng theo thời gian thì dạng cân bằng ban đầu là không ổn định. Ngược lại, nếu hệ luôn dao động bé quanh trạng thái cân bằng ban đầu hoặc tắt dần thì đó là dạng cân bằng ổn định.

CHƯƠNG 2. PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN LÝ CỰC TRỊ GAUSS

Chương này trình bày nguyên lý Gauss, sau đó trình bày phương pháp mới dựa trên nguyên lý cực trị Gauss để xây dựng và giải các bài toán cơ học, chủ yếu là của cơ hệ vật rắn biến dạng. Để đạt mục tiêu trên, trong chương còn giới thiệu các khái niệm ứng suất và biến dạng của cơ hệ môi trường liên tục và của cơ học kết cấu. Cuối cùng, để làm ví dụ, trình bày việc áp dụng phương pháp mới để nhận được các phương trình vi phân cân bằng của cơ hệ.

2.1. Nguyên lý cực trị Gauss

Năm 1829 nhà toán học người Đức K.F. Gauss đã đưa ra nguyên lý sau đây đối với cơ hệ chất điểm [1, tr. 171]:

“Chuyển động thực của hệ chất điểm có liên kết tùy ý chịu tác động bất kỳ ở mỗi thời điểm xảy ra một cách phù hợp nhất có thể với chuyển động của hệ đó khi hoàn toàn tự do, nghĩa là chuyển động thực xảy ra với lượng cưỡng bức tối thiểu nếu như số đo lượng cưỡng bức lấy bằng tổng các tích khối lượng chất điểm với bình phương độ lệch vị trí chất điểm so với vị trí khi chúng hoàn toàn tự do”.

Gọi m_i là khối lượng chất điểm, A_i là vị trí của nó, B_i là vị trí sau thời đoạn vô cùng bé do tác động lực ngoài và do vận tốc ở đầu thời đoạn gây ra, C_i là vị trí có thể (bị ràng buộc bởi liên kết) thì lượng cưỡng bức được viết như sau:

$$Z = \sum_i m_i (\overline{B_i C_i})^2 \rightarrow \text{Min} \quad (2.1)$$

Dấu tổng trong (2.1) lấy theo số chất điểm.

Sử dụng nguyên lý vận tốc ảo và nguyên lý D ‘Alembert, xét hệ ở trạng thái cân bằng và cho rằng có lực với độ lớn tỉ lệ với độ dài $\overline{B_i C_i}$ tác dụng theo chiều từ C_i đến B_i , Gauss đã chứng minh nguyên lý của mình [1, tr. 172] .

Để có thể sử dụng nguyên lý Gauss cần biết đại lượng biến phân của nó. Theo [1, tr. 889], Gibbs (năm 1879) và Appell (năm 1899) đi từ các lập luận khác nhau đều nhận được nguyên lý Gauss và chỉ ra rằng đại lượng biến phân của nguyên lý này là gia tốc. Điều này có nghĩa là:

$$\delta r_i = 0; \quad \delta \dot{r}_i = 0; \quad \delta \ddot{r}_i \neq 0 \quad (2.2)$$

ở đây δ là kí hiệu biến phân (lấy vi phân khi cố định thời gian), r_i , \dot{r}_i và \ddot{r}_i lần lượt là vector toạ độ, vector vận tốc và vector gia tốc của điểm i . Chuyển dịch của chất điểm của hệ có liên kết dưới tác dụng của lực F_i sau thời đoạn dt tính theo công thức sau đây:

$$r_i + \dot{r}_i dt + \frac{1}{2} \ddot{r}_i dt^2 \quad (2.3)$$

Vì $\delta r_i = 0$ và $\delta \dot{r}_i = 0$ nên chuyển dịch của chất điểm hoàn toàn tự do (có thể hình dung ở đầu thời đoạn dt liên kết được giải phóng nhưng vẫn giữ lực tác dụng) sau thời đoạn dt là :

$$r_i + \dot{r}_i dt + \frac{1}{2} \frac{F_i}{m_i} dt^2 \quad (2.4)$$

Hiệu của (2.4) và (2.3) cho ta độ lệch vị trí của chất điểm có liên kết so với vị trí của nó khi hoàn toàn tự do.

Có thể xem dt là hằng thì lượng cưỡng bức Z theo (2.1) được viết dưới dạng lực như sau (với độ chính xác bằng thừa số $dt^4/4$) :

$$Z = \sum_i m_i \left(\frac{F_i}{m_i} - \ddot{r}_i \right)^2 \rightarrow Min \quad (2.5)$$

hoặc

$$Z = \sum_i \frac{1}{m_i} (F_i - m_i \ddot{r}_i)^2 \rightarrow Min \quad (2.5a)$$

Khi tính lượng cưỡng bức theo (2.5) cần xem gia tốc là đại lượng biến phân (biến phân kiểu Gauss theo cách nói của Boltzmann). Như vậy, phương pháp tìm cực tiểu của các bài toán cơ học được xây dựng theo nguyên lý (2.5) không thể là bất kỳ mà phải là (khi không có ràng buộc nào khác):

$$\frac{\partial Z}{\partial \ddot{r}_i} = 0 \quad (2.6)$$

Điều kiện (2.6) sẽ cho ta phương trình cân bằng. Thật vậy, áp dụng (2.6) vào (2.5) ta nhận được phương trình cân bằng của hệ (ở đây lực tác dụng bằng lực quán tính). Appell và Boltzmann (năm 1897) còn cho biết nguyên lý Gauss đúng cho

hệ liên kết holonom và cả hệ liên kết không holonom [1, tr. 890].

Nguyên lý Gauss (2.1) hoặc (2.5) có dạng của phương pháp bình phương tối thiểu là phương pháp cũng do Gauss đưa ra và được dùng rộng rãi trong toán học hiện đại, trong giải tích cũng như trong lời giải số. Có lẽ vì vậy nguyên lý Gauss thu hút sự chú ý của nhiều nhà khoa học, thí dụ, Hertz (năm 1894) dựa trên ý tưởng lượng cưỡng bức đưa ra nguyên lý đường thẳng nhất (đường có độ cong nhỏ nhất) hoặc Prigogine (năm 1954) và Gyarmati (năm 1965) đã xây dựng được lượng cưỡng bức của các quá trình không hồi phục trong nhiệt động lực học [2].

Các tài liệu giáo khoa về cơ học thường giới thiệu nguyên lý Gauss dưới dạng (2.5) là dạng dùng được để tính toán. Nhưng nguyên lý (2.5) với đại lượng biến phân là gia tốc chỉ là một biểu thị của nguyên lý Gauss (2.1) bởi vì đại lượng biến phân trong cơ học còn có thể là chuyển vị và vận tốc như trình bày sau đây.

2.2. Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss

Trong bài viết của mình Gauss nêu nhận xét rằng *nguyên lý vận tốc ảo biến vấn đề tĩnh học thành vấn đề toán học thuần túy, còn nguyên lý D'Alembert đưa bài toán động lực học về bài toán tĩnh học và mọi nguyên lý của cơ học hoặc nhiều hoặc ít đều có thể trực tiếp rút ra từ hai nguyên lý trên*. Dưới đây trình bày phương pháp dựa trên nguyên lý chuyển vị ảo để nhận được biểu thức (2.1) của nguyên lý Gauss.

Xét hệ chất điểm có liên kết tùy ý ở một thời điểm bất kỳ nào đó có nghĩa là phải đưa lực quán tính f_i của hệ tại thời điểm đó tác dụng lên hệ. Đối với hệ hoàn toàn tự do lực quán tính f_{0i} của nó bằng với ngoại lực (chỉ số '0' ở chân kí tự chỉ rằng kí tự đó thuộc hệ so sánh, trường hợp này là hệ hoàn toàn tự do có cùng khối lượng và cùng chịu tác dụng lực ngoài giống như hệ có liên kết). Như vậy, các lực tác dụng lên hệ có liên kết gồm các lực $f_i = m_i \ddot{r}_i$ và các lực $f_{0i} = m_i \ddot{r}_{0i}$ (thay cho ngoại lực). Theo nguyên lý chuyển vị ảo đối với liên kết giữ (liên kết dưới dạng đẳng thức) và không giữ (liên kết dưới dạng bất đẳng thức) điều kiện cần và đủ để hệ ở trạng thái cân bằng là [1, tr. 887] :

$$\sum_i (f_i - f_{0i}) \delta r_i \leq 0 \quad (2.7)$$

Biểu thức (2.7) cũng được Fourier (năm 1798) và Ostrogradsky (năm 1838) độc

lập đưa ra.

Có thể nhận xét ngay rằng phần trong ngoặc đơn của (2.7) biểu thị lực tác dụng lên hệ nên phải bằng không để hệ ở trạng thái cân bằng.

Trong biểu thức (2.7) cần xem các chuyển vị r_i độc lập đối với lực tác dụng. Cho nên từ (2.7) có thể viết:

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) r_i \rightarrow \text{Min} \quad (2.8)$$

Trong (2.8) r_i là các biến độc lập cần tìm để bảo đảm cho Z cực tiểu. Vì chuyển vị r_{0i} của hệ hoàn toàn tự do đã biết nên biểu thức (2.8) tương đương với các biểu thức dưới đây:

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) (r_i - r_{0i}) \rightarrow \text{Min} \quad (2.8a)$$

hoặc

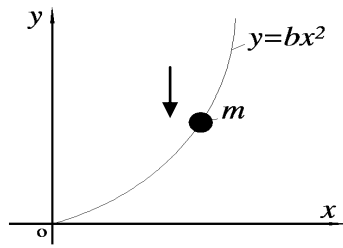
$$Z = \sum_i m_i \left[\frac{f_i}{m_i} - \ddot{r}_{0i} \right] (r_i - r_{0i}) \rightarrow \text{Min} \quad (2.8b)$$

Dễ dàng nhận thấy (2.8b) là tích của khối lượng m_i với bình phương độ lệch vị trí chất điểm và do đó Z xác định theo (2.8) là lượng cưỡng bức của nguyên lý Gauss (với độ chính xác bằng thừa số $dt^2/2$). So với (2.5), lượng cưỡng bức Z xác định theo (2.8) biểu thị đầy đủ và rõ ràng tư tưởng của nguyên lý Gauss thể hiện ở chỗ, thứ nhất, nó cho phép so sánh hệ có liên kết với hệ hoàn toàn tự do, thứ hai, đại lượng không biết (đại lượng biến phân) trong (2.8) là chuyển vị giống như trong (2.1). Cực tiểu của (2.8) cần và phải được tìm từ điều kiện (khi không có các ràng buộc nào khác):

$$\frac{\partial Z}{\partial r_i} = 0 \quad (2.9)$$

Điều kiện (2.9) áp dụng vào (2.8) cho ta phương trình cân bằng của cơ hệ.

Ví dụ 1 Ví dụ này lấy từ [3, tr. 64]. Viết phương trình chuyển động của khối lượng m chạy trên đường cong $y = bx^2$ trong mặt phẳng (xy) , không có lực ma sát, dưới tác dụng của trường gia tốc g (Hình 1.1).



Hình 1.1

Các lực tác dụng lên khối lượng m bao gồm: lực quán tính theo chiều y , lực trọng trường theo chiều âm của y , lực quán tính theo x . Chọn hệ so sánh là hệ có cùng khối lượng m nằm trong trường gia tốc g nhưng hoàn toàn tự do. Lượng cưỡng bức được viết theo (2.8) như sau:

$$Z = (m\ddot{y} + mg)y + (m\ddot{x})x \rightarrow \text{Min} \quad (a)$$

Thế $y = bx^2$ vào (a) ta có

$$Z = (m\ddot{y} + mg)bx^2 + (m\ddot{x})x \rightarrow \text{Min} \quad (b)$$

Xem chuyển vị x là biến độc lập và từ điều kiện $\frac{\partial Z}{\partial x} = 0$ nhận được:

$$2bx\ddot{y} + 2bgx + \ddot{x} = 0 \quad (c)$$

Thay $\ddot{y} = 2bx\ddot{x} + 2b\dot{x}^2$ vào (c) nhận được phương trình chuyển động của khối lượng m

$$(4b^2x^2 + 1)\ddot{x} + 4b^2x\dot{x}^2 + 2bgx = 0 \quad (d)$$

Phương trình (d) là kết quả cần tìm.

Như nhận xét của Gauss nêu trên, có thể nói biểu thức (2.7) đã biến vấn đề tĩnh học (cân bằng lực) thành vấn đề toán học thuần túy. Thật vậy, nếu ta dùng gia tốc là đại lượng biến phân thì tương tự như (2.7) có thể viết

$$\sum_i (f_i - f_{0i}) \delta \ddot{r}_i \leq 0 \quad (2.10)$$

với điều kiện gia tốc \ddot{r}_i là đại lượng độc lập đối với lực tác dụng.

Từ (2.10) có thể viết

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) \ddot{r}_i \rightarrow \text{Min} \quad (2.11)$$

Trong (2.11) cần xem gia tốc \ddot{r}_i là đại lượng biến phân để bảo đảm cho Z cực tiểu. Vì gia tốc \ddot{r}_{0i} của hệ hoàn toàn tự do đã biết nên biểu thức (2.11) tương đương với các biểu thức dưới đây:

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i})(\ddot{r}_i - \ddot{r}_{0i}) \rightarrow \text{Min} \quad (2.11a)$$

hoặc

$$Z = \sum_i m_i \left(\frac{f_i}{m_i} - \ddot{r}_{0i} \right) (\ddot{r}_i - \ddot{r}_{0i}) \rightarrow \text{Min}$$

$$Z = \sum_i m_i (\ddot{r}_i - \ddot{r}_{0i})^2 \rightarrow \text{Min} \quad (2.11b)$$

Ta thấy (2.11b) trùng với (2.5). Các gia tốc \ddot{r}_i phải thỏa mãn các liên kết nếu có và điều kiện cực tiểu của (2.11) là biểu thức (2.6).

Ví dụ 2. Làm lại ví dụ 1 (Hình 1) theo nguyên lí (2.5) hoặc biểu thức (2.11)

Khối lượng m vừa chuyển động theo x , vừa chuyển động theo y , nhưng do có liên kết $y = bx^2$ nên chỉ có một bậc tự do, thí dụ là x . Các lực tác dụng lên m bao gồm: Lực quán tính theo chiều y , lực trọng trường theo chiều âm của y , lực quán tính theo x . Lượng cưỡng bức Z viết theo (2.5) là:

$$Z = m \left(\frac{mg}{m} + \ddot{y} \right)^2 + m\ddot{x}^2 \rightarrow \text{Min} \quad (a)$$

Lấy đạo hàm ràng buộc $y = bx^2$ theo thời gian hai lần ta có :

$$\ddot{y} = 2bx\ddot{x} + 2bx^2 \quad (b)$$

Thay \ddot{y} trong (a) bằng (b), nhận được

$$Z = (g + 2bx\ddot{x} + 2bx^2)^2 + \ddot{x}^2 \rightarrow \text{Min} \quad (c)$$

Xem gia tốc \ddot{x} là biến độc lập và từ điều kiện $\partial Z / \partial \ddot{x} = 0$ ta có phương trình chuyển động của khối lượng m như sau :

$$(4b^2x^2 + 1)\ddot{x} + 4b^2x\dot{x}^2 + 2bgx = 0 \quad (d)$$

Phương trình (d) là kết quả cần tìm.

Tương tự, cũng có thể dùng vận tốc \dot{r}_i là đại lượng biến phân, khi đó lượng cưỡng bức Z được viết :

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) \dot{r}_i \rightarrow \text{Min} \quad (2.12)$$

với điều kiện vận tốc \dot{r}_i là biến độc lập và thỏa mãn các liên kết nếu có. Trong trường hợp này điều kiện cực tiểu của nguyên lí (2.12) sẽ là (khi không có ràng buộc nào khác) :

$$\frac{\partial Z}{\partial \dot{r}_i} = 0 \quad (2.13)$$

Làm lại bài toán của ví dụ 1 với đại lượng biến phân là vận tốc (biểu thức 2.12) cũng cho ta kết quả đúng đắn.

Tóm lại, các nguyên lý (2.5) hoặc (2.11) với đại lượng biến phân là gia tốc độc lập đối với lực tác dụng, nguyên lý (2.8) với đại lượng biến phân là chuyển vị độc lập đối với lực tác dụng và nguyên lý (2.12) với đại lượng biến phân là vận tốc độc lập đối với lực tác dụng đã biến phương trình cân bằng lực (vấn đề cơ học) thành các bài toán toán học thuần túy và có thể được phát biểu như sau : *Chuyển động thực của cơ hệ xảy ra khi lượng cường bức Z*

xác định theo (2.5) thì được tìm theo gia tốc, điều kiện (2.6)

xác định theo (2.8) thì được tìm theo chuyển vị, điều kiện (2.9)

xác định theo (2.12) thì được tìm theo vận tốc, điều kiện (2.13)

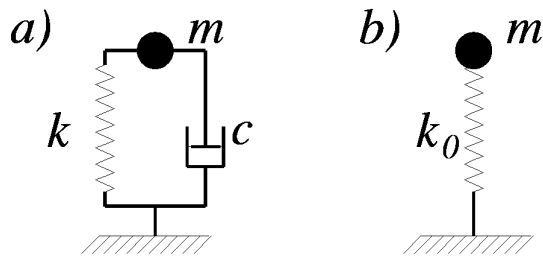
là cực tiểu.

Đương nhiên, các đại lượng biến phân gia tốc, chuyển vị và vận tốc phải thỏa mãn các điều kiện liên kết của hệ.

Để có thể áp dụng cho cả các bài toán tĩnh của môi trường liên tục ta sẽ dùng nguyên lý (2.8) với đại lượng biến phân là chuyển vị và điều kiện cực tiểu là (2.9). Nguyên lý (2.5) không cho phép giải các bài toán tĩnh. Do đó, cách trình bày nguyên lý Gauss dưới dạng này đã hạn chế việc sử dụng nguyên lý trong cơ học.

Có thể mở rộng nguyên lý Gauss bằng cách so sánh hệ cần tính với hệ có liên kết tùy ý chịu tác dụng của lực giống như hệ cần tính mà lời giải của nó đã biết. Khi đó thay cho lực ngoài ta dùng lực liên kết và lực quán tính của hệ so sánh với dấu ngược lại để tác động lên hệ cần tính. Điều này là hiển nhiên bởi vì ngoại lực luôn cân bằng với nội lực. Xét ví dụ minh họa sau

Ví dụ 3 Hệ cần tính là khối lượng m có liên kết lò xo độ cứng k và liên kết nhớt với hệ số nhớt c chịu tác dụng lực $p(t)$ (Hình 2.2). Xét dao động thẳng đứng $u(t)$ của m so với vị trí cân bằng tĩnh của nó. Bài toán có một bậc dao động tự do. Ta chọn hệ so sánh có khối lượng m_0 và liên kết lò xo độ cứng k_0 cùng chịu lực $p(t)$ (Hình 2.2.b).



Hình 2.2 a) Hệ cân tĩnh; b) Hệ so sánh.

Dao động $u_0(t)$ của hệ so sánh (so với vị trí cân bằng tĩnh của nó) xác định từ phương trình cân bằng sau :

$$m_0 \ddot{u}_0 + k_0 u_0 = p(t) \quad (a)$$

Lực tác dụng lên khối lượng m gồm có: lực quán tính $m\ddot{u}$, lực cản lò xo ku , lực cản nhớt $c\dot{u}$ và lực $p(t)$ được thay bằng nội lực của hệ so sánh. Lượng cưỡng bức theo (2.8) viết được:

$$Z = (m\ddot{u} + c\dot{u} + ku - m_0 \ddot{u}_0 - k_0 u_0)u \rightarrow Min \quad (b)$$

Phần trong dấu ngoặc đơn của (b) biểu thị lực tác dụng và theo nguyên lý chuyển vị (2.8) cần xem chuyển vị u là biến độc lập đối với lực tác dụng thì từ điều kiện $\delta Z / \delta u = 0$ nhận được phương trình cân bằng của hệ cân tĩnh

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = m_0 \ddot{u}_0 + k_0 u_0 \quad (c)$$

hay chú ý tới (a) ta có

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad (d)$$

Nhìn vào (c) và (d) thấy rằng thay cho việc giải phương trình vi phân cân bằng (d) của hệ cân tĩnh ta có thể giải phương trình (c) ứng với từng thời điểm. Vế phải của (c) có thể là nghiệm riêng hoặc nghiệm cơ bản (trường hợp $p(t)$ là xung đơn vị) của (d) hoặc, một cách tổng quát, là thể hiện của $p(t)$ trên hệ bất kì nào khác (lời giải của hệ bất kì khi chịu tác động của $p(t)$). Nhận xét này rất hữu ích bởi vì nó cho ta một phương pháp nữa để giải các phương trình vi phân phức tạp, đặc biệt là đối với các bài toán có điều kiện biên ở vô hạn hoặc là khi giải bằng số.

Lượng cưỡng bức Z theo (b) có thể viết dưới dạng sau:

$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 \rightarrow Min \quad (e)$$

$$Z_1 = \frac{1}{k}(ku - k_0 u_0)^2, \quad Z_2 = 2c\dot{u}\dot{u}_0, \quad Z_3 = 2m(\ddot{u} - \ddot{u}_0)u \quad (f)$$

Ở đây Z1 viết dưới dạng bình phương tối thiểu. Vì Z1 được viết dưới dạng bình phương tối thiểu nên các đại lượng Z2 và Z3 phải nhân với hệ số 2. Các biểu thức lượng cường bức (b) và (e), (f) là tương đương.

Những nhận xét rút ra từ ví dụ minh họa nêu trên áp dụng đúng cho bất kì hệ nào khác.

Trình bày trên cho thấy có thể dùng hệ có liên kết bất kì để làm hệ so sánh cho nên có thể mở rộng biểu thức (2.8) như sau :

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) r_i \rightarrow Min \quad (2.14)$$

với f_i là nội lực bao gồm lực quán tính và lực liên kết nếu có của hệ cần tính, f_{0i} là nội lực và lực liên kết đã biết của hệ so sánh bất kỳ chịu tác dụng lực ngoài giống như hệ cần tính.

Chú ý rằng khi sử dụng biểu thức (2.14) cần xem chuyển vị r_i là đại lượng độc lập đối với lực và phải thỏa mãn các điều kiện liên kết nếu có. Bởi vì cực tiểu của lượng cường bức Z phải được tìm theo (2.9) (khi không có các ràng buộc nào khác) nghĩa là phải giải phương trình cân bằng của cơ hệ nên bài toán luôn có nghiệm và nghiệm là duy nhất

Phương pháp của nguyên lý (2.14) cho phép dùng hệ so sánh bất kì. Đại lượng biến phân của (2.14) là chuyển vị, điều kiện cực tiểu của nó là biểu thức (2.9).

Phương pháp này do GS. TSKH Hà Huy Cương đề xuất và được gọi là phương pháp nguyên lý cực trị Gauss.

Biểu thức (2.7) trong các giáo trình cơ học thường mang dấu bằng, nghĩa là chỉ xét trường hợp liên kết giữ và khi đó từ (2.7) sẽ nhận được nguyên lý công ảo. Có thể nói biểu thức (2.7) với dấu nhỏ thua hoặc bằng là sự khác biệt cơ bản giữa nguyên lý cơ học của Gauss với cơ học dựa trên nguyên lý công ảo hiện dùng.

2.3. Cơ hệ môi trường liên tục: ứng suất và biến dạng

Trong mục này trình bày phương pháp nguyên lý Gauss đối với cơ hệ môi trường liên tục. Muốn vậy cần biết khái niệm ứng suất và biến dạng của môi trường liên tục. Để trình bày gọn dưới đây dùng các đại lượng tenxơ với cách hiểu như sau [4 ,tr.196]:

$$a_i a_i = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$a_{kk} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

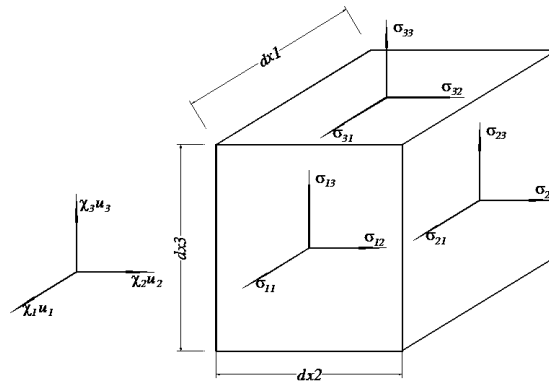
và hệ số Kronecker

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{khi } i = j$$

$$\delta_{ij} = 0 \quad \text{khi } i \neq j$$

với $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$; $k = 1, 2, 3$ đối với không gian 3 chiều.

Có thể nói đối tượng nghiên cứu của cơ hệ môi trường liên tục trong tọa độ vuông góc là phân tử khối chữ nhật (ba chiều, kích thước vô cùng bé) hoặc phân tử chữ nhật (hai chiều, kích thước vô cùng bé) được tách ra từ môi trường (hình 2.3).



Hình 2.3. Trạng thái ứng suất phân tử

Khi đó lý thuyết ứng suất cho thấy ngoài các lực thông thường (lực gây các chuyển vị tịnh tiến trong cơ hệ chất điểm) trên bề mặt phân tử còn có các ứng suất tác dụng. Có 9 ứng suất σ_{ij} tác dụng lên bề mặt phân tử. Thứ nguyên của ứng suất bằng lực chia cho đơn vị diện tích.

Từ điều kiện cân bằng lực và momen sẽ nhận được phương trình cân bằng tĩnh của phân tử

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (2.15)$$

Trong (2.15) σ_{ij} là ứng suất, $\sigma_{ij,j}$ biểu thị đạo hàm của ứng suất theo tọa độ không gian, $\partial\sigma_{ij}/\partial x_j = \sigma_{ij,j}$, b_i là lực khối (lực khối xem như là lực cản). Nếu không có lực momen khối thì từ phương trình cân bằng sẽ có:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.16)$$

Số ứng suất độc lập tác dụng lên bề mặt phân tử chỉ còn 6. Lý thuyết ứng suất cho thấy khi biết trạng thái ứng suất phân tử thì sẽ xác định được trạng thái lực tại điểm đó của môi trường và ngược lại.

Khi chịu tác dụng ngoại lực, phân tử chuyển động và biến hình. Lý thuyết biến dạng cho thấy ngoài các chuyển vị u_i phân tử còn chịu các biến dạng ε_{ij} . Nếu xem biến dạng là bé (bình phương hoặc tích hai biến dạng là nhỏ so với chính nó) thì các biến dạng được xác định theo các phương trình sau:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.17)$$

Các ε_{ij} là các đại lượng không thứ nguyên. Tương tự như tenxơ σ_{ij} , tenxơ ε_{ij} đối xứng và có 6 biến dạng độc lập tương ứng với 6 ứng suất.

Từ (2.17) thấy rằng trạng thái chuyển vị xác định duy nhất trạng thái biến dạng, nhưng ngược lại không đúng bởi vì có những chuyển vị không gây biến dạng (chuyển vị của vật rắn tuyệt đối). Ngoài các phương trình nêu trên, để bảo đảm tính liên tục của môi trường còn có các phương trình về điều kiện không bị gián đoạn.

Tùy theo tính chất cơ học của vật liệu môi trường mà có các liên hệ khác nhau giữa ứng suất và biến dạng. Do có 6 ứng suất và 6 biến dạng nên một cách tổng quát cần biết 36 thông số tính chất vật liệu. Tuy nhiên từ điều kiện biểu thị năng lượng biến dạng phải giống nhau con số 36 rút xuống còn 21. Đối với vật liệu đẳng hướng chỉ còn 2 thông số tính chất vật liệu độc lập được chọn trong số các thông số sau: hai hằng số Lamé μ và λ , môđun Young E , môđun trượt G và hệ số Poisson ν , giữa chúng có các liên hệ sau đây:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.18)$$

Đối với vật liệu đồng nhất, đẳng hướng, tuân theo định luật Húc (Hooke) thì liên hệ giữa ứng suất và biến dạng sẽ là:

$$\sigma_{ij} = 2G (\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}) \quad (2.19)$$

Từ công thức (2.19) thấy rằng ứng suất σ_{ij} không những phụ thuộc vào biến dạng ε_{ij} theo phương của nó mà còn phụ thuộc vào các biến dạng theo các phương

khác thông qua hệ số Poisson ν . Hệ số 2G để tiện trình bày sau này sẽ được gọi là *độ cứng của biến dạng*.

Những trình bày trên cho thấy đối với cơ hệ môi trường liên tục cần xem các biến dạng ε_{ij} là độc lập đối với nhau và được xác định theo phương trình (2.17), cần xét các phương trình về điều kiện không bị gián đoạn của môi trường và liên hệ giữa ứng suất và biến dạng. Đối với môi trường đàn hồi, đồng nhất, đẳng hướng liên hệ ứng suất - biến dạng lấy theo (2.19) và điều kiện không bị gián đoạn của môi trường tự động thoả mãn khi biểu thị ứng suất qua chuyển vị.

Tóm lại, khác với cơ hệ chất điểm, trong môi trường liên tục ngoài lực khối và lực quán tính là các lực tác dụng gây chuyển vị, còn phải xét thêm các ứng suất σ_{ij} gây ra các biến dạng ε_{ij} .

Từ nhận xét vừa nêu, có thể sẽ có ích đối với nhận thức khi đưa ra các nhận định tổng quát về mối tương quan giữa cơ học chất điểm và cơ hệ môi trường liên tục như sau:

Khái niệm cơ bản của cơ chất điểm là chất điểm, các lực tác dụng lên chất điểm gây ra các chuyển vị, đặc trưng của chất điểm là khối lượng;

Khái niệm cơ bản của cơ hệ môi trường liên tục là mặt cắt phân tố, các ứng suất gây ra các biến dạng, các đặc trưng của mặt cắt phân tố là các độ cứng biến dạng tương ứng với các ứng suất. Các độ cứng này xác định tùy theo tính chất vật liệu môi trường. Trong cơ hệ môi trường liên tục còn có lực khối và lực quán tính gây chuyển vị giống như trong cơ hệ chất điểm. Do đó, có thể tóm tắt mối tương quan vừa nêu dưới dạng:

<i>Chất điểm</i>	\Leftrightarrow	<i>Mặt cắt phân tố</i>
<i>Lực</i>	\Leftrightarrow	<i>Lực</i>
		<i>Các ứng suất</i>
<i>Chuyển vị</i>	\Leftrightarrow	<i>Chuyển vị</i>
		<i>Biến dạng</i>
<i>Khối lượng</i>	\Leftrightarrow	<i>Khối lượng</i>
		<i>Các độ cứng biến dạng</i>

Kí hiệu \Leftrightarrow chỉ sự tương đương giữa các khái niệm. Với cách hiểu này cũng dễ dàng xây dựng phiếm hàm lượng cưỡng bức tương tự như (2.14) đối với cơ hệ môi trường liên tục bất kỳ được trình bày sau đây.

Trước tiên, ta dùng hệ so sánh là hệ chất điểm có cùng khối lượng, cùng chịu tác dụng lực ngoài và hoàn toàn tự do. Đối với môi trường liên tục cần xét thêm ứng suất và biến dạng nên lượng cưỡng bức Z của hệ viết tương tự (2.14) như sau:

$$Z_{\dots} = Z_1 + Z_2 \rightarrow \text{Min}$$

$$Z_1 = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV, \quad Z_2 = \int_V (\rho \ddot{u}_i u_i + b_i u_i - \rho \ddot{u}_{0i} u_i) dF \quad (2.20)$$

Trong (2.20) V là thể tích vật thể, ρ là khối lượng đơn vị. Lực quán tính là lực cản nên trong (2.20) mang dấu cộng. Lượng cưỡng bức Z_1 xét ứng suất của môi trường liên tục cần tính, hệ chất điểm so sánh không có ứng suất. Lượng cưỡng bức Z_2 xét lực khối và lực quán tính của môi trường liên tục, lực quán tính của hệ chất điểm so sánh. Các lực này đều gây chuyển vị u .

Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, trong (2.20) cần xem các biến dạng ε_{ij} là độc lập đối với các ứng suất σ_{ij} và các chuyển vị u_i là độc lập đối với lực tác dụng (ở đây là lực khối và lực quán tính) và độc lập đối với nhau. Điều kiện cực tiểu của (2.20) là

$$\frac{\partial Z_1}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial Z_2}{\partial u_i} = 0 \quad (2.21.a)$$

Nếu biến dạng ε_{ij} biểu thị qua chuyển vị (công thức (2.17)) thì điều kiện cực tiểu của (2.20) được viết như sau:

$$\frac{\partial Z_1}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial u_i} + \frac{\partial Z_2}{\partial u_i} = 0 \quad (2.21.b)$$

Từ điều kiện (2.21.a) nhận được

$$\sigma_{ij,j} + b_i + \rho \ddot{u}_i - \rho \ddot{u}_{0i} = 0 \quad (2.22)$$

Phương trình (2.22) là phương trình vi phân cân bằng của cơ hệ môi trường liên tục dưới dạng ứng suất.

Nếu tại điểm đang xét không có lực ngoài tác dụng thì $\rho \ddot{u}_{0y}$ bị triệt tiêu,

phương trình (2.22) là phương trình cân bằng động lực học thường gặp của cơ hệ môi trường liên tục. Trường hợp bài toán tĩnh, $\rho \ddot{u}_i$ cũng bằng không, phương trình (2.22) khi đó trùng với (2.15).

Để dàng nhận được phương trình vi phân cân bằng dưới dạng chuyển vị bằng cách đưa liên hệ ứng suất - biến dạng vào phương trình (2.22) hoặc vào phiếm hàm (2.20). Trong mục (2.5) dưới đây sẽ trở lại vấn đề này.

Cần nêu nhận xét rằng biểu thức (2.20) cho phép so sánh cơ hệ môi trường liên tục với cơ hệ chất điểm hoàn toàn tự do khi hai hệ cùng chịu lực ngoài như nhau. Trong (2.20) không chứa các thông số tính chất vật liệu của môi trường nên nó đúng với môi trường bất kỳ.

Xét các trường hợp khác của phiếm hàm lượng cưỡng bức (2.20): Trường hợp không dùng hệ so sánh thì phải đưa lực ngoài p_i vào (2.20). Lực p_i thường tác dụng lên bề mặt Ω của vật nên ta viết

$$Z = \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + \rho \ddot{u}_i u_i - b_i u_i) dv - \int_{\Omega} p_i u_i d\Omega \rightarrow Min \quad (2.23)$$

Có thể dùng hệ so sánh cũng là cơ hệ môi trường liên tục có liên kết bất kỳ với điều kiện hai hệ cùng chịu lực ngoài giống nhau:

$$Z = \int_V [(\sigma_{ij} - \sigma_{0ij}) \varepsilon_{ij} + (\rho \ddot{u}_i - \rho_0 \ddot{u}_{0i}) u_i - (b_i - b_{0i}) u_i] dv \rightarrow Min \quad (2.24)$$

Giống như đã trình bày ở ví dụ 3, thực chất của phương pháp nguyên lý cực trị Gauss là dùng nội lực của hệ so sánh tác dụng lên hệ cần tìm.

Đối với bài toán tĩnh, lực quán tính triệt tiêu, khi không xét lực khối, biểu thức (2.24) có dạng:

$$Z = \int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{0ij}) \varepsilon_{ij} dv \rightarrow Min \quad (2.25)$$

Đối với bài toán tĩnh, không xét lực khối, không dùng hệ so sánh, từ (2.23) ta có:

$$Z = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv - \int_{\Omega} p_i u_i d\Omega \rightarrow Min \quad (2.26)$$

Các chuyển vị u_i và biến dạng ε_{ij} (xác định theo (2.17)) trong các phiếm hàm (2.20, 2.23, 2.24, 2.25) và (2.26) là những đại lượng độc lập đối với lực tác dụng và ứng suất và phải thoả mãn các điều kiện liên kết nếu có. Chuyển động thực của cơ hệ môi trường liên tục xảy ra khi cực tiểu các phiếm hàm lượng cưỡng bức vừa

nêu theo điều kiện (2.21) nếu không có các điều kiện liên kết nào khác.

Đối với môi trường đàn hồi, quan hệ ứng suất – biến dạng xác định theo (2.19), ta có thể viết lượng cưỡng bức dưới dạng bình phương tối thiểu như nhận xét đã nêu ở ví dụ 3:

$$Z = \int_V \frac{1}{2G} (\sigma_{ij} - \sigma_{0ij})^2 dv + 2 \int_V (f_{mi} - f_{0mi}) u_i dv \rightarrow Min \quad (2.27a)$$

hoặc

$$Z = \int_V 2G (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{0ij})^2 dv + 2 \int_V m_i (\ddot{u}_i - \ddot{u}_{0i}) u_i dv \rightarrow Min$$

Tương tự, khi không dùng hệ so sánh thì phải xét lực ngoài, có thể viết lại (2.26) như dưới đây

$$Z = \int_V \frac{1}{2G} (\sigma_{ij})^2 dv + 2 \int_V f_{mi} u_i dv - 2 \int_{\Omega} p_i u_i d\Omega \rightarrow Min \quad (2.27b)$$

hoặc

$$Z = \int_V 2G (\varepsilon_{ij})^2 dv + 2 \int_V (m_i \ddot{u}_i) u_i dv - 2 \int_{\Omega} p_i u_i d\Omega \rightarrow Min$$

Trong (2.27) $f_{mi} = m_i \ddot{u}_i$ và $f_{0mi} = m_{0i} \ddot{u}_{0i}$ là lực quán tính của hệ cần tính và hệ so sánh, liên hệ giữa ứng suất và biến dạng xác định theo biểu thức (2.19). Trong (2.27), cần xem các biến dạng ε_{ij} là các đại lượng biến phân độc lập đối với các ứng suất σ_{ij} , các chuyển vị u_i là độc lập đối với lực tác dụng p và lực quán tính.

Tích phân thứ nhất trong (2.27) liên quan đến ứng suất đàn hồi có trọng số là $2G$, Trở lên trình bày các phiếm hàm lượng cưỡng bức, đối với cơ hệ chất điểm là các biểu thức (2.14), đối với môi trường liên tục là biểu thức (2.20) và các trường hợp khác của nó là các biểu thức (2.23), (2.24), (2.25), (2.26) và (2.27). Trong các phiếm hàm này cần xem các biến dạng ε_{ij} xác định theo (2.17) và các chuyển vị u_i là các đại lượng không biết độc lập đối với ứng suất và lực tác dụng, thỏa mãn các điều kiện liên kết nếu có và các điều kiện không bị gián đoạn (riêng đối với môi trường liên tục). Cực tiểu các phiếm hàm này theo điều kiện (2.21) cho ta chuyển vị thực của cơ hệ cần tính.

Phương pháp nguyên lí cực trị Gauss là phương pháp mới trong cơ học môi trường liên tục.

2.4. Cơ học kết cấu

Môn sức bền vật liệu và cơ học kết cấu nghiên cứu trạng thái ứng suất biến dạng của dầm, thanh, tấm, khung, dàn v.v... là những kết cấu có một hoặc hai kích thước nhỏ thua nhiều lần so với các kích thước còn lại. Trong trường hợp này để đơn giản nhưng kết quả tính vẫn bảo đảm độ chính xác đủ dùng trong thực tế (kiểm tra bằng thí nghiệm), có thể dùng mặt cắt kết cấu thay cho mặt cắt phân tử và các ứng suất tác dụng lên mặt cắt được quy về thành các nội lực tác dụng lên mặt trung bình (đường trung bình đối với dầm) như lực dọc N , momen uốn M , lực cắt Q v.v... Muốn vậy cần đưa vào các giả thiết sau đây:

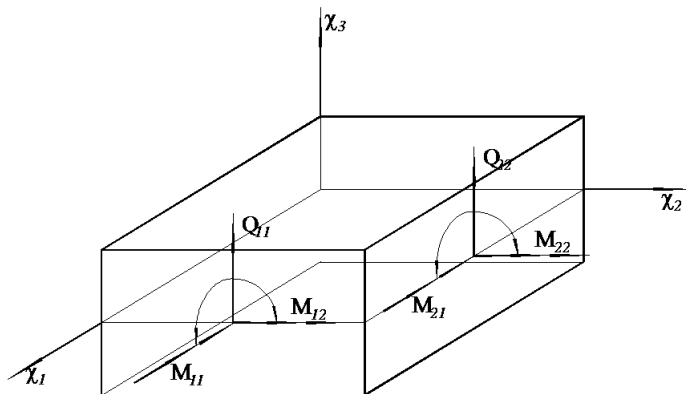
Khi chịu lực dọc trục, ứng suất pháp được xem là phân bố đều trên tiết diện.

Khi chịu lực ngang (tác dụng thẳng góc với mặt trung bình) có các giả thiết sau đây:

Mặt trung bình của tấm và trục trung bình của dầm không có nội lực và do đó không bị biến dạng.

Giả thiết tiết diện phẳng: tiết diện sau khi biến dạng vẫn phẳng.

Không xét ứng suất nén giữa các lớp theo chiều cao tiết diện, nghĩa là xem các lớp song song với mặt trung bình (tấm) làm việc ở trạng thái ứng suất phẳng.



Hình 2.4. Nội lực của phân tử tấm

Sử dụng các giả thiết trên, các momen uốn và xoắn và lực cắt tác dụng lên mặt cắt kết cấu xác định theo các biểu thức dưới đây (hình 2.4):

$$M_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} x_3 dx_3, \quad M_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} x_3 dx_3, \quad M_{12} = M_{21} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} x_3 dx_3$$

$$Q_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} dx_3, \quad Q_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23} dx_3 \quad (2.28)$$

ở đây h là chiều cao tiết diện.

Để có thể áp dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss cần biết các ‘biến dạng’ của tiết diện do momen uốn gây ra. Với các giả thiết nêu trên chỉ cần biết chuyển vị thẳng đứng w của trục hoặc mặt trung bình của kết cấu (còn gọi là đường độ võng, đường đàn hồi) thì trong trường hợp uốn thuần túy có thể tính được các chuyển vị theo các phương còn lại và dùng các phương trình (2.17) để xác định các biến dạng. Kết quả cho thấy các biến dạng trong mặt phẳng tâm (hoặc thớ dầm) phân bố tuyến tính theo chiều cao và tỉ lệ với độ cong χ_{ij} của mặt võng ($i=1,2; j=1,2$):

$$\varepsilon_{ij} = \chi_{ij} x_3 \quad ;$$

$$\chi_{11} = -w_{,11} \quad , \quad \chi_{22} = -w_{,22} \quad , \quad \chi_{12} = -w_{,12} \quad . \quad (2.29)$$

Dấu trừ trong công thức xác định độ cong (2.29) là do xem chuyển vị w có chiều dương hướng xuống dưới và dấu nội lực như trên hình 2.4. Như vậy, độ cong χ_{ij} của các lớp song song với mặt trung bình là giống nhau và đó là ‘biến dạng’ do momen M_{ij} gây ra. Biết được biến dạng ε_{ij} xác định theo (2.29) sẽ tính được momen M_{ij} theo (2.28). Liên hệ giữa momen uốn và ‘biến dạng uốn’ của tiết diện như sau:

$$M_{11} = D(\chi_{11} + \nu\chi_{22}), \quad M_{22} = D(\chi_{22} + \nu\chi_{11}), \quad M_{12} = D(1-\nu)\chi_{12} \quad (2.30)$$

ở đây D là độ cứng uốn

$$\text{đối với dầm } D = EJ = \frac{Eh^3}{12}, \quad \text{đối với tấm } D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

và $D(1-\nu)$ được gọi là độ cứng xoắn (độ cứng của biến dạng xoắn).

(ở đây cần chú ý rằng do có liên kết gối tựa nên mặt trung bình có thể bị biến dạng trong mặt phẳng của nó, giả thiết mặt trung bình là mặt trung hoà nêu trên không được thoả mãn. Trong trường hợp này độ võng phải là bé so với chiều cao dầm hoặc chiều dày tấm để có thể bỏ qua ứng suất tác dụng trong mặt trung bình).

Trong trường hợp có lực cắt Q_{ii} thì chúng được xác định từ điều kiện cân bằng phân tố, ta có:

$$Q_{11} = \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2}, \quad Q_{22} = \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_1}$$

$$\text{hay } Q_{11} = D [(\chi_{11})_{,1} + (\chi_{12})_{,2}], \quad Q_{22} = D [(\chi_{12})_{,1} + (\chi_{22})_{,2}] \quad (2.31)$$

Từ công thức (2.28) có thể thấy độ cứng chịu cắt của tiết diện là Gh và biến dạng trượt γ_{11} và γ_{22} tương ứng với lực cắt sẽ bằng góc xoay của đường đàn hồi:

$$\gamma_{11} = w_{,1} = \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad \gamma_{22} = w_{,2} = \frac{\partial w}{\partial x_2} \quad (2.32)$$

Trong lý thuyết kết cấu chịu uốn nêu trên, độ võng của kết cấu chỉ do mo-men uốn gây ra, không xét biến dạng trượt do lực cắt gây ra.

Đối với các lực N_{ij} tác dụng lên mặt trung bình của tiết diện thì các biến dạng ε_{ij} ($i=1,2; j=1,2$) vẫn xác định theo (2.17). Độ cứng của tiết diện chịu nén kéo sẽ là Eh.

Trong các công thức vừa nêu lấy $i=1, j=1$ đối với bài toán một chiều (thanh, dầm), chiều rộng dầm bằng đơn vị.

Do sử dụng momen uốn của tiết diện nên phải đưa thêm các liên kết về xoay để mô tả các điều kiện biên của nó: liên kết khớp cho phép tiết diện xoay tự do, momen bằng không; liên kết ngàm không cho tiết diện xoay, momen khác không.

Sau khi đã biết ‘các biến dạng’ tương ứng với các nội lực của tiết diện (momen uốn, lực cắt, lực dọc trục v.v..) và độ cứng của chúng thì dễ dàng xây dựng các bài toán cơ học kết cấu theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss.

Ta có thể viết một cách tổng quát lượng cưỡng bức Z của bài toán cơ học kết cấu dưới dạng tương tự như (2.25) (bài toán tĩnh):

$$Z = \int_V [(M_{ij} - M_{0ij})\chi_{ij} + (Q_{ii} - Q_{0ii})\gamma_{ii} + (N_{ij} - N_{0ij})\varepsilon_{ij}] dv \rightarrow \text{Min} \quad (2.33a)$$

hoặc dưới dạng bình phương tối thiểu

$$Z = \int_V \frac{1}{\text{Docung}} (\text{Nội lực hệ cần tính} - \text{Nội lực hệ so sánh})^2 dv \rightarrow \text{Min} \quad (2.33b)$$

và trong trường hợp không dùng hệ so sánh ta có

$$Z = \int_V \frac{1}{\text{Docung}} (\text{Nội lực hệ cần tính})^2 dv - 2 \int_{\Omega} p_i w_i d\Omega \rightarrow \text{Min} \quad (2.33c)$$

ở đây V là chiều dài dầm hoặc diện tích tấm, Ω là chiều dài hoặc diện tích phạm vi đặt lực. Trong (2.33) cần xem các độ cong χ_{ij} là các đại lượng độc lập đối với nội lực momen uốn M_{ij} , các biến dạng trượt γ_{11} và γ_{22} là các đại lượng độc lập

đối với lực cắt Q_{11} và Q_{22} , các biến dạng trong mặt trung bình ε_{ij} là các đại lượng độc lập đối với N_{ij} và đều là các đại lượng biến phân của bài toán. Điều đó chỉ ra rằng cực tiểu của lượng cưỡng bức Z , biểu thức (2.33), chỉ có thể tìm từ điều kiện:

$$\frac{\partial Z}{\partial \chi_{ij}} \frac{\partial \chi_{ij}}{\partial W} + \frac{\partial Z}{\partial \gamma_{ii}} \frac{\partial \gamma_{ii}}{\partial W} + \frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial W} + \frac{\partial Z}{\partial W} = 0 \quad (2.34)$$

Bởi vì các biến dạng uốn, biến dạng cắt v.v... là hàm của độ võng và độ võng là hàm của tọa độ nên điều kiện (2.34) được tính bằng phép tính biến phân và sẽ cho ta phương trình cân bằng tĩnh của kết cấu (xem mục 2.5 dưới đây).

Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss với biểu thức lượng cưỡng bức Z viết theo (2.33) và điều kiện cực tiểu (2.34) là phương pháp mới, tổng quát trong cơ học kết cấu.

2.5. Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss và các phương trình cân bằng của cơ hệ

Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, nếu như biết được các lực và nội lực của cơ hệ và các chuyển vị và biến dạng do chúng gây ra thì có thể viết được lượng cưỡng bức Z của hệ. Dùng phép tính biến phân với đại lượng biến phân là các chuyển vị độc lập đối với lực tác dụng và biến dạng độc lập với ứng suất sẽ nhận được phương trình vi phân cân bằng của hệ (phương trình O-ler (Euler) của phiếm hàm Z). Sau đây trình bày các ví dụ sử dụng phương pháp vừa nêu để tìm phương trình cân bằng.

2.5.1. Phương trình cân bằng tĩnh đối với môi trường đàn hồi, đồng nhất, đẳng hướng

Ba phương trình vi phân cân bằng của cơ hệ dưới dạng ứng suất là phương trình (2.22). Thế các ứng suất σ_{ij} xác định theo (2.19) vào (2.22) sẽ có các phương trình vi phân cân bằng của cơ hệ đàn hồi đồng nhất đẳng hướng dưới dạng chuyển vị. Ở đây trình bày cách tính trực tiếp để nhận được các phương trình đó (trường hợp bài toán tĩnh).

Liên hệ biến dạng - chuyển vị (2.17) và ứng suất - biến dạng (2.19) được viết lại trong hệ tọa độ (x,y,z) dưới dạng thường dùng với u, v và w là các chuyển vị tương ứng theo các chiều (x,y,z) như sau:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \sigma_x &= 2G\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right), \quad \sigma_y = 2G\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right), \quad \sigma_z = 2G\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right) \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy}, \quad \tau_{xz} = G \gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz}\end{aligned}\quad (2.34)$$

ở đây $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ - biến dạng thể tích của phân tố.

Ta viết lượng cường bức Z theo (2.25) cho mỗi ứng suất và lực khối b:

$$\begin{aligned}Z1 &= \int_V 2G\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right)\frac{\partial u}{\partial x} dV, \quad Z2 = \int_V 2G\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right)\frac{\partial v}{\partial y} dV, \\ Z3 &= \int_V 2G\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right)\frac{\partial w}{\partial z} dV, \quad Z4 = \int_V G \gamma_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dV, \\ Z5 &= \int_V G \gamma_{xz} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) dV, \quad Z6 = \int_V G \gamma_{yz} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) dV \\ Z7 &= \int_V b_x u dV, \quad Z8 = \int_V b_y v dV, \quad Z9 = \int_V b_z w dV\end{aligned}\quad (2.35)$$

Lượng cường bức Z bằng tổng các lượng cường bức thành phần :

$$Z = Z1+Z2+Z3+Z4+Z5+Z6+Z7+Z8+Z9 \quad \rightarrow \text{Min}$$

Từ điều kiện cực tiểu (1.21) của phiếm hàm Z viết lại dưới dạng

$$\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial u} + \frac{\partial Z}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial w} + \frac{\partial Z}{\partial w} = 0 \quad (2.36)$$

sẽ nhận được ba phương trình vi phân cân bằng tĩnh. Bởi vì u, v và w là các hàm của tọa độ (x,y,z), không phải là biến độc lập, nên phép tính (2.36) là phép tính biến phân. Phương trình cân bằng thứ nhất với u là hàm chưa biết nhận được với chú ý rằng

- đại lượng biến phân của Z1 (ứng với σ_x) là ε_x hay $\frac{\partial u}{\partial x}$, như vậy

$$\frac{\partial Z1}{\partial \varepsilon_x} = - \frac{\partial}{\partial x} 2G \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu} \theta \right) = - 2G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \theta \right)$$

- đại lượng biến phân của Z4 (ứng với τ_{xy}) là γ_{xy} có thành phần $\frac{\partial u}{\partial y}$, nên

$$\frac{\partial Z4}{\partial \gamma_{xy}} = - G \frac{\partial}{\partial y} \gamma_{xy} = -G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)$$

- đại lượng biến phân của Z5 (ứng với τ_{xz}) là γ_{xz} có thành phần $\frac{\partial u}{\partial z}$, nên

$$\frac{\partial Z5}{\partial \gamma_{xz}} = -G \frac{\partial}{\partial z} \gamma_{xz} = - G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} \right)$$

- đại lượng biến phân của Z7 là u, nên

$$\frac{\partial Z7}{\partial u} = b_x$$

Tổng cộng

$$\frac{\partial Z1}{\partial u} + \frac{\partial Z4}{\partial u} + \frac{\partial Z5}{\partial u} + \frac{\partial Z7}{\partial u} = 0$$

sau khi rút gọn sẽ là :

$$G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{G}{1-2\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x} \theta \right) + b_x = 0 \quad (2.37)$$

Phương trình cân bằng thứ hai nhận được với v là hàm chưa biết. Trong (2.35) các đại lượng biến phân của v có ở Z2, Z4, Z6 và Z8. Phương trình cân bằng thứ ba nhận được với w là hàm chưa biết. Trong (2.35) các đại lượng biến phân của w có ở Z3, Z5, Z6 và Z9. Bằng cách tính biến phân tương tự sẽ có thêm hai phương trình cân bằng sau:

$$G \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{G}{1-2\nu} \left(\frac{\partial}{\partial y} \theta \right) + b_y = 0 \quad (2.38)$$

$$G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{G}{1-2\nu} \left(\frac{\partial}{\partial z} \theta \right) + b_z = 0 \quad (2.39)$$

Ba phương trình (2.37), (2.38) và (2.39) là các phương trình vi phân cân bằng của cơ hệ đàn hồi, đồng nhất và đẳng hướng và được gọi là phương trình Navier [4] Dưới dạng tenxơ các phương trình này được viết gọn như sau:

$$G u_{j,kk} + \frac{G}{1-2\nu} u_{k,kj} + b_j = 0 \quad (2.40)$$

2.5.2. Phương trình vi phân của mặt võng của tấm chịu uốn

Xét tấm có chiều dày không đổi Viết lại các biểu thức (2.30) đối với các nội lực momen uốn và xoắn và (2.31) đối với lực cắt tác dụng lên phân tử tấm trong hệ tọa độ (x,y) ta có :

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ Q_x &= -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right), \quad Q_y = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Biết được các lực tác dụng lên phân tử thì dễ dàng viết được lượng cường bức Z, thí dụ, dưới dạng bình phương tối thiểu theo (2.33.b) (khi không có ngoại lực):

$$\begin{aligned} Z1 &= \int_{\Omega} D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 d\Omega, \quad Z2 = \int_{\Omega} D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 d\Omega, \\ Z3 &= 2 \int_{\Omega} D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 d\Omega \end{aligned} \quad (2.42)$$

ở đây Ω là diện tích tấm. Lượng cường bức Z bằng tổng các lượng cường bức do mỗi thành phần nội lực momen uốn và xoắn gây ra :

$$Z = Z1 + Z2 + Z3 \rightarrow Min \quad (2.43)$$

Chú ý rằng trong (2.43) ta chỉ xét nội lực momen, chưa xét tới lực cắt, phân tử không có lực ngoài tác dụng. Hệ số 2 trong Z3 để xét momen xoắn tác dụng bằng nhau lên hai chiều x,y. Các ‘biến dạng’ tương ứng với các nội lực momen xác định theo (2.29) :

$$\chi_{xx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \chi_{yy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \chi_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.44)$$

Các ‘biến dạng’ này cần được xem là độc lập đối với các nội lực momen uốn và xoắn và là các đại lượng biến phân của bài toán. Do đó từ điều kiện cực tiểu (2.36) ta có :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z1}{\partial \chi_{xx}} \frac{\partial \chi_{xx}}{\partial w} &= 2D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 2D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right), \\ \frac{\partial Z2}{\partial \chi_{yy}} \frac{\partial \chi_{yy}}{\partial w} &= 2D \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 2D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \chi_{xy}} \frac{\partial \chi_{xy}}{\partial w} = 4D(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 4D(1-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \quad (2.45)$$

Tổng cộng các thành phần của (1.45) nhận được phương trình vi phân độ vồng của tấm chịu uốn :

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \quad (2.46)$$

Phương trình (2.46) thường được gọi là phương trình Sophie Germain (năm 1811).

Khi xây dựng lượng cưỡng bức Z (biểu thức 2.43) không xét tới lực cắt bởi vì lý thuyết kết cấu chịu uốn trình bày trên không xét biên dạng của lực cắt. Tuy nhiên, trong phạm vi của lý thuyết này, nếu dùng lực cắt xác định theo (2.31) và biên dạng trượt theo (2.32) thì lượng cưỡng bức Z được viết như sau

$$Z = \int_{\Omega} Q_{xx} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) d\Omega + \int_{\Omega} Q_{yy} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) d\Omega \rightarrow Min \quad (2.47)$$

Xem các góc xoay $\frac{\partial w}{\partial x}$ và $\frac{\partial w}{\partial y}$ là các đại lượng biến phân độc lập đối với lực cắt

Q_x và Q_y và bằng phép tính biến phân lại nhận được phương trình vi phân (2.46).

Đối với dầm, lượng cưỡng bức viết theo (2.33.a) sẽ là :

$$Z = - \int_l EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (\chi_{xx}) dl - \int_{l_q} q w dl_q \quad (2.48)$$

Trong (2.48) l là chiều dài dầm, $\chi_{xx} = - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ là biên dạng uốn (độ cong) của dầm,

l_q là chiều dài đoạn dầm có lực q tác dụng. Phương trình vi phân đường độ vồng của dầm:

$$\frac{\partial Z}{\partial \chi_{xx}} \frac{d\chi_{xx}}{dw} + \frac{\partial Z}{\partial w} = EJ \frac{d^4 w}{dx^4} - q = 0 \quad (2.49)$$

CHƯƠNG 3. ỔN ĐỊNH ĐÀN HỒI CỦA THANH THẲNG CHỊU UỐN DỌC

3.1. Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss để giải bài toán ổn định công trình

Xét một thanh chịu tải trọng dọc trục p , dầm có chiều dài l , độ cứng mặt cắt là EJ_x .

Phương trình đường đàn hồi của thanh có dạng: $y = y(x)$ phải thoả mãn điều kiện biên và điều kiện ban đầu (nếu có).

Khi tải trọng dọc trục p tăng lên đến một giá trị nào đó thì trong thanh xuất hiện đồng thời hai thành phần ứng suất, do uốn và do nén.

Lượng cường bức do mômen uốn

$$Z_1 = \int_0^l \frac{1}{EJ_x} (M_x)^2 dx$$

Lượng cường bức do lực nén

$$Z_2 = \int_0^l \frac{1}{EF} (N)^2 dx$$

Lượng cường bức toàn bộ $Z = Z_1 + Z_2$

3.1.1. Bài toán thanh chịu nén uốn đồng thời

Xét một thanh chịu tải trọng dọc trục P , dầm có chiều dài l , độ cứng mặt cắt là EJ_x .

Lượng cường bức của cột chịu nén uốn đồng thời được viết như sau:

$$Z = \int_0^l \left[\frac{1}{EJ_x} (M_x)^2 + \frac{1}{EF} (N^2) \right] dx \quad (3.1)$$

Chuyển động của dầm đang xét sẽ rất gần với chuyển động tự do nếu như lượng cường bức đạt cực tiểu ($Z \rightarrow \min$) hay $\partial Z = 0$

3.1.2. Bài toán thanh chịu nén uốn và cắt đồng thời

Xét một cột chịu tải trọng dọc trục P , dầm có chiều dài l , độ cứng mặt cắt là EJ_x

Lượng cường bức của cột chịu nén uốn và cắt đồng thời được viết như sau

$$Z = \int_0^l \left[\frac{1}{EJ_x} (M_x)^2 + \frac{1}{GF} (Q_y)^2 + \frac{1}{EF} (N_z^2) \right] dx \quad (3.2)$$

Chuyển động của dầm đang xét sẽ rất gần với chuyển động tự do nếu như lượng

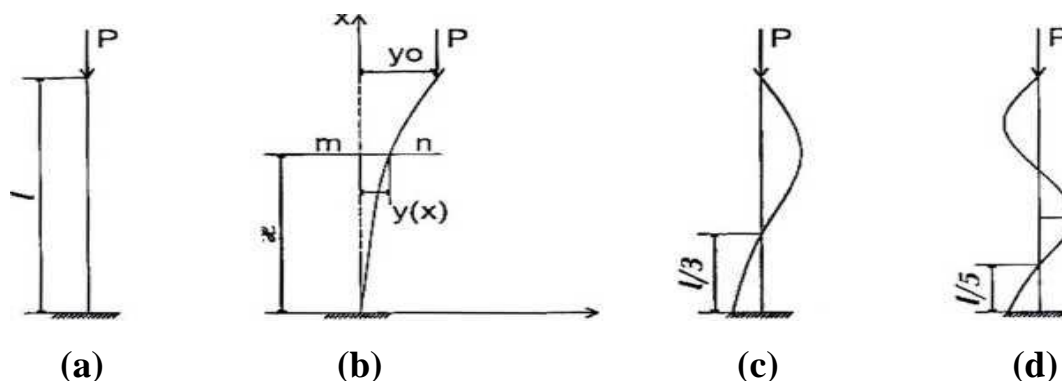
cường bức đạt cực tiểu ($Z \rightarrow \min$) hay $\partial Z = 0$

3.2. Sử dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss thiết lập phương trình vi phân cân bằng

3.2.1. Các ví dụ tính toán

Ví dụ 1: Thanh đầu ngàm đầu tự do

Xét thanh thẳng có chiều dài l , độ cứng mặt cắt là EJ_x và có liên kết một đầu ngàm một đầu tự do, chịu tải trọng dọc trục P như (hình 3.1a)



Hình 3.1. Thanh đầu ngàm đầu tự do

Hệ so sánh được chọn là một thanh không có liên kết, có tải trọng và độ cứng mặt cắt như thanh đang xét. Theo (3.1) ta có:

$$Z = \int_0^l \frac{1}{EJ_x} \left(-EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + P(y_0 - y) \right)^2 dx + \int_0^l \frac{1}{EF} P^2 dx \quad (3.3)$$

Chuyển động của thanh đang xét sẽ rất gần với chuyển động tự do nếu như lượng cường bức đạt cực tiểu ($Z \rightarrow \min$) hay $\partial Z = 0$. Vậy với $y = y(x)$ thoả mãn điều kiện biên động học ban đầu ta có

$$\delta Z = \partial \left\{ \int_0^l \frac{1}{EJ_x} \left(-EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + P(y_0 - y) \right)^2 dx - EJ + \int_0^l \frac{1}{EF} P^2 dx \right\} = 0$$

hay

$$\delta Z = 2 \left[-EJ_x \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + P \frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2} \right] + 2 \left[-EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + P(y_0 - y) \right] (-P) = 0$$

$$\Leftrightarrow \delta Z = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\left(-EJ_x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - P(y_0 - y) \right) \right] - P \left[\left(-EJ_x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - P(y_0 - y) \right) \right] = 0 \quad (3.4)$$

Nhận xét: Trong (3.4) tải trọng P là bất kỳ, để cho $\delta Z = 0$ thì

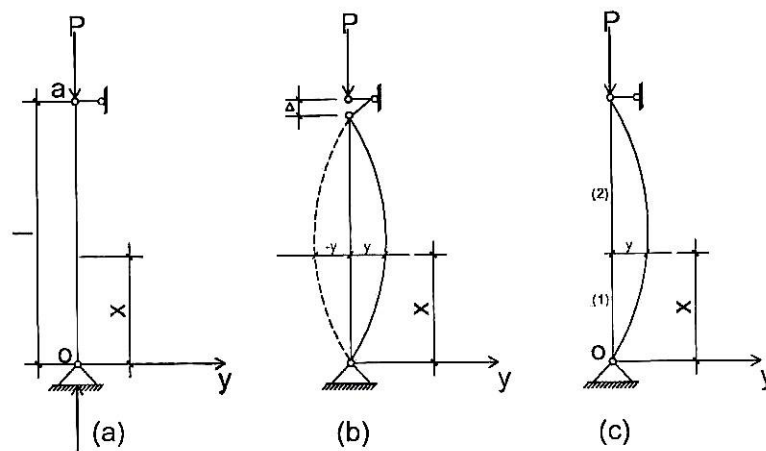
$$\left[\left(-EJ_x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - P(y_0 - y) \right) \right]$$

Phải bằng “0” do đó phương trình vi phân cân bằng là:

$$\left[\left(-EJ_x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - P(y_0 - y) \right) \right] = 0$$

Ví dụ 2: Thanh hai đầu khớp

Xét thanh hai đầu có chiều dài l , độ cứng mặt cắt là EJ_x và chịu tải trọng dọc trục P như, Hình 3.2a.



Hình 3.2. Thanh hai đầu khớp

Hệ so sánh được chọn là một thanh không có liên kết, có tải trọng và độ cứng mặt cắt như thanh đang xét. Theo (3.1), ta có:

$$Z = \int_0^{l_1} \frac{1}{EJ_x} \left(-EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - Py_1 \right)^2 dx + \int_{l_1}^l \frac{1}{EJ_x} \left(-EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - Py_2 \right)^2 dx + \int_0^l \frac{1}{EF} (P)^2 dx$$

$$Z = \int_0^{l_1} \frac{1}{EJ_x} \left(-EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - Py_1 \right)^2 dx + \int_{l_1}^l \frac{1}{EJ_x} \left(-EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - Py_2 \right)^2 dx + \left. \int_0^l \frac{1}{EF} (P)^2 dx + \lambda [y_1|_{x=l_1} - y_0] \right\} \rightarrow \min$$

Chuyển động của thanh đang xét sẽ rất gần với chuyển động tự do nếu như lượng cưỡng bức đạt cực tiểu ($Z \rightarrow \min$) hay $\delta Z = 0$. Vậy với $y = y(x)$ thỏa mãn điều kiện biên động học ban đầu ta có:

$$\delta Z = \delta \left\{ \int_0^{l_1} \frac{1}{EJ_x} \left(-EJ \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} - Py_1 \right)^2 dx + \int_{l_1}^l \frac{1}{EJ_x} \left(-EJ \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} - Py_2 \right)^2 dx + \int_0^l \frac{1}{EF} (P)^2 dx + \lambda [y_1|_{x=l_1} - y_0] \right\} = 0$$

hay:

$$Z_1 = \int_0^{l_1} \frac{1}{EJ_x} \left(-EJ_x \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} - Py_1 \right)^2 dx + \lambda [y_1|_{x=l_1} - y_0]$$

$$\delta Z_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{2}{EJ_x} \left(-EJ_x \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} - Py_1 \right) (-EJ_x) \right] + \frac{2}{EJ_x} \left[\left(-EJ_x \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} - Py_1 \right) (-P) \right] + \lambda = 0$$

$$\delta Z_1 = 2EJ_x \frac{\partial^4 y_1}{\partial x^4} + 2P \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + \frac{2P}{EJ_x} \left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + Py_1 \right) + \lambda = 0$$

$$\delta Z_1 = EJ_x \frac{\partial^4 y_1}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + \frac{P}{EJ_x} \left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + Py_1 \right) + \frac{\lambda}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \delta Z_1 = EJ_x \frac{\partial^4 y_1}{\partial x^4} + 2P \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + \frac{P^2}{EJ_x} y_1 + \frac{\lambda}{2} = 0 \quad (a)$$

$$\lambda (y_1|_{x=l_1} - y_0) = 0 \quad (b)$$

$$Z_2 = \int_{l_1}^l \frac{1}{EJ_x} \left(-EJ \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} - Py_2 \right)^2 dx$$

$$\delta Z_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{2}{EJ_x} \left(-EJ_x \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} - Py_2 \right) (-EJ_x) \right] + \frac{2}{EJ_x} \left[\left(-EJ_x \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} - Py_2 \right) (-P) \right] = 0$$

$$\delta Z_2 = 2EJ_x \frac{\partial^4 y_2}{\partial x^4} + 2P \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} + \frac{2P}{EJ_x} \left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} + Py_2 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \delta Z_2 = EJ_x \frac{\partial^4 y_2}{\partial x^4} + 2P \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} + \frac{P^2}{EJ_x} y_2 = 0 \quad (c)$$

Hệ a,b,c là hệ phương trình vi phân cân bằng của bài toán thanh 2 đầu khớp (có kích động y_0).

3.2.2. Nhận xét và kết luận:

Như vậy, qua 2 ví dụ trên ta thấy, từ phương trình sử dụng nguyên lý cực trị Gauss, ta có thể thiết lập được phương trình vi phân cân bằng của cơ hệ giống như việc áp dụng các phương pháp khác.

3.3. Các bước thực hiện khi tìm lực tới hạn bằng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss

Trong quá trình toán, ta sử dụng các giả thiết sau:

- Vật liệu làm việc trong giai đoạn đàn hồi, do đó quá trình tăng tải và giảm tải là hoàn toàn thuận nghịch, đồng thời vật liệu tuân theo quy định luật Hook, tức là có quan hệ tuyến tính giữa ứng suất và biến dạng. Trong quá trình chịu tải, năng lượng của hệ được bảo toàn.
- Vật liệu là đồng nhất tại tất cả các điểm trong vật thể và đẳng hướng, tức tính chất cơ lý theo các phương như nhau. Đồng thời vật liệu được coi là liên tục, tức là trong vật thể không có chỗ trống, trước cũng như sau khi biến dạng.
- Vật thể ở trạng tự nhiên trước khi chịu lực, tức là trong vật thể không có ứng suất ban đầu.
- Biến dạng của vật thể là nhỏ. Nói cách khác chuyển vị các điểm của vật thể do biến dạng gây ra là nhỏ so với kích thước của nó.

3.3.1. Các bước thực hiện

Bước 1: Chọn hệ so sánh.

Hệ so sánh là hệ hoàn toàn không có liên kết nhưng có cùng độ cứng mặt cắt và cùng tải trọng với hệ đang xét.

Bước 2: Giả thiết đường độ võng của dầm đang xét với biểu thức đường độ võng phải thoả mãn điều kiện biên.

Chẳng hạn, biểu thức đường độ võng có thể viết dưới dạng đa thức chuỗi lượng giác đơn.

Dạng đa thức: $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots$

Dạng hàm lượng giác theo Timosehko: $y_n = a_n \cos(ks) + b_n \sin(ks) + c_n x + d_n$

Bước 3: Viết biểu thức lượng cường bức của hệ theo (3.1),(3.2).

Bước 4: Viết các điều kiện biên động học thể hiện sự sai khác giữa hệ cho và hệ so

sánh. Điều kiện biên chính là các ràng buộc được dạng đẳng thức. Ngoài ra, ra phải đưa thêm ràng buộc, đó là điều kiện có nghiệm (tức là hệ phải có kích chuyển vị y_0).

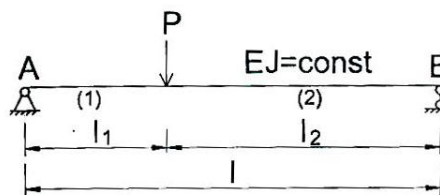
Bước 5: Cực tiểu hoá lượng cưỡng bức.

Đối với bài toán cực trị có các điều kiện ràng buộc, ra sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange để đưa về bài toán cực trị không ràng buộc.

Gọi λ_k là nhân tử Lagrange để đưa bài toán cực trị có điều kiện ràng buộc về bài toán cực trị không ràng buộc. Sau khi cực tiểu hoá lượng cưỡng bức theo các thành phần cơ bản, nhận được biểu thức λ_k có chứa lực tới hạn P_{th} .

Bước 6: Cho $\lambda_k = 0$ nhận được các giá trị P_{th} . Ứng với các giá trị ($i=1,2,3,\dots,n$), ta có các $P_{1th}, P_{2th}, \dots, P_{nth}$.

Giải thích: Xét dầm đơn giản AB chịu lực tập trung như P như hình (3-3).



Hình3-3

Viết biểu thức đường đàn hồi cho các đoạn dưới dạng đa thức:

$$y_1 = \sum_{i=1}^4 a_i x^i = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \quad \text{với} \quad (0 \leq x \leq l_1)$$

$$y_2 = \sum_{j=0}^4 b_j x^j = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 \quad \text{với} \quad (0 \leq x \leq l_2)$$

Chọn hệ số sánh giống dầm đang xét nhưng hoàn toàn không có liên kết.

Khi không kể đến ảnh hưởng của lực cắt, lượng cưỡng bức được viết như sau:

$$Z = \int_0^{l_1} EJ \left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} \right)^2 dx + \int_{l_1}^{l_2} EJ \left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} \right)^2 dx - 2Py|_{x=l_1} \quad (*)$$

Chuyển động thực của dầm cho sẽ rất gần với chuyển động tự do nếu lượng cưỡng bức cực tiểu hay $\delta Z = 0$.

Dầm cho khác dầm so sánh ở chỗ có các liên kết gối tựa tại hai đầu dầm.

Từ đó ta có các điều kiện ràng buộc:

$$y_2 \Big|_{x=l_2} = 0 \quad \rightarrow \quad g_1 = b_1 l_2 + b_2 l_2^2 + b_3 l_2^3 + b_4 l_2^4 = 0$$

$$y_1 \Big|_{x=l_1} = y_2 \Big|_{x=0} \quad \rightarrow \quad g_2 = a_1 l_1 + a_2 l_1^2 + a_3 l_1^3 + a_4 l_1^4 - b_0 = 0$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} \Big|_{x=l_1} = \frac{\partial y_2}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad \rightarrow \quad g_3 = a_1 + 2a_2 l_1 + 3a_3 l_1^2 + 4a_4 l_1^3 - b_1 = 0$$

Ta đưa bài toán tìm cực trị của (*) có 3 điều kiện ràng buộc về bài toán cực trị không có ràng buộc bằng cách đưa vào các nhân tử Lagrange như sau:

$$Z = \int_0^{l_1} EJ_x \left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} \right)^2 dx + \int_0^{l_2} EJ_x \left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} \right)^2 dx - 2Py_1 \Big|_{x=l_1} + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3$$

Ta thấy hai đại lượng: $(2Py_1 \Big|_{x=l_1})$ và $(2\frac{\lambda_1}{2} g_1)$ tương tự toán học như nhau:

+ $y_1 \Big|_{x=l_1}$ Là chuyển vị của mặt cắt có đặt lực tập trung P.

+ g_1 là chuyển vị của gối B. Vậy, đại lượng $\frac{\lambda_1}{2}$ có thứ nguyên giống lực tập trung

P và nó chính là phản lực liên kết tại gối B.

3.3.2. Nhận xét và kết luận

+ Nguyên lý cực trị Gauss không phải là nguyên lý năng lượng. Nguyên lý xét điều kiện dừng của phiếm hàm lượng cưỡng bức $\delta Z = 0$ nhưng lấy biến phân theo biến dạng và xem lực là độc lập với biến dạng.

+ Nguyên lý cực trị Gauss có thể hiểu đơn giản là thay vì đi xét hệ thực (hay gọi là hệ cho), ta đi xét một hệ khác (gọi là hệ so sánh) hoàn toàn giống hệ cho nhưng không có liên kết. Hai hệ này sẽ chuyển động lại gần nhau khi lượng cưỡng bức cực tiểu.

+ Khi lấy cực tiểu phiếm hàm biểu diễn lượng cưỡng bức đối với các thành phần cơ bản, ta luôn có thể dẫn biểu thức của nguyên lý đang xét về phương trình cân bằng.

+ Khi giải bài toán ổn định công trình theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, ta giải trực tiếp đạo hàm cấp hai của đường độ võng trên lượng cưỡng bức (với giả thiết đã biết đường độ võng) mà không cần phải giải phương trình vi phân bậc 4.

+ Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss phát triển từ nguyên lý cực trị Gauss để đưa ra lời giải cho bài toán cơ học vật rắn biến dạng. Lúc này, "gia tốc" trong nguyên lý cực trị Gauss chính là đạo hàm cấp hai của đường độ võng.

+ Hệ số sánh có thể chịu liên kết khác với hệ cho nhưng phải giống hệ cho về tải trọng.

+ Lượng cường bức thể hiện sự sai khác về liên kết giữa hai hệ: hệ cho và hệ so sánh.

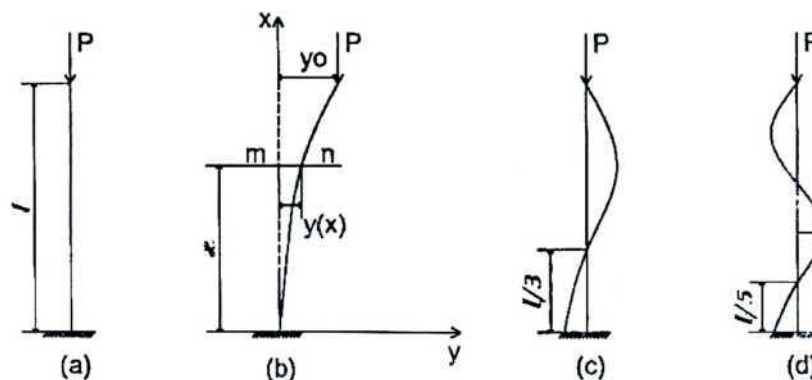
+ Với cách xây dựng bài toán và đưa ra lời giải cho bài toán ổn định như bài toán có dạng biến dạng thông thường nên sử dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss để giải bài toán ổn định công trình có cách làm và cách nghĩ đơn giản, hoàn toàn mới so với các phương pháp khác.

Trong luận văn này, tác giả sử dụng phần mềm Matlab để thực hiện việc tính toán.

3.4. Các ví dụ tính toán

3.4.1. Xác định lực tới hạn của thanh

Ví dụ 1 - Thanh một đầu ngàm một đầu tự do



Hình 3.3.a. Thanh đầu ngàm đầu tự do

Xác định lực tới hạn cho thanh thẳng chịu nén đúng tâm (thanh Euler), độ cứng uốn của thanh là EJ_x như (hình 3.3a). Biết thanh hoàn toàn đàn hồi và ứng suất chưa vượt quá giới hạn tỷ lệ.

Trường hợp 1: Viết biểu thức đường độ võng cho thanh dưới dạng đa thức:

$$y = \sum_{i=0}^7 a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + a_7 x^7 \text{ với } (0 \leq x \leq l) \quad (3.6)$$

trong đó a_i là các hệ số cần xác định.

Chọn hệ số sánh giống thanh cho nhưng không có liên kết. Lượng cưỡng bức được viết như sau

$$Z = \int_0^l \frac{1}{EJ_x} \left(-EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + P(y_0 - y_1) \right)^2 dx + \int_0^l \frac{1}{EF} P^2 dx \quad (3-7)$$

Trong đó : $\int \frac{1}{EJ_x} \left(-EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + P(y_0 - y_1) \right)^2$ là lượng cưỡng bức do mômen uốn

$$\int_0^l \frac{1}{EF} P^2 dx \quad \text{là lượng cưỡng bức do lực nén}$$

Chuyển động thực của thanh cho sẽ rất gần với chuyển động tự do nếu lượng cưỡng bức cực tiểu hay $\delta Z = 0$.

Thanh cho khác thanh so sánh ở chỗ có liên kết ngầm tại đầu dưới từ đó ta có các điều kiện ràng buộc

$$y_{(x=0)} = 0 \quad \rightarrow \quad a_0 = 0$$

$$\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \rightarrow \quad a_1 = 0$$

$$y|_{x=l} = y_0 \rightarrow g_1 = a_0 + a_1 l + a_2 l^2 + a_3 l^3 + a_4 l^4 + a_5 l^5 + a_6 l^6 + a_7 l^7 - y_0 = 0 \quad (3.8)$$

Các điều kiện biên này cũng chính là cũng chính là các điều kiện ràng buộc của (3.7).

Ta đưa bài toán tìm cực trị của (3.7) có một điều kiện ràng buộc về bài toán cực trị không có điều kiện ràng buộc bằng cách đưa vào nhân tử Lagrange như sau:

$$Z = \int_0^l \frac{1}{EJ_x} \left(-EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + P(y_0 - y_1) \right)^2 dx + \int_0^l \frac{1}{EF} P^2 dx + \lambda_k g_k \quad (3.9)$$

Thay (3.6), (3.8) vào (3.9) nhận được biểu thức lượng cưỡng bức Z. Cho $Z \rightarrow \min$ (phiếm hàm có cực trị), ta có hệ phương trình:

$$\frac{\partial Z}{\partial a_i} = 0 \quad \frac{\partial Z}{\partial \lambda_k} = 0 \quad (3.10)$$

Trong đó: ($i=2 \div 7, k=1$)

Giải hệ phương trình tuyến tính (3.10), xác định được các hệ số chưa biết a_i và nhân tử Lagrange λ_1 . Trong đó λ_1 chính là phản lực liên kết tại vị trí có kích

động chuyển vị y_0 hay tại $y_{(x=1)}$, mà trên thực tế nó là đầu tự do nên phản lực liên kết phải bằng không, nghĩa là $\lambda_1=0$. Giải phương trình đặc trưng $\lambda_1=0$ theo P ta nhận được các lực tới hạn P_{th} của cơ hệ.

Đối với bài toán này ta nhận được kết quả như sau:

$$P_{1th} = 2,4674 \frac{EJ}{l^2} \quad P_{2th} = 22,208 \frac{EJ}{l^2} \quad P_{3th} = 21,9435 \frac{EJ}{l^2} \dots\dots\dots$$

$P_{1th} = 2,4674 \frac{EJ}{l^2}$ là lực tới hạn bé nhất đối với thanh đầu ngàm đầu khớp (Hình 3.3a), tức là lực dọc bé nhất có khả năng làm cho thanh bị cong đi và đường độ võng ứng với ba lực tới hạn đầu tiên, như hình 3.3.b.c.d.

Bảng 1: So sánh kết quả tính theo phương pháp NLCT Gauss với kết quả chính xác nhận được từ các phương pháp khác.

Thứ tự	P_{th} (theo Gauss)	P_{th} (chính xác)	Sai số(%)
1	2,4674	2,4674	0
2	22,2080	22,2066	0,0063
3	61,9435	61,6850	0,419

Trường hợp 2: Viết biểu thức đường độ võng cho thanh dưới dạng hàm lượng giác theo Timoshenko [2] như sau:

$$y_1 = \cos(kx) + b_1 \sin(kx) + c_1 x + d_1 \quad \text{với } (0 \leq x \leq l) \quad (3.11)$$

trong đó: a_i, b_i, c_i, d_i là các hệ số cần xác định, $k = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$

Chọn hệ số sánh giống hệ cho nhưng không có liên kết. Lượng cũng bức được được viết như sau:

$$Z = \int_0^l \frac{1}{EJ_x} \left(-EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + P(y_0 - y_1) \right)^2 dx + \int_0^l \frac{1}{EF} P^2 dx \quad (3.12)$$

Chuyển động thực của thanh đã cho sẽ rất gần với chuyển động tự do nếu lượng cưỡng bức cực tiểu hay $\delta Z = 0$.

Thanh đã cho khác thanh so sánh ở chỗ có liên kết ngầm tại đầu dưới từ đó ta có các điều kiện ràng buộc

$$y_{1(x=0)} = 0 \rightarrow g_1 = a_1 + d_1$$

$$\left. \frac{\partial y_1}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \rightarrow g_2 = b_1 k + c_1 = 0$$

$$y|_{x=l} = y_0 \rightarrow g_3 = a_1 \cos(kl) + b_1 \sin(kl) + c_1 l + d_1 - y_0 = 0 \quad (3.13)$$

Các điều kiện biên này cũng chính là các điều kiện ràng buộc của (3.12).

Ta đưa bài toán tìm cực trị của (3.12) có ba điều kiện ràng buộc về bài toán cực trị không có điều kiện ràng buộc bằng cách đưa vào thừa số Lagrange như sau:

$$Z = \int_0^l \frac{1}{EJ} \left(-EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + P(y_0 - y_1) \right)^2 dx + \int_0^l \frac{1}{EF} P^2 dx + \sum_{k=1}^3 \lambda_k g_k \quad (3.14)$$

Thay (3.11), (3.13) vào (3.14) nhận được biểu thức lượng cường bức Z. Cho $Z \rightarrow \min$ (phiếm hàm có cực trị), ta có hệ phương trình:

$$\frac{\partial Z}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial b_1} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial d_1} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial \lambda_k} = 0 \quad (3.15)$$

Trong đó: (k=1÷3)

Giải hệ phương trình tuyến tính (3.15), xác định được các hệ số chưa biết a_1 , b_1 , c_1 , d_1 và nhân tử la Lagrange $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Trong đó λ_3 chính là phản lực liên kết tại vị trí có kích động chuyển vị y_0 hay tại $y_{(x=1)}$, mà trên thực tế nó là đầu tự do nên phản lực liên kết phải bằng không, nghĩa là $\lambda_3=0$. Giải phương trình đặc trưng $\lambda_3=0$ theo P ta nhận được các lực tới hạn P_{th} của cơ hệ.

$$\lambda_3 = \cos(kl) = 0 \quad (3.16)$$

$$\cos(kl) = 0 \Leftrightarrow kl = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{2}, \dots$$

$$kl = \frac{\pi}{2} \rightarrow k = \frac{\pi}{2l} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{P}{EJ}} = \frac{\pi}{2l} \rightarrow P_{1th} = \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 EJ = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2} = 2,4674 \frac{EJ}{l^2}$$

$$kl = \frac{3\pi}{2} \rightarrow k = \frac{3\pi}{2l} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{P}{EJ}} = \frac{3\pi}{2l} \rightarrow P_{1th} = \left(\frac{3\pi}{2l} \right)^2 EJ = \frac{9\pi^2 EJ}{4l^2} = 22,2066 \frac{EJ}{l^2}$$

$$kl = \frac{5\pi}{2} \rightarrow k = \frac{5\pi}{2l} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{P}{EJ}} = \frac{5\pi}{2l} \rightarrow P_{1th} = \left(\frac{5\pi}{2l}\right)^2 EJ = \frac{25\pi^2 EJ}{4l^2} = 61,6850 \frac{EJ}{l^2}$$

Kết luận: Với các P_{th} vừa tìm được ta thấy chúng đều có giá trị dương nên theo định lý Liapunov thì hệ sẽ bị mất ổn định theo các dạng khác nhau ứng với mỗi P_{th} trên.

Bảng 2: So sánh kết quả tính theo phương pháp NLCT Gauss với kết quả chính xác nhận được từ các phương pháp khác.

Thứ tự	P_{th} (theo Gauss)	P_{th} (chính xác)	Sai số(%)
1	2,4674	2,4674	0
2	22,2066	22,2066	0
3	61,6850	61,6850	0

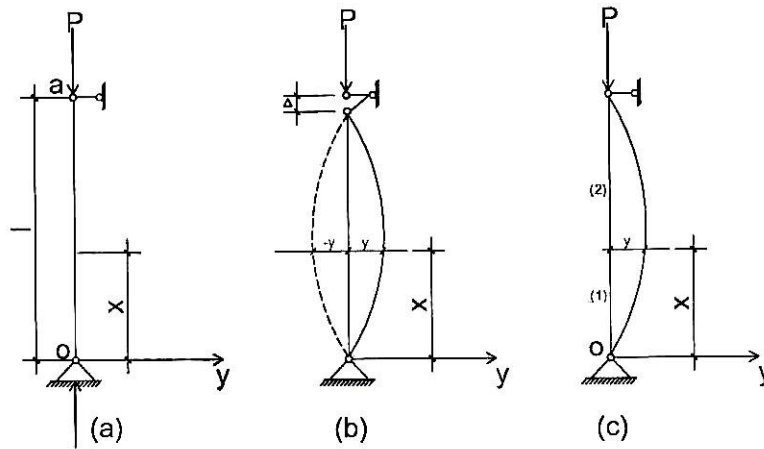
Nhận xét: Khi dùng đường đàn hồi có dạng lượng giác theo hàm của Timoshenko và dùng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss để xây dựng và giải bài toán, ta luôn nhận được kết quả hoàn toàn chính xác so với kết quả nhận được khi giải bằng các phương pháp khác.

Tóm lại: Bài toán tìm lực tới hạn của thanh thẳng đàn hồi tuyến tính được giải quyết như sau:

- Cho kích tại một điểm bất kỳ nào đó trên thanh (đưa về bài toán có dạng biên dạng thông thường). Giải bài toán này (xem như lực P đã biết).
- Từ kết quả của bài toán tìm cho ta biểu thức λ . Giải phương trình $\lambda=0$ theo P ta nhận được các lực tới hạn. Phương trình $\lambda=0$ chính là phương trình đặc trưng để xác định lực tới hạn.

Ví dụ 2. Bài toán thanh hai đầu khớp

Xác định lực tới hạn cho thanh chịu nén đúng tâm hai đầu liên kết khớp và chịu lực P tác dụng như hình 3.4a



Hình 3.4. Thanh hai đầu khớp

Lời giải:

a) Trường hợp 1: Chia thanh thành 2 đoạn (1 và 2) như hình vẽ 3.4c và viết biểu thức đường độ võng cho các đoạn thanh dưới dạng đa thức sau:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \sum_{i=0}^5 a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 \quad (0 \leq x \leq l_1) \\ y_2 &= \sum b_j (x - l_1)^j = b_0 + b_1 (x - l_1) + b_2 (x - l_1)^2 + \\ &\quad + b_3 (x - l_1)^3 + b_4 (x - l_1)^4 + b_5 (x - l_1)^5 \quad (x - l_1 \leq x \leq l) \end{aligned} \right\} \quad (3-18)$$

Trong đó: a_i ; b_j là các hệ số cần xác định

Chọn hệ số sánh giống hệ đã cho nhưng không có liên kết. Lượng cưỡng bức được viết như sau:

$$Z = \int_0^l \left[\frac{1}{EJ_x} (M_x)^2 + \frac{1}{EF} (N_x)^2 \right] dx \quad (3.19)$$

hay:

$$Z = \int_0^{l_1} \frac{1}{EJ_x} \left(-EJ \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} - P y_1 \right)^2 dx + \int_{l_1}^l \frac{1}{EJ_x} \left(-EJ \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} - P y_2 \right)^2 dx + \int_0^l \frac{1}{EF} P^2 dx \quad (3.20)$$

Trong đó: $\int_0^{l_1} \left[\frac{1}{EJ_x} \left(-EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - P y_1 \right) \right] dx + \int_{l_1}^l \left[\frac{1}{EJ_x} \left(-EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - P y_2 \right) \right] dx$ là

lượng cưỡng bức do mômen uốn

$$\int_0^l \frac{1}{EF} P^2 dx \quad \text{Là lượng cường bức do lực nén}$$

Chuyển động thực của hệ cho sẽ rất gần với chuyển động tự do nếu lượng cường bức cực tiểu hay $\delta Z = 0$.

Hệ đã cho khác hệ so sánh ở chỗ có liên kết khớp cố định ở đầu dưới và gối di động ở đầu trên từ đó ta có các điều kiện ràng buộc

$$y_{x=0} = 0 \rightarrow a_0 = 0$$

$$\left. \frac{\partial y_1}{\partial x} \right|_{x=l_1} = \left. \frac{\partial y_2}{\partial x} \right|_{(x-l_1)} \rightarrow$$

$$a_1 + 2a_2 l_1 + 3a_3 l_1^2 + 4a_4 l_1^3 + 5a_5 l_1^4 - b_2(l-l_1) - 3b_3(l-l_1)^2 - 4b_4(l-l_1)^3 - b_5(l-l_1)^5 = 0$$

$$y_2|_{x=l} = 0 \rightarrow g_1 = y_0 + b_1(l-l_1) + b_2(l-l_1)^2 + b_3(l-l_1)^3 + b_4(l-l_1)^4 + b_5(l-l_1)^5 = 0$$

$$y_1|_{x=l_1} \rightarrow g_2 = a_0 + a_1 l_1 + a_2 l_1^2 + a_3 l_1^3 + a_4 l_1^4 + a_5 l_1^5 - y_0 = 0 \quad (3.21)$$

Các điều kiện ràng buộc này cũng chính là điều kiện ràng buộc của (3.20)

Ta đưa bài toán tìm cực trị của (3.20) có 2 điều kiện ràng buộc về bài toán cực trị không có ràng buộc bằng cách đưa vào thừa số Lagrange như sau:

$$Z = \int_0^{l_1} \frac{1}{EJ_x} \left(-EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - P y_1 \right)^2 dx + \int_{l_1}^l \frac{1}{EJ_x} \left(-EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - P y_2 \right)^2 dx + \int_0^l \frac{1}{EF} P^2 + \sum_{k=1}^2 \lambda_k g_k \quad (3.22)$$

Thay (3.18), (3.21) vào (3.22) nhận được biểu thức lượng cường bức Z

Cho $Z \rightarrow \min$ (phiếm hàm có cực trị) ta có hệ phương trình:

$$\frac{\partial z}{\partial a_i} = 0 ; \quad \frac{\partial z}{\partial b_i} = 0 ; \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda_k} = 0 ; \quad (i = 0 \div 5; k = 1 \div 2; j = 0 \div 5)$$

(3.23)

Giải hệ phương trình tuyến tính (3.23) xác định được các hệ số chưa biết a_i , b_j và các nhân tử Lagrange λ_k .

Từ kết quả tính toán có được cho $\lambda_2=0$. Từ đó tìm ra lực tới hạn P_{th} của hệ

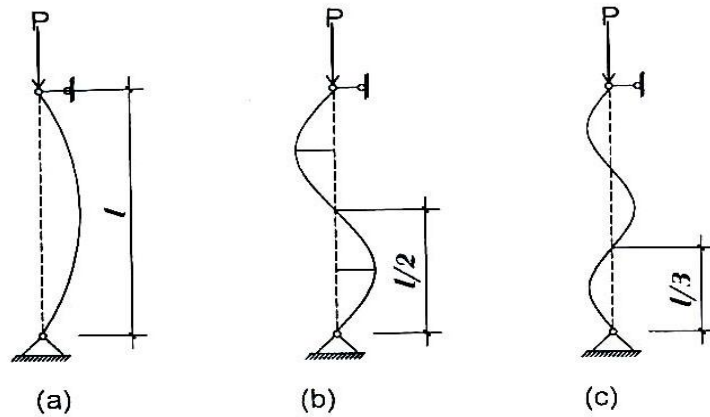
$$P_{1th} = 9.8712 \frac{EJ}{l^2}; P_{2th} = 39.4884 \frac{EJ}{l^2}; P_{3th} = 89.4229 \frac{EJ}{l^2}$$

$$P_{1th} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} = 9.8712 \frac{EJ}{l^2} \text{ là lực tới hạn bé nhất đối với hệ trên (hình 3.4a)}$$

đây là trường hợp hay giả thiết hơn cả trong thực tế. Ta gọi trường hợp cơ bản về hiện tượng mất ổn định của thanh lẳng trụ.

$$P_{2th} = \frac{2^2 \pi^2 EJ}{l^2}; P_{3th} = \frac{3^2 \pi^2 EJ}{l^2} \dots \dots \text{ là những lực tới hạn lân cận lớn hơn}$$

P_{1th} lần lượt là 9 lần và 25 lần, trực vông tương ứng trong các trường hợp này là (hình 3-5a,b,c).



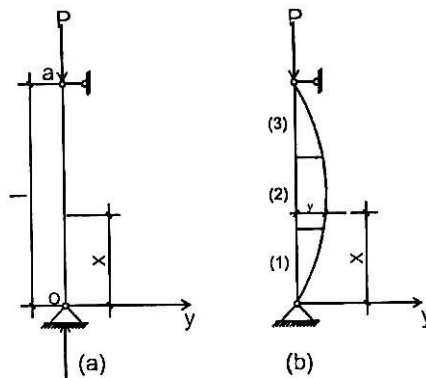
Hình 3.5. Các dạng mất ổn định của thanh hai đầu khớp

Bảng 3. So sánh kết quả tính

theo phương pháp NLCT Gauss với kết quả chính xác

Thứ tự	P_{th} (theo Gauss)	P_{th} (chính xác)	Sai số (%)
1	9.8712	9.8696	0.0162
2	39.4884	39.4784	0.025
3	89.4229	88.8264	0.671

Chia thanh thành 3 đoạn (1, 2 và 3) như hình vẽ 3-6b .



Lời giải:

Viết biểu thức đường độ võng cho các đoạn thanh dưới dạng đa thức như sau:

$$y_1 = \sum_{i=0}^6 a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6$$

với ($0 \leq x \leq l_1$)

$$y_2 = \sum_{j=0}^7 b_j x^j =$$

$$= b_0 + b_1(x-l_2) + b_2(x-l_2)^2 + b_3(x-l_2)^3 + b_4(x-l_2)^4 + b_5(x-l_2)^5 + b_6(x-l_2)^6 + b_7(x-l_2)^7$$

với ($x-l_1 \leq x \leq l_2$)

$$y_3 = \sum_{n=0}^6 c_n (x-l_2)^n = c_0 + c_1(x-l_2) + c_2(x-l_2)^2 + c_3(x-l_2)^3 + c_4(x-l_2)^4 + c_5(x-l_2)^5 + c_6(x-l_2)^6 + c_7(x-l_2)^7$$

Với ($x-l_2 \leq x \leq l$) (3.24)

Trong đó a_i ; b_j ; c_n là các hệ số cần xác định.

Chọn hệ số sánh giống cho nhưng không có liên kết. Lượng cường bức được viết như sau:

$$Z = \int_0^l \left(\frac{1}{EJ_x} (M_x)^2 + \frac{1}{EF_x} N_x^2 \right) dx \quad (3.25)$$

Hay

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= \int_0^{l_1} \frac{1}{EJ_x} \left(-EJ \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} - Py_1 \right)^2 dx \\ Z_2 &= \int_{l_1}^{l_2} \frac{1}{EJ_x} \left(-EJ \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} - Py_2 \right)^2 dx \\ Z_3 &= \int_{l_2}^l \frac{1}{EJ_x} \left(-EJ \frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} - Py_3 \right)^2 dx \\ Z_4 &= \int_0^l \frac{1}{EF} P^2 dx \end{aligned} \right\} Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 \quad (3.26)$$

Chuyển động thực của hệ cho sẽ rất gần với chuyển động tự do nếu lượng cường bức cực tiểu hay $\delta Z = 0$.

Hệ cho khác hệ số sánh ở chỗ có liên kết khớp cố định ở đầu dưới và gỏi di động ở đầu trên từ đó ta có các điều kiện ràng buộc.

$$y_{1(x=1)} = b_0 \rightarrow a_1 l_1 + a_2 l_1^2 + a_3 l_1^3 + a_4 l_1^4 + a_5 l_1^5 + a_6 l_1^6 - b_0 = 0$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial x} \Big|_{x=l_2} = b_1 \rightarrow a_1 + 2a_2 l_1 + a_2 + 2a_3 l_1 + a_3 + 2a_4 l_1 + a_4 + 2a_5 l_1 + a_5 + 2a_6 l_1 + a_6 + 2a_7 l_1$$

$$y_2 \Big|_{x=l_2} = c_0 \rightarrow y_0 + b_1(l_1 - l_2) + b_2(l_2 - l_1)^2 + b_3(l_2 - l_1)^3 + b_4(l_2 - l_1)^4 + b_5(l_2 - l_1)^5 + b_6(l_2 - l_1)^6 + b_7(l_2 - l_1)^7 - c_0 = 0$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial x} \Big|_{x=l_2} = c_1 \rightarrow b_1 + 2b_2 + (l_2 - l_1) + 3b_3 + (l_2 - l_1)^2 + 4b_4 + (l_2 - l_1)^3$$

$$+ 5b_5 + (l_2 - l_1)^4 + 6b_6 + (l_2 - l_1)^5 + 7b_7 + (l_2 - l_1)^6 - c_1 = 0$$

$$y_3 \Big|_{x=l} = 0 \rightarrow g_1 = c_0 + c_1(l - l_2) + c_2(l - l_2)^2 + c_3(l - l_2)^3 +$$

$$c_3(l - l_2)^3 + c_4(l - l_2)^4 + c_5(l - l_2)^5 + c_6(l - l_2)^6 = b_0 = y_0 \rightarrow g_2 = b_0 - y_0 \quad (3.27)$$

Các điều kiện ràng buộc này cũng chính là điều kiện ràng buộc của (3.26)

Ta đưa bài toán tìm cực trị của (3.26) có 2 điều kiện ràng buộc về bài toán cực trị không có ràng buộc bằng cách đưa nhân tử Lagrange như sau:

$$\left. \begin{aligned} Z &= Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = \\ &= \int_0^{l_1} \frac{1}{EJ_x} \left(-EJ \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} - P y_1 \right)^2 dx + \int_{l_1}^{l_2} \frac{1}{EJ_x} \left(EJ \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} - P y_2 \right)^2 dx + \\ &+ \int_0^{l_3} \frac{1}{EJ_x} \left(-EJ \frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} - P y_3 \right)^2 dx + \int_0^l \frac{1}{EF} P^2 dx + \sum_{k=1}^2 \lambda_k g_k \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

Thay (3.24), (3.27) vào (3.28), nhận được biểu thức lượng cưỡng bức Z. Cho Z \rightarrow min (phiếm hàm có cực trị), ta có hệ phương trình

$$\frac{\partial z}{\partial a_i} = 0; \frac{\partial z}{\partial b_j} = 0; \frac{\partial z}{\partial c_n} = 0; \frac{\partial z}{\partial \lambda_k} = 0 \quad (i = 1 \div 6; j = 0 \div 7; n = 0 \div 6; k = 1 \div 2) \quad (3.29)$$

Giải hệ phương trình tuyến tính (3.29), xác định được các hệ số chưa biết a_i , b_j , c_n và các nhân tử Lagrange λ_k .

Từ kết quả tính toán có được, cho $\lambda_2 = 0$. Từ đó tìm ra lực tới hạn P_{th} của hệ

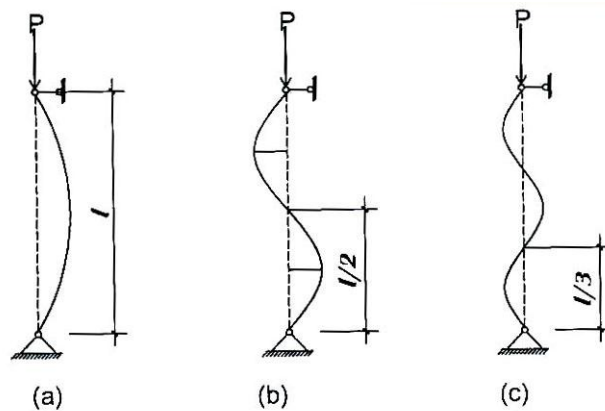
$$\lambda_2 = 0 \Rightarrow P_{1th} = 39.4784 \frac{EJ}{l^2}; P_{3th} = 88.8258 \frac{EJ}{l^2};$$

**Bảng 4: So sánh kết quả tính theo phương pháp NLCT Gauss
với kết quả chính xác:**

Thứ tự	P_{th} (Theo Gauss)	P_{th} (chính xác)	Sai số (%)
1	9.8696	9.8696	0
2	39.4784	39.4784	0%
3	88.8258	88.8264	0.0000675

Nhận xét: Khi chia thanh thành ba đoạn ta nhận được kết quả chính xác đến P_{3th} , như vậy khi càng tăng số lượng điểm chia thì ta càng tìm được nhiều nghiệm chính xác.

$P_{2th} = \frac{2^2 \pi^2 EJ}{l^2}$, $P_{3th} = \frac{3^2 \pi^2 EJ}{l^2}$... là những lực tới hạn lân cận lớn hơn P_{1th} lần lượt là 4 lần, trực vông tương ứng trong các trường hợp này là (hình 3.7a,b,c)



Hình 3.7

b) Trường hợp 2: Viết biểu thức đường độ võng cho thanh dưới dạng hàm theo Timosheko [2] như sau:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= a_1 \cos(kx) + b_1 \sin(kx) + c_1 x + d_1 \\
 y_2 &= a_2 \cos(kx) + b_2 \sin(kx) + c_2 x + d_2
 \end{aligned}
 \tag{3-30}$$

Trong đó $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2$ là các hệ số cần xác định

Chọn hệ so sánh giống dầm cho nhưng không có liên kết. Lượng cưỡng bức được viết như sau:

$$Z = \int_0^l \left[\frac{1}{EJ_x} (M_x)^2 + \frac{1}{EF} (N)^2 \right] dx \quad (3.31)$$

Hay:

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= \int_0^{l_1} \frac{1}{EJ_x} \left(EJ \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} - P y_1 \right)^2 dx \\ Z_2 &= \int_0^{(l-l_1)} \frac{1}{EJ_x} \left(EJ \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} - P y_2 \right)^2 dx \\ Z_3 &= \int_0^l \frac{1}{EF} P^2 dx \end{aligned} \right\} Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 \quad (3.32)$$

Chuyển động thực của hệ đã cho sẽ rất gần với chuyển động tự do nếu lượng cưỡng bức cực tiểu hay $\delta Z = 0$.

Hệ cho khác hệ so sánh ở chỗ có liên kết khớp cố định ở đầu dưới và gối di động ở đầu trên từ đó ta có điều kiện ràng buộc:

$$y_{1(x=0)} \rightarrow g_1 = a_1 + d_1 = 0$$

$$y_2 \Big|_{x=(l-l_1)} = 0 \rightarrow g_2 = a_2 \cos[k(l-l_1)] + b_2 \sin[k(l-l_1)] + c_2(l-l_1) + d_2 = 0$$

$$y_1 \Big|_{x=l_1} = y_2 \Big|_{x=0} = 0 \rightarrow g_3 = a_1 \cos[kl_1] + b_1 \sin[kl_1] + c_2(l_1) + d_1 - a_2 - d_2 = 0$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} \Big|_{x=l_1} = \frac{\partial y_2}{\partial x} \Big|_{(x=0)} \rightarrow g_4 = (-a_1 k) \sin(kl_1) + (b_1 k) \cos(kl_1) + c_1 + b_2 k - c_2 = 0$$

$$y_1 \Big|_{x=l_1} = y_0 \rightarrow g_5 = a_1 \cos(kl_1) + b_1 \sin(kl_1) + c_1 l_1 + d_1 - y_0 = 0 \quad (3.33)$$

Các điều kiện ràng buộc này cũng chính là điều kiện ràng buộc của (3.32)

Ta đưa bài toán tìm cực trị của (3.32) có 5 điều kiện ràng buộc về bài toán cực trị không có ràng buộc bằng cách đưa vào nhân tử Lagrange như sau:

$$\left. \begin{aligned} Z &= Z_1 + Z_2 + Z_3 = \\ &\int_0^{l_1} \frac{1}{EJ_x} \left(-EJ \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} - P y_1 \right)^2 dx + \int_0^{l-l_1} \frac{1}{EJ_x} \left(-EJ \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} - P y_2 \right)^2 dx + \\ &\quad + \int_0^l \frac{1}{EF} P^2 dx + \sum_0^5 \lambda_k g_k \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

Thay (3.30), (3.33), (3.34) nhận được biểu thức lượng cưỡng bức Z . Cho $Z \rightarrow \min$ (phiếm hàm có cực trị) ta có hệ phương trình:

$$\frac{\partial z}{\partial a_i} = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial b_i} = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial c_i} = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial d_i} = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda_k} = 0 \quad (i=1 \div 2; k = 1 \div 5)$$

(3.35)

Giải hệ phương trình tuyến tính (3-35) xác định được các hệ số chưa biết a_i, b_i, c_i, d_i và các nhân tử Lagrange λ_k .

Từ kết quả tính toán có được cho $\lambda_5 = 0$. Từ đó tìm ra lực tới hạn P_{th} của hệ

Giải phương trình đặc trưng ($\lambda_5 = 0$) theo P ta nhận được:

$$-0,5 \left(\sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{P}{EJ}} l \right) - 1 \right) P^3 l^3 y_0 \quad \left[\begin{array}{c} / \\ \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{c} EJ \\ \left(\begin{array}{l} 3Pl^2 - Pl^2 \sin \left(\sqrt{\frac{P}{EJ}} l \right) + Pl^2 \cos \left(\sqrt{\frac{P}{EJ}} l \right) - 6EJ \sin \left(\sqrt{\frac{P}{EJ}} l \right) \cos \left(\sqrt{\frac{P}{EJ}} l \right) + \\ - 6EJ \sqrt{\frac{P}{EJ}} l \sin \sqrt{\frac{P}{EJ}} l + 12EJ \sin \left(\sqrt{\frac{P}{EJ}} l \right)^2 \end{array} \right) \end{array} \right] = 0 \quad (3.36)$$

Nhận xét: Với $k = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$ từ biểu thức trên ra thấy để (3-36) = 0 thì tử số phải bằng

$$\text{không hay: } \sin \left(\frac{1}{2} kl \right) - 1 = 0 \quad (3.37)$$

Giải (3.37) ta nhận được các P_{th} :

$$\sin \left(\frac{1}{2} kl \right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{kl}{2} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow kl = \pi, 2\pi, 3\pi$$

$$kl = \pi \Rightarrow k = \frac{\pi}{l} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{P}{EJ}} = \frac{\pi}{l} \Rightarrow P_{1th} = \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 EJ = \frac{\pi EJ}{l^2} = 9.8696 \frac{EJ}{l^2}$$

$$kl = 2\pi \Rightarrow k = \frac{2\pi}{l} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{P}{EJ}} = \frac{2\pi}{l} \Rightarrow P_{1th} = \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 EJ = \frac{(2\pi)^2 EJ}{l^2} = 39.4784 \frac{EJ}{l^2}$$

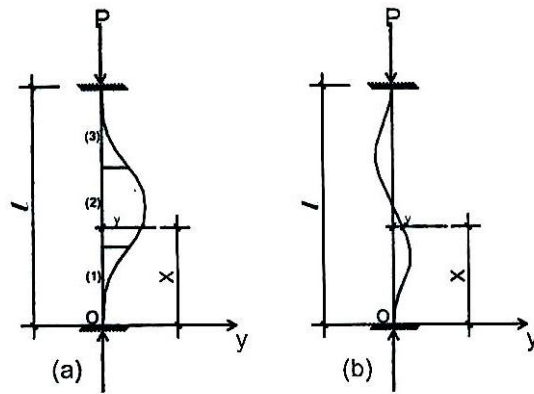
$$kl = 3\pi \Rightarrow k = \frac{3\pi}{l} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{P}{EJ}} = \frac{3\pi}{l} \Rightarrow P_{1th} = \left(\frac{3\pi}{l} \right)^2 EJ = \frac{(3\pi)^2 EJ}{l^2} = 88.8264 \frac{EJ}{l^2}$$

Bảng 4: So sánh kết quả tính theo phương pháp NLCT Gauss với kết quả chính xác:

Thứ tự	P_{th} (Theo Gauss)	P_{th} (chính xác)	Sai số (%)
1	9.8696	9.8696	0
2	39.4784	39.4784	0
3	88.8264	88.8264	0

Ví dụ 3: Bài toán thanh hai đầu ngàm

Xác định lực tới cho cột nén đúng tâm hai đầu liên kết ngàm và chịu lực P tác dụng tại đầu ngàm (đầu trên) như hình 3-8a



Hình 3.8. Thanh hai đầu ngàm

Lời giải:

a) Trường hợp 1: Chia thanh thành 3 đoạn như hình vẽ 3.8a. Viết biểu thức đường bộ võng cho các đoạn thanh dưới dạng đa thức:

$$y_1 = \sum_{i=2}^6 a_i x^i = a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6$$

với $(0 \leq x \leq l_1)$

$$y_2 = \sum_{j=0}^6 b_j (x - l_1)^j = y_0 + b_1 (x - l_1) + b_2 (x - l_2)^2 + b_3 (x - l_3)^3 + b_4 (x - l_4)^4 + b_5 (x - l_5)^5 + b_6 (x - l_6)^6$$

với $(x - l_1 \leq x \leq l_2)$

$$y_3 = \sum_{n=0}^6 b_n (x - l_2)^n = b_0 + b_1 (x - l_2) + b_2 (x - l_2)^2 + b_3 (x - l_3)^3 + b_4 (x - l_4)^4 + b_5 (x - l_5)^5 + b_6 (x - l_6)^6$$

$$\text{với } (x-l_2 \leq x \leq l_2) \quad (3.38)$$

Trong đó a_j ; b_j ; c_n là các hệ số cần xác định

Chọn hệ số sánh giống hệ cho nhưng không có liên kết. Lượng cưỡng bức được viết như sau:

$$Z = \int_0^l \left[\frac{1}{EJ_x} (M_x)^2 + \frac{1}{EF} (N)^2 \right] dx \quad (3.39)$$

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= \int_0^{l_1} \frac{1}{EJ_x} \left(-EJ \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1} - P(y_1 - y_0) \right)^2 dx \\ Z_2 &= \int_{l_1}^{l_2} \frac{1}{EJ_x} \left(-EJ \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2} - P(y_2 - y_0) \right)^2 dx \\ Z_3 &= \int_{l_2}^l \frac{1}{EJ_x} \left(-EJ \frac{\partial^2 y_3}{\partial x_3} - P(y_3 - y_0) \right)^2 dx \\ Z_4 &= \int_0^l \frac{1}{EJ_x} P^2 dx \end{aligned} \right\} Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4$$

(3.40)

Chuyển động thực của hệ cho sẽ rất gần với chuyển động tự do nếu lượng cưỡng bức cực tiểu hay $\delta Z = 0$.

Hệ cho khác hệ so sánh ở chỗ có liên kết ngầm ở hai đầu từ đó ta có các điều kiện ràng buộc

$$y_{1(x=l_1)} = b_0 \rightarrow a_2 l_1^2 + a_3 l_1^3 + a_4 l_1^4 + a_5 l_1^5 + a_6 l_1^6 - b_0 = 0$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} \Big|_{x=l_1} = b_1 \rightarrow 2a_2 l_1 + 3a_3 l_1^2 + 4a_4 l_1^3 + 5a_5 l_1^4 + 6a_6 l_1^5 - b_1 = 0$$

$$y_2 \Big|_{x=l_2} = c_0 \rightarrow y_0 + b_1(l_2 - l_1) + b_2(l_2 - l_1)^2 + b_3(l_2 - l_1)^3 + b_4(l_2 - l_1)^4 + b_5(l_2 - l_1)^5 + b_6(l_2 - l_1)^6 - c_0 = 0$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial x} \Big|_{x=l_2} = c_1 \rightarrow 2b_2(l_2 - l_1) + 3b_3(l_2 - l_1)^2 + 4b_4(l_2 - l_1)^3 + 5b_5(l_2 - l_1)^4 + 6b_6(l_2 - l_1)^5 - c_1 = 0$$

$$-c_1 = 0$$

$$y_3 \Big|_{x=l} = 0 \rightarrow g_1 = c_0 + c_1(l-l_2) + c_2(l-l_2)^2 + c_3(l-l_2)^3 + c_4(l-l_2)^4 + c_5(l-l_2)^5 + c_6(l-l_2)^6 = 0$$

$$\frac{\partial y_3}{\partial x} \Big|_{x=0} \rightarrow g_2 = c_0 + c_1(1 - l_2) + 2c_2(1 - l_2) + 3c_3(1 - l_2)^2 + 4c_4(1 - l_2)^3 + 5c_5(1 - l_2)^4 + 6c_6(1 - l_2)^5 = 0$$

$$y_1 \Big|_{x=l_1} = y_0 \rightarrow g_3 = a_2 l_1^2 + a_3 l_1^3 + a_4 l_1^4 + a_5 l_1^5 + a_6 l_1^6 - y_0 = 0$$

$$b_0 = y_0 \rightarrow b_0 - y_0 = 0 \quad (3.41)$$

Các điều kiện ràng buộc này cũng chính là điều kiện ràng buộc của (3.40)

Ta đưa bài toán cực trị của (3.40) có 3 điều kiện ràng buộc về bài toán cực trị không có ràng buộc bằng cách đưa vào nhân tử Lagrange:

$$\left. \begin{aligned} Z &= Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = \\ &\int_0^{l_1} \frac{1}{EJ_x} \left(-EJ \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1} - P(y_1 - y_0) \right)^2 dx + \\ &+ \int_{l_1}^{l_2} \frac{1}{EJ_x} \left(-EJ \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2} - P(y_2 - y_0) \right)^2 dx \\ &+ \int_{l_2}^l \frac{1}{EJ_x} \left(-EJ \frac{\partial^2 y_3}{\partial x_3} - P(y_3 - y_0) \right)^2 dx \\ &+ \int_0^l \frac{1}{EJ_x} P^2 dx + \sum_{k=1}^3 \lambda_k g_k \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

Thay (3.38), (3.41) vào (3.42), nhận được biểu thức lượng cưỡng bức Z.

Cho $Z \rightarrow \min$ (phiếm hàm có cực trị), ta có hệ phương trình:

$$\frac{\partial z}{\partial a_i} = 0 ; \frac{\partial z}{\partial b_j} = 0 ; \frac{\partial z}{\partial c_n} = 0 ; \frac{\partial z}{\partial \lambda_k} = 0 \quad (i = 2 \div 6; j=0 \div 6; n=0 \div 6; k=1 \div 3)$$

Giải hệ phương trình tuyến tính (3.43), xác định được các hệ số chưa biết $a_j ; b_j ; c_n$ và các nhân tử Langnge λ_k .

Từ kết quả tính toán có được , cho $\lambda_2=0$. Từ đó tìm ra lực giới hạn P_{th} của hệ.

$$P_{1th} = 39.4784 \frac{EJ}{l^2} ; P_{2th} = 88.8264 \frac{EJ}{l^2} ; P_{3th} = 157.9137 \frac{EJ}{l^2}$$

Bảng 5. So sánh KQ tính theo phương pháp NLCT Gauss với kết quả chính xác

Thứ tự	P_{th} (theo Gauss)	P_{th} (chính xác)	Sai số (%)
1	39.4784	39.4784	0%

2	88.8264	88.8264	0%
3	157.9137	157.9137	0%

Nhận xét: Khi chia thanh thành ba đoạn ta nhận được kết quả chính xác đến P_{th} , như vậy khi càng tăng số lượng điểm chia thì ta càng tìm được nhiều nghiệm chính xác hơn.

b) **Trường hợp 2:** Viết biểu thức đường độ võng cho thanh dưới dạng hàm theo Timoshenko [2]:

Chia thanh thành 2 đoạn ta có :

$$y_1 = a_1 \cos(kx) + b_1 \sin(kx) + c_1 x + d_1 \quad \text{với } (0 \leq x \leq l_1)$$

$$y_2 = a_2 \cos(kx) + b_2 \sin(kx) + c_2 x + d_2 \quad \text{với } (0 \leq x \leq l_2)$$

trong đó a_1, b_1, c_1, d_1 là các hệ số cần xác định.

Chọn hệ số sánh giống hệ cho nhưng không có liên kết. Lượng cưỡng bức được

viết như sau:
$$Z = \int_0^l \left[\frac{1}{EJ_x} (M)^2 + \frac{1}{EF} (N)^2 \right] dx \quad (3.45)$$

hay:

$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 = \left. \begin{aligned} & \int_0^{l_1} \frac{1}{EJ_x} \left(-EJ \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2} - P(y_1 - y_0) + EJ \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} \Big|_{x=l_1} \right)^2 dx + \\ & + \int_{l_1}^{l_2} \frac{1}{EJ_x} \left(-EJ \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2^2} - P(y_2 - y_0) + EJ \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} \Big|_{x=0} \right)^2 dx \\ & + \int_0^l \frac{1}{EF} P^2 dx \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

Chuyển động thực của hệ sẽ rất gần với chuyển động tự do nếu lượng cưỡng bức cực tiêu hay $\delta Z = 0$.

Hệ cho khác hệ số sánh ở chỗ có liên kết ngầm ở hai đầu từ đó ta có các điều kiện ràng buộc

$$y_{1(x=0)} = 0 \rightarrow g_1 = a_1 + d_1 = 0$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \rightarrow g_2 = b_1 k + c_1$$

$$y_1|_{x=l_1} - y_0 = 0 \rightarrow g_3 = a_1 \cos[kl_1] + b_1 \sin[kl_1] + c_1 l_1 + d_1 - a_2 - y_0 = 0$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} \Big|_{x=l_1} = \frac{\partial y_2}{\partial x} \Big|_{(x=0)} \rightarrow g_4 = (-a_1 k) \sin(kl_1) + (b_1 k) \cos(kl_1) + c_1 + b_2 k - c_2 = 0$$

$$y_2|_{x=(l-l_1)} = 0 \rightarrow g_5 = a_2 \cos[k(l-l_1)] + b_2 \sin[k(l-l_1)] + c_2(l-l_1) + d_2 = 0$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial x} \Big|_{x=(l-l_1)} \rightarrow g_6 = (-a_2 k) \sin[k(l-l_1)] + (b_2 k) \cos[k(l-l_1)] + c_2 = 0$$

$$y_2|_{x=0} = 0 \rightarrow g_7 = a_2 + d_2 - y_0 = 0 \tag{3.47}$$

Các điều kiện ràng buộc này cũng chính là điều kiện ràng buộc của (3.46). Ta đưa bài toán tìm cực trị của (3.46) có 7 điều kiện ràng buộc về bài toán cực trị không có ràng buộc bằng cách đưa vào nhân tử Lagrange như sau :

$$\left. \begin{aligned} Z &= Z_1 + Z_2 + Z_3 = \\ &\left. \begin{aligned} &\int_0^{l_1} \frac{1}{EJ_x} \left(-EJ \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1} - P(y_1 - y_0) + EJ \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} \Big|_{x=l_1} \right)^2 dx + \\ &+ \int_{l_1}^l \frac{1}{EJ_x} \left(-EJ \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2} - P(y_2 - y_0) + EJ \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} \Big|_{x=0} \right)^2 dx \\ &+ \int_0^l \frac{1}{EF} P^2 dx \end{aligned} \right\} \\ Z &= Z_1 + Z_2 + Z_3 = \\ &\left. \begin{aligned} &\int_0^{l_1} \frac{1}{EJ_x} \left(-EJ \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1} - P(y_1 - y_0) + EJ \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} \Big|_{x=l_1} \right)^2 dx + \\ &+ \int_{l_1}^l \frac{1}{EJ_x} \left(-EJ \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2} - P(y_2 - y_0) + EJ \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} \Big|_{x=0} \right)^2 dx \\ &+ \int_0^l \frac{1}{EF} P^2 dx \end{aligned} \right\} \\ Z &= Z_1 + Z_2 + Z_3 = \\ &\left. \begin{aligned} &\int_0^{l_1} \frac{1}{EJ_x} \left(-EJ \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1} - P(y_1 - y_0) + EJ \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} \Big|_{x=l_1} \right)^2 dx + \\ &+ \int_{l_1}^{l-l_1} \frac{1}{EJ_x} \left(-EJ \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2} - P(y_2 - y_0) + EJ \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} \Big|_{x=0} \right)^2 dx + \int_0^l \frac{1}{EF} P^2 dx + \sum_{k=1}^7 \lambda_k g_k \end{aligned} \right\} \tag{3.48} \end{aligned}$$

Thay (3.44), (3.47) vào (3.48), nhận được biểu thức lượng cưỡng bức Z .

Cực tiểu hoá lượng phiếm hàm lượng cưỡng bức Z , ta có hệ phương trình:

$$\frac{\partial z}{\partial a_i} = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial b_i} = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial c_i} = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial d_i} = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda_k} = 0 \quad (i=1 \div 2; k = 1 \div 7) \quad (3.49)$$

Giải hệ phương trình tuyến tính (3.49), xác định các hệ số chưa biết a_i, b_i, c_i, d_i và các nhân tử Lagrange λ_k .

Từ kết quả tính toán có được, cho $\lambda_7=0$. từ đó tìm ra lực tới hạn P_{th} của hệ.

$$\lambda_7=0 \rightarrow \text{ta nhận được phương trình sau: } \sin\left(\frac{1}{3}kl\right) = 0$$

Giải phương trình trên ta được:

$$\sin\left(\frac{1}{3}kl\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{kl}{3} = \pi \Leftrightarrow kl = 2\pi, \quad 3\pi, \quad 4\pi,$$

$$kl = 2\pi \Leftrightarrow k = \frac{2\pi}{l} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{P}{EJ}} = \frac{2\pi}{l} \Rightarrow P_{1th} = \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 EJ = 39,4784 \frac{EJ}{l^2}$$

$$kl = 3\pi \Leftrightarrow k = \frac{3\pi}{l} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{P}{EJ}} = \frac{3\pi}{l} \Rightarrow P_{2th} = \left(\frac{3\pi}{l}\right)^2 EJ = 88,8264 \frac{EJ}{l^2}$$

$$kl = 4\pi \Leftrightarrow k = \frac{4\pi}{l} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{P}{EJ}} = \frac{4\pi}{l} \Rightarrow P_{3th} = \left(\frac{4\pi}{l}\right)^2 EJ = 157,9137 \frac{EJ}{l^2}$$

Bảng 6. So sánh kết quả tính theo phương pháp NLCT Gauss với kết quả chính xác

Thứ tự	P_{th} (Theo Gauss)	P_{th} (Chính xác)	Sai số(%)
1	39.4784	39.4784	0
2	88.8264	88.8264	0
3	157.9137	157.9137	0

Nhận xét: Khi dùng đường đàn hồi có dạng lượng giác theo hàm của Timoshenko và dùng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss để giải ta nhận được kết quả hoàn toàn chính xác.

KẾT LUẬN VÀ HƯỚNG NGHIÊN CỨU TIẾP THEO

1. Kết luận:

1) Tác giả luận văn đã áp dụng được phương pháp nguyên lý cực trị Gauss vào việc giải bài toán ổn định của thanh thẳng đàn hồi chịu uốn dọc, đã giải quyết được vấn đề quan trọng của bài toán ổn định là tìm lực tới hạn.

2) Tác giả đã xây dựng được quy trình xác định lực tới hạn theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss cho thanh thẳng đàn hồi tuyến tính trong cả hai trường hợp (đường đàn hồi là đa thức và đường đàn hồi là hàm lượng giác). Điều này cho thấy khả năng sử dụng các phương pháp số để giải quyết các bài toán cơ học kết cấu phức tạp.

3) Bằng việc tìm hiểu và áp dụng tính toán cho các bài toán cụ thể như thanh, có các điều kiện biên khác nhau, tác giả đã chứng tỏ được sự đúng đắn và hiệu quả của phương pháp này. Các kết quả nhận được phù hợp với những kết quả đã có khi giải bằng các phương pháp khác.

2. Hướng nghiên cứu tiếp theo:

1) Giải bài toán ổn định theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss cho các kết cấu phức tạp hơn.

2) Dùng thuật toán kích chuyển vị y_0 tại một điểm bất kỳ nào đó trên thanh đưa về bài toán tìm dạng biến dạng thông thường, xem lực p như lực đã biết.

Kết quả của bài toán này cho ta biểu thức của λ . Giải phương trình ($\lambda=0$) theo p , sẽ nhận được các tải trọng tới hạn. Đây chính là phương trình đặc tính để xác định các tải trọng tới hạn khi nghiên cứu ổn định của hệ tấm, vỏ.

DANH MỤC TÀI LIỆU THAM KHẢO

I. TIẾNG VIỆT

- [1] Huỳnh Huy Cường (2005), *Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss*, Tập chí Khoa học và kỹ thuật, IV/ Tr. 112 ÷ 118.
- [2] Nguyễn Văn Liên, Nguyễn Phương Thuận, Sinh Tráng Bằng (2003), *Giáo trình Sơ bộ về lý thuyết*, Nhà xuất bản x©y dựng, tập 1, phần 1 chọn lọc 3, 330 trang.
- [3] Nguyễn Phương Thuận (2002), *Nghiên cứu trình độ tối ưu của các biến dạng thêm nhiều lớp chấu thép trong các cấu kiện chịu tải trọng trục*, Luận văn tiến sĩ kỹ thuật.
- [4] Văn Ngọc Lưu (2002), *Nghiên cứu trình độ tối ưu của các biến dạng của tấm sandwich chấu thép trong các cấu kiện chịu tải trọng trục*, Luận văn tiến sĩ kỹ thuật.
- [5] Trần Hữu Hùng (2006), *Nghiên cứu bài toán tối ưu của các vấn đề liên quan đến các công trình xây dựng*, Luận văn tiến sĩ kỹ thuật.
- [6] Phạm Văn Trung (2006), *Phương pháp tối ưu hóa trong kỹ thuật*, Nhà xuất bản Khoa học và kỹ thuật.
- [7] Võ Hoàng Hiệp (2007), *Nghiên cứu trình độ tối ưu của các biến dạng của dầm nhiều lớp chấu thép trong các cấu kiện chịu tải trọng trục*, Luận văn tiến sĩ kỹ thuật, Hồ Chí Minh.
- [8] Nguyễn Văn Sĩ (2001), *Cơ học vật liệu*, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật Quốc gia Hồ Chí Minh, 337 trang.
- [9] Nguyễn Văn Sĩ, Trần Kim Chi, Nguyễn Dòng (2005), *Những vấn đề về lý thuyết và thực nghiệm của các cấu kiện chịu tải trọng trục*. NXB Khoa học và Kỹ thuật Quốc gia Hồ Chí Minh.
- [10] Lòu Thị Trâm, Sĩ Văn Bình (2006), *Giáo trình và bài tập về các vấn đề liên quan đến các công trình xây dựng*, Nhà xuất bản Khoa học và kỹ thuật.
- [11] Võ Hoàng Hiệp (2008), *Tính toán các cấu kiện chịu tải trọng trục*, Tập chí x©y dựng số 7.

- [12] Sọpn V"n DuÈn, Nguy"n Ph--ng Thụnh (2007), *Ph--ng ph,p mii tÝnh to,n æn ®Ènh c"nha thanh*, T¹p chÝ X©y dùng sè 12 (Tr41-Tr44).
- [13] Sọpn V"n DuÈn (2007), *Ph--ng ph,p nguy^an lý Cùc trÞ Gauss ®èi víi c,c búi to,n æn ®Ènh c«ng tr×nh*, LuÈn v"n th¹c sũ kü thuÈt.
- [14] Sọpn V"n DuÈn (2008), *Ph--ng ph,p mii tÝnh to,n æn ®Ènh c"nha khung*, T¹p chÝ X©y dùng sè 01 (Tr35-Tr37).
- [15] Sọpn V"n DuÈn (2008), *Nghi^an cøu æn ®Ènh uèn d"ac c"nha thanh c"nha xĐt biÕn d'ng tr-ít*, T¹p chÝ X©y dùng sè 12 (Tr33-Tr37).
- [16] Sọpn V"n DuÈn (2009), *Ph--ng ph,p nghi^an cøu æn ®Ènh tæng thó c"nha dụn*, T¹p chÝ X©y dùng sè 03 (Tr86-Tr89).
- [17] Sọpn V"n DuÈn (2010), *Ph--ng ph,p phÇn tó h÷u h¹n nghi^an cøu æn ®Ènh uèn d"ac c"nha thanh*, T¹p chÝ kÕt cÊu vậ C«ng nghö x©y dùng, sè 05, Qóy IV(Tr30-Tr36).
- [18] Sọpn V"n DuÈn (2011), *Nghi^an cøu æn ®Ènh ®ụn hải c"nha thanh vậ hõ thanh*, LuÈn ,n TiÕn sũ kü thuÈt.
- [19] Sọpn V"n DuÈn (2012), *Ph--ng ph,p mii tÝnh to,n d©y mòm*, T¹p chÝ kÕt cÊu vậ c«ng nghö X©y dùng sè 09, Qóy II (Tr56-Tr61).
- [20] Sọpn V"n DuÈn (2014), *Ph--ng ph,p chuyÓn vÞ c-ìng bợc gi¶i búi to,n trÞ ri^ang vậ vĐc t- ri^ang*, T¹p chÝ X©y dùng sè 11 (Tr82-Tr84).
- [21] Sọpn V"n DuÈn (2015), *Ph--ng ph,p mii nghi^an cøu æn ®Ènh ®éng lúc h"ac c"nha thanh*, T¹p chÝ X©y dùng sè 01 (Tr86-Tr88).
- [22] Sọpn V"n DuÈn (2015), *Búi to,n c- h"ac kÕt cÊu d-ii d'ng tæng qu,t*, T¹p chÝ X©y dùng sè 02 (Tr59-Tr61).

[23] Sopen Văn DuÈn (2015), Ph--ng ph,p so s,nh nghi^an cøu néi lúc vụ chuyón vP cña hõ dÇm, T¹p chÝ X©y dùng sè 11 (Tr56-Tr58).

[24] Sopen Văn DuÈn (2015), Týnh to,n kÕt cÊu khung chĐu uèn b»ng ph--ng ph,p so s,nh, T¹p chÝ X©y dùng sè 12 (Tr62-Tr64).

[25] TrÇn ThĐ Kim Huõ (2005), *Ph--ng ph,p nguy^an lý Cùc trĐ Gauss ®èi víi c,c búi to,n c- hãc kÕt cÊu*, LuÈn v"n th¹c sũ kü thuÈt.

[26] NguyÔn ThĐ Li^an (2006), *Ph--ng ph,p nguy^an lý Cùc trĐ Gauss ®èi víi c,c búi to,n ®éng lúc hãc c«ng tr×nh*, LuÈn v"n th¹c sũ kü thuÈt.

[27] Vò Thanh Thñy (2009), *X©y dùng búi to,n dÇm khi xĐt ®Çy ®ñ hai thụng phÇn néi lúc momen vụ lúc c³t*. T¹p chÝ X©y dùng sè 4.

[28] Vò Thanh Thñy (2009), *Dao ®éng tù do cña dÇm khi xĐt ¶nh h-éng cña lúc c³t*. T¹p chÝ X©y dùng, sè 7.

[29] Timoshenko C.P, Voinãpki- Krige X, (1971), *TÊm vụ Vá*. Ng-êi dĐch, Ph¹m Hãng Giang, Vò Thụng H¶i, Sopen H÷u Quang, Nxb Khoa hãc vụ kü thuÈt, Hù Néi.

II. TIÕNG PH,P

[30] Robert L'Hermite (1974), *Flambage et Stabilité - Le flambage Élastique des piéces droites*, Édition Eyrolles, Paris.

III. TIÕNG ANH

[31] Stephen P.Timoshenko-Jame M.Gere (1961), *Theory of elastic stability*, McGraw-Hill Book Company, Inc, New york - Toronto - London, 541 Tr.

- [32] William T. Thomson (1998), *Theory of Vibration with Applications* (T, i b¶n l¶n thø 5). Stanley Thornes (Publishers) Ltd, 546 trang.
- [33] Klaus - Jurgen Bathe (1996), *Finite Element procedures*. Part one, Prentice - Hall International, Inc, 484 trang.
- [34] Klaus - Jurgen Bathe (1996), *Finite Element procedures*. Part two, Prentice - Hall International, Inc, 553 trang.
- [35] Ray W. Clough, Joseph Penzien (1993), *Dynamics of Structures* (T, i b¶n l¶n thø 2), McGraw-Hill Book Company, Inc, 738 trang.
- [36] O.C. Zienkiewicz-R.L. Taylor (1991), *The finite element method* (four edition) Volume 2, McGraw-Hill Book Company, Inc, 807 trang.
- [37] G. Korn-T. Korn (1961), *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill, New York (B¶n d¶ch tiÕng Nga, I. Bramovich chñ bi^an, Nhự xuÊt b¶n Nauka-Moscow, 1964).
- [38] Stephen P. Timoshenko-J. Goodier (1970), *Theory of elasticity*, McGraw-Hill, New York (B¶n d¶ch tiÕng Nga, G. Shapiro chñ bi^an, Nhự xuÊt b¶n Nauka-Moscow, 1979), 560 trang.
- [39] D.R.J. Owen, E. Hinton (1986), *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*, Pineridge Press Lt.
- [40] Lars Olovsson, Kjell Simonsson, Mattias Unosson (2006), *Shear locking reduction in eight-node tri-linear solid finite elements*, J. 'Computers @ Structures', 84, trg 476-484.

- [41] C.A.Brebbia, J.C.F.Telles, L.C.Wrobel (1984), *Boundary Element Techniques. Theory and Applications in Engineering*. Nxb Springer - Verlag. (Bản dịch tiếng Nga, 1987).
- [42] Chopra Anil K (1995). *Dynamics of structures*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New - Jersey 07632.
- [43] Wilson Edward L. Professor Emeritus of structural Engineering University of California at Berkeley (2002). *Three - Dimensional Static and Dynamic Analysis of structures*, Inc. Berkeley, California, USA. Third edition, Reprint January.
- [44] Wilson, E. L., R. L. Taylor, W. P. Doherty and J. Ghaboussi (1971). "Incompatible Displacement Models", Proceedings, ORN Symposium on "Numerical and Computer Method in Structural Mechanics". University of Illinois, Urbana. September. Academic Press.
- [45] Strang, G (1972). "Variational Crimes in the Finite Element Method" in "The Mathematical Foundations of the Finite Element Method". P.689 -710 (ed. A.K. Aziz). Academic Press.
- [46] Irons, B. M. and O. C. Zienkiewicz (1968). "The isoparametric Finite Element System - A New Concept in Finite Element Analysis", Proc. Conf. "Recent Advances in Stress Analysis". Royal Aeronautical Society. London.
- [47] Kolousek Vladimir, DSC Professor, Technical University, Pargue (1973). *Dynamics in engineering structures*. Butter worths London.
- [48] Felippa Carlos A (2004). *Introduction of finite element methods*. Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures University

of Colorado Boulder, Colorado 80309-0429, USA, Last updated Fall.

[49] Wang C.M, Reddy J.N, Lee K.H.(2000), *Shear deformable beams and plates - Relationships with Classical Solutions*. ELSEVIER, Amsterdam - Lausanne- New York - Oxford -Shannon - Singapore - Tokyo.

[50] Barbero Ever J, Department of Mechanics & Aerospace Engineering, West Virginia University, USA (1999), *Introduction to Composite Materials Design*. Taylor and Francis.

[51] Decolon C (2002). *Analysis of Composite Structures*. Hermes Penton, Ltd, UK.

[52] Fu-le Li, ZHI-zhong Sun, Corresponding author, Department of Mathematics, Shoutheast University, Nanjing 210096, PR China (2007). *A finite difference scheme for solving the Timoshenko beam equations with boundary feedback*. Journal of Computational and applied Mathematics 200, 606 - 627, Elsevier press. Available online at www.sciencedirect.com.

[53] Khaji N., Corresponding author, Shafiei M., Civil Engineering Department Tarbiat Modares University, P. O. Box 14155-4838, Tehran, Iran ((2009)). *Closed - form solutions for crack detection problem of Timoshenko beams with various boundary conditions*. International Journal of Mechanical Sciences 51, 667-681. Contents lists available at Science Direct journal homepage: www.elsevier.com/locate/ijmecsci.

[54] Antes H. Institute of Applied Mechanics, University Carolo Wilhelmina, D-38023 Braunschweig, Germany (2003). *Fundamental solution and integralequations for*

Timoshenko beams. Computers and Structures 81, 383–396. Pergamon press. Available online at www.sciencedirect.com.

[55] Nguyen Dinh Kien (2007). *Free Vibration of prestress Timoshenko beams resting on elastic foundation*. Viet nam Journal of Mechanics, VAST, Vol.29, No. 1, pp. 1-12.

[56] Grawford F (1974). *Waves*, Berkeley physics course, volume 3. McGraw - hill Book Company.

Iv. TIÕNG nga

[57] М. А. Айзерман (1980), *Классическая механика, Москва*.

[58] Киселев В. А (1969). *Строительная механика - Специальный курс. Стройздат, Москва*.

[59] П. С. Полак (1959), *Вариационные принципы механики, Москва*.

[60] Киселев В. А (1980). *Строительная механика - Специальный курс. Стройздат, Москва*.

[61] А. А. Чирас (1989), *Строительная механика, Стройздат, Москва*.

[62] Г. КАУДЕРЕР (1961), *НЕЛИНЕЙНАЯ МЕХАНИКА, МОСКВА*.