

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**  
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC DÂN LẬP HẢI PHÒNG**  
-----

**NGUYỄN ĐÌNH HÙNG**

**NGHIÊN CỨU NỘI LỰC VÀ CHUYỂN VỊ CỦA**  
**HỆ DÀN TUYẾN TÍNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN**  
**LÝ CỰC TRỊ GAUSS**

**LUẬN VĂN THẠC SĨ KỸ THUẬT**

**CHUYÊN NGÀNH: KỸ THUẬT XÂY DỰNG CÔNG TRÌNH DÂN DỤNG &**  
**CÔNG NGHIỆP; MÃ SỐ: 60.58.02.08**

**NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:**

**TS. PHẠM VĂN ĐẠT**

**HẢI PHÒNG, THÁNG 11 NĂM 2018**

## **LỜI CAM ĐOAN**

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các số liệu, kết quả trong luận văn là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

**Tác giả luận văn**

**Nguyễn Đình Hùng**

## LỜI CẢM ƠN

Tác giả luận văn xin trân trọng bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất đối với TS. Phạm Văn Đạt đã tận tình giúp đỡ và cho nhiều chỉ dẫn khoa học có giá trị cũng như thường xuyên động viên, tạo mọi điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu hoàn thành luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn các nhà khoa học, các chuyên gia trong và ngoài trường Đại học Dân lập Hải Phòng đã tạo điều kiện giúp đỡ, quan tâm góp ý cho bản luận văn được hoàn thiện hơn. Tôi xin trân trọng cảm ơn các cán bộ, giáo viên của Khoa xây dựng, Phòng đào tạo Đại học và Sau đại học - trường Đại học Dân lập Hải Phòng, và các đồng nghiệp đã tạo điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tác giả trong quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Cuối cùng tôi xin chân thành cảm ơn đồng nghiệp, đơn vị công tác đã giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và thực hiện Luận văn.”

Xin trân trọng cảm ơn!

*Hải Phòng, ngày      tháng      năm 2018*

**Tác giả**

**Nguyễn Đình Hùng**

## MỤC LỤC

Trang

LỜI CAM ĐOAN.....	i
MỞ ĐẦU.....	1
Chương 1: TỔNG QUAN VỀ PHÂN TÍCH KẾT CẤU DÀN.....	3
1.1. Một số phương pháp tính toán kết cấu dàn hiện nay thường sử dụng.....	3
1.1.1 Phương pháp tách nút.....	3
1.1.2 Phương pháp mặt cắt.....	3
1.1.3 Phương pháp mặt cắt phối hợp.....	4
1.1.4 Phương pháp họa đồ.....	4
1.1.5 Phương pháp lực.....	5
1.1.6 Phương pháp chuyển vị.....	6
1.1.7 Phương pháp phần tử hữu hạn.....	7
1.2 Mục tiêu nghiên cứu của đề tài.....	12
Chương 2: LÝ THUYẾT PHÂN TÍCH KẾT CẤU DÀN DỰA TRÊN PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN LÝ CỰC TRỊ GAUSS.....	13
2.1 Nguyên lý cực trị Gauss.....	13
2.1.1. Nguyên lý cực tiểu Gauss và bất đẳng thức Gauss.....	15
2.1.2. Phát biểu nguyên lý cực tiểu Gauss (1829) đối với cơ học chất điểm .	17
2.1.3. Biểu thức thường dùng của nguyên lý cực tiểu Gauss.....	17
2.2 Áp dụng nguyên lý cực trị Gauss trong việc giải các bài toán cơ học.....	19
2.2.1 Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss với cơ hệ chất điểm.....	19
2.2.2 Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss đối với cơ học công trình.....	19
2.3 Phân tích bài toán tuyến tính kết cấu dàn dựa theo nguyên lý cực trị Gauss .....	27
2.3.1 Phân tích tuyến tính kết cấu dàn với cách chọn ẩn số chính là các thành phần chuyển vị tại các nút dàn.....	29

2.3.1.1	Kết cấu dàn phẳng .....	29
2.3.1.2	Kết cấu dàn không gian .....	29
2.3.2	Phân tích tuyến tính kết cấu dàn với cách chọn ản số chính là các thành phần nội lực trong các thanh dàn.....	31
2.3.3	Phương pháp xác định các thành phần chuyển vị tại nút dàn và nội lực trong các thanh dàn đối với bài toán dàn tuyến tính .....	32
Chương 3: MỘT SỐ VÍ DỤ PHÂN TÍCH KẾT CẤU DÀN.....		35
3.1	Bài toán dàn vòm phẳng tĩnh định trong, siêu tĩnh ngoài .....	35
3.2	Bài toán dàn cầu không gian.....	38
3.3	Bài toán dàn vòm không gian một lớp.....	50
KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ.....		56
TÀI LIỆU THAM KHẢO .....		57
PHỤ LỤC .....		57

## MỞ ĐẦU

### Lý do lựa chọn đề tài

Kết cấu dàn là kết cấu có rất nhiều ưu điểm như: tiết kiệm vật liệu, cho vượt khẩu độ lớn, nhẹ, kinh tế và đặc biệt về phương diện kiến trúc có thể tạo được nhiều hình dáng khác nhau như: vòm cầu, vòm trụ, vòm yên ngựa v.v...mà hiện nay có rất nhiều công trình trên thế giới sử dụng các loại hình dáng này. Vì vậy, ngày nay kết cấu dàn được sử dụng rộng rãi trong các công trình cầu, các cột truyền tải điện, cột truyền thông, dàn khoan và làm mái che cho các công trình sân vận động, nhà thi đấu, cung thể thao, trung tâm thương mại, xưởng sửa chữa bảo dưỡng máy bay v.v...

Trước kia, khi tính toán phân tích nội lực cho kết cấu dàn thường được thực hiện tính toán bằng thủ công với các phương pháp đơn giản như: Phương pháp tách mắt, Phương pháp mặt cắt đơn giản, Phương pháp mặt cắt phối hợp, Phương pháp họa đồ - Giải đồ Maxwell-Cremona v.v... Hiện nay do sự phát triển của công nghệ tin học điện tử nên việc tính toán đơn giản và thuận tiện hơn rất nhiều nhờ các phần mềm phân tích tính toán ứng dụng được viết dựa theo phương pháp phần tử hữu hạn như phần mềm Sap, Etabs v.v..., đặc biệt các phần mềm này có thể phân tích tính toán với các kết cấu siêu tĩnh bậc cao. Tuy nhiên để làm phong phú thêm phương pháp phân tích kết cấu dàn, tác giả lựa chọn đề tài : **“Nghiên cứu nội lực và chuyển vị của hệ dàn theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss”**.

### Mục đích nghiên cứu

Dùng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss để nghiên cứu nội lực và chuyển vị của hệ dàn

### Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đề tài tập trung nghiên cứu phương pháp phân tích tuyến tính kết cấu dàn (dàn phẳng; dàn không gian) chịu tải trọng tĩnh

## **Phương pháp nghiên cứu**

Dựa trên phương pháp nguyên lý cực trị Gauss của GS TSKH Hà Huy Cương và kết hợp phần mềm Matlabs.

## **Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài**

Vấn đề các phương pháp phân tích kết cấu dàn đã được rất nhiều sách cơ học khác nhau trong nước cũng như nước ngoài giới thiệu. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài nghiên cứu là giới thiệu một cách tiếp cận khác để làm phong phú thêm các phương pháp giải trong bài toán kết cấu dàn.

# Chương 1

## TỔNG QUAN VỀ PHÂN TÍCH KẾT CẤU DÀN

### 1.1. Một số phương pháp tính toán kết cấu dàn hiện nay thường sử dụng

#### 1.1.1 Phương pháp tách nút

Phương pháp tách nút là trường hợp đặc biệt của phương pháp mặt cắt. Trong đó hệ lực cần khảo sát cân bằng là hệ lực đồng quy.

**Nội dung phương pháp:** Phương pháp tách nút là sự khảo sát sự cân bằng của từng nút được tách ra khỏi dàn.

Thứ tự áp dụng:

- Lần lượt tách từng nút ra khỏi dàn bằng những mặt cắt bao quanh nút.
- Thay thế tác dụng của các thanh bị cắt bằng lực dọc trong thanh đó, sau khi thay thế tại mỗi nút ta có một hệ lực đồng quy.
- Khảo sát sự cân bằng của từng nút chúng ta sẽ xây dựng nên được một hệ phương trình cân bằng các nút mà ẩn số của các hệ này là lực dọc trong các thanh dàn.
- Cuối cùng ta chỉ việc giải hệ sẽ xác định được lực dọc trong các thanh dàn.

**Phạm vi áp dụng phương pháp:** Phương pháp tách nút chỉ sử dụng tính toán các dàn tĩnh định còn dàn siêu tĩnh không áp dụng được.

#### 1.1.2 Phương pháp mặt cắt

**Nội dung phương pháp:** Phương pháp mặt cắt đơn giản được thực hiện bằng mặt cắt qua các thanh tìm nội lực (số lực chưa biết không lớn hơn số phương trình cân bằng được lập) và viết phương trình cân bằng cho từng phần của dàn.

Thứ tự áp dụng:

- Thực hiện mặt cắt qua thanh cần tìm nội lực và mặt cắt chia dàn ra làm hai phần độc lập.



- Thay thế tác dụng của các thanh bị cắt bằng các lực dọc tương ứng. Khi chưa biết lực dọc ta giả thiết lực dọc dương nghĩa là hướng ra ngoài mặt cắt đang xét.

- Lập phương trình cân bằng cho một phần dầm bị cắt (phần bên phải hoặc phần bên trái). Từ các phương trình cân bằng sẽ suy ra nội lực cần tìm. Nếu kết quả mang dấu dương thì chiều nội lực hướng theo chiều giả định, tức là kéo. Ngược lại nếu kết quả mang dấu âm thì chiều nội lực hướng ngược chiều giả định, tức là nén.

**Phạm vi áp dụng phương pháp:** Phương pháp mặt cắt đơn giản chỉ dùng tính toán cho dầm tĩnh.

### 1.1.3 Phương pháp mặt cắt phối hợp

#### **Nội dung phương pháp:**

Phương pháp mặt cắt phối hợp được áp dụng để tính dầm khi không dùng được mặt cắt đơn giản, nghĩa là khi tại một mặt cắt, số lực chưa biết lớn hơn ba. Mục đích chính của phương pháp này là tìm cách thiết lập một số phương trình cân bằng chỉ chứa một số lực chưa biết bằng số phương trình đó. Khi thiết lập một phương trình cân bằng trong mỗi mặt cắt nói chung ta chỉ có thể loại trừ được hai lực chưa biết.

Bởi vậy, khi chỉ có thể thực hiện mặt cắt qua bốn thanh chưa biết nội lực mới đủ điều kiện là cắt qua thanh cần tìm nội lực và chia dầm thành hai phần độc lập thì ta phải dùng hai mặt cắt phối hợp. Với hai mặt cắt thì ta có thể tìm được ngay hai nội lực theo hai phương trình. Muốn vậy:

- Hai mặt cắt cùng phải đi qua hai thanh cần tìm nội lực và mỗi mặt cắt chỉ có thể đi qua hai thanh khác chưa cần tìm nội lực.

- Trong mỗi mặt cắt, thiết lập một phương trình cân bằng sao cho các lực chưa cần tìm không tham gia.

**Phạm vi áp dụng phương pháp:** Phương pháp mặt cắt phối hợp chỉ dùng tính toán cho dầm tĩnh.

### 1.1.4 Phương pháp họa đồ

#### **Nội dung phương pháp:**

Phương pháp họa đồ hay (còn gọi phương pháp Giải đồ Maxwell – Cremona) là phương pháp vẽ để giải bài toán. Có thể dùng phương pháp này để giải nhiều bài toán khác nhau của cơ học và để xác định phản lực, nội lực cho hệ dàn tĩnh định. Cách giải bài toán được trình bày toàn bộ trên hình vẽ gọi là giải đồ Maxwell – Cremona.

Dựa vào điều kiện cần và đủ để hệ lực đồng quy được cân bằng là đa giác lực của hệ đồng quy này phải khép kín. Lần lượt áp dụng điều kiện này cho từng nút của dàn bị tách ra theo thứ tự sao cho tại mỗi nút của dàn chỉ có hai nội lực chưa biết trị số nhưng đã biết phương thì ta xác định được nội lực của tất cả các thanh dàn.

**Phạm vi áp dụng phương pháp:** Phương pháp họa đồ chỉ dùng tính toán cho dàn tĩnh.

### 1.1.5 Phương pháp lực

#### Nội dung phương pháp:

Phương pháp lực được áp dụng trong việc tính toán hệ dàn siêu tĩnh. Để tính toán hệ dàn siêu tĩnh, ta không tính trực tiếp trên hệ đó mà tính trên một hệ thay thế khác cho phép dễ dàng xác định nội lực. Hệ thay thế này suy ra từ hệ siêu tĩnh đã cho bằng cách loại bớt các liên kết thừa gọi là hệ cơ bản. Hệ cơ bản của phương pháp lực phải là hệ bất biến hình suy ra từ hệ siêu tĩnh đã cho bằng cách loại bỏ tất cả hay một số liên kết thừa. Nếu loại bỏ tất cả các liên kết thừa thì hệ cơ bản là tĩnh định còn nếu chỉ loại bỏ một số liên kết thừa thì hệ cơ bản là siêu tĩnh có bậc thấp hơn. Điều quan trọng là hệ cơ bản phải là bất biến hình và cho phép ta xác định nội lực của các thanh dễ dàng. Vì vậy, trong đại đa số trường hợp ta thường chọn hệ cơ bản là tĩnh định.

Để đảm bảo cho hệ cơ bản làm việc giống hệ siêu tĩnh đã cho cần bổ sung thêm các điều kiện. Trong hệ cơ bản đặt các lực  $X_1, X_2, \dots, X_n$  tương ứng với vị trí và phương của các liên kết bị loại bỏ. Những lực này liên kết giữ vai trò là ẩn. Thiết lập điều kiện chuyển vị trong hệ cơ bản tương ứng với vị trí và phương của các liên kết bị loại bỏ bằng không.

**Phạm vi áp dụng phương pháp:** Phương pháp lực thường áp dụng để giải các bài toán dàn siêu tĩnh.

### 1.1.6 Phương pháp chuyển vị

**Nội dung phương pháp:**

Phương pháp chuyển vị cũng là phương pháp dùng để xác định nội lực trong hệ dàn siêu động (Hệ siêu động là những hệ khi chịu chuyển vị cưỡng bức, nếu chỉ dùng các điều kiện động học không thôi thì chưa đủ để xác định tất cả các chuyển vị tại các nút hệ). Khác với phương pháp lực, trong phương pháp chuyển vị ta dùng tập hợp các biến dạng ở hai đầu thanh làm đại lượng cần tìm. Những đại lượng này sẽ tìm được nếu biết chuyển vị tại các nút của hệ. Như vậy theo phương pháp này ta chọn ẩn là chuyển vị của các nút của hệ. Chính vì lẽ đó mà phương pháp được gọi là phương pháp chuyển vị (còn gọi là phương pháp biến dạng). Sau khi xác định chuyển vị tại các nút, tức là chuyển vị tại đầu thanh ta sẽ xác định được nội lực.

Theo phương pháp chuyển vị, để tính hệ siêu động ta không tính trên hệ đó mà thực hiện tính toán trên hệ cơ bản đồng thời bổ sung các điều kiện đảm bảo cho hệ cơ bản làm việc giống hệ thực.

Hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị là hệ suy ra từ hệ siêu động đã cho bằng cách đặt thêm vào hệ những liên kết phụ nhằm ngăn cản chuyển vị xoay và chuyển vị thẳng của các nút trong hệ (những liên kết phụ gồm hai loại: liên kết mômen và liên kết lực). Hệ cơ bản có thể là hệ xác định động hoặc hệ siêu động. Nếu số liên kết được đặt thêm vào hệ bằng số bậc siêu động thì hệ cơ bản là hệ xác định động. Nếu số liên kết đặt thêm vào hệ ít hơn số bậc siêu động ta được hệ cơ bản là hệ siêu động với bậc thấp hơn.

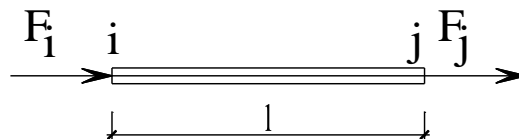
Nếu hệ cơ siêu động có  $n$  liên kết đặt thêm, lần lượt ký hiệu các chuyển vị  $Z_1, Z_2, \dots, Z_k, \dots, Z_n$  với  $Z_k$  là chuyển vị cưỡng bức tại liên kết thứ  $k$  đặt vào hệ. Các chuyển vị này giữ vai trò là ẩn số của phương pháp chuyển vị.

**Phạm vi áp dụng phương pháp:** Phương pháp chuyển vị thường áp dụng để giải các bài toán dàn siêu động.

### 1.1.7 Phương pháp phần tử hữu hạn

Phương pháp phần tử hữu hạn là phương pháp rời rạc hóa kết cấu công trình thành một số hữu hạn các phần tử. Các phần tử này được nối với nhau tại các điểm định trước thường tại đỉnh phần tử (thậm trí tại các điểm trên biên phần tử) gọi là nút. Như vậy việc tính toán kết cấu công trình được đưa về tính toán trên các phần tử của kết cấu sau đó kết nối các phần tử này lại với nhau ta được lời giải của một kết cấu công trình hoàn chỉnh. Dưới đây tác giả giới thiệu cách xây dựng cách giải bài toán dần theo phương pháp phần tử hữu hạn [16].

#### Xây dựng phương trình cân bằng cho phần tử



Hình 1.8 Phần tử  $ij$  trong hệ trục tọa độ riêng

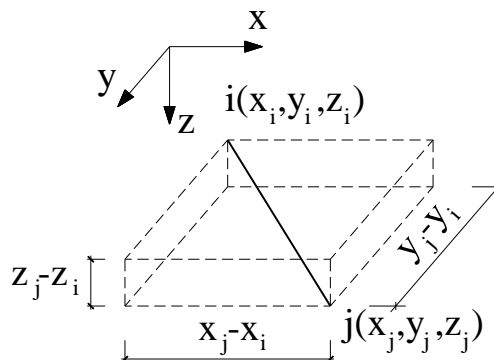
Phương trình cân bằng của phần tử chịu kéo nén đúng tâm (hình 1.8):

$$\begin{bmatrix} F_{ij} \\ F_{ji} \end{bmatrix} = \frac{EF}{l_{ij}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{bmatrix} \quad (1.1a)$$

$$\text{hay: } [\bar{F}] = [\bar{k}][\bar{\delta}] \quad (1.1b)$$

trong đó:  $[\bar{k}] = \frac{EF}{l_{ij}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ : là độ cứng của phần tử trong hệ trục tọa độ riêng.

Bây giờ trong trường hợp tổng quát hệ trục tọa độ chung không trùng với hệ trục tọa độ riêng. Xét phần tử thanh  $ij$  (hình 1.9) có tọa độ các nút là  $i(x_i, y_i, z_i), j(x_j, y_j, z_j)$ .



### Hình 1.9 Phần tử $ij$ trong hệ trục tọa độ chung

Chiều dài của phần tử là:

$$l_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (1.2)$$

Các cosin chỉ phương của phần tử:

$$\begin{cases} l = \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} \\ m = \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} \\ n = \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} \end{cases} \quad (1.3)$$

Giả sử  $F_{ij}^{(x)}$ ,  $F_{ji}^{(x)}$  có phương dọc thành thì:

$$\begin{bmatrix} F_{ij}^{(x)} & F_{ij}^{(y)} & F_{ij}^{(z)} & F_{ji}^{(x)} & F_{ji}^{(y)} & F_{ji}^{(z)} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & m & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & m & n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F_{ij} \\ F_{ji} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

$$\text{hay:} \quad \{F\}_{ij} = [T]\{\bar{F}\} \quad (1.5)$$

Trong đó:  $[T]$  là ma trận chuyển trục.

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & m & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & m & n \end{bmatrix}^T \quad (1.6)$$

Tương tự ta cũng có:

$$\{\delta\}_{ij} = [T]\{\bar{\delta}\} \text{ hay } \{\bar{\delta}\} = [T]^T \{\delta\}_{ij} \quad (1.7)$$

Thay (1.7) vào (1.1b) được:

$$\{\bar{F}\} = [\bar{k}][T]^T \{\delta\}_{ij} \quad (1.8)$$

Thay (1.8) vào (1.5) được:

$$\{F\}_{ij} = [T][\bar{k}][T]^T \{\delta\}_{ij} \text{ hay } \{F\}_{ij} = [k]_{ij} \{\delta\}_{ij} \quad (1.9)$$

Trong đó:

$$[k] = [T][\bar{k}][T]^T = \frac{EF}{l_{ij}} \begin{bmatrix} l^2 & & & & & \\ lm & m^2 & & & & đx \\ ln & mn & n^2 & & & \\ -l^2 & -ml & -nl & l^2 & & \\ -lm & -m^2 & -nm & lm & m^2 & \\ -ln & -mn & -n^2 & ln & mn & n^2 \end{bmatrix} \quad (1.10a)$$

Ma trận  $[k]$  là ma trận bậc  $6 \times 6$  có thể phân thành gồm 4 ma trận  $3 \times 3$  như sau:

$$[k] = \begin{bmatrix} [k]_{ii} & [k]_{ij} \\ [k]_{ji} & [k]_{jj} \end{bmatrix} \quad (1.10b)$$

$$\text{trong đó: } [k]_{ii} = [k]_{jj} = -[k]_{ij} = -[k]_{ji} = \begin{bmatrix} l^2 & & đx \\ lm & m^2 & \\ ln & mn & n^2 \end{bmatrix} \quad (1.10c)$$

Như vậy (1.9) có thể được viết lại như sau:

$$\begin{bmatrix} \{F_{ij}\} \\ \{F_{ji}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [k]_{ii} & [k]_{ij} \\ [k]_{ji} & [k]_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\delta_{ij}\} \\ \{\delta_{ji}\} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

trong đó:

$\{F_{ij}\}$ : véc tơ tải trọng tác dụng lên nút  $i$  theo phương  $ij$  và  $\{F_{ij}\} = [F_{ij}^x, F_{ij}^y, F_{ij}^z]$

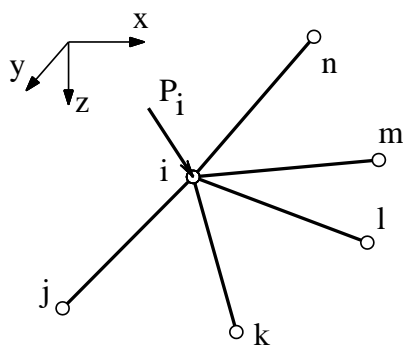
$\{F_{ji}\}$ : véc tơ tải trọng tác dụng lên nút  $j$  theo phương  $ij$  và  $\{F_{ji}\} = [F_{ji}^x, F_{ji}^y, F_{ji}^z]$

$\{\delta_i\}$ : véc tơ chuyển vị nút  $i$  theo phương  $ij$  và  $\{\delta_i\} = [u_i, v_i, w_i]$

$\{\delta_j\}$ : véc tơ chuyển vị nút  $i$  theo phương  $ij$  và  $\{\delta_j\} = [u_j, v_j, w_j]$

### **Xây dựng phương trình cân bằng cho toàn bộ kết cấu dàn**

Phần trên đã xây dựng phương trình cân bằng cho một phần tử, trong mục này sẽ xây dựng phương trình cân bằng cho toàn bộ kết cấu dàn. Nếu xét tại nút  $i$  của dàn có các thanh quy tụ là  $ij, ik, il, im, \dots, in$  (hình 1.10).



**Hình 1.10 Cân bằng nút i**

Như vậy điều kiện liên tục là chuyển vị tại nút i của tất cả các thanh quy tụ tại nút i phải bằng nhau:

$$\{\delta_i^j\} = \{\delta_i^k\} = \{\delta_i^l\} = \{\delta_i^m\} = \dots = \{\delta_i^n\} = \{\delta_i\} \quad (1.12)$$

trong đó:

$\{\delta_i^j\}; \{\delta_i^k\}; \{\delta_i^l\}; \{\delta_i^m\}; \dots; \{\delta_i^n\}$  : lần lượt là các véc tơ chuyển vị tại nút i của các thanh ij, ik, il, im, ..., in ;

$\{\delta_i\}$  : véc tơ chuyển vị tại nút i .

Ngoài ra tại nút i còn cần phải đảm bảo điều kiện cân bằng lực:

$$\{\mathbf{P}_i\} = \{\mathbf{F}_{ij}\} + \{\mathbf{F}_{ik}\} + \{\mathbf{F}_{il}\} + \{\mathbf{F}_{im}\} + \dots + \{\mathbf{F}_{in}\} \quad (1.13)$$

trong đó:

$\{\mathbf{P}_i\}$  : là véc tơ tải trọng tác dụng tại nút i  $\{\mathbf{P}_i\} = [\mathbf{P}_{ix} \quad \mathbf{P}_{iy} \quad \mathbf{P}_{iz}]^T$  ;

$\mathbf{P}_{ix}, \mathbf{P}_{iy}, \mathbf{P}_{iz}$  : là các thành phần tải trọng theo phương x, y, z.

Theo (1.11) ta có phương trình cân bằng cho tất cả các thanh tại nút i :

$$\text{Thanh } ij: \{\mathbf{F}_{ij}\} = [\mathbf{k}_{ij}^j] \{\delta_i\} + [\mathbf{k}_{ij}^i] \{\delta_j\}$$

$$\text{Thanh } ik: \{\mathbf{F}_{ik}\} = [\mathbf{k}_{ik}^k] \{\delta_i\} + [\mathbf{k}_{ik}^i] \{\delta_k\}$$

⋮

$$\text{Thanh } in: \{\mathbf{F}_{in}\} = [\mathbf{k}_{in}^n] \{\delta_i\} + [\mathbf{k}_{in}^i] \{\delta_n\}$$

thay các lực trên vào công thức (1.13) được:

$$\{\mathbf{P}_i\} = [\mathbf{k}_{ij}^i] \{\delta_j\} + [\mathbf{k}_{ik}^i] \{\delta_k\} + [\mathbf{k}_{il}^i] \{\delta_l\} + [\mathbf{k}_{im}^i] \{\delta_m\} + \dots + [\mathbf{k}_{in}^i] \{\delta_n\} \quad (1.14)$$

trong đó:  $k_{ii} = k_{ii}^j + k_{ii}^k + k_{ii}^l + k_{ii}^m + \dots + k_{ii}^n$

Biểu thức (1.14) là điều kiện viết cho cân bằng tại nút  $i$ . Nếu dàn có  $n$  nút thì ta có được  $3n$  phương trình và có thể viết như sau:

$$\begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{12}] & \dots & [k_{1i}] & \dots & [k_{1n}] \\ & [k_{22}] & \dots & [k_{2i}] & \dots & [k_{2n}] \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & [k_{ii}] & \dots & [k_{in}] \\ \text{đx} & & & & & \vdots \\ & & & & & [k_{nn}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \vdots \\ \{\delta_i\} \\ \vdots \\ \{\delta_n\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{P_1\} \\ \{P_2\} \\ \vdots \\ \{P_i\} \\ \vdots \\ \{P_n\} \end{bmatrix} \quad (1.15a)$$

hay:

$$[K]\{\delta\} = \{P\} \quad (1.15b)$$

trong đó:

$[K]$  : là ma trận độ cứng của toàn bộ kết cấu dàn;

$\{\delta\} = [\{\delta_1\}\{\delta_2\}\dots\{\delta_i\}\dots\{\delta_n\}]^T = [u_1 v_1 w_1 u_2 v_2 w_2 \dots u_i v_i w_i \dots u_n v_n w_n]^T$  : là véc tơ chuyển vị tại các nút dàn.

### Xử lý điều kiện biên

*Biên cố định:* Tại những biên cố định thì sẽ có các bậc tự do bằng không. Trong phương trình cân bằng tại những bậc tự do nào bằng không thì trong ma trận  $[K]$ ,  $\{\delta\}$  và  $\{P\}$  bỏ đi những hàng và cột tương ứng với bậc tự do đó.

*Biên chuyển vị cưỡng bức:* Giả sử tại nút biên bậc tự do  $m$  có chuyển vị cưỡng bức  $\delta_m = a$  thì trong ma trận độ cứng tổng thể  $[K]$  và vectơ tải trọng nút tổng thể  $\{P\}$  ta gán một số  $A$  có độ lớn bằng vô cùng lần lượt vào các vị trí  $k_{mm}$  thay bằng  $(k_{mm} + A)$ ,  $P_m$  thay bằng  $(k_{mm} + A)a$ .

Nếu sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn để tính toán cho kết cấu dàn tuyến tính thì theo phương trình (1.15) các  $K_{ij}$  là các hằng số do đó dễ dàng xác định được các thành phần chuyển vị trong các nút.

**Phạm vi áp dụng phương pháp:** Phương pháp phần tử hữu hạn áp dụng để giải các bài toán dàn tĩnh định cũng như dàn siêu tĩnh.



## 1.2 Mục tiêu nghiên cứu của đề tài

Qua các phân tích ở các phần trên của đề tài, nhằm làm phong phú cho các cách phân tích kết cấu dàn cũng như có một cách tiếp cận khác cho việc phân tích tuyến tính bài toán kết cấu dàn chịu tải trọng tĩnh tại các nút dàn mục tiêu nghiên cứu của đề tài như sau:

1) Dựa trên phương pháp nguyên lý cực trị Gauss xây dựng được phương pháp phân tích tuyến tính cho bài toán kết cấu dàn chịu tải trọng tĩnh tại các nút dàn theo hai cách tiếp cận: chọn các thành phần chuyển vị tại các nút dàn làm ẩn số; chọn các thành phần nội lực trong các thanh dàn làm ẩn số.

2) Áp dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss để phân tích tuyến tính một số ví dụ kết cấu dàn chịu tải trọng tĩnh tại các nút dàn. Các kết quả phân tích này được so sánh với các cách giải khác để thấy được độ tin cậy của phương pháp.

3) Ứng dụng phần mềm Matlab để tự động hóa phân tích tuyến tính kết cấu dàn chịu tải trọng tĩnh dựa trên phương pháp nguyên lý cực trị Gauss.

## Chương 2

# LÝ THUYẾT PHÂN TÍCH KẾT CẤU DÀN DỰA TRÊN PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN LÝ CỰC TRỊ GAUSS

Trong chương này của đề tài, tác giả sẽ trình bày Nguyên lý cực trị Gauss và việc áp dụng Nguyên lý cực trị Gauss trong việc giải các bài toán cơ học biến dạng. Cuối chương tác giả trình bày chi tiết cách áp dụng Nguyên lý cực trị Gauss trong việc phân tích nội lực, chuyển vị các bài toán tuyến tính kết cấu dàn chịu tải trọng tĩnh tại các nút dàn theo hai cách tiếp cận bài toán: Chọn ẩn số chính là các thành phần chuyển vị tại các nút dàn; Chọn ẩn số chính là các thành phần nội lực trong các thanh dàn.

### 2.1 Nguyên lý cực trị Gauss

#### 2.1.1. Nguyên lý cực tiểu Gauss và bất đẳng thức Gauss

Trước khi trình bày nguyên lý của mình, nhà toán học người Đức K.F.Gauss (1777 – 1855) đã đưa ra các nhận xét sau:

+ Tại sao ngay từ đầu lại không xét liên kết không giữ. Cho nên nguyên lý cực trị Gauss nhằm thỏa mãn điều kiện này, liên kết không giữ và xem liên kết giữ là trường hợp riêng.

+ Gauss viết tiếp: *“Nguyên lý D’Alembert đưa bài toán động lực học về bài toán tĩnh học, còn nguyên lý vận tốc ảo biến vấn đề tĩnh học thành vấn đề toán học thuần túy và mọi nguyên lý của cơ học hoặc nhiều hoặc ít đều có thể trực tiếp rút ra từ hai nguyên lý trên”*.

Nguyên lý cực tiểu Gauss được xây dựng đối với cơ hệ có liên kết không giữ (là cơ hệ cơ liên kết một chiều, điều kiện liên kết thường được biểu thị dưới dạng bất đẳng thức) và liên kết giữ là liên kết hai chiều (khi phản lực liên kết theo chiều này thì cũng có phản lực liên kết theo chiều ngược lại, điều kiện liên kết thường được biểu thị dưới dạng đẳng thức).

Đối với liên kết không giữ thì tổng công các lực tác dụng thực hiện trên các chuyển vị ảo là đại lượng không dương. Vì vậy điều kiện cần và đủ để hệ ở trạng thái cân bằng trong trường hợp liên kết không giữ là:

$$\sum (X_i \delta u_i + Y_i \delta v_i + Z_i \delta w_i) \leq 0 \quad (2.1)$$

trong đó:  $X_i, Y_i, Z_i$  là các lực trong hệ tọa độ vuông góc tác dụng lên chất điểm  $i$  và  $u_i, v_i, w_i$  là các chuyển vị tương ứng.

Biểu thức (2.1) do Fourier (1798), Gauss và Ostrogradsky (1834) độc lập đưa ra và tác giả [1] gọi là bất đẳng thức Fourier.

Từ nguyên lý công ảo có thể nhận được bất đẳng thức Fourier bằng cách xét phản lực liên kết:

$$\sum [(X_i \delta u_i + Y_i \delta v_i + Z_i \delta w_i) + (X_{ij} \delta u_j + Y_{ij} \delta v_j + Z_{ij} \delta w_j)] = 0 \quad (2.2)$$

trong đó:  $X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij}$  là các phản lực liên kết.

Từ biểu thức (2.2) ta có:

$$\sum (X_i \delta u_i + Y_i \delta v_i + Z_i \delta w_i) = -\sum (X_{ij} \delta u_j + Y_{ij} \delta v_j + Z_{ij} \delta w_j) \quad (2.3)$$

Trường hợp liên kết giữ thì công ảo của phản lực liên kết bằng không (định lý Lanczos [13, tr.87]), nên ta có:

$$\sum (X_i \delta u_i + Y_i \delta v_i + Z_i \delta w_i) = 0 \quad (2.4)$$

Trong trường hợp liên kết không giữ, biểu thức liên kết (hữu hạn hoặc vô hạn) là các bất đẳng thức, công ảo của các phản lực liên kết là các đại lượng dương cho nên ta có:

$$\sum (X_{ij} \delta u_j + Y_{ij} \delta v_j + Z_{ij} \delta w_j) \geq 0 \quad (2.5)$$

Cho nên để hệ cân bằng, công ảo của các lực tác dụng phải là đại lượng không dương, ta có bất đẳng thức Fourier - Gauss - Ostrogradsky (2.1) hay còn gọi là bất đẳng thức Gauss.

Như trình bày trên cho thấy rằng để có liên kết không giữ thì phải dùng bất đẳng thức Gauss (2.1), liên kết giữ là trường hợp riêng khi bất đẳng thức trở thành đẳng thức.

Bất đẳng thức Gauss, trong trường hợp dùng liên kết không giữ được gọi là nguyên lý chuyển vị ảo, không nên nhầm lẫn với nguyên lý công ảo, nguyên lý công khả dĩ hay nguyên lý chuyển vị khả dĩ.

### 2.1.2. Phát biểu nguyên lý cực tiểu Gauss (1829) đối với cơ học chất điểm

Nhà toán học người Đức K.F.Gauss năm 1829 đã đưa ra nguyên lý sau đây đối với các cơ hệ chất điểm: *“Chuyển động của hệ chất điểm có liên kết tùy ý chịu tác động bất kỳ ở mỗi thời điểm sẽ xảy ra phù hợp nhất một cách có thể với chuyển động của hệ đó khi hoàn toàn tự do, nghĩa là chuyển động xảy ra với lượng ràng buộc tối thiểu nếu như số đo lượng ràng buộc lấy bằng tổng các tích khối lượng chất điểm với bình phương độ lệch vị trí chất điểm so với vị trí khi chúng hoàn toàn tự do.”*

Gọi  $m_i$  là khối lượng chất điểm,  $A_i$  là vị trí của nó,  $B_i$  là vị trí sau thời đoạn vô cùng bé do tác động lực ngoài và vận tốc ở đầu thời điểm gây ra,  $C_i$  là vị trí có thể (ràng buộc bởi liên kết) thì lượng ràng buộc được viết như sau:

$$Z = \sum_i m_i (\overline{B_i C_i})^2 \rightarrow \min \quad (2.6)$$

Do hệ cần tính và hệ hoàn toàn tự do đều chịu lực giống nhau, nên trong biểu thức lượng cưỡng bức không xuất hiện lực tác dụng. Lượng ràng buộc có dạng bình phương tối thiểu là phương pháp toán do Gauss đưa ra.

### 2.1.3. Biểu thức thường dùng của nguyên lý cực tiểu Gauss

Trong tài liệu cơ học [13, tr.107] dùng lập luận sau để đưa ra biểu thức giải tích của nguyên lý cực tiểu Gauss.

Xét chất điểm  $m_i$  có liên kết tùy ý chịu tác dụng của lực  $F_i$ . Ở thời điểm  $t$  chất điểm có vị trí  $r_i$ , vận tốc  $\dot{r}_i$  và gia tốc  $\ddot{r}_i$ . Sau thời gian  $dt$  chất điểm có vị trí:

$$r_i + \dot{r}_i dt + \frac{1}{2} \ddot{r}_i dt^2 \quad (2.7)$$

(dựa trên khai triển triển theo chuỗi Taylor)

Giả sử tại thời điểm  $t$ , ta giải phóng liên kết nhưng vẫn giữ lực tác dụng thì vị trí chất điểm khi hoàn toàn tự do sau thời gian  $dt$  là:

$$\ddot{r}_i + \dot{r}_i dt + \frac{1}{2} \frac{F_{0i}}{m_i} dt^2 \quad (2.8)$$

Hiệu (2.7) và (2.8) cho ta độ lệch vị trí của chất điểm so với vị trí của nó hoàn toàn tự do.

$$\frac{1}{2} \ddot{r}_i dt^2 - \frac{1}{2} \frac{F_{0i}}{m_i} dt^2 = \frac{1}{2} \left( \ddot{r}_i - \frac{F_{0i}}{m_i} \right) dt^2 \quad (2.9)$$

Có thể xem  $dt$  là hằng thì lượng ràng buộc  $Z$  theo (2.9) được viết dưới dạng lực như sau:

$$Z_i = \frac{1}{4} m_i \left( \ddot{r}_i - \frac{F_{0i}}{m_i} \right)^2 dt^4 \quad (2.10)$$

Lượng ràng buộc cho toàn bộ hệ chất điểm:

$$Z = \frac{1}{4} \sum_i m_i \left( \frac{F_{0i}}{m_i} - \ddot{r}_i \right)^2 dt^4 \rightarrow \min \quad (2.11)$$

Vì  $dt^4$  là số bất kỳ nên (2.11) tương đương với:

$$Z = \sum_i m_i \left( \frac{F_{0i}}{m_i} - \ddot{r}_i \right)^2 \rightarrow \min \quad (2.12a)$$

$$\text{hay: } Z = \sum_i \frac{1}{m_i} (F_{0i} - m_i \ddot{r}_i)^2 = \sum_i \frac{1}{m_i} (F_{0i} - F_i)^2 \rightarrow \min \quad (2.12b)$$

Trong biểu thức (2.12)  $(F_{0i} - F_i)$  là lực liên kết hoặc lực cản chuyển động so với chuyển động của hệ tự do.

Nguyên lý Gauss (2.6) hoặc (2.12) có dạng của phương pháp bình phương tối thiểu là phương pháp cũng do Gauss đưa ra và được dùng rộng rãi trong toán học hiện đại, trong giải tích cũng như lời giải số. Có lẽ vì vậy nguyên lý Gauss thu hút sự chú ý của nhiều nhà khoa học, ví dụ, Hertz (năm 1894) dựa trên ý tưởng lượng ràng buộc đưa ra nguyên lý đường thẳng nhất (đường có độ cong nhỏ nhất) hoặc Prigogine (năm 1954) và Gyarmati (năm 1965) đã xây dựng được lượng ràng buộc của các quá trình không hồi phục trong nhiệt động lực học.

## 2.2 Áp dụng nguyên lý cực trị Gauss trong việc giải các bài toán cơ học

Nguyên lý cực trị Gauss được GS. TSKH. Hà Huy Cương phát triển nhằm mục đích xây dựng các phương trình cân bằng và các phương trình chuyển động của cơ hệ có liên kết tổng quát là liên kết không giữ xem liên kết giữ là trường hợp riêng.

Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss là phương pháp so sánh với nghĩa là tìm min của lượng cưỡng bức, giữa chuyển động của hệ cần tính với chính hệ đó khi hoàn toàn tự do (giải phóng liên kết) trên cơ sở bất đẳng thức Gauss (còn gọi là bất đẳng thức Fourier).

### 2.2.1 Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss với cơ hệ chất điểm

Mục đích trình bày sau đây nhằm chỉ ra rằng, phương pháp nguyên lý cực trị Gauss không chỉ dùng biến phân là gia tốc và còn dùng chuyển vị và vận tốc là đại lượng biến phân.

Xét hệ chất điểm có liên kết tùy ý ở một thời điểm bất kỳ nào đó có nghĩa là phải đưa lực quán tính  $f_i$  của hệ tại thời điểm nào đó tác dụng lên hệ. Đối với hệ hoàn toàn tự do lực quán tính  $f_{oi}$  của nó bằng với ngoại lực (chỉ số '0' ở chân ký tự chỉ rằng ký tự đó ở hệ so sánh, trường hợp này hoàn toàn tự do có cùng khối lượng và cùng chịu tác dụng lực ngoài giống như hệ có liên kết). Như vậy, các lực tác dụng lên hệ có liên kết gồm các lực  $f_i = m_i \ddot{r}_i$  và các lực  $f_{oi} = m_i \ddot{r}_{oi}$  (thay cho ngoại lực). Theo nguyên lý chuyển vị ảo đối với liên kết giữ (liên kết dưới dạng đẳng thức) và không giữ (liên kết dưới dạng bất đẳng thức) điều kiện cần và đủ để hệ ở trạng thái cân bằng là:

$$\delta Z = \sum_i (f_i - f_{oi}) \delta r_i \leq 0 \quad (2.13)$$

Để nhận được biểu thức (2.13) cần xem các chuyển vị  $r_i$  độc lập đối với lực tác dụng. Cho nên biểu thức (2.13) có thể viết:

$$Z = \sum_i (f_i - f_{oi}) r_i \rightarrow \min \quad (2.14)$$

Nếu như chuyển vị ảo  $r_i$  thỏa mãn các điều kiện liên kết đã cho của hệ cần tính thì ta có thể dùng vận tốc ảo  $\dot{r}_i$  làm đại lượng biến phân, nghĩa là:

$$\delta Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) \delta \dot{r}_i \leq 0 \quad (2.15)$$

hay: 
$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) \dot{r}_i \rightarrow \min \quad (2.16)$$

Trong biểu thức (2.15), (2.16) vận tốc của chất điểm là đại lượng biến phân.

Cuối cùng khi chuyển vị ảo  $r_i$  thỏa mãn các điều kiện liên kết đã cho của hệ cần tính thì ta có thể dùng gia tốc ảo  $\ddot{r}_i$  làm đại lượng biến phân, ta có:

$$\delta Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) \delta \ddot{r}_i \leq 0 \quad (2.17)$$

hay: 
$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) \ddot{r}_i \rightarrow \min \quad (2.18)$$

Ta biến đổi thuần túy về mặt toán học biểu thức (2.18):

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) \ddot{r}_i \rightarrow \min$$

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) (\ddot{r}_i - \ddot{r}_{0i}) \rightarrow \min$$

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) \left( \frac{f_i}{m_i} - \frac{f_{0i}}{m_i} \right) \rightarrow \min$$

$$Z = \sum_i \frac{1}{m_i} (f_i - f_{0i})^2 \rightarrow \min \quad (2.19)$$

$$Z = \sum_i m_i \left( \frac{f_i}{m_i} - \ddot{r}_{0i} \right)^2 \rightarrow \min \quad (2.20)$$

Hai biểu thức (2.19), (2.20) là hai biểu thức thường dùng của nguyên lý cực tiểu Gauss với đại lượng biến phân là gia tốc.

Các biểu thức (2.14), (2.16), (2.18) và (2.20) là tương đương và được gọi là lượng ràng buộc chuyển động của cơ hệ cần tính.

### 2.2.2 Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss đối với cơ học công trình

Như đã trình bày ở trên cho thấy phương pháp nguyên lý cực trị Gauss do GS. TSKH. Hà Huy Cương đưa ra là phương pháp sử dụng trực tiếp nguyên lý cực tiểu Gauss vào cơ hệ bằng cách:

- So sánh chuyển động của cơ hệ đang xét với chuyển động của nó khi hoàn toàn tự do. So sánh được hiểu theo nghĩa là tìm cực trị của lượng ràng buộc.

- Phương pháp nguyên lý chuyển vị ảo với bất đẳng thức Gauss đối với liên kết không giữ, xem liên kết giữ là trường hợp riêng.

Những nội dung trên là nội dung tổng quát của phương pháp nguyên lý cực trị Gauss.

Môn cơ học công trình nghiên cứu trạng thái ứng suất và trạng thái biến dạng của kết cấu thanh, tấm và vỏ v.v... là các kết cấu có một hoặc hai kích thước nhỏ hơn nhiều lần kích thước còn lại. Sau đây ta xét hai bài toán sau:

- Bài toán trên mặt cắt ngang của kết cấu chỉ có mômen M và lực cắt Q.

- Bài toán khi kết cấu chịu lực trên mặt cắt ngang của kết cấu có lực dọc, mômen M và lực cắt Q.

#### 2.2.2.1 Bài toán kết cấu khi chịu lực tác dụng thẳng góc với mặt trung bình

Trong trường hợp này để đơn giản những kết quả tính toán vẫn đảm bảo độ chính xác đủ dùng trong thực tế (kiểm tra bằng thực nghiệm) dựa trên giả thuyết của Kronecker sau đây:

+ Mặt trung bình của tấm không bị biến dạng do đó ứng suất tại các điểm nằm trên mặt trung bình bằng không và mặt phẳng vuông góc với mặt trung bình vẫn phẳng và vuông góc với mặt trung bình:

$$\varepsilon_{33} = 0 \quad (2.21)$$

+ Mặt phẳng trung bình chỉ có chuyển vị theo phương vuông góc với nó, còn các chuyển vị theo các phương khác là rất nhỏ nên có thể bỏ qua:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ v_0 = 0 \\ w \neq 0 \end{cases} \quad (2.22)$$



+ Ứng suất pháp  $\sigma_{33}$  theo phương vuông góc với mặt trung bình là rất nhỏ so với các ứng suất khác nên có thể bỏ qua trong tính toán.

### Các phương trình cân bằng

Tại điểm K nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục  $x_1$  của tấm có các ứng suất:  $\sigma_{11}; \sigma_{12}; \sigma_{13}$ .

Nội lực của tấm trên một đơn vị chiều dài của mặt cắt vuông góc với  $ox_1$ :

$$N_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} dx_3 ; \quad M_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} x_3 dx_3 ; \quad M_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} x_3 dx_3 \quad (2.23a)$$

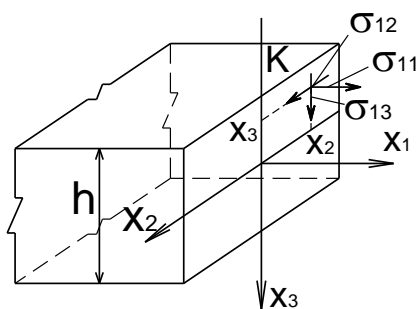
$$Q_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} dx_3 ; \quad S_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} dx_3 \quad (2.23b)$$

Nội lực của tấm trên một đơn vị chiều dài của mặt cắt vuông góc với  $ox_2$ :

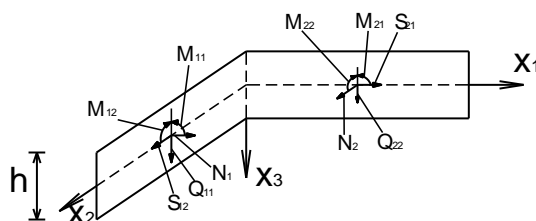
$$N_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} dx_3 ; \quad M_{21} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{21} x_3 dx_3 ; \quad M_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} x_3 dx_3 \quad (2.24a)$$

$$S_{21} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{21} dx_3 ; \quad Q_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23} dx_3 \quad (2.24b)$$

Trong trường hợp tấm cứng, chịu uốn do tải trọng ngang, ta chỉ xét các lực uốn xoắn:  $M_{11}; M_{22}; Q_{11}; Q_{22}; M_{12}; M_{21}$ .



Hình 2.1 Các ứng suất trong tấm



Hình 2.2 Các nội lực trong tấm

Xét cân bằng phân tố diện tích  $dx_1 dx_2$  trên mặt trung bình. Cạnh trái đi qua điểm  $M(x_1; x_2)$  có các ứng lực:  $Q_{11}; M_{11}; M_{12}$ . Cạnh phải đi qua điểm

$N(x_1 + dx_1; x_2)$  có các ứng lực:  $Q_{11}^* = Q_{11} + \frac{\partial Q_{11}}{\partial x_1} dx_1$ ;  $M_{11}^* = M_{11} + \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} dx_1$ ;

$$M_{12}^* = M_{12} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} dx_1.$$

Cạnh sau  $M(x_1; x_2)$  có các ứng lực  $Q_{22}; M_{22}; M_{21}$  cạnh trước đi qua điểm

$P(x_1; x_2 + dx_2)$  có các thành phần ứng lực:  $Q_{22}^* = Q_{22} + \frac{\partial Q_{22}}{\partial x_2} dx_2$ ;

$$M_{22}^* = M_{22} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} dx_2; M_{21}^* = M_{21} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} dx_2.$$

Phương trình cân bằng hình chiếu lên các phương:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_{x_3} = \frac{\partial Q_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_{22}}{\partial x_2} + p = 0 \\ \sum M_{x_2} = \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} = Q_{11} \\ \sum M_{x_1} = \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} = Q_{22} \end{array} \right. \quad (2.25)$$

### Các quan hệ về vật lý

Khi vật liệu làm việc trong giới hạn đàn hồi thì mối quan hệ giữa ứng suất và biến dạng tại một điểm bất kỳ trong kết cấu hoàn toàn tuân theo định luật Hooke, do đó ta có:

- Mối liên hệ giữa ứng suất và biến dạng:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_{11} + \mu\epsilon_{22}); \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_{22} + \mu\epsilon_{11}); \quad \sigma_{12} = \frac{E}{1+\mu} \epsilon_{12} \quad (2.26)$$

Thay (2.26) vào (2.23) và (2.25) sẽ xác định được nội lực trong tấm có dạng:

$$M_{11} = D.(\chi_{11} + \mu\chi_{22}); \quad M_{22} = D.(\chi_{22} + \mu\chi_{11});$$

$$M_{12} = (1-\mu)D.\chi_{12}; \quad Q_{11} = Gh\gamma_{11}; \quad Q_{22} = Gh\gamma_{22}.$$

### Xét bài toán biến dạng là bé (bài toán tuyến tính)

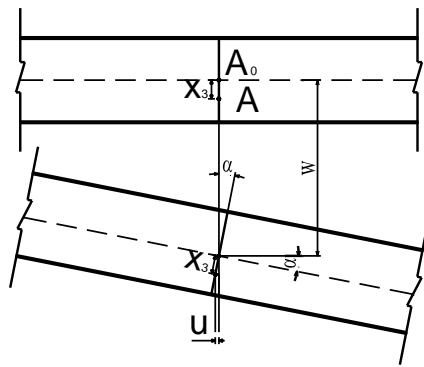
#### Các quan hệ về hình học

Xét điểm  $A(x_1, x_2, x_3)$  nằm trong tấm có chuyển vị là  $(u, v, w)$ . Theo giả thuyết trên nên:

$$\varepsilon_3 = \frac{\partial w}{\partial x_3} = 0 \text{ nên } w(x_1, x_2).$$

$$u = x_3 \sin \alpha = x_3 \operatorname{tg} \alpha = x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1}$$

$$v = x_3 \cos \beta = x_3 \operatorname{tg} \beta = x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2}$$



**Hình 2.3** Sơ đồ chuyển vị tại một điểm trong tấm

Theo phương trình Cauchy ta có:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x_1} = x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = x_3 \chi_{11} \\ \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial x_2} = x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = x_3 \chi_{22} \\ \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) = x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = x_3 \chi_{12} \end{array} \right. \quad (2.27)$$

trong đó:  $\chi_{11}; \chi_{22}; \chi_{12}$  là độ cong, độ xoắn của mặt trung bình sau biến dạng;  $w$  là độ võng của tấm.

- Nội lực trong mặt cắt ngang của kết cấu:

$$M_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E \cdot x_3^2}{1 - \mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) dx_3 = \frac{EI}{12(1 - \mu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) = D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)$$

$$M_{11} = D \cdot (\chi_{11} + \mu \chi_{22}); \quad (8.28a)$$

$$M_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E \cdot x_3^2}{1 - \mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) dx_3 = \frac{EI}{12(1 - \mu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) = D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)$$

$$M_{22} = D \cdot (\chi_{22} + \mu \chi_{11}); \quad (2.28b)$$

$$M_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E \cdot x_3^2}{1 + \mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} dx_3 = \frac{EI}{12(1 + \mu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = (1 - \mu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$M_{12} = (1 - \mu) D \cdot \chi_{12}; \quad (2.28c)$$

trong công thức (2.28c): D là độ cứng chống uốn, đối với dầm  $D = EI = \frac{Eh^3}{12}$  và đối

với tấm  $D = \frac{EI}{(1 - \mu^2)} = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}$ ;  $D(1 - \mu)$  là độ cứng chống xoắn.

Thay (2.8a), (2.8b) và (2.8c) vào (2.5) được:

$$Q_{11} = D \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla^2 w) = D \left( \frac{\partial \chi_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \chi_{12}}{\partial x_2} \right); \quad (2.28d)$$

$$Q_{22} = D \frac{\partial}{\partial x_2} (\nabla^2 w) = D \left( \frac{\partial \chi_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \chi_{22}}{\partial x_2} \right); \quad (2.28e)$$

Từ công thức (2.28b) có thể thấy độ cứng chịu cắt của tiết diện là Gh, do đó “biến dạng”  $\gamma_{11}$  và  $\gamma_{22}$  do lực cắt gây ra sẽ nhận được như sau:

$$Q_{11} = Gh \gamma_{11}; \quad Q_{22} = Gh \gamma_{22}$$

$$\gamma_{11} = \frac{D}{Gh} \left( \frac{\partial \chi_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \chi_{12}}{\partial x_2} \right); \quad \gamma_{22} = \frac{D}{Gh} \left( \frac{\partial \chi_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \chi_{22}}{\partial x_2} \right) \quad (2.29)$$

2.2.2.2 Bài toán kết cấu khi chịu lực vuông góc với mặt trung bình và có tác dụng của lực dọc lên mặt trung bình

Đối với các lực dọc tác dụng lên mặt trung bình của tiết diện thì trên mặt cắt ngang của tiết diện có lực dọc là  $N_i$  như vậy tại một điểm trên mặt cắt các biến dạng  $\varepsilon_i$  ( $i=1, 2$ ). Độ cứng của tiết diện kéo, nén sẽ là Eh.

Trong công thức vừa nêu lấy  $i=1, j=1$  đối với bài toán một chiều (thanh, dầm), chiều rộng dầm bằng 1 đơn vị.

Sau khi đã biết các biến dạng tương ứng với các nội lực của tiết diện (mômen uốn, lực cắt, lực dọc trục v.v...) và độ cứng của chúng thì dễ dàng xây dựng các bài

toán cơ học kết cấu theo phương pháp phiếm hàm lượng ràng buộc (2.18) hoặc (2.19).

Như vậy, có thể viết tổng quát lượng ràng buộc  $Z$  của bài toán cơ học kết cấu dưới dạng tương tự (2.18) (bài toán tĩnh):

$$Z = \int_V \left[ (M_{ij} - M_{0ij}) \chi_{ij} + (Q_{ii} - Q_{0ii}) \gamma_{ii} + (N_i - N_{0i}) \varepsilon_i \right] dv \rightarrow \min \quad (2.30a)$$

hoặc dưới dạng bình phương tối thiểu (2.19):

$$Z = \int_V \frac{1}{\text{Docung}} (\text{nội lực hệ cần tính} - \text{nội lực hệ so sánh})^2 dv \rightarrow \min \quad (2.30b)$$

trong đó:  $i = 1, 2$ ;  $j = 1, 2$ ;  $V$  là chiều dài thanh hoặc diện tích tấm. Trong (8.30) cần xem các độ cong  $\chi_{ij}$  là các đại lượng độc lập đối với nội lực mômen uốn  $M_{ij}$ , các biến dạng trượt  $\gamma_{11}$  và  $\gamma_{22}$  là các đại lượng độc lập đối với lực cắt  $Q_{11}$  và  $Q_{22}$ , các biến dạng trong mặt trung bình  $\varepsilon_i$  là các đại lượng độc lập đối với  $N_i$  và đều là đại lượng biến phân của bài toán.

Công thức (2.30) có thể áp dụng để giải cho cả bài toán phi tuyến hình học và bài toán tuyến tính vì công thức này được xây dựng dựa trên mối quan hệ ứng suất và biến dạng tuân theo định luật Hooke.

Trong bài toán cơ học kết cấu hệ thanh chịu tải trọng tĩnh dựa vào mối quan hệ vật lý (ứng suất và biến dạng) ta sẽ xây dựng được mối quan hệ giữa nội lực và biến dạng:

$$\begin{aligned} M_x &= EI_x \cdot \chi_x; & M_y &= EI_y \cdot \chi_y; & M_z &= GI_p \cdot \theta; \\ Q_x &= \frac{GA}{\alpha} \cdot \gamma_x; & Q_y &= \frac{GA}{\alpha} \cdot \gamma_y; & N &= EA \cdot \varepsilon_z \end{aligned} \quad (2.31)$$

Như vậy theo (2.19) lượng ràng buộc của bài toán có thể được viết dưới dạng bình phương tối thiểu như sau:

$$\begin{aligned} Z &= \int_0^{l^{(0)}} \frac{(M_x - M_{0x})^2}{EI_x} dz + \int_0^{l^{(0)}} \frac{(M_y - M_{0y})^2}{EI_y} dz + \int_0^{l^{(0)}} \frac{(M_z - M_{0z})^2}{GI_p} dz + \\ &+ \int_0^{l^{(0)}} \frac{\alpha (Q_x - Q_{0x})^2}{GA} dz + \int_0^{l^{(0)}} \frac{\alpha (Q_y - Q_{0y})^2}{GA} dz + \int_0^{l^{(0)}} \frac{(N - N_0)^2}{EA} dz \rightarrow \min \end{aligned} \quad (2.32a)$$

trong đó:  $\alpha$  là hệ số tập trung ứng suất tiếp do lực cắt gây ra tại trục dầm [3].

Khi hệ kết cấu bao gồm  $n$  thanh và chiều dài của thanh thứ  $i$  trước khi biến dạng là  $l_i^{(0)}$  thì lượng ràng buộc của bài toán có thể được viết dưới dạng bình phương tối thiểu như sau:

$$Z = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i^{(0)}} \frac{(M_x^{(i)} - M_{0x}^{(i)})^2}{E_i \cdot I_x^{(i)}} dz + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i^{(0)}} \frac{(M_y^{(i)} - M_{0y}^{(i)})^2}{E_i \cdot I_y^{(i)}} dz + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i^{(0)}} \frac{(M_z^{(i)} - M_{0z}^{(i)})^2}{G_i \cdot I_p^{(i)}} dz + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i^{(0)}} \frac{\alpha (Q_x^{(i)} - Q_{0x}^{(i)})^2}{G_i A_i} dz + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i^{(0)}} \frac{\alpha (Q_y^{(i)} - Q_{0y}^{(i)})^2}{G_i A_i} dz + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i^{(0)}} \frac{(N_i - N_{0i})^2}{E_i A_i} dz \rightarrow \min \quad (2.32b)$$

Công thức (2.32) có thể áp dụng để giải cho bài toán phi tuyến hình học cũng như bài toán tuyến tính (vì công thức này được xây dựng dựa trên mối quan hệ ứng suất và biến dạng tuân theo định luật Hooke). Khi áp dụng (2.32) để giải bài toán phi tuyến hình học thì phải xây dựng được mối liên hệ giữa biến dạng và chuyển vị (mối quan hệ hình học) của bài toán phi tuyến đó. Khi áp dụng (2.32) để giải bài toán tuyến tính thì mối liên hệ giữa biến dạng và chuyển vị (mối quan hệ hình học) của bài toán được xây dựng dựa trên giả thuyết biến dạng bé.

### 2.3 Phân tích bài toán tuyến tính kết cấu dàn dựa theo nguyên lý cực trị Gauss

Trong nội dung đề tài này, Tác giả trình bày phương pháp giải bài toán dàn dựa trên nguyên lý cực trị Gauss. Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss là phương pháp tính toán nội lực, chuyển vị trên hệ so sánh (hệ so sánh là hệ chịu lực tác dụng giống với hệ cần tính nhưng việc xác định nội lực trên hệ so sánh đơn giản hơn hệ cần tính) sau đó muốn xác định nội lực, chuyển vị trong hệ cần tính bằng cách cho lượng ràng buộc của bài toán đạt cực trị. Phương pháp này do GS.TSKH. Hà Huy Cương đề xuất để giải các bài toán cơ học môi trường liên tục và cơ học kết cấu.

Lượng ràng buộc  $Z$  của bài toán cơ học kết cấu đối với bài toán tĩnh được viết:

$$Z = \int_V \left[ (M_{ij} - M_{0ij}) \chi_{ij} + (Q_{ij} - Q_{0ij}) \gamma_{ij} + (N_i - N_{0i}) \varepsilon_i \right] dV \rightarrow \min \quad (2.33)$$

trong đó:  $M_{ij}, Q_{ij}, N_i$  là nội lực trong hệ cần tính;  $M_{0ij}, Q_{0ij}, N_{0i}$  là nội lực trong hệ so sánh.

hoặc viết dưới dạng bình phương tối thiểu:

$$\begin{aligned}
Z = & \int_1 \frac{(M_x - M_{0x})^2}{EJ_x} dz + \int_1 \frac{(M_y - M_{0y})^2}{EJ_y} dz + \int_1 \frac{(M_z - M_{0z})^2}{GJ_p} dz + \\
& + \int_1 \frac{\alpha(Q_x - Q_{0x})^2}{GF} dz + \int_1 \frac{\alpha(Q_y - Q_{0y})^2}{GF} dz + \int_1 \frac{(N_z - N_{0z})^2}{EF} dz \rightarrow \min
\end{aligned} \tag{2.34}$$

ở đây  $V$  là chiều dài thanh hoặc diện tích tâm;  $\alpha$  là hệ số xét đến sự không đồng đều ứng suất tiếp do lực cắt gây ra.

Trong (2.33) cần xem các độ cong  $\chi_{ij}$  là các đại lượng độc lập đối với nội lực mômen uốn  $M_{ij}$ , các biến dạng trượt  $\gamma_{11}$  và  $\gamma_{22}$  là các đại lượng độc lập đối với lực cắt  $Q_1$  và  $Q_2$ , các biến dạng trong mặt trung bình  $\epsilon_i$  là các đại lượng độc lập đối với  $N_i$  và đều là đại lượng biến phân của bài toán.

Trong kết cấu dàn, các thanh chỉ chịu kéo hoặc chịu nén. Như vậy, từ công thức (2.34) suy ra lượng ràng buộc của kết cấu dàn:

$$Z = \sum_{i=1}^n \int_{(l_i)} \frac{(N_i - N_{i0})^2}{E_i F_i} dz \rightarrow \min \tag{2.35}$$

trong đó:  $N_i$  là các thành phần nội lực trong các thanh của dàn đang xét (phải thỏa mãn điều kiện biên);  $N_{i0}$  là các thành phần nội lực trong các thanh của kết cấu dàn so sánh;  $n$  là tổng số thanh trong kết cấu dàn.

Khi hệ so sánh không liên kết và kết cấu dàn có  $r$  nút dàn chịu tải trọng tập trung thì phải đưa lực tập trung vào (2.35) và lúc đó lượng ràng buộc được viết như sau:

$$Z = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 l_i}{E_i F_i} - 2 \sum_{j=1}^r P_j v_j = \sum_{i=1}^n \frac{E_i F_i (\Delta l_i)^2}{l_i} - 2 \sum_{j=1}^r P_j v_j \rightarrow \min \tag{2.36}$$

Trong đó:  $P_j$  - lực tập trung tại nút thứ  $j$ ;

$v_j$  - chuyển vị tại nút thứ  $j$  theo phương tải trọng  $\vec{P}_j$ ;

Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss có thể giải cho bài toán tuyến tính kết cấu dàn cũng như bài toán phi tuyến hình học kết cấu dàn. Khi giải bài toán kết cấu dàn theo (1.17b), có thể giải theo hai cách là:

- **Cách thứ nhất:** là có thể chọn các ẩn số chính là các thành phần chuyển vị tại các nút dãn.

- **Cách thứ hai:** là có thể chọn các ẩn số chính là nội lực trong các thanh dãn.

Chú ý khi giải theo cách thứ nhất thì điều kiện liên tục về mặt chuyển vị tại các nút dãn tự động thỏa mãn, nhưng nếu giải theo cách thứ hai thì cần phải đưa thêm điều kiện liên tục về chuyển vị tại các nút dãn. Trong nội dung chuyên đề này sẽ trình bày chi tiết từng cách để giải bài toán kết cấu dãn chịu tải trọng tập trung tại các nút, dựa trên nguyên lý cực trị Gauss và cách đảm bảo điều kiện liên tục về chuyển vị tại các nút dãn.

### 2.3.1 Phân tích tuyến tính kết cấu dãn với cách chọn ẩn số chính là các thành phần chuyển vị tại các nút dãn

#### 2.3.1.1 Kết cấu dãn phẳng

Xét thanh  $ij$  trong dãn phẳng.

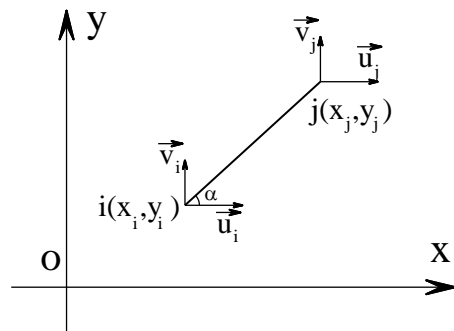
Gọi tọa độ ban đầu của các nút lần lượt là  $i(x_i, y_i), j(x_j, y_j)$ . Sau khi dãn

chịu lực, nút  $i$  có chuyển vị:

$$\mathbf{u}_i' = \mathbf{u}_i + \mathbf{v}_i ; \text{ nút } j \text{ có chuyển vị:}$$

$$\mathbf{u}_j' = \mathbf{u}_j + \mathbf{v}_j \quad (\text{hình 2.4})$$

đặt:



**Hình 2.4 Sơ đồ chuyển vị của nút thanh trong hệ tọa độ phẳng**

$$m = \sin \alpha = \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} ; l = \cos \alpha = \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} \quad (2.37)$$

Chiều dài của thanh dãn trước khi biến dạng là:

$$l_{ij}^{(0)} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (2.38)$$

Biến dạng dài tuyệt đối của thanh dãn là:

$$\Delta l_{ij} = (l.u_j + m.v_j) - (l.u_i + m.v_i) \quad (2.39)$$



Như vậy nếu hệ dàn bao gồm  $n$  thanh và có  $r_1$  nút chịu tải trọng tác dụng theo phương  $ox$  và có  $r_2$  nút chịu tải trọng tác dụng theo phương  $oy$  thì phiếm hàm lượng ràng buộc (2.36) của bài toán được viết như sau:

$$Z = \sum_{k=1}^n \frac{E_k F_k (\Delta l_k)^2}{I_k^{(0)}} - \sum_{k_1=1}^{r_1} 2P_x^{(k_1)} \cdot u_{k_1} - \sum_{k_2=1}^{r_2} 2P_y^{(k_2)} \cdot v_{k_2} \rightarrow \min \quad (2.40)$$

hay

$$Z = \sum_{k=1}^n \frac{E_k F_k \left( (l_k \cdot u_j + m_k \cdot v_j) - (l_k \cdot u_i + m_k \cdot v_i) \right)^2}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}} - \sum_{k_1=1}^{r_1} 2P_x^{(k_1)} \cdot u_{k_1} - \sum_{k_2=1}^{r_2} 2P_y^{(k_2)} \cdot v_{k_2} \rightarrow \min \quad (2.41)$$

Xét tại nút  $i$  có  $m$  thanh quy tụ tại nút;  $P_x^{(i)}; P_y^{(i)}$  là các thành phần tải trọng tác dụng tại nút  $i$  theo phương trục  $x$  và phương trục  $y$ .

Điều kiện cực trị của bài toán là:

$$\frac{\partial Z}{\partial u_i} = 0; \quad \frac{\partial Z}{\partial v_i} = 0 \quad (2.42a)$$

Suy ra:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m \frac{2E_{ij} F_{ij} \left( (l_{ij} \cdot u_j + m_{ij} \cdot v_j) - (l_{ij} \cdot u_i + m_{ij} \cdot v_i) \right) (-l_{ij})}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}} - 2P_x^{(i)} = 0 \\ \sum_{j=1}^m \frac{2E_{ij} F_{ij} \left( (l_{ij} \cdot u_j + m_{ij} \cdot v_j) - (l_{ij} \cdot u_i + m_{ij} \cdot v_i) \right) (-m_{ij})}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}} - 2P_y^{(i)} = 0 \end{cases} \quad (2.42b)$$

Nội lực của các thanh dàn được tính bằng công thức sau:

$$N_{ij} = \frac{\Delta l_{ij} \cdot E_{ij} F_{ij}}{I_{ij}^{(0)}} \quad (2.43)$$

Các phương trình (2.42b) chính là các phương trình cân bằng tại các nút dàn có chuyển vị và có thể viết dưới dạng rút gọn lại như sau:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m N_{ij} \cdot l_{ij} + P_x^{(i)} = 0 \\ \sum_{j=1}^m N_{ij} \cdot m_{ij} + P_y^{(i)} = 0 \end{cases} \quad (2.42c)$$

Nếu bài toán có  $C$  liên kết nối đất và  $S_n$  nút thì theo điều kiện (2.42) thiết lập được hệ phương trình bao gồm  $(2S_n - C)$  phương trình tuyến tính có  $(2S_n - C)$  ẩn số là các thành phần chuyển vị  $u, v$ . Giải hệ phương trình (2.42) sẽ xác định được các ẩn số  $u, v$  là các thành phần chuyển vị tại các nút dãn.

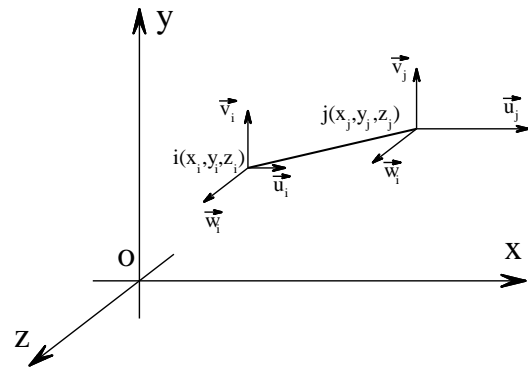
Sau khi tìm được các thành phần chuyển vị tại các nút dãn, thay các thành phần chuyển vị này vào phương trình (2.39), (2.43) sẽ tìm được biến dạng dài tuyệt đối và nội lực của các thanh dãn.

### 2.3.1.2 Kết cấu dàn không gian

Xét thanh  $ij$  trong dàn không gian. Gọi tọa độ ban đầu của các nút lần lượt là  $i(x_i, y_i, z_i), j(x_j, y_j, z_j)$ . Sau khi dàn chịu lực, nút  $i$  có chuyển vị:

$$\vec{ii}' = u_i + v_i + w_i ; \text{ nút } j \text{ có chuyển}$$

$$\text{vị: } \vec{jj}' = u_j + v_j + w_j \text{ (hình 2.5)}$$



**Hình 2.5 Sơ đồ chuyển vị của nút thanh trong hệ tọa độ không gian**

$$\text{đặt: } l = \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} ; \quad (2.44a)$$

$$m = \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} ; \quad (2.44b)$$

$$n = \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} . \quad (2.44c)$$

$(l, m, n)$  gọi là cosin chỉ phương của thanh  $ij$

Chiều dài của thanh dãn trước khi biến dạng là:

$$l_{ij}^{(0)} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (2.45)$$

Biến dạng dài tuyệt đối của thanh dãn là:

$$\Delta l_{ij} = (l.u_j + m.v_j + n.w_j) - (l.u_i + m.v_i + n.w_i) \quad (2.46)$$

Như vậy nếu hệ dàn bao gồm  $n$  thanh và  $S_n$  nút trong đó có  $r_1$  nút chịu tải trọng tác dụng theo phương  $ox$ ,  $r_2$  nút chịu tải trọng tác dụng theo phương  $oy$ ,  $r_3$  nút chịu tải trọng tác dụng theo phương  $oz$  thì phiếm hàm lượng ràng buộc (1.17b) của bài toán được viết như sau:

$$Z = \sum_{k=1}^n \frac{E_k F_k \cdot (\Delta l_k)^2}{l_k^{(0)}} - \sum_{k_1=1}^{r_1} 2P_x^{(k_1)} \cdot u_{k_1} - \sum_{k_2=1}^{r_2} 2P_y^{(k_2)} \cdot v_{k_2} - \sum_{k_3=1}^{r_3} 2P_z^{(k_3)} \cdot w_{k_3} \rightarrow \min \quad (2.47a)$$

hay

$$Z = \sum_{k=1}^n \frac{E_k F_k}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}} \left( (l_k \cdot u_j + m_k \cdot v_j + n_k \cdot w_j) - (l_k \cdot u_i + m_k \cdot v_i + n_k \cdot w_i) \right)^2 +$$

$$- \sum_{k_1=1}^{r_1} 2P_x^{(k_1)} \cdot u_{k_1} - \sum_{k_2=1}^{r_2} 2P_y^{(k_2)} \cdot v_{k_2} - \sum_{k_3=1}^{r_3} 2P_z^{(k_3)} \cdot w_{k_3} \rightarrow \min \quad (2.47b)$$

Xét tại nút  $i$  có  $m$  là số thanh quy tụ;  $P_x^{(i)}$ ;  $P_y^{(i)}$ ;  $P_z^{(i)}$  là thành phần tải trọng tác dụng tại nút  $i$  theo phương trục  $x$ , phương trục  $y$  và phương trục  $z$ ;  $(l_{ij}, m_{ij}, n_{ij})$ , ( $j = 1 \div m$ ) là cosin chỉ phương của trục thanh dàn  $ij$ .

Điều kiện cực trị của bài toán là:

$$\frac{\partial Z}{\partial u_i} = 0; \quad \frac{\partial Z}{\partial v_i} = 0; \quad \frac{\partial Z}{\partial w_i} = 0; \quad (2.48a)$$

Suy ra:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^m \frac{2E_{ij} F_{ij} (-l_{ij}) \left( (l_{ij} \cdot u_j + m_{ij} \cdot v_j + n_{ij} \cdot w_j) - (l_{ij} \cdot u_i + m_{ij} \cdot v_i + n_{ij} \cdot w_i) \right)}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}} - 2P_x^{(i)} = 0 \\ \sum_{j=1}^m \frac{2E_{ij} F_{ij} (-m_{ij}) \left( (l_{ij} \cdot u_j + m_{ij} \cdot v_j + n_{ij} \cdot w_j) - (l_{ij} \cdot u_i + m_{ij} \cdot v_i + n_{ij} \cdot w_i) \right)}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}} - 2P_y^{(i)} = 0 \\ \sum_{j=1}^m \frac{2E_{ij} F_{ij} (-n_{ij}) \left( (l_{ij} \cdot u_j + m_{ij} \cdot v_j + n_{ij} \cdot w_j) - (l_{ij} \cdot u_i + m_{ij} \cdot v_i + n_{ij} \cdot w_i) \right)}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}} - 2P_z^{(i)} = 0 \end{array} \right. \quad (2.49b)$$

Các phương trình (2.49b) chính là các phương trình cân bằng tại các nút có chuyển vị và có thể viết dưới dạng rút gọn lại như sau:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m N_{ij} \cdot l_{ij} + P_x^{(i)} = 0 \\ \sum_{j=1}^m N_{ij} \cdot m_{ij} + P_y^{(i)} = 0 \\ \sum_{j=1}^m N_{ij} \cdot n_{ij} + P_z^{(i)} = 0 \end{cases} \quad (2.49c)$$

Nếu bài toán có  $C$  liên kết nối đất và  $S_n$  nút dãn thì theo điều kiện (2.49) ta sẽ có được hệ phương trình bao gồm  $(3S_n - C)$  phương trình tuyến tính và có  $(3S_n - C)$  ẩn số là các thành phần chuyển vị  $u, v, w$ . Giải hệ phương trình (2.49) này sẽ tìm được các ẩn số  $u, v, w$  là các thành phần chuyển vị tại các nút của dãn.

Sau khi tìm được các thành phần chuyển vị của các nút dãn thay vào phương trình (2.46) và (2.43) sẽ tính được biến dạng dài tuyệt đối và nội lực của các thanh dãn.

### 2.3.2 Phân tích tuyến tính kết cấu dãn với cách chọn ẩn số chính là các thành phần nội lực trong các thanh dãn

Xét dãn gồm  $n$  thanh, gọi  $N_i$  là nội lực trong thanh dãn thứ  $i$ . Lượng ràng buộc của dãn (2.36b) được viết như sau:

$$Z = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 l_i}{E_i F_i} - 2 \sum_{j=1}^r P_j v_j \rightarrow \min \quad (2.50)$$

Nếu chỉ thỏa mãn (2.50) thì dãn chưa đảm bảo điều kiện liên tục về mặt chuyển vị tại các nút dãn. Vì vậy cần phải bổ sung điều kiện liên tục là các thanh đồng quy tại nút thì chuyển vị tại nút đó của các thanh phải bằng nhau. Các phương trình bổ sung để dãn thỏa mãn điều kiện liên tục về chuyển vị được viết như sau:

$$g_i = \frac{N_i l_i}{E_i F_i} - \Delta l_i = 0 \quad (2.51)$$

Trong (2.51)  $\Delta l_i$  là biến dạng dài tuyệt đối của thanh dãn được xác định theo (2.39) hoặc (2.46).

Như vậy bài toán phân tích, tính toán dàn trở thành bài toán tìm cực trị của phiếm hàm (2.50) với các ràng buộc (2.51). Bài toán này có thể giải bằng phương pháp thừa số Lagrange với phiếm hàm mở rộng F như sau:

$$F = Z + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i \rightarrow \min \quad (2.52)$$

Trong đó  $\lambda_i$  là thừa số Lagrange và cũng là ẩn số của bài toán.

Điều kiện cực trị của (2.52) là:

$$\frac{\partial F}{\partial N_i} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial v_j} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = 0 \quad (2.53)$$

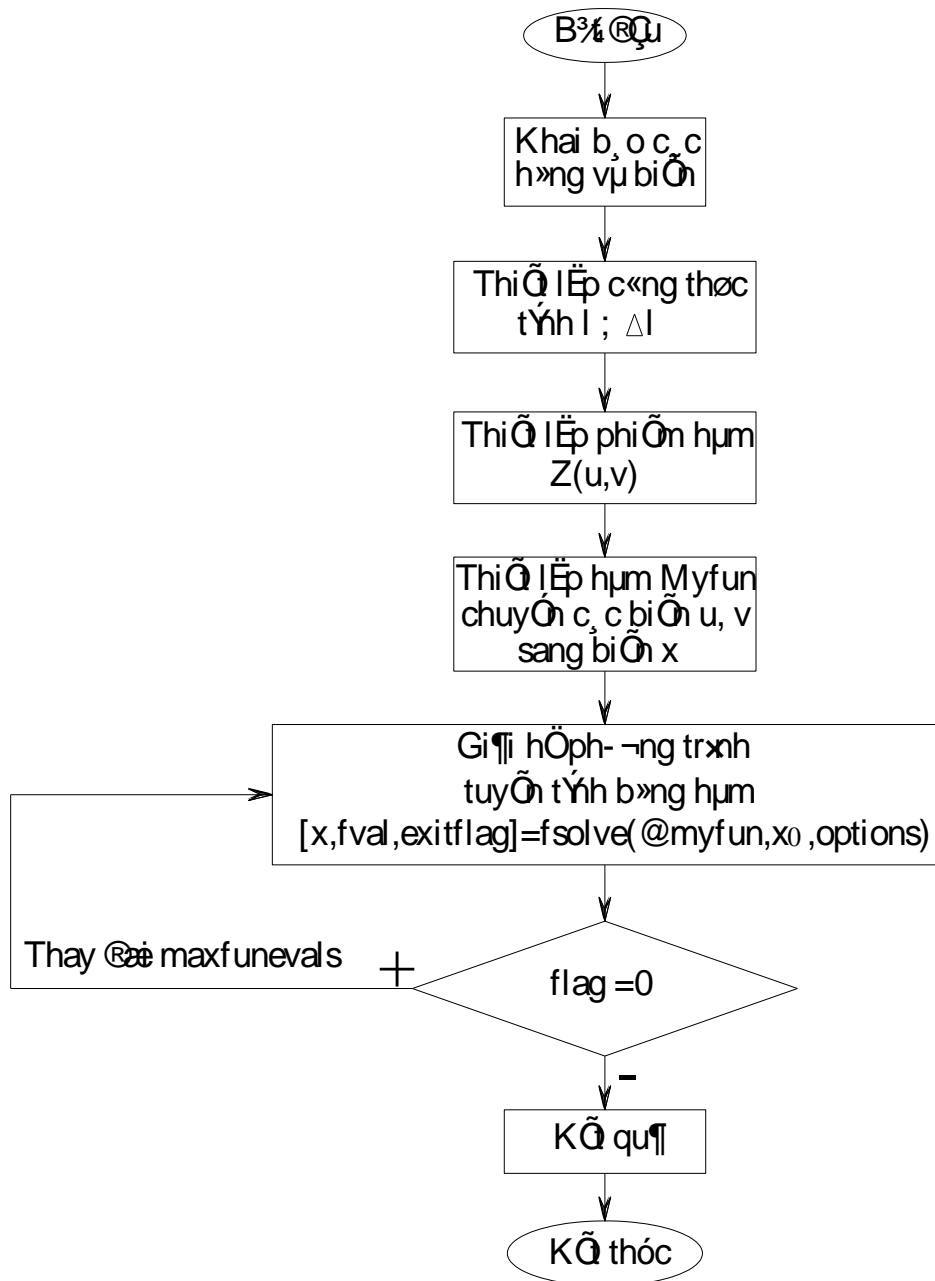
Giải hệ phương trình tuyến tính (2.53) sẽ tìm được các thành phần chuyển vị tại nút dàn và nội lực trong các thanh.

### 2.3.3 Phương pháp xác định các thành phần chuyển vị tại nút dàn và nội lực trong các thanh dàn đối với bài toán dàn tuyến tính

Theo phương pháp phân tích, tính toán tuyến tính kết cấu dàn dựa trên nguyên lý cực trị Gauss là cuối cùng đưa về giải hệ phương trình (2.53) hoặc (2.49) các phương trình trong các hệ này là các phương trình tuyến tính. Để giải hệ phương trình tuyến tính rất nhiều phương pháp, trong đề tài nghiên cứu này tác giả sử dụng hàm fsolve trong Optimization Toolbox của phần mềm Matlab 7.0 để giải hệ các phương trình tuyến tính này với các bước thực hiện như sau:

**Bước 1:** Đánh số thứ tự các nút, số thứ tự các thanh cho kết cấu dàn.

**Bước 2:** Xác định lượng ràng buộc cho kết cấu áp dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss với các công thức (2.47), (2.52).



**Hình 2.6 Sơ đồ khối chương trình.**

**Bước 3:** Từ điều kiện cực trị của phiếm hàm ràng buộc ta nhận được hệ phương trình đạo hàm riêng theo công thức (2.49), (2.53).

**Bước 4:** Giải hệ phương trình tuyến tính (2.49), (2.53) bằng cách sử dụng hàm fsolve trong Optimization toolbox của phần mềm Matlab sẽ xác định được nghiệm của hệ là các thành phần chuyển vị tại các nút của kết cấu dàn đối với bài toán giải theo cách chọn ẩn số chính là chuyển vị, hoặc nội lực trong các thanh dàn và các thành phần chuyển vị của các nút dàn theo cách chọn ẩn số chính là nội lực.

**Bước 5:** Sau khi xác định được các thành phần chuyển vị tại nút dầm ta sẽ tính được biến dạng dài tuyệt đối và nội lực các thanh theo công thức (2.39) hoặc (2.43) và (2.46).

Như vậy, cách giải chọn ẩn số chính là chuyển vị thì phải tiếp tục làm thêm bước 5. Còn cách giải chọn ẩn số chính là nội lực thì đến bước 4 là đã xác định được cả nội lực trong các thanh dầm và các thành phần chuyển vị tại các nút dầm.

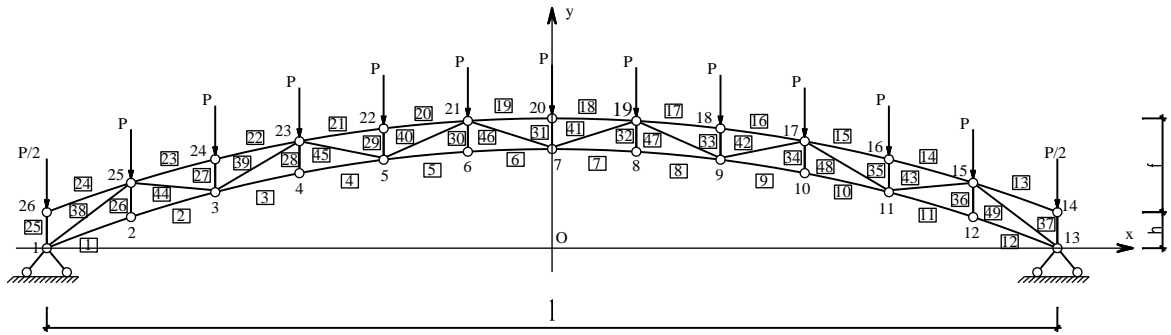
Sơ đồ giải thuật để giải bài toán tuyến tính kết cấu dầm chịu tải trọng tĩnh dựa theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss bằng cách sử dụng ngôn ngữ lập trình Matlab 7.0 được thể hiện như hình 2.6.

### Chương 3

## MỘT SỐ VÍ DỤ PHÂN TÍCH KẾT CẤU DÀN

### 3.1 Bài toán dàn vòm phẳng tĩnh định trong, siêu tĩnh ngoài

**Ví dụ 1:** Xét dàn vòm phẳng tĩnh định trong, siêu tĩnh ngoài chịu lực như (hình 3.1) biết các thanh dàn có mô đun đàn hồi  $E=2.10^4(kN/cm^2)$ . Tiết diện thanh cánh trên và thanh cánh dưới là  $\phi 180 \times 6(mm)$ , các thanh bụng dàn là  $\phi 121 \times 3,5(mm)$ . Nhịp dàn  $l=48(m)$ , độ thoải của dàn  $k=f/l=1/8$  và chiều cao dàn  $h=0,8(m)$ . Tải trọng  $P=100(kN)$  tác dụng tại các nút dàn theo phương thẳng đứng. Tính toán các thành phần chuyển vị tại nút dàn và nội lực trong các thanh dàn.



**Hình 3.1** Vòm dàn phẳng tĩnh định trong, siêu tĩnh ngoài

#### Lời giải

#### Thiết lập phiếm hàm lượng ràng buộc của kết cấu dàn vòm

Dàn vòm gồm 26 nút và 49 thanh được đánh số thứ tự như hình 3.1. Phiếm hàm lượng ràng buộc của dàn vòm (2.40) được viết như sau:

$$Z = \sum_{k=1}^{49} \frac{E_k A_k}{l_k^{(0)}} \times (\Delta l_k)^2 - \sum_{r=14}^{26} 2P_r \cdot v_r \rightarrow \min \quad (3.1)$$

#### Thiết lập hệ phương trình từ điều kiện cực trị của phiếm hàm ràng buộc

Điều kiện biên của bài toán là tại nút 1 và nút 13 không có chuyển vị theo phương x và phương y:  $u_1 = v_1 = u_{13} = v_{13} = 0$

Điều kiện cực trị của phiếm hàm ràng buộc Z (3.1) theo các chuyển vị chưa biết là:



$$\frac{\partial Z}{\partial u_i} = 0 \quad \begin{cases} i = 2 \div 12 \\ i = 14 \div 26 \end{cases}; \quad \frac{\partial Z}{\partial v_j} = 0 \quad \begin{cases} j = 2 \div 12 \\ j = 14 \div 26 \end{cases} \quad (3.2)$$

Theo điều kiện cực trị trên sẽ viết được hệ phương trình gồm 48 phương trình chứa 48 ẩn số là các thành phần chuyển vị tại các nút.

### Xác định các thành phần chuyển vị tại các nút dàn

Giải hệ phương trình (3.2) sẽ tìm được các thành phần chuyển vị tại các nút và kết quả các thành phần chuyển vị tại các nút dàn được lập trong (bảng 3.1).

**Bảng 3.1 Kết quả chuyển vị theo hai phương tại các nút dàn**

Nút		<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
Chuyển vị (cm)	Phương X	0	-1,24	-0,586	-0,426	0,1212
	Phương Y	0	1,5302	-1,384	-2,845	-6,735
Nút		<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>
Chuyển vị (cm)	Phương X	0,0624	0	-0,062	-0,121	0,4259
	Phương Y	-7,424	-9,367	-7,424	-6,735	-2,845
Nút		<b>11</b>	<b>12</b>	<b>13</b>	<b>14</b>	<b>15</b>
Chuyển vị (cm)	Phương X	0,5862	1,24	0	0,4844	1,2197
	Phương Y	-1,384	1,5302	0	-0,006	1,5194
Nút		<b>16</b>	<b>17</b>	<b>18</b>	<b>19</b>	<b>20</b>
Chuyển vị (cm)	Phương X	0,2733	0,0103	-0,487	-0,272	0
	Phương Y	-1,393	-2,851	-6,74	-7,427	-9,371
Nút		<b>21</b>	<b>22</b>	<b>23</b>	<b>24</b>	<b>25</b>
Chuyển vị (cm)	Phương X	0,2725	0,4873	-0,01	-0,273	-1,22
	Phương Y	-7,427	-6,74	-2,851	-1,393	1,5194
Nút		<b>26</b>				
Chuyển vị (cm)	Phương X	-0,484				
	Phương Y	-0,006				

### Xác định nội lực trong các thanh dàn

Theo công thức (2.39), (2.43) sẽ xác định được nội lực trong các thanh dàn. Kết quả phân tích nội lực trong các thanh dàn được lập thành bảng 3.2.

**Bảng 3.2 Kết quả nội lực trong các thanh dàn**

Thanh	Nội lực (kN)	Thanh	Nội lực (kN)	Thanh	Nội lực (kN)
<b>1</b>	-1013,68710	<b>18</b>	-787,36635	<b>35</b>	-68,94796
<b>2</b>	-978,47928	<b>19</b>	-787,36635	<b>36</b>	-88,60023
<b>3</b>	-577,87592	<b>20</b>	-665,60215	<b>37</b>	-50,00000
<b>4</b>	-566,19143	<b>21</b>	-674,62449	<b>38</b>	-192,47767
<b>5</b>	-319,31596	<b>22</b>	-355,27056	<b>39</b>	-196,19877

Thanh	Nội lực (kN)	Thanh	Nội lực (kN)	Thanh	Nội lực (kN)
<b>6</b>	-317,18785	<b>23</b>	-365,24225	<b>40</b>	-98,23520
<b>7</b>	-317,18785	<b>24</b>	0,00000	<b>41</b>	32,81420
<b>8</b>	-319,31596	<b>25</b>	-50,00000	<b>42</b>	143,86796
<b>9</b>	-566,19143	<b>26</b>	-88,60023	<b>43</b>	185,73302
<b>10</b>	-577,87592	<b>27</b>	-68,94796	<b>44</b>	185,73302
<b>11</b>	-978,47928	<b>28</b>	-48,13627	<b>45</b>	143,86796
<b>12</b>	-1013,68710	<b>29</b>	-44,55626	<b>46</b>	32,81420
<b>13</b>	0,00000	<b>30</b>	-26,06795	<b>47</b>	-98,23520
<b>14</b>	-365,24225	<b>31</b>	-35,72188	<b>48</b>	-196,19877
<b>15</b>	-355,27056	<b>32</b>	-26,06795	<b>49</b>	-192,47767
<b>16</b>	-674,62449	<b>33</b>	-44,55626		
<b>17</b>	-665,60215	<b>34</b>	-48,13627		

### Kiểm tra cân bằng nút dàn

Kết quả kiểm tra cân bằng tại các nút dàn được tập hợp và lập thành bảng 3.3.

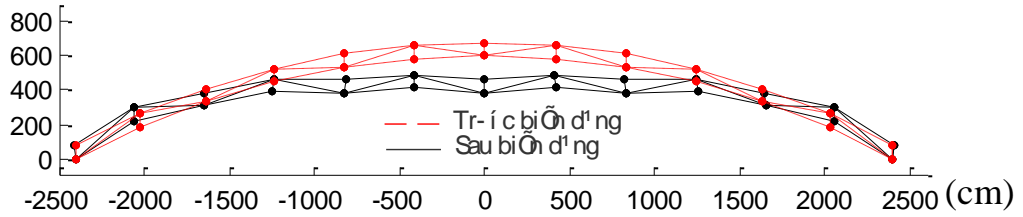
**Bảng 3.3 Kết quả kiểm tra cân bằng tại các nút dàn**

Nút	$\sum F_x$	$\sum F_y$	Nút	$\sum F_x$	$\sum F_y$
<b>1</b>	0	0	<b>14</b>	-0,1681e-12	-0,1146e-13
<b>2</b>	0,6221e-12	0,8434e-12	<b>15</b>	0,2394e-12	0,4582e-12
<b>3</b>	0,1442e-11	0,1346e-11	<b>16</b>	0,3760e-12	-0,2792e-11
<b>4</b>	0,2953e-12	-0,3823e-11	<b>17</b>	0,6497e-13	0,2343e-12
<b>5</b>	0,3456e-12	0,2240e-10	<b>18</b>	0,5318e-12	0,2075e-12
<b>6</b>	-0,2297e-12	-0,5126e-11	<b>19</b>	-0,8903e-13	0,4903e-11
<b>7</b>	0,3542e-12	0,3153e-11	<b>20</b>	0,9323e-13	-0,9678e-11
<b>8</b>	-0,4021e-12	0,3678e-11	<b>21</b>	-0,1303e-12	0,1367e-10
<b>9</b>	-0,1154e-11	0,1264e-10	<b>22</b>	-0,2255e-12	-0,1648e-10
<b>10</b>	-0,4256e-12	0,2427e-11	<b>23</b>	-0,4334e-12	0,6535e-12
<b>11</b>	-0,8721e-12	-0,4234e-12	<b>24</b>	-0,1716e-12	-0,1165e-11
<b>12</b>	-0,6198e-12	-0,5602e-12	<b>25</b>	-0,5551e-12	-0,1453e-11
<b>13</b>	0	0	<b>26</b>	0,1681e-12	0,5799e-13

Với số liệu kiểm tra cân bằng tại các nút (bảng 3.3) cho thấy tất cả các nút đều thỏa mãn điều kiện cân bằng.

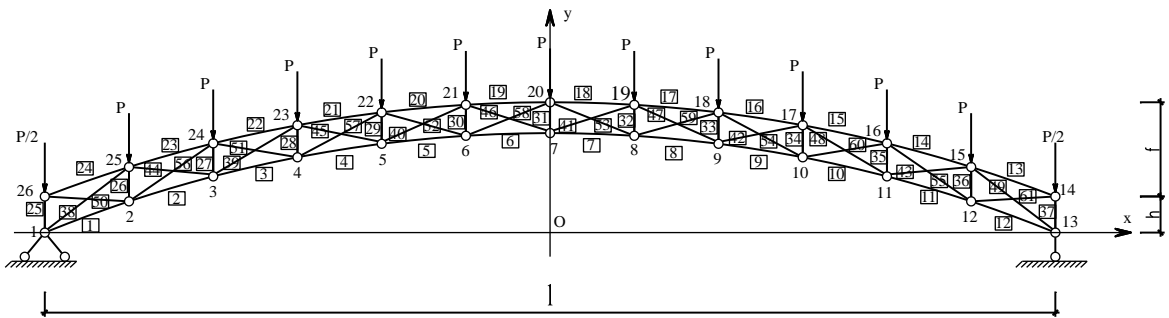
**Hình dạng dàn trước và sau khi biến dạng:** Kết quả hình dạng dàn trước và sau khi biến dạng được thể hiện như hình 3.2.

(cm)



**Hình 3.2 Hình dạng dàn trước và sau khi biến dạng**

### 3.2 Bài toán dàn vòm phẳng siêu tĩnh trong, tĩnh định ngoài



**Hình 3.3 Vòm dàn phẳng siêu tĩnh trong, tĩnh định ngoài**

**Ví dụ 2:** Xét dàn vòm phẳng siêu tĩnh trong, tĩnh định ngoài như (hình 3.3) biết các thanh dàn có mô đun đàn hồi  $E=2.10^4(\text{kN/cm}^2)$ . Tiết diện thanh cánh trên và thanh cánh dưới là  $\phi 219 \times 7(\text{mm})$  có  $A=46,621 \text{ cm}^2$ , các thanh bụng dàn là  $\phi 121 \times 3,5(\text{mm})$  có  $A=12,92 \text{ cm}^2$ . Nhịp dàn  $l=48 \text{ (m)}$ , độ thoải của dàn  $k=1/3$  và chiều cao của dàn  $h=0,8 \text{ (m)}$ . Tải trọng  $P = 20(\text{kN})$  tác dụng. Tính toán các thành phần chuyển vị tại nút dàn và nội lực trong các thanh dàn

#### Lời giải

#### Thiết lập phiếm hàm lượng ràng buộc của kết cấu dàn vòm

Dàn vòm gồm 61 thanh, 26 nút được đánh số thứ tự như hình 3.3. Phiếm hàm lượng ràng buộc của dàn (2.40) được viết như sau:

$$Z = \sum_{k=1}^{61} \frac{E_k A_k}{I_k^{(0)}} \times (\Delta l_k)^2 - \sum_{r=14}^{26} 2P_r \cdot v_r \rightarrow \min \quad (3.3)$$

#### Thiết lập hệ phương trình từ điều kiện cực trị của phiếm hàm ràng buộc

$$\text{Điều kiện biên của bài toán: } u_1 = v_1 = v_{13} = 0 \quad (3.4)$$

Điều kiện cực trị của phiếm hàm ràng buộc  $Z$  (3.16) theo các chuyển vị chưa biết sẽ là:

$$\frac{\partial Z}{\partial u_i} = 0 \quad i = 2 \div 26; \quad \frac{\partial Z}{\partial v_j} = 0 \quad \begin{cases} j = 2 \div 12 \\ j = 14 \div 26 \end{cases} \quad (3.5)$$

Theo điều kiện cực trị (3.5) lập được hệ phương trình gồm 49 phương trình, chứa 49 ẩn số là các thành phần chuyển vị tại các nút.

### Xác định các thành phần chuyển vị tại các nút dàn

Giải hệ phương trình (3.5) sẽ tìm được các thành phần chuyển vị tại các nút và kết quả các thành phần chuyển vị tại các nút được lập thành bảng 3.4.

**Bảng 3.4 Kết quả chuyển vị theo hai phương tại các nút dàn**

Nút		<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
Chuyển vị (cm)	Phương X	0	55,7694	96,8863	123,588	138,168
	Phương Y	0	-29,799	-63,138	-94,839	-120,66
Nút		<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>
Chuyển vị (cm)	Phương X	144,084	145,497	146,91	152,826	167,406
	Phương Y	-137,45	-143,27	-137,45	-120,66	-94,839
Nút		<b>11</b>	<b>12</b>	<b>13</b>	<b>14</b>	<b>15</b>
Chuyển vị (cm)	Phương X	194,108	235,225	290,994	282,012	227,198
	Phương Y	-63,138	-29,799	0	-0,0255	-29,745
Nút		<b>16</b>	<b>17</b>	<b>18</b>	<b>19</b>	<b>20</b>
Chuyển vị (cm)	Phương X	187,492	162,378	149,454	145,22	145,497
	Phương Y	-63,063	-94,754	-120,57	-137,36	-143,18
Nút		<b>21</b>	<b>22</b>	<b>23</b>	<b>24</b>	<b>25</b>
Chuyển vị (cm)	Phương X	145,774	141,54	128,616	103,502	63,7967
	Phương Y	-137,36	-120,57	-94,754	-63,063	-29,745
Nút		<b>26</b>				
Chuyển vị (cm)	Phương X	8,98204				
	Phương Y	-0,0255				

### Xác định nội lực trong các thanh dàn

Theo công thức (2.39), (2.43) sẽ xác định được nội lực trong các thanh dàn. Kết quả phân tích nội lực trong các thanh dàn được lập thành bảng 3.5.

**Bảng 3.5 Kết quả nội lực trong các thanh dàn**

Thanh	Nội lực (kN)	Thanh	Nội lực (kN)	Thanh	Nội lực (kN)
<b>1</b>	239,71503	<b>22</b>	-1175,86050	<b>43</b>	326,13511
<b>2</b>	724,27523	<b>23</b>	-889,52121	<b>44</b>	326,13511
<b>3</b>	1065,11180	<b>24</b>	-459,86701	<b>45</b>	179,04459
<b>4</b>	1304,6230	<b>25</b>	-82,30799	<b>46</b>	38,35495
<b>5</b>	1458,93290	<b>26</b>	174,05131	<b>47</b>	-84,43775

Thanh	Nội lực (kN)	Thanh	Nội lực (kN)	Thanh	Nội lực (kN)
<b>6</b>	1534,80770	<b>27</b>	243,41420	<b>48</b>	-184,99745
<b>7</b>	1534,80770	<b>28</b>	272,67135	<b>49</b>	-273,50418
<b>8</b>	1458,93290	<b>29</b>	286,87469	<b>50</b>	397,63670
<b>9</b>	1304,62300	<b>30</b>	293,70816	<b>51</b>	252,55715
<b>10</b>	1065,11180	<b>31</b>	295,77248	<b>52</b>	107,11666
<b>11</b>	724,27523	<b>32</b>	293,70816	<b>53</b>	-25,81471
<b>12</b>	239,71503	<b>33</b>	286,87469	<b>54</b>	-137,28583
<b>13</b>	-459,86701	<b>34</b>	272,67135	<b>55</b>	-229,18558
<b>14</b>	-889,52121	<b>35</b>	243,41420	<b>56</b>	-229,18558
<b>15</b>	-1175,86050	<b>36</b>	174,05131	<b>57</b>	-137,28583
<b>16</b>	-1369,06820	<b>37</b>	-82,30799	<b>58</b>	-25,81471
<b>17</b>	-1489,85940	<b>38</b>	-273,50418	<b>59</b>	107,11666
<b>18</b>	-1548,15220	<b>39</b>	-184,99745	<b>60</b>	252,55715
<b>19</b>	-1548,15220	<b>40</b>	-84,43775	<b>61</b>	397,63670
<b>20</b>	-1489,85940	<b>41</b>	38,35495		
<b>21</b>	-1369,06820	<b>42</b>	179,04459		

### Kiểm tra cân bằng nút

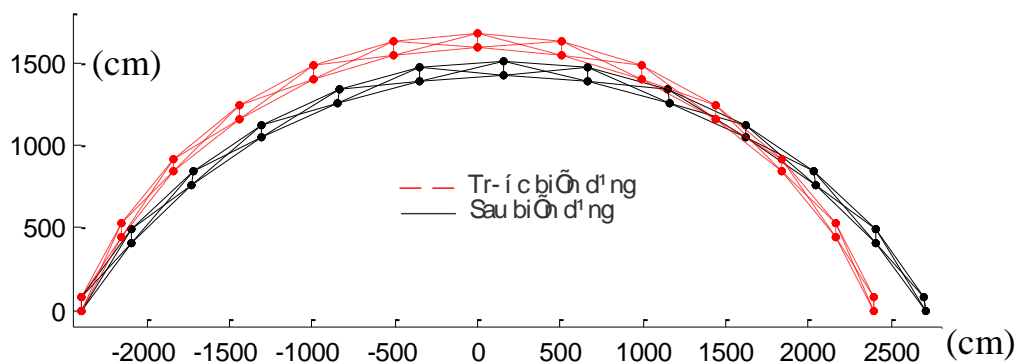
Kết quả kiểm tra cân bằng nút tại các nút của dàn vòm siêu tĩnh trong, tĩnh định ngoài được tập hợp và lập thành bảng 3.6.

**Bảng 3.6 Kết quả kiểm tra cân bằng tại các nút dàn**

Nút	$\sum F_x$	$\sum F_y$	Nút	$\sum F_x$	$\sum F_y$
<b>1</b>	0	0	<b>14</b>	0,8662e-11	0,3858e-10
<b>2</b>	-0,1106e-10	0,7164e-10	<b>15</b>	0,7615e-10	-0,5360e-10
<b>3</b>	-0,5599e-10	-0,3741e-10	<b>16</b>	0,1089e-9	0,1030e-10
<b>4</b>	-0,3523e-10	0,1369e-10	<b>17</b>	0,2744e-10	0,8383e-10
<b>5</b>	0,2679e-10	-0,4621e-11	<b>18</b>	0,1485e-9	-0,2295e-9
<b>6</b>	-0,1084e-9	0,8450e-10	<b>19</b>	-0,3120e-10	0,5090e-10
<b>7</b>	0,5219e-10	0,5048e-10	<b>20</b>	-0,4485e-10	0,6549e-11
<b>8</b>	-0,9911e-10	0,6431e-10	<b>21</b>	0,5032e-10	0,44950e-10
<b>9</b>	0,8806e-11	0,6444e-10	<b>22</b>	0,9970e-11	0,1219e-9
<b>10</b>	0,5104e-10	0,2144e-9	<b>23</b>	-0,4244e-10	-0,1360e-9
<b>11</b>	0,5995e-10	-0,1821e-9	<b>24</b>	0,2673e-10	-0,24331e-10
<b>12</b>	-0,3340e-10	0,6206e-10	<b>25</b>	-0,1672e-10	-0,51322e-10
<b>13</b>	-0,1004e-11	0	<b>26</b>	0,5261e-11	0,5252e-11

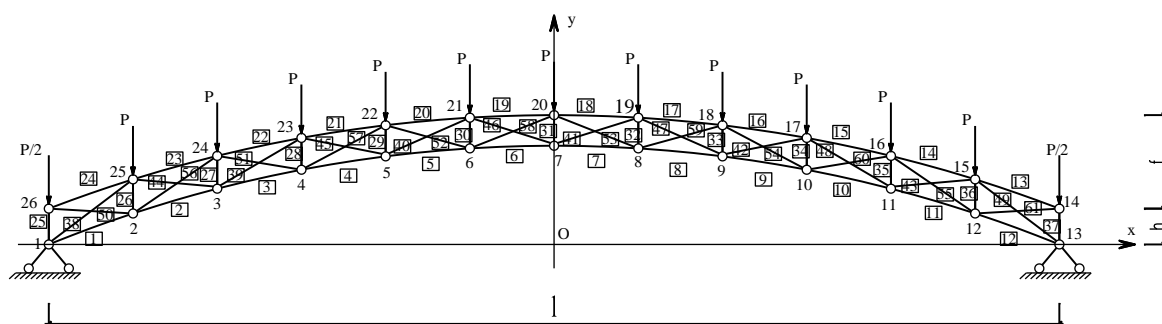
Với số liệu kiểm tra cân bằng tại các nút bảng 3.6, ta nhận thấy tất cả các nút đều thỏa mãn điều kiện cân bằng.

**Hình dạng dàn trước và sau khi biến dạng:** Kết quả thể hiện như hình 3.4.



**Hình 3.4 Hình dạng dầm trước và sau khi biến dạng**

### 3.3 Bài toán vòm phẳng siêu tĩnh trong, siêu tĩnh ngoài



**Hình 3.4 Vòm dầm siêu tĩnh trong và siêu tĩnh ngoài**

**Ví dụ 3:** Xét dầm vòm phẳng siêu tĩnh trong, siêu tĩnh ngoài như (hình 3.11) biết các thanh dầm có mô đun đàn hồi  $E=2.10^4(\text{kN/cm}^2)$ . Tiết diện thanh cánh trên và thanh cánh dưới là  $\phi 219 \times 7(\text{mm})$  có  $A=46,621 \text{ cm}^2$ , các thanh bụng dầm là  $\phi 121 \times 3,5(\text{mm})$  có  $A=12,92 \text{ cm}^2$ . Nhịp dầm  $l=48 \text{ (m)}$ , độ thoải của dầm  $k=1/3$  và chiều cao của dầm  $h=0,8 \text{ (m)}$ . Tải trọng  $P = 100(\text{kN})$  tác dụng. Tính toán các thành phần chuyển vị tại nút dầm và nội lực trong các thanh dầm

#### Thiết lập phiếm hàm lượng ràng buộc của kết cấu dầm vòm

Dầm vòm gồm 61 thanh và 26 nút được đánh số thứ tự như hình 3.4. Phiếm hàm lượng ràng buộc của dầm vòm (2.40) được viết như sau:

$$Z = \sum_{k=1}^{61} \frac{E_k A_k}{l_k^{(0)}} \times (\Delta l_k)^2 - \sum_{r=14}^{26} 2P_r \cdot w_r \rightarrow \min \quad (3.6)$$

#### Thiết lập hệ phương trình từ điều kiện cực trị của phiếm hàm ràng buộc

Điều kiện biên của bài toán:

$$u_1 = v_1 = u_{13} = v_{13} = 0 \quad (3.7)$$

Điều kiện cực trị của phiếm hàm ràng buộc Z (3.6) theo các chuyển vị chưa biết sẽ là:

$$\frac{\partial Z}{\partial u_i} = 0 \quad \begin{cases} i = 2 \div 12 \\ i = 14 \div 26 \end{cases}; \quad \frac{\partial Z}{\partial v_j} = 0 \quad \begin{cases} j = 2 \div 12 \\ j = 14 \div 26 \end{cases} \quad (3.8)$$

Từ điều kiện cực trị (3.8) sẽ lập được hệ phương trình gồm 48 phương trình, chứa 48 ẩn số là các thành phần chuyển vị tại các nút dầm.

### Xác định các thành phần chuyển vị tại các nút dầm

Giải hệ phương trình (3.5) sẽ tìm được các thành phần chuyển vị tại các nút và kết quả các thành phần chuyển vị tại các nút dầm được lập thành bảng 3.7.

Bảng 3.7 Kết quả chuyển vị theo hai phương tại các nút dầm

Nút		<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
Chuyển vị (cm)	Phương X	0	-14,964	-13,525	-7,6849	-2,8233
	Phương Y	0	7,48294	5,64011	-1,9557	-11,178
Nút		<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>
Chuyển vị (cm)	Phương X	-0,5032	0	0,5032	2,82327	7,68486
	Phương Y	-18,367	-21,052	-18,367	-11,178	-1,9557
Nút		<b>11</b>	<b>12</b>	<b>13</b>	<b>14</b>	<b>15</b>
Chuyển vị (cm)	Phương X	13,5251	14,9638	0	2,14426	15,2762
	Phương Y	5,64011	7,48294	0	0,0096	7,38019
Nút		<b>16</b>	<b>17</b>	<b>18</b>	<b>19</b>	<b>20</b>
Chuyển vị (cm)	Phương X	12,6906	6,43975	1,71351	-0,1319	0
	Phương Y	5,57835	-1,9784	-11,173	-18,346	-21,026
Nút		<b>21</b>	<b>22</b>	<b>23</b>	<b>24</b>	<b>25</b>
Chuyển vị (cm)	Phương X	0,13193	-1,7135	-6,4398	-12,691	-15,276
	Phương Y	-18,346	-11,173	-1,9784	5,57835	7,38019
Nút		<b>26</b>				
Chuyển vị (cm)	Phương X	-2,1443				
	Phương Y	0,0096				

### Xác định nội lực trong các thanh dầm

Theo công thức (2.39), (2.43) sẽ xác định được nội lực trong các thanh dầm. Kết quả phân tích nội lực trong các thanh dầm được lập thành bảng 3.8.

**Bảng 3.8 Kết quả nội lực trong các thanh dầm**

Thanh	Nội lực (kN)	Thanh	Nội lực (kN)	Thanh	Nội lực (kN)
1	-891,72249	22	91,55840	43	28,07603
2	-931,45293	23	462,49942	44	28,07603
3	-535,99495	24	515,10710	45	178,32813
4	-93,05812	25	30,99376	46	15,03556
5	251,72811	26	-331,86969	47	-171,06425
6	436,22602	27	-199,50639	48	-224,62901
7	436,22602	28	-73,41352	49	169,92336
8	251,72811	29	15,33466	50	-445,40157
9	-93,05812	30	66,77608	51	175,66608
10	-535,99495	31	83,57244	52	111,47138
11	-931,45293	32	66,77608	53	-85,46455
12	-891,72249	33	15,33466	54	-224,64300
13	515,10710	34	-73,41352	55	-130,21812
14	462,49942	35	-199,50639	56	-130,21812
15	91,55840	36	-331,86969	57	-224,64300
16	-288,22274	37	30,99376	58	-85,46455
17	-572,31450	38	169,92336	59	111,47138
18	-721,21913	39	-224,62901	60	175,66608
19	-721,21913	40	-171,06425	61	-445,40157
20	-572,31450	41	15,03556		
21	-288,22274	42	178,32813		

**Kiểm tra cân bằng nút dầm**

Kết quả kiểm tra cân bằng tại các nút của dầm vòm siêu tĩnh trong, siêu tĩnh ngoài được tập hợp và lập thành bảng 3.9.

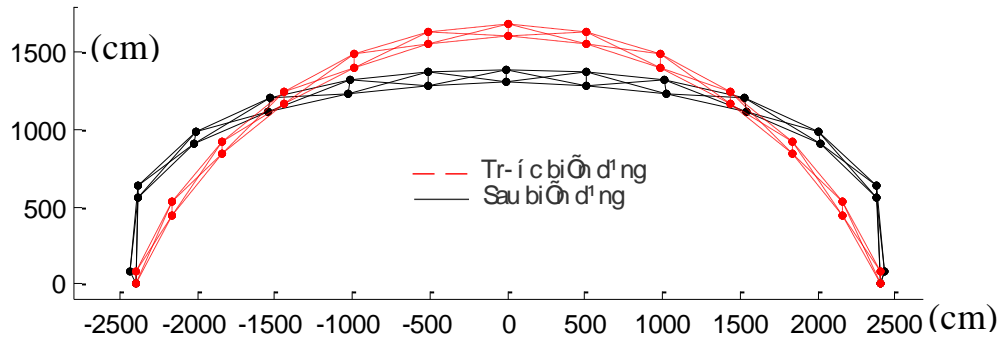
**Bảng 3.18 Kết quả kiểm tra cân bằng tại các nút dầm**

Nút	$\sum F_x$	$\sum F_y$	Nút	$\sum F_x$	$\sum F_y$
1	0	0	14	-0,5142e-9	0,6302e-9
2	-0,2861e-9	-0,1147e-8	15	0,3555e-9	-0,1107e-8
3	-0,1166e-9	-0,2067e-8	16	-0,2302e-9	0,1159e-8
4	0,5830e-8	-0,1279e-7	17	-0,2509e-8	0,1056e-7
5	-0,6299e-8	-0,3267e-8	18	0,3690e-9	0,5950e-9
6	0,3950e-9	-0,2275e-9	19	-0,3754e-10	0,6516e-10
7	-0,3762e-9	0,5711e-11	20	-0,8283e-10	-0,1006e-10
8	0,6894e-10	-0,1554e-9	21	0,4331e-10	0,3327e-9
9	0,3624e-8	-0,4190e-9	22	-0,7767e-9	-0,2361e-9
10	-0,3653e-8	-0,9284e-8	23	-0,1569e-9	0,1544e-7
11	0,3688e-8	-0,1883e-8	24	0,7078e-9	0,1427e-8
12	0,1970e-9	-0,2295e-9	25	-0,3900e-9	-0,2535e-9
13	0	0	26	0,2457e-9	0,5200e-10



Với số liệu kiểm tra cân bằng tại các nút (bảng 3.9) nhận thấy tất cả các nút đều thỏa mãn điều kiện cân bằng.

**Hình dạng dàn trước và sau khi biến dạng:** Kết quả hình dạng dàn trước và sau khi biến dạng được thể hiện như hình 3.5.



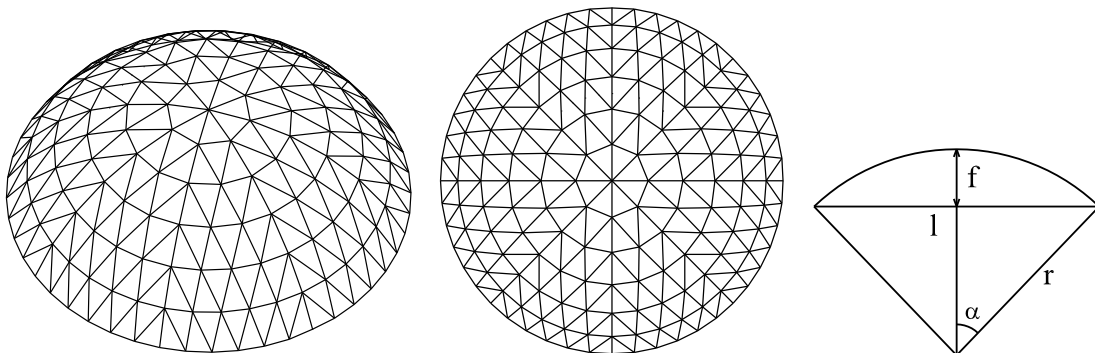
**Hình 3.5 Hình dạng dàn trước và sau khi biến dạng**

### 3.4 Bài toán dàn cầu không gian

Xét dàn cầu không gian một lớp Kiewitt 8 như hình 3.13:  $l$  là nhịp dàn,  $f$  là độ võng của dàn và đặt  $k = f / l$  gọi là độ thoải của dàn. Dàn cầu không gian một lớp thường có nhịp dàn  $1 \leq 60$ (m) và độ thoải của dàn  $k = 1/8 \div 1/3$ .

Bán kính cong của dàn : 
$$r = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f} \quad (3.9)$$

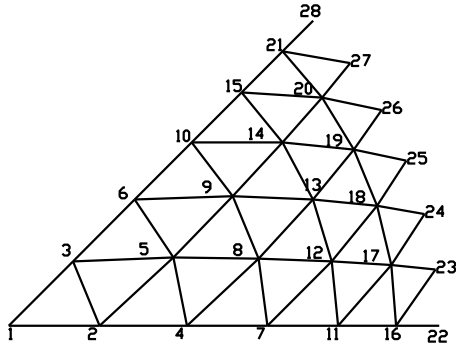
Phương trình mặt cầu có dạng: 
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (3.10)$$



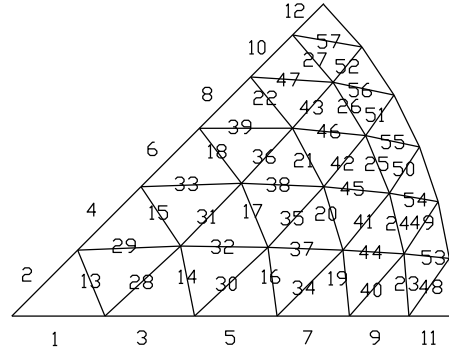
**Hình 3.6 Dàn cầu không gian K8**

**Ví dụ 4:** Xét dàn Kiewitt 8 với nhịp dàn  $l=40$ m, độ thoải của dàn  $k=1/8$  và các thanh dàn có cùng mô đun đàn hồi  $E = 2.10^4$  (kN / cm<sup>2</sup>). Tiết diện các thanh sườn (có trục thanh thuộc mặt phẳng đi qua tâm) và các thanh vành là  $\phi 121 \times 3,5$  (mm); tiết diện các thanh xiên là  $\phi 114 \times 3$  (mm). Chịu lực  $4P / 3$  tác dụng thẳng đứng tại

nút đỉnh dàn và chịu lực P tại các nút còn lại, với giá trị lực P=40(kN). Xác định nội lực trong các thanh dàn và các thành phần chuyển vị tại các nút dàn theo PTPTHH.



Hình 3.7 Số hiệu nút của dàn K8



Hình 3.8 Số hiệu thanh cho dàn K8

### Lời giải

Dàn cầu K8 đối xứng về hình học và chịu tải trọng đối xứng nên để giảm số ẩn của bài toán nhưng không làm ảnh hưởng kết quả tính toán, đề tài phân tích tính toán cho 1/8 dàn cầu gồm 57 thanh và có 21 nút. Các thanh, các nút của dàn cầu K8 được đánh số như hình 3.14, hình 3.15 và có thêm các điều kiện như sau:

- Các thanh 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 có độ cứng giảm đi một nửa so với độ cứng trong dàn ban đầu. Còn các thanh còn lại có độ cứng vẫn giữ nguyên độ cứng so với dàn ban đầu.

### Thiết lập phiếm hàm lượng ràng buộc cho kết cấu

Phiếm hàm lượng ràng buộc của dàn (2.47) có thể được viết như sau:

$$Z = \sum_{k=1}^{57} \frac{E_k A_k}{l_k^{(0)}} \times (\Delta l_k)^2 - \sum_{r=1}^{21} 2P_r \cdot w_r \rightarrow \min \quad (3.11)$$

trong công thức (3.11) khi thì các biến dạng dài tuyệt đối của các thanh dàn được tính theo (2.46).

### Thiết lập hệ phương trình phi tuyến từ điều kiện cực trị của phiếm hàm

- Điều kiện biên:  $u_1 = v_1 = v_2 = v_4 = v_7 = v_{11} = v_{16} = v_{22} = u_{22} = v_{23} = u_{23} = 0$ ;

$v_{24} = u_{24} = v_{25} = u_{25} = v_{26} = u_{26} = 0$ ;  $v_{27} = u_{27} = v_{28} = u_{28} = 0$ ;  $u_3 = v_3$ ;  $u_6 = v_6$ ;

$u_{10} = v_{10}$ ;  $u_{15} = v_{15}$ ;  $u_{21} = v_{21}$ .

$$(3.12)$$

Điều kiện cực trị của phiếm hàm lượng ràng buộc Z (3.11) theo các thành phần chuyển vị chưa biết:

$$\frac{\partial Z}{\partial u_i} = 0 \quad i = 2 \div 21; \quad \frac{\partial Z}{\partial v_j} = 0 \quad \begin{cases} j = 5 \\ j = 8 \div 9 \\ j = 12 \div 14 \\ j = 17 \div 20 \end{cases}; \quad \frac{\partial Z}{\partial w_k} = 0 \quad k = 1 \div 21. \quad (3.13)$$

Theo điều kiện (3.13) thiết lập được hệ phương trình gồm 51 phương trình tuyến tính, chứa 51 ẩn số là các thành phần chuyển vị tại các nút dàn.

### Xác định các thành phần chuyển vị tại các nút dàn

Giải hệ phương trình (3.13) bằng hàm fsolve trong Optimization Toolbox, sẽ tìm được 51 ẩn là các thành phần chuyển vị tại các nút dàn. Kết quả các thành phần chuyển vị được thể hiện như bảng 3.10

**Bảng 3.10 Kết quả chuyển vị tại các nút dàn**

Nút	Chuyển vị (cm)			Nút	Chuyển vị (cm)		
	Phương x	Phương y	Phương x		Phương x	Phương y	Phương x
<b>1</b>	0	0	7,284781	<b>12</b>	-12,1182	-2,30119	-38,7154
<b>2</b>	-3,31132	0	-20,0455	<b>13</b>	-9,06954	-3,75673	-34,0736
<b>3</b>	-2,34146	-2,34146	-20,0455	<b>14</b>	-10,196	-6,94165	-38,7154
<b>4</b>	-7,01566	0	-27,7212	<b>15</b>	-11,1502	-11,1502	-39,0461
<b>5</b>	-6,22373	-2,57795	-38,5136	<b>16</b>	-22,9248	0	-50,3954
<b>6</b>	-4,96082	-4,96082	-27,7212	<b>17</b>	-13,7509	-1,81073	-34,5109
<b>7</b>	-11,1265	0	-33,4439	<b>18</b>	-8,38087	-2,51391	-24,481
<b>8</b>	-9,27224	-2,50175	-39,8431	<b>19</b>	-7,70377	-4,14857	-24,481
<b>9</b>	-8,32547	-4,78746	-39,8431	<b>20</b>	-11,0038	-8,44299	-34,5109
<b>10</b>	-7,86763	-7,86763	-33,4439	<b>21</b>	-16,2103	-16,2103	-50,3954
<b>11</b>	-15,7687	0	-39,0461				

### Nội lực trong các thanh dàn

Theo công thức (2.46) và (2.43), sẽ xác định được nội lực trong các thanh dàn. Kết quả nội lực trong các thanh dàn được thể hiện như bảng 3.11.

**Bảng 3.11 Kết quả nội lực trong các thanh dàn**

Thanh	Nội lực (kN)	Thanh	Nội lực (kN)	Thanh	Nội lực (kN)
<b>1</b>	-81,6625	<b>20</b>	-220,179	<b>39</b>	-48,8989
<b>2</b>	-81,6625	<b>21</b>	-220,179	<b>40</b>	-51,9182
<b>3</b>	-101,985	<b>22</b>	-255,954	<b>41</b>	-115,899
<b>4</b>	-101,985	<b>23</b>	-246,397	<b>42</b>	-151,615
<b>5</b>	-106,699	<b>24</b>	-189,06	<b>43</b>	-182,501
<b>6</b>	-106,699	<b>25</b>	-172,663	<b>44</b>	-182,501
<b>7</b>	-107,038	<b>26</b>	-189,06	<b>45</b>	-151,615

Thanh	Nội lực (kN)	Thanh	Nội lực (kN)	Thanh	Nội lực (kN)
<b>8</b>	-107,038	<b>27</b>	-246,397	<b>46</b>	-115,899
<b>9</b>	-96,8603	<b>28</b>	-101,573	<b>47</b>	-51,9182
<b>10</b>	-96,8603	<b>29</b>	-101,573	<b>48</b>	-97,8367
<b>11</b>	-45,7795	<b>30</b>	-63,2773	<b>49</b>	-147,85
<b>12</b>	-45,7795	<b>31</b>	-159,803	<b>50</b>	-156,628
<b>13</b>	-246,82	<b>32</b>	-159,803	<b>51</b>	-157,129
<b>14</b>	-257,123	<b>33</b>	-63,2773	<b>52</b>	-148,47
<b>15</b>	-257,123	<b>34</b>	-48,8989	<b>53</b>	-148,47
<b>16</b>	-261,426	<b>35</b>	-122,448	<b>54</b>	-157,129
<b>17</b>	-237,578	<b>36</b>	-182,399	<b>55</b>	-156,628
<b>18</b>	-261,426	<b>37</b>	-182,399	<b>56</b>	-147,85
<b>19</b>	-255,954	<b>38</b>	-122,448	<b>57</b>	-97,8367

### Kiểm tra cân bằng tại các nút dàn

Sau khi xác định được các thành phần chuyển vị tại các nút dàn và nội lực trong các thanh dàn, tác giả kiểm tra cân bằng tất cả các nút dàn. Xét tại nút bất kỳ có n thanh quy tụ qua nút và có tải trọng P tác dụng, công thức kiểm tra cân bằng nút dàn:

$$\left[ \sum F_x; \sum F_y; \sum F_z \right] = \left[ \sum_{i=1}^n N_{ix} + P_x; \sum_{i=1}^n N_{iy} + P_y; \sum_{i=1}^n N_{iz} + P_z \right] \quad (3.14)$$

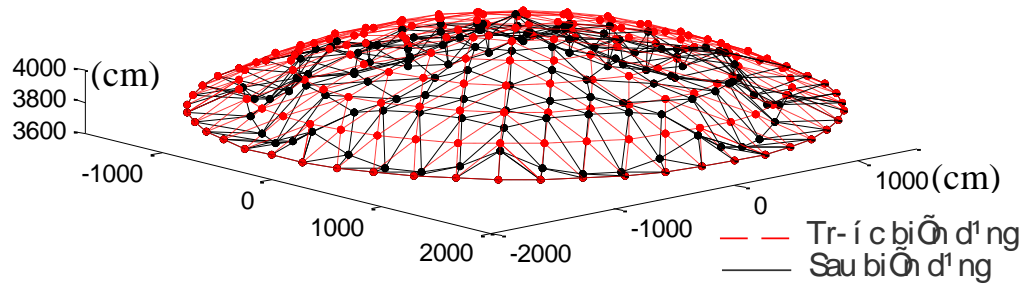
Kết quả kiểm tra cân bằng tại các nút dàn được lập thành bảng 3.21.

**Bảng 3.12 Kết quả kiểm tra cân bằng tại các nút dàn**

Tên nút	$\sum F_x$	$\sum F_y$	$\sum F_z$
<b>1</b>	0	0	6,66E-16
<b>2</b>	-3E-15	0	-3,8E-15
<b>4</b>	0	0	0
<b>5</b>	-4,1E-14	0	-6,9E-15
<b>7</b>	-3,2E-14	-2,6E-13	-2E-14
<b>8</b>	0	0	0
<b>9</b>	-6,3E-14	0	-4,1E-14
<b>11</b>	4,57E-13	4,49E-14	-3,2E-14
<b>12</b>	3,83E-13	-1E-13	-7,5E-14
<b>13</b>	0	0	0
<b>14</b>	4,74E-13	0	-4,8E-14
<b>16</b>	-1,6E-13	4,88E-14	-9,5E-14
<b>17</b>	-6,3E-13	1,6E-13	2,88E-14
<b>18</b>	5,2E-13	3,02E-13	3,55E-13
<b>19</b>	0	0	0
<b>20</b>	1,26E-13	0	-5,4E-14

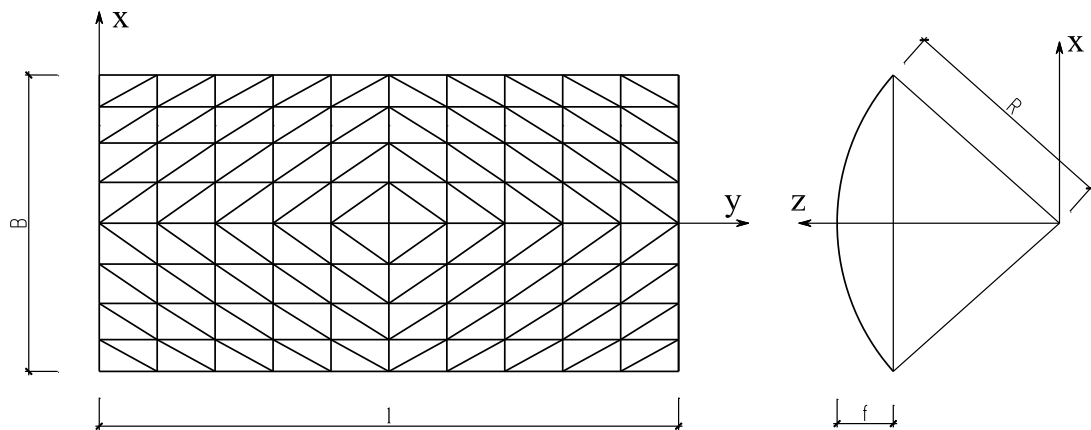
Với số liệu kiểm tra cân bằng tại các nút dãn (bảng 3.12) cho thấy tất cả các nút dãn đều cân bằng. Như vậy kết quả tính toán là tin cậy.

**Hình dạng dãn trước và sau khi biến dạng:** Kết quả hình dạng dãn trước và sau khi biến dạng được thể hiện như hình 3.16.



Hình 3.9 Hình dạng kết cấu dãn trước và sau biến dạng

### 3.5 Bài toán dãn vòm không gian một lớp



Hình 3.10 Kết cấu dãn vòm không gian một lớp

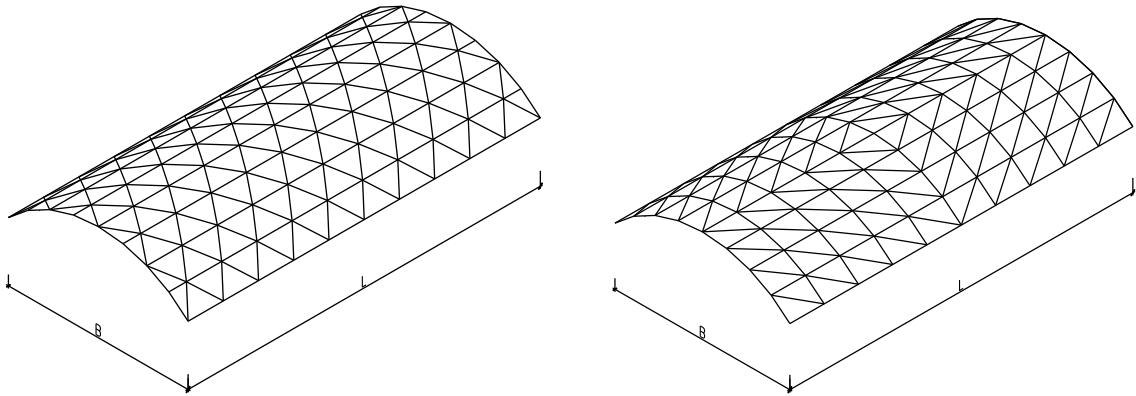
Kết cấu dãn vòm không gian một lớp (hình 3.10) là hệ kết cấu nhẹ, có độ cứng tốt và thường được sử dụng làm kết cấu mái trong các công trình có kích thước nhỏ (thường  $B < 25\text{m}$ ;  $l \leq 30\text{m}$  và  $B/l < 1$ ) như: các xưởng sản xuất, gara sửa chữa cơ khí, các công trình phục vụ cho nông nghiệp v.v... Kết cấu dãn vòm không gian thường được liên kết với hệ kết cấu bên dưới thông qua hệ thống dầm biên nằm trên đỉnh các cột. Tùy theo công trình cụ thể mà kết cấu dãn vòm không gian một lớp có thể liên kết trên hai biên hoặc liên kết trên bốn biên với kết cấu bên dưới. Độ vồng  $k = f / B$  của kết cấu dãn vòm thường  $(1/5 \div 1/3)$  [16].

Phương trình của mặt vòm không gian:

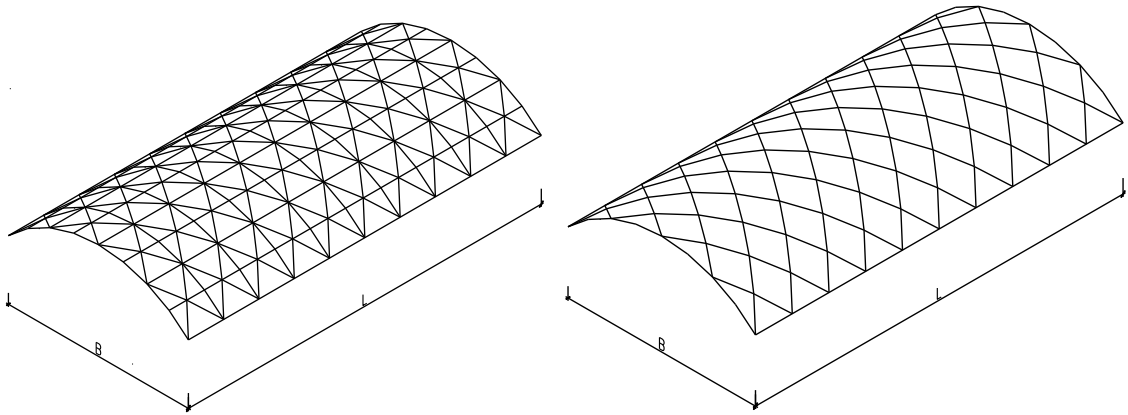
$$\begin{cases} x^2 + z^2 = R^2 \\ 0 \leq y \leq l \end{cases} \quad (3.15)$$

trong đó:  $R = \frac{B(1+4k^2)}{8k}$  (3.16)

Kết cấu dàn vòm không gian một lớp có rất nhiều cách phân loại, tùy theo các tài liệu khác nhau. Nhưng nếu dựa vào hình dáng ô lưới của kết cấu dàn vòm có thể chia dàn vòm không gian một lớp ra làm bốn loại [16]:



a) Dàn vòm không gian một lớp loại 1    b) Dàn vòm không gian một lớp loại 2



c) Dàn vòm không gian một lớp loại 3    d) Dàn vòm không gian một lớp loại 4

**Hình 3.11 Một số dạng kết cấu dàn vòm không gian một lớp**

- Kết cấu dàn vòm không gian một lớp loại 1: là kết cấu dàn vòm một lớp có các ô mắt lưới theo 3 phương được tạo bởi các thanh dọc và thanh xiên (hình 3.11a).
- Kết cấu dàn vòm không gian một lớp loại 2: là kết cấu dàn vòm một lớp có các ô mắt lưới theo 3 phương được tạo bởi các thanh dọc, thanh ngang và thanh xiên (hình 3.11b).

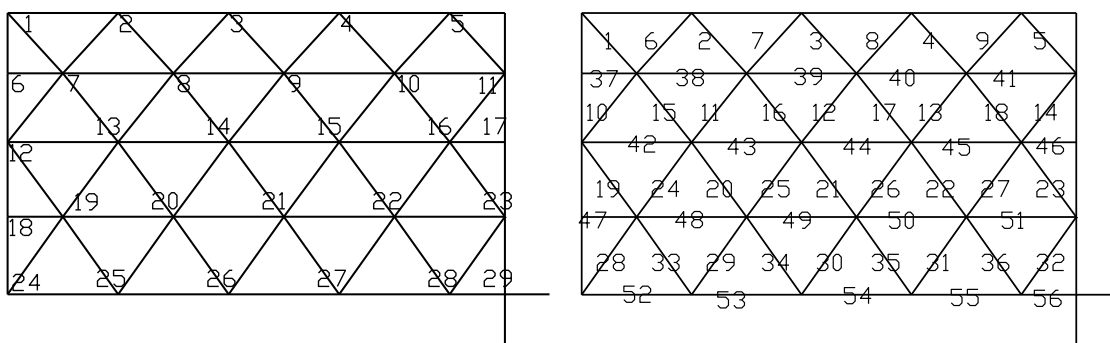
- Kết cấu dàn vòm không gian một lớp loại 3: là kết cấu dàn vòm một lớp có các ô mắt lưới theo 4 phương được tạo bởi các thanh dọc, thanh ngang và thanh xiên (hình 3.11c).

- Kết cấu dàn vòm không gian một lớp loại 4: là kết cấu dàn vòm một lớp có các ô mắt lưới theo 2 phương được tạo bởi các thanh xiên (hình 3.11d).

Sau đây đề tài trình bày phân tích tuyến tính kết cấu dàn vòm không gian một lớp loại 1.

**Ví dụ 5:** Xét dàn vòm không gian một lớp loại 1 với bề rộng dàn  $B=15\text{m}$ , độ vồng của dàn  $k=1/3$ , chiều dài dàn  $l=27\text{m}$  và các thanh có cùng mô đun đàn hồi  $E = 2.10^4 (\text{kN}/\text{cm}^2)$ . Tiết diện các thanh xiên là  $\phi 133 \times 4\text{mm}$ , các thanh dọc là  $\phi 89 \times 4\text{mm}$  với điều kiện kết cấu dàn vòm liên kết với hệ kết cấu bên dưới trên bốn biên chịu tác dụng của tải trọng thẳng đứng tại các nút dàn  $P = 20(\text{kN})$  theo phương thẳng đứng.

**Lời giải**



a- Số hiệu các nút dàn

b- Số hiệu các thanh dàn

**Hình 3.12 Kết cấu dàn vòm không gian một lớp**

Do dàn đối xứng về hình học chịu tải trọng đối xứng để giảm ần số khi tính toán nhưng không làm ảnh hưởng đến kết quả của bài toán, tác giả phân tích tính toán cho 1/4 dàn. Trước khi viết lượng ràng buộc cho kết cấu, các nút dàn và thanh dàn được đánh số hiệu như hình 3.12.

**Thiết lập lượng ràng buộc của kết cấu**

Lượng ràng buộc của kết cấu dàn vòm không gian một lớp loại 1 (2.47) được tính như sau:

$$Z = \sum_{k=1}^{56} \frac{E_k A_k}{l_k^{(0)}} \times (\Delta l_k)^2 + \sum_{i=7}^{10} 2P \cdot w_i + \sum_{i=13}^{16} 2P \cdot w_i + \sum_{i=19}^{22} 2P \cdot w_i + \sum_{i=25}^{28} P \cdot w_i + P \cdot (w_{11} + w_{23}) \rightarrow \min \quad (3.17)$$

Trong (3.29) biến dạng dài tuyệt đối của các thanh được tính theo (2.46).

$$\text{Do tính đối xứng nên: } u_{16} - u_{17} = 0; w_{16} - w_{17} = 0; w_{28} - w_{29} = 0 \quad (3.18)$$

Theo phương pháp thừa số Lagrange phiếm hàm ràng buộc mở rộng L cho kết cấu có thể viết như sau:

$$L = Z + \lambda_1 (u_{16} - u_{17}) + \lambda_2 (w_{16} - w_{17}) + \lambda_3 (w_{28} - w_{29}) \rightarrow \min \quad (3.19)$$

**Thiết lập hệ phương trình phi tuyến từ điều kiện cực trị của phiếm hàm mở rộng**

Điều kiện biên của bài toán:

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = u_6 = u_{12} = u_{18} = u_{24} = u_{25} = u_{26} = u_{27} = u_{28} = u_{29} = 0 \\ v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = v_5 = v_6 = v_{11} = v_{12} = v_{17} = v_{18} = v_{23} = v_{24} = v_{29} = 0 \\ w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = w_5 = w_6 = w_{12} = w_{18} = w_{24} = 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

Điều kiện cực trị của phiếm hàm ràng buộc mở rộng F (3.19) theo các thành phần chuyển vị chưa biết là:

$$\frac{\partial L}{\partial u_i} = 0 \begin{cases} i = 7 \div 11 \\ i = 13 \div 17 \\ i = 19 \div 23 \end{cases}; \frac{\partial L}{\partial v_j} = 0 \begin{cases} j = 7 \div 10 \\ j = 13 \div 16 \\ j = 19 \div 22 \\ j = 25 \div 28 \end{cases}; \frac{\partial L}{\partial w_k} = 0 \begin{cases} k = 7 \div 11 \\ k = 13 \div 17 \\ k = 19 \div 23 \\ k = 25 \div 29 \end{cases}; \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 (i = 1 \div 3) \quad (3.21)$$

Từ điều kiện cực trị của phiếm hàm mở rộng L (3.21) thiết lập được hệ phương trình gồm 54 phương trình phi tuyến chứa 54 ẩn số là các thành phần chuyển vị của các nút dãn và các thừa số lagrange.

**Xác định các thành phần chuyển vị tại các nút dãn**

Giải hệ phương trình (3.21) tìm được các thành phần chuyển vị tại các nút dãn. Kết quả các thành phần chuyển vị tại các nút dãn được thể hiện như bảng 3.13.

**Bảng 3.13 Kết quả chuyển vị tại các nút dãn**

Nút	Chuyển vị (cm)			Nút	Chuyển vị (cm)		
	Phương x	Phương y	Phương x		Phương x	Phương y	Phương x
<b>1</b>	0	0	0	<b>14</b>	-0,41372	0,100671	-1,7161
<b>2</b>	0	0	0	<b>15</b>	-0,66536	0,07766	-2,51209
<b>3</b>	0	0	0	<b>16</b>	-0,80932	0,028763	-2,95235
<b>4</b>	0	0	0	<b>17</b>	-0,80932	0	-2,95235



Nút	Chuyển vị (cm)			Nút	Chuyển vị (cm)		
	Phương x	Phương y	Phương x		Phương x	Phương y	Phương x
<b>5</b>	0	0	0	<b>18</b>	0	0	0
<b>6</b>	0	0	0	<b>19</b>	-0,15915	0,066171	-0,72582
<b>7</b>	0,38812	-0,07467	0,197373	<b>20</b>	-0,15915	0,119108	-1,10102
<b>8</b>	1,691934	-0,10278	0,982097	<b>21</b>	-0,15915	0,112491	-1,38817
<b>9</b>	2,894046	-0,08302	1,70561	<b>22</b>	-0,15915	0,066171	-1,56812
<b>10</b>	3,70987	-0,04469	2,196627	<b>23</b>	-0,15915	0	-1,62938
<b>11</b>	3,99648	0	2,369129	<b>24</b>	0	0	0
<b>12</b>	0	0	0	<b>25</b>	0	0,096793	-0,23501
<b>13</b>	-0,13783	0,080537	-0,75646	<b>26</b>	0	0,120991	-0,43806

### Xác định nội lực trong các thanh dầm

Sau khi xác định được các thành phần chuyển vị tại các nút dầm, theo (2.43), (2.46) sẽ xác định được nội lực trong các thanh dầm. Kết quả phân tích nội lực trong các thanh dầm được lập thành bảng 3.14.

**Bảng 3.14 Kết quả nội lực trong các thanh dầm**

Thanh	Nội lực (kN)	Thanh	Nội lực (kN)	Thanh	Nội lực (kN)
<b>1</b>	-76,1356	<b>22</b>	-60,5312	<b>43</b>	14,33687
<b>2</b>	-93,409	<b>23</b>	-40,3496	<b>44</b>	-16,385
<b>3</b>	-81,2689	<b>24</b>	40,37656	<b>45</b>	-34,8181
<b>4</b>	-57,7177	<b>25</b>	20,19501	<b>46</b>	-40,9625
<b>5</b>	-30,2588	<b>26</b>	1,35E-02	<b>47</b>	94,23675
<b>6</b>	15,61788	<b>27</b>	-20,1681	<b>48</b>	37,6947
<b>7</b>	32,89135	<b>28</b>	-9,18585	<b>49</b>	-4,71184
<b>8</b>	20,75119	<b>29</b>	-16,1111	<b>50</b>	-32,9829
<b>9</b>	-2,79996	<b>30</b>	-23,0364	<b>51</b>	-47,1184
<b>10</b>	105,7896	<b>31</b>	-29,9617	<b>52</b>	68,92308
<b>11</b>	74,0837	<b>32</b>	-36,887	<b>53</b>	17,23077
<b>12</b>	42,37779	<b>33</b>	-64,5881	<b>54</b>	-19,6923
<b>13</b>	10,67189	<b>34</b>	-57,6628	<b>55</b>	-41,8462
<b>14</b>	-21,034	<b>35</b>	-50,7375	<b>56</b>	-49,2308
<b>15</b>	-147,858	<b>36</b>	-43,8123		
<b>16</b>	-116,152	<b>37</b>	-106,334		
<b>17</b>	-84,4458	<b>38</b>	-20,0185		
<b>18</b>	-52,7399	<b>39</b>	14,0694		
<b>19</b>	-121,076	<b>40</b>	27,29375		
<b>20</b>	-100,894	<b>41</b>	31,82247		
<b>21</b>	-80,7127	<b>42</b>	57,34747		

### Kiểm tra cân bằng tại các nút dầm

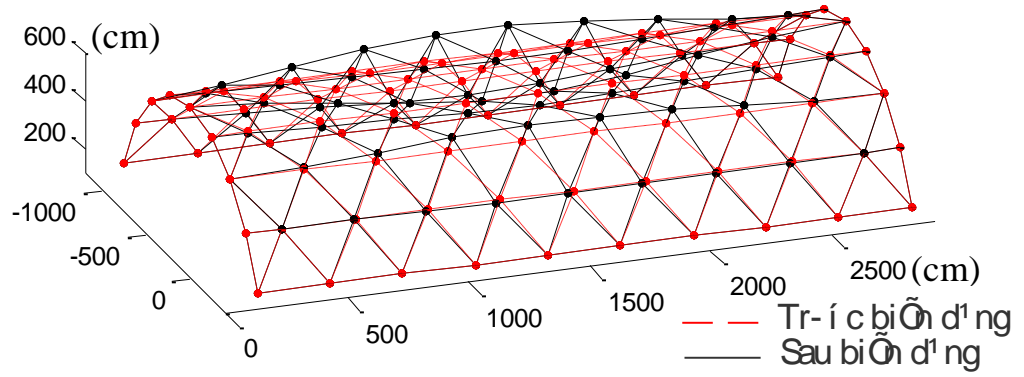
Để kiểm tra độ tin cậy của kết quả phân tích. Tác giả kiểm tra cân bằng tất cả các nút của dầm và kết quả kiểm tra cân bằng tại các nút dầm được lập thành bảng 3.15.

**Bảng 3.15 Kết quả kiểm tra cân bằng tại các nút dầm**

Tên nút	$\sum F_x$	$\sum F_y$	$\sum F_z$
<b>1</b>	0	0	0
<b>2</b>	0	0	0
<b>4</b>	0	0	0
<b>5</b>	0	0	0
<b>7</b>	0	0	0
<b>8</b>	0	0	0
<b>9</b>	-5.41E-14	5.26E-15	9.53E-14
<b>11</b>	-2.14E-13	1.21E-13	9.87E-14
<b>12</b>	8.72E-13	3.31E-14	-1.16E-12
<b>13</b>	-9.12E-13	2.04E-13	4.48E-13
<b>14</b>	-6.19E-13	0	8.98E-14
<b>16</b>	0	0	0
<b>17</b>	-1.18E-13	8.83E-14	4.85E-15
<b>18</b>	-5.74E-13	-2.76E-13	1.24E-13
<b>19</b>	-8.22E-13	7.19E-13	3.95E-13
<b>20</b>	2.37E-14	-1.68E-13	-1.58E-13
<b>21</b>	0	0	0
<b>22</b>	0	0	0
<b>23</b>	-4.13E-14	2.92E-14	-7.57E-14
<b>24</b>	8.50E-14	3.91E-14	-9.44E-14
<b>25</b>	-3.26E-13	-1.50E-14	-2.71E-13
<b>26</b>	-1.17E-13	-8.21E-14	-1.97E-13
<b>27</b>	-2.27E-13	0	-6.45E-14
<b>28</b>	0	0	0
<b>29</b>	0	-25.8462	-8.04E-15

Theo kết quả kiểm tra cân bằng tại các nút dàn (bảng 3.15) cho thấy các nút dàn đều cân bằng. Như vậy kết quả tính toán là tin cậy.

**Hình dạng dàn trước và sau khi biến dạng:** được thể hiện như hình 3.22.



**Hình 3.13 Hình dạng kết cấu dàn trước và sau biến dạng**

## KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

**Kết luận:** Qua các nội dung đã trình bày ở các chương trong đề tài nghiên cứu, có thể rút ra các kết luận sau đây:

1) Khi viết phương trình cân bằng cho các nút dàn thì không cần viết phương trình cân bằng cho các điểm biên, mà thay vào đó là viết điều kiện biên về mặt chuyển vị.

2) Khi áp dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss để phân tích kết cấu dàn thì không phải phân bài toán cần phân tích là bài toán tĩnh định và siêu tĩnh như một số phương pháp khác. Nên khi giải bài toán dàn theo phương pháp này có cách nhìn đơn giản hơn.

3) Dựa trên phương pháp nguyên lý cực trị Gauss đề tài đã xây dựng được phương pháp giải cho bài toán phân tích tuyến tính kết cấu dàn chịu tải trọng tĩnh tại nút dàn theo hai cách tiếp cận bài toán: Chọn ẩn số là các thành phần chuyển vị tại các nút dàn; Chọn ẩn số là các thành phần nội lực trong các thanh dàn.

4) Qua kết quả phân tích các bài toán khác nhau trong đề tài cho thấy áp dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss cho bài toán phân tích tuyến tính kết cấu dàn là tin cậy.

**Kiến nghị:** Có thể sử dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss như một phương pháp mới trong giảng dạy, học tập và nghiên cứu khi phân tích kết cấu dàn.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

### Tiếng Việt

- [1] Hà Huy Cương (IV/2005), *Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss*, Tạp chí khoa học và Kỹ thuật, Tr.112-118.
- [2] Phạm Văn Đạt (2015), *Phân tích kết cấu dàn chịu tải trọng tĩnh theo sơ đồ biến dạng*, Luận án Tiến sĩ kỹ thuật, Học viện kỹ thuật quân sự.
- [3] Đoàn Văn Duân (2011), *Nghiên cứu ổn định đàn hồi của kết cấu hệ thanh có xét đến biến dạng trượt*, Luận án Tiến sĩ kỹ thuật, Đại học Kiến trúc Hà Nội.
- [4] Trần Thị Kim Huệ (2005), *Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss đối với bài toán Cơ học kết cấu*, Luận văn Thạc sĩ kỹ thuật.
- [5] Vũ Đình Lai, Nguyễn Xuân Lựu, Bùi Đình Nghi (2002), *Sức bền vật liệu*, Nhà xuất bản Giao thông vận tải.
- [6] Nguyễn Thị Thùy Liên (2006), *Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss đối với các bài toán động lực học công trình*, Luận văn thạc sĩ kỹ thuật, Đại học Kiến trúc Hà nội.
- [7] Nguyễn Văn Liên, Nguyễn Phương Thành, Đinh Trọng Bằng (2003), *Sức bền vật liệu*, Nhà xuất bản xây dựng.
- [8] Trần Văn Liên (2011), *Cơ học môi trường liên tục*, Nhà xuất bản Xây dựng.
- [9] Chu Quốc Thắng (1997), *Phương pháp phần tử hữu hạn*, Nhà xuất bản Khoa học và kỹ thuật.
- [10] Lều Thọ Trình (2003), *Cơ học kết cấu, Tập I – Hệ tĩnh định*, Nhà xuất bản Khoa học và kỹ thuật.
- [11] Lều Thọ Trình (2003), *Cơ học kết cấu, Tập II – Hệ siêu tĩnh*, Nhà xuất bản Khoa học và kỹ thuật.
- [12] Phạm Văn Trung (2006), *Phương pháp mới tính hệ kết cấu dầm và mái treo*, Luận án Tiến sĩ kỹ thuật, Đại học Kiến trúc Hà Nội.

### **Tiếng Anh**

[13] Lanczos C. (1952), *The variational principles of mechanics*, University of Toronto Press Toronto.

[14] S. P. Timoshenko, D. H. Young (1965), *Theory of Structures*, Macgraw-Hill International Editions

### **Tiếng Nga**

[15] A. P. Ржаницын (1982), *Строительная механика*, Москва «Высшая школа».

### **Tiếng trung**

[16] 肖焱, 李维滨, 马少华 (1999), *空间结构设计与施工*, 东南大学出版社.

## PHỤ LỤC

### 1. Code ví dụ 1

```
% File: prcal.m
clear all
clc
global g p
x=[0;400;800;1200;1600;2000;2400;2400;2000;1600;1200;800;400;0];
y=[0;0;0;0;0;0;0;300;300;300;300;300;300;300];
EA=100000;p=40;u1=0;v1=0;v7=0;
syms u2 u3 u4 u5 u6 u8 u7 u9 u10 u11 u12 u13 u14 v2 v3 v4 v5 v6 v8 v9...
    v10 v11 v12 v13 v14
u=[u1;u2;u3;u4;u5;u6;u7;u8;u9;u10;u11;u12;u13;u14];
v=[v1;v2;v3;v4;v5;v6;v7;v8;v9;v10;v11;v12;v13;v14];
syms cd1 cd2 cd3 cd4 cd5 cd6 cd7 cd8 cd9 cd10 cd11 cd12 cd13 cd14 cd15...
    cd16 cd17 cd18 cd19 cd20 cd21 cd22 cd23 cd24 cd25 cd26 cd27 cd28...
    cd29 cd30 cd31
cd=[cd1;cd2;cd3;cd4;cd5;cd6;cd7;cd8;cd9;cd10;cd11;cd12;cd13;cd14;cd15;
    cd16;cd17;cd18;cd19;cd20;cd21;cd22;cd23;cd24;cd25;cd26;cd27;cd28;cd29;
    cd30;cd31];
syms bd1 bd2 bd3 bd4 bd5 bd6 bd7 bd8 bd9 bd10 bd11 bd12 bd13 bd14 bd15...
    bd16 bd17 bd18 bd19 bd20 bd21 bd22 bd23 bd24 bd25 bd26 bd27 bd28...
    bd29 bd30 bd31
bd=[bd1;bd2;bd3;bd4;bd5;bd6;bd7;bd8;bd9;bd10;bd11;bd12;bd13;bd14;bd15;
    bd16;bd17;bd18;bd19;bd20;bd21;bd22;bd23;bd24;bd25;bd26;bd27;bd28;bd29;
    bd30;bd31];
syms a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10 a11 a12 a13 a14 a15 a16 a17 a18 a19...
    a20 a21 a22 a23 a24 a25 a26 a27 a28 a29 a30 a31 a32
a=[a1;a2;a3;a4;a5;a6;a7;a8;a9;a10;a11;a12;a13;a14;a15;a16;a17;a18;a19;a20;
    a21;a22;a23;a24;a25;a26;a27;a28;a29;a30;a31;a32];
a(1)=0;
for i=1:13
    cd(i)=sqrt((x(i+1)-x(i))^2+(y(i+1)-y(i))^2);
    bd(i)=((x(i+1)-x(i))*(u(i+1)-u(i))+(y(i+1)-y(i))*(v(i+1)-v(i)))/cd(i);
    a(i+1)=a(i)+EA*((bd(i))^2)/cd(i);
end
for i=1:6
    cd(13+i)=sqrt((x(15-i)-x(i))^2+(y(15-i)-y(i))^2);
    bd(13+i)=((x(15-i)-x(i))*(u(15-i)-u(i))+(y(15-i)-y(i))*(v(15-i)-...
        v(i)))/cd(i+13);
    a(i+14)=a(13+i)+EA*((bd(13+i))^2)/cd(13+i);
end
for i=1:6
    cd(19+i)=sqrt((x(15-i)-x(i+1))^2+(y(15-i)-y(i+1))^2);
    bd(19+i)=((x(15-i)-x(i+1))*(u(15-i)-u(i+1))+(y(15-i)-y(i+1))*(v(15-i)-...
```

```

        -v(i+1))/cd(i+19);
    a(i+20)=a(19+i)+EA*((bd(19+i))^2)/cd(19+i);
end
for i=1:6
    cd(25+i)=sqrt((x(14-i)-x(i))^2+(y(14-i)-y(i))^2);
    bd(25+i)=((x(14-i)-x(i))*(u(14-i)-u(i))+y(14-i)-y(i))*(v(14-i)-...
        v(i))/cd(i+25);
    a(i+26)=a(25+i)+EA*((bd(25+i))^2)/cd(25+i);
end
b=a(32)+2*p*(v(8)+v(9)+v(10)+v(11)+v(12)+v(13)+v(14));
t=[u2;u3;u4;u5;u6;u7;u8;u9;u10;u11;u12;u13;u14;v2;v3;v4;v5;v6;v8;v9;v10;
    v11;v12;v13;v14];
syms h1 h2 h3 h4 h5 h6 h7 h8 h9 h10 h11 h12 h13 h14 h15 h16 h17 h18 h19...
    h20 h21 h22 h23 h24 h25
h=[h1;h2;h3;h4;h5;h6;h7;h8;h9;h10;h11;h12;h13;h14;h15;h16;h17;h18;h19;h20;
    h21;h22;h23;h24;h25];
for i=1:25
    h(i)=diff(b,t(i));
end
g=simplify(h);
% File myfun.m
function f=myfun(x)
global g
for i=1:13
    magic_str=['u',int2str(i+1),'=x(i)'];    eval(magic_str);
end
for i=1:5
    magic_str=['v',int2str(i+1),'=x(13+i)'];    eval(magic_str);
end
for i=1:7
    magic_str=['v',int2str(i+7),'=x(18+i)'];    eval(magic_str);
end
f=eval(g);
return
% File: cal.m
x0=zeros(25,1);
options=optimset('display','iter','maxfunevals',1000);
[x,fval,exitflag]=fsolve(@myfun,x0,options)
global p
u=zeros(14,1);v=zeros(14,1);
for i=1:13
    u(i+1)=x(i);
end
for i=1:5

```



```

    v(i+1)=x(13+i);
end
for i=1:7
    v(i+7)=x(18+i);
end
x=[0;400;800;1200;1600;2000;2400;2400;2000;1600;1200;800;400;0];
y=[0;0;0;0;0;0;0;300;300;300;300;300;300;300];EA=800000;
syms n1 n2 n3 n4 n5 n6 n7 n8 n9 n10 n11 n12 n13 n14 n15 n16 n17 n18 n19...
    n20 n21 n22 n23 n24 n25 n26 n27 n28 n29 n30 n31
n=[n1;n2;n3;n4;n5;n6;n7;n8;n9;n10;n11;n12;n13;n14;n15;n16;n17;n18;n19;n20;
    n21;n22;n23;n24;n25;n26;n27;n28;n29;n30;n31];
for i=1:13
    cd(i)=sqrt((x(i+1)-x(i))^2+(y(i+1)-y(i))^2);
    bd(i)=((x(i+1)-x(i))*(u(i+1)-u(i))+(y(i+1)-y(i))*(v(i+1)-v(i))))/cd(i);
end
for i=1:6
    cd(13+i)=sqrt((x(15-i)-x(i))^2+(y(15-i)-y(i))^2);
    bd(13+i)=((x(15-i)-x(i))*(u(15-i)-u(i))+(y(15-i)-y(i))*(v(15-i)-v(i))))/cd(i+13);
end
for i=1:6
    cd(19+i)=sqrt((x(15-i)-x(i+1))^2+(y(15-i)-y(i+1))^2);
    bd(19+i)=((x(15-i)-x(i+1))*(u(15-i)-u(i+1))+(y(15-i)-y(i+1))*(v(15-i)...
        -v(i+1))))/cd(i+19);
end
for i=1:6
    cd(25+i)=sqrt((x(14-i)-x(i))^2+(y(14-i)-y(i))^2);
    bd(25+i)=((x(14-i)-x(i))*(u(14-i)-u(i))+(y(14-i)-y(i))*(v(14-i)-v(i))))/cd(i+25);
end
for i=1:31
    n(i)=(bd(i)*EA)/cd(i);
end
vpa(n,8)

```

## 2. Code ví dụ 2

```

% File: prcal.m
clear all
clc
global g p
p=200;ea=10^3; x=[0,500,700,400];y=[0,0,0,300];
syms u1 u2 n1 n2 n3 l1 l2 l3 bdl1 bdl2 bdl3 ld1 ld2 ld3
u=[u1;u2]; n=[n1;n2;n3]; l=[l1;l2;l3]; bdl=[bdl1;bdl2;bdl3]; n=[ld1;ld2;ld3];
for i=1:3
    l(i)=((x(i)-x(4))^2+(y(i)-y(4))^2)^(1/2);
    bdl(i)=((x(i)-x(4))*(-u(1))+(y(i)-y(4))*(-u(2)))/l(i);
end

```

```

f=n1^2*l(1)/(2*ea)+n2^2*l(2)/(ea)+n3^2*l(3)/(ea)+...
ld1*(n1*l(1)/(2*ea)-bdl(1))+ld2*(n2*l(2)/(ea)-bdl(2))+...
ld3*(n3*l(3)/(ea)-bdl(3))-2*p*u(1)+4*p*u(2);
syms a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8
a=[a1;a2;a3;a4;a5;a6;a7;a8]; b=[n1;n2;n3;ld1;ld2;ld3;u1;u2];
for i=1:8
    a(i)=diff(f,b(i));
end
g=simplify(a);
% File myfun.m
function f=myfun(x)
global g
for i=1:3
    magic_str=['n',int2str(i),'=x(i)']; eval(magic_str);
end
for i=1:3
    magic_str=['ld',int2str(i),'=x(i+3)']; eval(magic_str);
end
for i=1:2
    magic_str=['u',int2str(i),'=x(6+i)']; eval(magic_str);
end
f=eval(g);
return
% File: cal.m
x0=zeros(8,1);
options=optimset('display','iter','maxfunvals',10000);
[x,fval,exitflag]=fsolve(@myfun,x0,options)
3. Code ví dụ 3 (Code phân tích dàn vòm phẳng tĩnh định)
% File danvom1.m
clear all
clc
global p k span r kn nx dpha g ea1 ea2 ea3 h
p=10;
ea1=46.621*2*10^4; ea2=12.92*2*10^4; ea3=12.92*2*10^4; k=1/3;
span=48; h=0.8; r=(span*(1+4*k*k)/8)/k; nx=6;
dpha=atan((span/2)/((r*r-span*span/4)^(1/2)))/nx;
for m=1:13
    x(m)=r*sin((m-7)*dpha);    y(m)=r*cos((m-7)*dpha);
end
for m=1:13
    x(m+13)=r*sin((7-m)*dpha);    y(m+13)=h+r*cos((7-m)*dpha);
end
u1=0;v1=0;v13=0;
syms u2 u3 u4 u5 u6 u7 u8 u9 u10 u11 u12 u13 u14 u15 u16 u17 u18 u19...

```

```

    u20 u21 u22 u23 u24 u25 u26
syms v2 v3 v4 v5 v6 v7 v8 v9 v10 v11 v12 v14 v15 v16 v17 v18 v19...
    v20 v21 v22 v23 v24 v25 v26
u=[u1;u2;u3;u4;u5;u6;u7;u8;u9;u10;u11;u12;u13;u14;u15;u16;u17;u18;u19;
    u20;u21;u22;u23;u24;u25;u26];
v=[v1;v2;v3;v4;v5;v6;v7;v8;v9;v10;v11;v12;v13;v14;v15;v16;v17;v18;v19;
    v20;v21;v22;v23;v24;v25;v26];
syms f1 f2 f3 f4 f5 f6 f7 f8 f9 f10 f11 f12 f13 f14 f15 f16 f17 f18 f19...
    f20 f21 f22 f23 f24 f25 f26 f27 f28 f29 f30 f31 f32 f33 f34 f35 f36...
    f37 f38 f39 f40 f41 f42 f43 f44 f45 f46 f47 f48 f49 f50
f=[f1;f2;f3;f4;f5;f6;f7;f8;f9;f10;f11;f12;f13;f14;f15;f16;f17;f18;f19;
    f20;f21;f22;f23;f24;f25;f26;f27;f28;f29;f30;f31;f32;f33;f34;f35;f36;
    f37;f38;f39;f40;f41;f42;f43;f44;f45;f46;f47;f48;f49;f50];
syms l1 l2 l3 l4 l5 l6 l7 l8 l9 l10 l11 l12 l13 l14 l15 l16 l17 l18 l19...
    l20 l21 l22 l23 l24 l25 l26 l27 l28 l29 l30 l31 l32 l33 l34 l35 l36...
    l37 l38 l39 l40 l41 l42 l43 l44 l45 l46 l47 l48 l49
l=[l1;l2;l3;l4;l5;l6;l7;l8;l9;l10;l11;l12;l13;l14;l15;l16;l17;l18;l19;
    l20;l21;l22;l23;l24;l25;l26;l27;l28;l29;l30;l31;l32;l33;l34;l35;l36;
    l37;l38;l39;l40;l41;l42;l43;l44;l45;l46;l47;l48;l49];
syms bdl1 bdl2 bdl3 bdl4 bdl5 bdl6 bdl7 bdl8 bdl9 bdl10 bdl11 bdl12...
    bdl13 bdl14 bdl15 bdl16 bdl17 bdl18 bdl19 bdl20 bdl21 bdl22 bdl23...
    bdl24 bdl25 bdl26 bdl27 bdl28 bdl29 bdl30 bdl31 bdl32 bdl33 bdl34...
    bdl35 bdl36 bdl37 bdl38 bdl39 bdl40 bdl41 bdl42 bdl43 bdl44 bdl45...
    bdl46 bdl47 bdl48 bdl49
bdl=[bdl1;bdl2;bdl3;bdl4;bdl5;bdl6;bdl7;bdl8;bdl9;bdl10;bdl11;bdl12;bdl13;
    bdl14;bdl15;bdl16;bdl17;bdl18;bdl19;bdl20;bdl21;bdl22;bdl23;bdl24;
    bdl25;bdl26;bdl27;bdl28;bdl29;bdl30;bdl31;bdl32;bdl33;bdl34;bdl35;
    bdl36;bdl37;bdl38;bdl39;bdl40;bdl41;bdl42;bdl43;bdl44;bdl45;bdl46;
    bdl47;bdl48;bdl49];
    f(1)=0;
for i=1:12
    l(i)=((x(i)-x(i+1))^2+(y(i)-y(i+1))^2)^(1/2);
    bdl(i)=((x(i)-x(i+1))*(u(i)-u(i+1))+(y(i)-y(i+1))*(v(i)-v(i+1))))/l(i);
    f(i+1)=f(i)+ea1*((bdl(i))^2)/l(i);
end
for i=1:12
    l(12+i)=((x(i+13)-x(i+14))^2+(y(i+13)-y(i+14))^2)^(1/2);
    bdl(12+i)=((x(i+13)-x(i+14))*(u(i+13)-u(i+14))+(y(i+13)-y(i+14))...
        *(v(i+13)-v(i+14)))/l(12+i);
    f(13+i)=f(12+i)+ea1*((bdl(12+i))^2)/l(12+i);
end
for i=1:13
    l(24+i)=sqrt((x(i)-x(27-i))^2+(y(i)-y(27-i))^2);
    bdl(24+i)=((x(i)-x(27-i))*(u(i)-u(27-i))+(y(i)-y(27-i))*(v(i)-v(27-i)))/l(24+i);

```

```

f(25+i)=f(24+i)+ea2*((bdl(24+i))^2)/l(24+i);
end
for i=1:6
l(37+i)=sqrt((x(2*i-1)-x(27-2*i))^2+(y(2*i-1)-y(27-2*i))^2);
bdl(37+i)=((x(2*i-1)-x(27-2*i))*(u(2*i-1)-u(27-2*i))+(y(2*i-1)-...
y(27-2*i))*(v(2*i-1)-v(27-2*i)))/l(37+i);
f(38+i)=f(37+i)+ea3*((bdl(37+i))^2)/l(37+i);
end
for i=1:6
l(43+i)=sqrt((x(2*i+1)-x(27-2*i))^2+(y(2*i+1)-y(27-2*i))^2);
bdl(43+i)=((x(2*i+1)-x(27-2*i))*(u(2*i+1)-u(27-2*i))+(y(2*i+1)-...
y(27-2*i))*(v(2*i+1)-v(27-2*i)))/l(43+i);
f(44+i)=f(43+i)+ea3*((bdl(43+i))^2)/l(43+i);
end
q=2*p*(v(14)/2+v(15)+v(16)+v(17)+v(18)+v(19)+v(20)+v(21)+v(22)+v(23)...
+v(24)+v(25)+v(26)/2);
g=f(50)+q;
syms a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10 a11 a12 a13 a14 a15 a16 a17 a18 a19...
a20 a21 a22 a23 a24 a25 a26 a27 a28 a29 a30 a31 a32 a33 a34 a35 a36...
a37 a38 a39 a40 a41 a42 a43 a44 a45 a46 a47 a48 a49
a=[a1;a2;a3;a4;a5;a6;a7;a8;a9;a10;a11;a12;a13;a14;a15;a16;a17;a18;a19;
a20;a21;a22;a23;a24;a25;a26;a27;a28;a29;a30;a31;a32;a33;a34;a35;a36;
a37;a38;a39;a40;a41;a42;a43;a44;a45;a46;a47;a48;a49];
b=[u2;u3;u4;u5;u6;u7;u8;u9;u10;u11;u12;u13;u14;u15;u16;u17;u18;u19;u20;
u21;u22;u23;u24;u25;u26;v2;v3;v4;v5;v6;v7;v8;v9;v10;v11;v12;v14;v15;v16;
v17;v18;v19;v20;v21;v22;v23;v24;v25;v26];
for i=1:49
a(i)=diff(g,b(i));
end
g=simplify(a);
% file myfun.m
function f=myfun(x)
global g
for i=1:25
magic_str=['u',int2str(i+1),'=x(i)']; eval(magic_str);
end
for i=1:11
magic_str=['v',int2str(i+1),'=x(25+i)']; eval(magic_str);
end
for i=1:13
magic_str=['v',int2str(i+13),'=x(36+i)']; eval(magic_str);
end
f=eval(g);
return

```

```

% file cal.m
x0=2*0.005*ones(49,1); options=optimset('display','iter','maxfunvals',1500);
[x,fval,exitflag]=fsolve(@myfun,x0,options)
global p k span r kn nx dpha g ea1 ea2 ea3 h
u=zeros(26,1); v=zeros(26,1);
for i=1:25
    u(i+1)=x(i);
end
for i=1:11
    v(i+1)=x(25+i);
end
for i=1:13
    v(i+13)=x(36+i);
end
for m=1:13
    x(m)=r*sin((m-7)*dpha);    y(m)=r*cos((m-7)*dpha);
end
for m=1:13
    x(m+13)=r*sin((7-m)*dpha);    y(m+13)=h+r*cos((7-m)*dpha);
end
syms n1 n2 n3 n4 n5 n6 n7 n8 n9 n10 n11 n12 n13 n14 n15 n16 n17 n18 n19...
    n20 n21 n22 n23 n24 n25 n26 n27 n28 n29 n30 n31 n32 n33 n34 n35 n36...
    n37 n38 n39 n40 n41 n42 n43 n44 n45 n46 n47 n48 n49
n=[n1;n2;n3;n4;n5;n6;n7;n8;n9;n10;n11;n12;n13;n14;n15;n16;n17;n18;n19;n20;
    n21;n22;n23;n24;n25;n26;n27;n28;n29;n30;n31;n32;n33;n34;n35;n36;n37;
    n38;n39;n40;n41;n42;n43;n44;n45;n46;n47;n48;n49];
for i=1:12
    l(i)=((x(i)-x(i+1))^2+(y(i)-y(i+1))^2)^(1/2);
    bdl(i)=((x(i)-x(i+1))*(u(i)-u(i+1))+(y(i)-y(i+1))*(v(i)-v(i+1))))/l(i);
end
for i=1:12
    l(12+i)=((x(i+13)-x(i+14))^2+(y(i+13)-y(i+14))^2)^(1/2);
    bdl(12+i)=((x(i+13)-x(i+14))*(u(i+13)-u(i+14))+(y(i+13)-y(i+14))*...
(v(i+13)-v(i+14)))/l(12+i);
end
for i=1:13
    l(24+i)=sqrt((x(i)-x(27-i))^2+(y(i)-y(27-i))^2);
    bdl(24+i)=((x(i)-x(27-i))*(u(i)-u(27-i))+(y(i)-y(27-i))*(v(i)-v(27-i)))/l(24+i);
end
for i=1:6
    l(37+i)=sqrt((x(2*i-1)-x(27-2*i))^2+(y(2*i-1)-y(27-2*i))^2);
    bdl(37+i)=((x(2*i-1)-x(27-2*i))*(u(2*i-1)-u(27-2*i))+(y(2*i-1)-...
y(27-2*i))*(v(2*i-1)-v(27-2*i)))/l(37+i);
end

```

```

for i=1:6
    l(43+i)=sqrt((x(2*i+1)-x(27-2*i))^2+(y(2*i+1)-y(27-2*i))^2);
    bdl(43+i)=((x(2*i+1)-x(27-2*i))*(u(2*i+1)-u(27-2*i))+(y(2*i+1)-...
y(27-2*i))*(v(2*i+1)-v(27-2*i)))/l(43+i);
end
for i=1:24
    n(i)=(bdl(i)*ea1)/l(i);
end
for i=25:1:37
    n(i)=(bdl(i)*ea2)/l(i);
end
for i=38:1:49
    n(i)=(bdl(i)*ea3)/l(i);
end
vpa(n,8)

```

#### 4. Code ví dụ 4 (Code phân tích dàn vòm phẳng tĩnh định trong, siêu tĩnh ngoài)

```
%File danvom2.m
```

```
clear all
```

```
clc
```

```
global p k span r kn nx dpha g ea1 ea2 ea3 h
```

```
p=100; ea1=46.621*2*10^4; ea2=32.798*2*10^4; ea3=32.798*2*10^4; k=1/3;
```

```
span=48; h=0.8; r=(span*(1+4*k*k)/8)/k; nx=6;
```

```
dpha=atan((span/2)/((r*r-span*span/4)^(1/2)))/nx;
```

```
for m=1:13
```

```
    x(m)=r*sin((m-7)*dpha);    y(m)=r*cos((m-7)*dpha);
```

```
end
```

```
for m=1:13
```

```
    x(m+13)=r*sin((7-m)*dpha);    y(m+13)=h+r*cos((7-m)*dpha);
```

```
end
```

```
u1=0;v1=0;v13=0;u13=0;
```

```
syms u2 u3 u4 u5 u6 u7 u8 u9 u10 u11 u12 u14 u15 u16 u17 u18 u19...
```

```
    u20 u21 u22 u23 u24 u25 u26
```

```
syms v2 v3 v4 v5 v6 v7 v8 v9 v10 v11 v12 v14 v15 v16 v17 v18 v19...
```

```
    v20 v21 v22 v23 v24 v25 v26
```

```
u=[u1;u2;u3;u4;u5;u6;u7;u8;u9;u10;u11;u12;u13;u14;u15;u16;u17;u18;u19;
```

```
    u20;u21;u22;u23;u24;u25;u26];
```

```
v=[v1;v2;v3;v4;v5;v6;v7;v8;v9;v10;v11;v12;v13;v14;v15;v16;v17;v18;v19;
```

```
    v20;v21;v22;v23;v24;v25;v26];
```

```
syms f1 f2 f3 f4 f5 f6 f7 f8 f9 f10 f11 f12 f13 f14 f15 f16 f17 f18 f19...
```

```
    f20 f21 f22 f23 f24 f25 f26 f27 f28 f29 f30 f31 f32 f33 f34 f35 f36...
```

```
    f37 f38 f39 f40 f41 f42 f43 f44 f45 f46 f47 f48 f49 f50
```

```
f=[f1;f2;f3;f4;f5;f6;f7;f8;f9;f10;f11;f12;f13;f14;f15;f16;f17;f18;f19;
```

```
    f20;f21;f22;f23;f24;f25;f26;f27;f28;f29;f30;f31;f32;f33;f34;f35;f36;
```

```
    f37;f38;f39;f40;f41;f42;f43;f44;f45;f46;f47;f48;f49;f50];
```

```

syms l1 l2 l3 l4 l5 l6 l7 l8 l9 l10 l11 l12 l13 l14 l15 l16 l17 l18 l19...
    l20 l21 l22 l23 l24 l25 l26 l27 l28 l29 l30 l31 l32 l33 l34 l35 l36...
    l37 l38 l39 l40 l41 l42 l43 l44 l45 l46 l47 l48 l49
l=[l1;l2;l3;l4;l5;l6;l7;l8;l9;l10;l11;l12;l13;l14;l15;l16;l17;l18;l19;
    l20;l21;l22;l23;l24;l25;l26;l27;l28;l29;l30;l31;l32;l33;l34;l35;l36;
    l37;l38;l39;l40;l41;l42;l43;l44;l45;l46;l47;l48;l49];
syms bdl1 bdl2 bdl3 bdl4 bdl5 bdl6 bdl7 bdl8 bdl9 bdl10 bdl11 bdl12...
    bdl13 bdl14 bdl15 bdl16 bdl17 bdl18 bdl19 bdl20 bdl21 bdl22 bdl23...
    bdl24 bdl25 bdl26 bdl27 bdl28 bdl29 bdl30 bdl31 bdl32 bdl33 bdl34...
    bdl35 bdl36 bdl37 bdl38 bdl39 bdl40 bdl41 bdl42 bdl43 bdl44 bdl45...
    bdl46 bdl47 bdl48 bdl49
bdl=[bdl1;bdl2;bdl3;bdl4;bdl5;bdl6;bdl7;bdl8;bdl9;bdl10;bdl11;bdl12;bdl13;
    bdl14;bdl15;bdl16;bdl17;bdl18;bdl19;bdl20;bdl21;bdl22;bdl23;bdl24;
    bdl25;bdl26;bdl27;bdl28;bdl29;bdl30;bdl31;bdl32;bdl33;bdl34;bdl35;
    bdl36;bdl37;bdl38;bdl39;bdl40;bdl41;bdl42;bdl43;bdl44;bdl45;bdl46;
    bdl47;bdl48;bdl49];
    f(1)=0;
for i=1:12
    l(i)=((x(i)-x(i+1))^2+(y(i)-y(i+1))^2)^(1/2);
    bdl(i)=((x(i)-x(i+1))*(u(i)-u(i+1))+(y(i)-y(i+1))*(v(i)-v(i+1))))/l(i);
    f(i+1)=f(i)+ea1*((bdl(i))^2)/l(i);
end
for i=1:12
    l(12+i)=((x(i+13)-x(i+14))^2+(y(i+13)-y(i+14))^2)^(1/2);
    bdl(12+i)=((x(i+13)-x(i+14))*(u(i+13)-u(i+14))+(y(i+13)-y(i+14))*...
        (v(i+13)-v(i+14)))/l(12+i);
    f(13+i)=f(12+i)+ea1*((bdl(12+i))^2)/l(12+i);
end
    for i=1:13
    l(24+i)=sqrt((x(i)-x(27-i))^2+(y(i)-y(27-i))^2);
    bdl(24+i)=((x(i)-x(27-i))*(u(i)-u(27-i))+(y(i)-y(27-i))*(v(i)-v(27-i)))/l(24+i);
    f(25+i)=f(24+i)+ea2*((bdl(24+i))^2)/l(24+i);
    end
for i=1:6
    l(37+i)=sqrt((x(2*i-1)-x(27-2*i))^2+(y(2*i-1)-y(27-2*i))^2);
    bdl(37+i)=((x(2*i-1)-x(27-2*i))*(u(2*i-1)-u(27-2*i))+(y(2*i-1)-...
        y(27-2*i))*(v(2*i-1)-v(27-2*i)))/l(37+i);
    f(38+i)=f(37+i)+ea3*((bdl(37+i))^2)/l(37+i);
end
for i=1:6
    l(43+i)=sqrt((x(2*i+1)-x(27-2*i))^2+(y(2*i+1)-y(27-2*i))^2);
    bdl(43+i)=((x(2*i+1)-x(27-2*i))*(u(2*i+1)-u(27-2*i))+(y(2*i+1)-...
        y(27-2*i))*(v(2*i+1)-v(27-2*i)))/l(43+i);
    f(44+i)=f(43+i)+ea3*((bdl(43+i))^2)/l(43+i);

```

```

end
q=2*p*(v(14)/2+v(15)+v(16)+v(17)+v(18)+v(19)+v(20)+v(21)+v(22)+v(23)...
+v(24)+v(25)+v(26)/2);
g=f(50)+q;
syms a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10 a11 a12 a13 a14 a15 a16 a17 a18 a19...
a20 a21 a22 a23 a24 a25 a26 a27 a28 a29 a30 a31 a32 a33 a34 a35 a36...
a37 a38 a39 a40 a41 a42 a43 a44 a45 a46 a47 a48
a=[a1;a2;a3;a4;a5;a6;a7;a8;a9;a10;a11;a12;a13;a14;a15;a16;a17;a18;a19;
a20;a21;a22;a23;a24;a25;a26;a27;a28;a29;a30;a31;a32;a33;a34;a35;a36;
a37;a38;a39;a40;a41;a42;a43;a44;a45;a46;a47;a48];
b=[u2;u3;u4;u5;u6;u7;u8;u9;u10;u11;u12;u14;u15;u16;u17;u18;u19;u20;u21;
u22;u23;u24;u25;u26;v2;v3;v4;v5;v6;v7;v8;v9;v10;v11;v12;v14;v15;v16;v17;
v18;v19;v20;v21;v22;v23;v24;v25;v26];
for i=1:48
a(i)=diff(g,b(i));
end
g=simplify(a);
% file myfun.m
function f=myfun(x)
global g
for i=1:11
magic_str=['u',int2str(i+1),'=x(i)']; eval(magic_str);
end
for i=1:13
magic_str=['u',int2str(i+13),'=x(i+11)']; eval(magic_str);
end
for i=1:11
magic_str=['v',int2str(i+1),'=x(24+i)']; eval(magic_str);
end
for i=1:13
magic_str=['v',int2str(i+13),'=x(35+i)']; eval(magic_str);
end
f=eval(g);
return
% file cal.m
x0=2*0.005*ones(48,1); options=optimset('display','iter','maxfunvals',1500);
[x,fval,exitflag]=fsolve(@myfun,x0,options)
global p k span r kn nx dpha g ea1 ea2 ea3 h
u=zeros(26,1);v=zeros(26,1);
for i=1:11
u(i+1)=x(i);
end
for i=1:13
u(i+13)=x(i+11);

```



```

end
for i=1:11
    v(i+1)=x(24+i);
end
for i=1:13
    v(i+13)=x(35+i);
end
for m=1:13
    x(m)=r*sin((m-7)*dpha);    y(m)=r*cos((m-7)*dpha);
end
for m=1:13
    x(m+13)=r*sin((7-m)*dpha);    y(m+13)=h+r*cos((7-m)*dpha);
end
syms n1 n2 n3 n4 n5 n6 n7 n8 n9 n10 n11 n12 n13 n14 n15 n16 n17 n18 n19...
    n20 n21 n22 n23 n24 n25 n26 n27 n28 n29 n30 n31 n32 n33 n34 n35 n36...
    n37 n38 n39 n40 n41 n42 n43 n44 n45 n46 n47 n48 n49
n=[n1;n2;n3;n4;n5;n6;n7;n8;n9;n10;n11;n12;n13;n14;n15;n16;n17;n18;n19;n20;
    n21;n22;n23;n24;n25;n26;n27;n28;n29;n30;n31;n32;n33;n34;n35;n36;n37;
    n38;n39;n40;n41;n42;n43;n44;n45;n46;n47;n48;n49];
for i=1:12
    l(i)=((x(i)-x(i+1))^2+(y(i)-y(i+1))^2)^(1/2);
    bdl(i)=((x(i)-x(i+1))*(u(i)-u(i+1))+(y(i)-y(i+1))*(v(i)-v(i+1))))/l(i);
end
for i=1:12
    l(12+i)=((x(i+13)-x(i+14))^2+(y(i+13)-y(i+14))^2)^(1/2);
    bdl(12+i)=((x(i+13)-x(i+14))*(u(i+13)-u(i+14))+(y(i+13)-y(i+14))*...
        (v(i+13)-v(i+14)))/l(12+i);
end
for i=1:13
    l(24+i)=sqrt((x(i)-x(27-i))^2+(y(i)-y(27-i))^2);
    bdl(24+i)=((x(i)-x(27-i))*(u(i)-u(27-i))+(y(i)-y(27-i))*(v(i)-v(27-i)))/l(24+i);
end
for i=1:6
    l(37+i)=sqrt((x(2*i-1)-x(27-2*i))^2+(y(2*i-1)-y(27-2*i))^2);
    bdl(37+i)=((x(2*i-1)-x(27-2*i))*(u(2*i-1)-u(27-2*i))+(y(2*i-1)-...
        y(27-2*i))*(v(2*i-1)-v(27-2*i)))/l(37+i);
end
for i=1:6
    l(43+i)=sqrt((x(2*i+1)-x(27-2*i))^2+(y(2*i+1)-y(27-2*i))^2);
    bdl(43+i)=((x(2*i+1)-x(27-2*i))*(u(2*i+1)-u(27-2*i))+(y(2*i+1)-...
        y(27-2*i))*(v(2*i+1)-v(27-2*i)))/l(43+i);
end
for i=1:24
    n(i)=(bdl(i)*ea1)/l(i);

```

```

end
for i=25:1:37
    n(i)=(bdl(i)*ea2)/l(i);
end
for i=38:1:49
    n(i)=(bdl(i)*ea3)/l(i);
end
vpa(n,8)

```

### 5. Code ví dụ 5 (Code phân tích dàn vòm phẳng siêu tĩnh trong, tĩnh định ngoài)

```

%File danvom3.m
clear all
clc
global p k span r kn nx dpha g ea1 ea2 ea3 h
p=20; ea1=46.621*2*10^4; ea2=12.92*2*10^4; ea3=12.92*2*10^4;
k=1/8; span=48; h=0.8; r=(span*(1+4*k*k)/8)/k; nx=6;
dpha=atan((span/2)/((r*r-span*span/4)^(1/2)))/nx;
for m=1:13
    x(m)=r*sin((m-7)*dpha);    y(m)=r*cos((m-7)*dpha);
end
for m=1:13
    x(m+13)=r*sin((7-m)*dpha);    y(m+13)=h+r*cos((7-m)*dpha);
end
u1=0;v1=0;v13=0;
syms u2 u3 u4 u5 u6 u7 u8 u9 u10 u11 u12 u13 u14 u15 u16 u17 u18 u19...
    u20 u21 u22 u23 u24 u25 u26
syms v2 v3 v4 v5 v6 v7 v8 v9 v10 v11 v12 v14 v15 v16 v17 v18 v19...
    v20 v21 v22 v23 v24 v25 v26
u=[u1;u2;u3;u4;u5;u6;u7;u8;u9;u10;u11;u12;u13;u14;u15;u16;u17;u18;u19;
    u20;u21;u22;u23;u24;u25;u26];
v=[v1;v2;v3;v4;v5;v6;v7;v8;v9;v10;v11;v12;v13;v14;v15;v16;v17;v18;v19;
    v20;v21;v22;v23;v24;v25;v26];
syms f1 f2 f3 f4 f5 f6 f7 f8 f9 f10 f11 f12 f13 f14 f15 f16 f17 f18 f19...
    f20 f21 f22 f23 f24 f25 f26 f27 f28 f29 f30 f31 f32 f33 f34 f35 f36...
    f37 f38 f39 f40 f41 f42 f43 f44 f45 f46 f47 f48 f49 f50
f=[f1;f2;f3;f4;f5;f6;f7;f8;f9;f10;f11;f12;f13;f14;f15;f16;f17;f18;f19;
    f20;f21;f22;f23;f24;f25;f26;f27;f28;f29;f30;f31;f32;f33;f34;f35;f36;
    f37;f38;f39;f40;f41;f42;f43;f44;f45;f46;f47;f48;f49;f50];
syms l1 l2 l3 l4 l5 l6 l7 l8 l9 l10 l11 l12 l13 l14 l15 l16 l17 l18 l19...
    l20 l21 l22 l23 l24 l25 l26 l27 l28 l29 l30 l31 l32 l33 l34 l35 l36...
    l37 l38 l39 l40 l41 l42 l43 l44 l45 l46 l47 l48 l49
l=[l1;l2;l3;l4;l5;l6;l7;l8;l9;l10;l11;l12;l13;l14;l15;l16;l17;l18;l19;
    l20;l21;l22;l23;l24;l25;l26;l27;l28;l29;l30;l31;l32;l33;l34;l35;l36;
    l37;l38;l39;l40;l41;l42;l43;l44;l45;l46;l47;l48;l49];
syms bdl1 bdl2 bdl3 bdl4 bdl5 bdl6 bdl7 bdl8 bdl9 bdl10 bdl11 bdl12...

```

```

bdl13 bdl14 bdl15 bdl16 bdl17 bdl18 bdl19 bdl20 bdl21 bdl22 bdl23...
bdl24 bdl25 bdl26 bdl27 bdl28 bdl29 bdl30 bdl31 bdl32 bdl33 bdl34...
bdl35 bdl36 bdl37 bdl38 bdl39 bdl40 bdl41 bdl42 bdl43 bdl44 bdl45...
bdl46 bdl47 bdl48 bdl49
bdl=[bdl1;bdl2;bdl3;bdl4;bdl5;bdl6;bdl7;bdl8;bdl9;bdl10;bdl11;bdl12;bdl13;
bdl14;bdl15;bdl16;bdl17;bdl18;bdl19;bdl20;bdl21;bdl22;bdl23;bdl24;
bdl25;bdl26;bdl27;bdl28;bdl29;bdl30;bdl31;bdl32;bdl33;bdl34;bdl35;
bdl36;bdl37;bdl38;bdl39;bdl40;bdl41;bdl42;bdl43;bdl44;bdl45;bdl46;
bdl47;bdl48;bdl49];
f(1)=0;
for i=1:12
l(i)=((x(i)-x(i+1))^2+(y(i)-y(i+1))^2)^(1/2);
bdl(i)=((x(i)-x(i+1))*(u(i)-u(i+1)))+(y(i)-y(i+1))*(v(i)-v(i+1)))/l(i);
f(i+1)=f(i)+ea1*((bdl(i))^2)/l(i);
end
for i=1:12
l(12+i)=((x(i+13)-x(i+14))^2+(y(i+13)-y(i+14))^2)^(1/2);
bdl(12+i)=((x(i+13)-x(i+14))*(u(i+13)-u(i+14)))+(y(i+13)-y(i+14))*...
(v(i+13)-v(i+14)))/l(12+i);
f(13+i)=f(12+i)+ea1*((bdl(12+i))^2)/l(12+i);
end
for i=1:13
l(24+i)=sqrt((x(i)-x(27-i))^2+(y(i)-y(27-i))^2);
bdl(24+i)=((x(i)-x(27-i))*(u(i)-u(27-i)))+(y(i)-y(27-i))*(v(i)-v(27-i)))/l(24+i);
f(25+i)=f(24+i)+ea2*((bdl(24+i))^2)/l(24+i);
end
for i=1:6
l(37+i)=sqrt((x(2*i-1)-x(27-2*i))^2+(y(2*i-1)-y(27-2*i))^2);
bdl(37+i)=((x(2*i-1)-x(27-2*i))*(u(2*i-1)-u(27-2*i)))+(y(2*i-1)-...
y(27-2*i))*(v(2*i-1)-v(27-2*i)))/l(37+i);
f(38+i)=f(37+i)+ea3*((bdl(37+i))^2)/l(37+i);
end
for i=1:6
l(43+i)=sqrt((x(2*i+1)-x(27-2*i))^2+(y(2*i+1)-y(27-2*i))^2);
bdl(43+i)=((x(2*i+1)-x(27-2*i))*(u(2*i+1)-u(27-2*i)))+(y(2*i+1)-...
y(27-2*i))*(v(2*i+1)-v(27-2*i)))/l(43+i);
f(44+i)=f(43+i)+ea3*((bdl(43+i))^2)/l(43+i);
end
for i=1:6
l(49+i)=sqrt((x(2*i)-x(28-2*i))^2+(y(2*i)-y(28-2*i))^2);
bdl(49+i)=((x(2*i)-x(28-2*i))*(u(2*i)-u(28-2*i)))+(y(2*i)-y(28-2*i))*...
(v(2*i)-v(28-2*i)))/l(49+i);
f(50+i)=f(49+i)+ea3*((bdl(49+i))^2)/l(49+i);
end

```

```

for i=1:6
    l(55+i)=sqrt((x(2*i)-x(26-2*i))^2+(y(2*i)-y(26-2*i))^2);
    bdl(55+i)=((x(2*i)-x(26-2*i))*(u(2*i)-u(26-2*i))+(y(2*i)-y(26-2*i))*...
        (v(2*i)-v(26-2*i)))/l(55+i);
    f(56+i)=f(55+i)+ea3*((bdl(55+i))^2)/l(55+i);
end
q=2*p*(v(14)/2+v(15)+v(16)+v(17)+v(18)+v(19)+v(20)+v(21)+v(22)+v(23)...
    +v(24)+v(25)+v(26)/2);
g=f(62)+q;
syms a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10 a11 a12 a13 a14 a15 a16 a17 a18 a19...
a20 a21 a22 a23 a24 a25 a26 a27 a28 a29 a30 a31 a32 a33 a34 a35 a36...
a37 a38 a39 a40 a41 a42 a43 a44 a45 a46 a47 a48 a49
a=[a1;a2;a3;a4;a5;a6;a7;a8;a9;a10;a11;a12;a13;a14;a15;a16;a17;a18;a19;
a20;a21;a22;a23;a24;a25;a26;a27;a28;a29;a30;a31;a32;a33;a34;a35;a36;
a37;a38;a39;a40;a41;a42;a43;a44;a45;a46;a47;a48;a49];
b=[u2;u3;u4;u5;u6;u7;u8;u9;u10;u11;u12;u13;u14;u15;u16;u17;u18;u19;u20;
u21;u22;u23;u24;u25;u26;v2;v3;v4;v5;v6;v7;v8;v9;v10;v11;v12;v14;v15;v16;
v17;v18;v19;v20;v21;v22;v23;v24;v25;v26];
for i=1:49
    a(i)=diff(g,b(i));
end
g=simplify(a);
% file myfun.m
function f=myfun(x)
global g
for i=1:25
    magic_str=['u',int2str(i+1),'=x(i)']; eval(magic_str);
end
for i=1:11
    magic_str=['v',int2str(i+1),'=x(25+i)']; eval(magic_str);
end
for i=1:13
    magic_str=['v',int2str(i+13),'=x(36+i)']; eval(magic_str);
end
f=eval(g);
return
% File cal.m
x0=zeros(49,1); options=optimset('display','iter','maxfunvals',1000);
[x,fval,exitflag]=fsolve(@myfun,x0,options)
global p k span r kn nx dpha g ea1 ea2 ea3 h
u=zeros(26,1); v=zeros(26,1);
for i=1:25
    u(i+1)=x(i);
end

```

```

for i=1:11
    v(i+1)=x(25+i);
end
for i=1:13
    v(i+13)=x(36+i);
end
for m=1:13
    x(m)=r*sin((m-7)*dpha);    y(m)=r*cos((m-7)*dpha);
end
for m=1:13
    x(m+13)=r*sin((7-m)*dpha);    y(m+13)=h+r*cos((7-m)*dpha);
end
syms n1 n2 n3 n4 n5 n6 n7 n8 n9 n10 n11 n12 n13 n14 n15 n16 n17 n18 n19...
    n20 n21 n22 n23 n24 n25 n26 n27 n28 n29 n30 n31 n32 n33 n34 n35 n36...
    n37 n38 n39 n40 n41 n42 n43 n44 n45 n46 n47 n48 n49 n50 n51 n52 n53...
    n54 n55 n56 n57 n58 n59 n60 n61
n=[n1;n2;n3;n4;n5;n6;n7;n8;n9;n10;n11;n12;n13;n14;n15;n16;n17;n18;n19;n20;
    n21;n22;n23;n24;n25;n26;n27;n28;n29;n30;n31;n32;n33;n34;n35;n36;n37;
    n38;n39;n40;n41;n42;n43;n44;n45;n46;n47;n48;n49;n50;n51;n52;n53;n54;
    n55;n56;n57;n58;n59;n60;n61];
for i=1:12
    l(i)=((x(i)-x(i+1))^2+(y(i)-y(i+1))^2)^(1/2);
    bdl(i)=((x(i)-x(i+1))*(u(i)-u(i+1))+(y(i)-y(i+1))*(v(i)-v(i+1))))/l(i);
end
for i=1:12
    l(12+i)=((x(i+13)-x(i+14))^2+(y(i+13)-y(i+14))^2)^(1/2);
    bdl(12+i)=((x(i+13)-x(i+14))*(u(i+13)-u(i+14))+(y(i+13)-y(i+14))*...
        (v(i+13)-v(i+14)))/l(12+i);
end
    for i=1:13
    l(24+i)=sqrt((x(i)-x(27-i))^2+(y(i)-y(27-i))^2);
    bdl(24+i)=((x(i)-x(27-i))*(u(i)-u(27-i))+(y(i)-y(27-i))*(v(i)-v(27-i)))/l(24+i);
    end
for i=1:6
    l(37+i)=sqrt((x(2*i-1)-x(27-2*i))^2+(y(2*i-1)-y(27-2*i))^2);
    bdl(37+i)=((x(2*i-1)-x(27-2*i))*(u(2*i-1)-u(27-2*i))+(y(2*i-1)-...
        y(27-2*i))*(v(2*i-1)-v(27-2*i)))/l(37+i);
end
for i=1:6
    l(43+i)=sqrt((x(2*i+1)-x(27-2*i))^2+(y(2*i+1)-y(27-2*i))^2);
    bdl(43+i)=((x(2*i+1)-x(27-2*i))*(u(2*i+1)-u(27-2*i))+(y(2*i+1)-...
        y(27-2*i))*(v(2*i+1)-v(27-2*i)))/l(43+i);
end
for i=1:6

```

```

l(49+i)=sqrt((x(2*i)-x(28-2*i))^2+(y(2*i)-y(28-2*i))^2);
bdl(49+i)=((x(2*i)-x(28-2*i))*(u(2*i)-u(28-2*i))+(y(2*i)-y(28-2*i))*...
(v(2*i)-v(28-2*i)))/l(49+i);
end
for i=1:6
l(55+i)=sqrt((x(2*i)-x(26-2*i))^2+(y(2*i)-y(26-2*i))^2);
bdl(55+i)=((x(2*i)-x(26-2*i))*(u(2*i)-u(26-2*i))+(y(2*i)-y(26-2*i))*...
(v(2*i)-v(26-2*i)))/l(55+i);
end
for i=1:24
n(i)=(bdl(i)*ea1)/l(i);
end
for i=25:1:37
n(i)=(bdl(i)*ea2)/l(i);
end
for i=38:1:61
n(i)=(bdl(i)*ea3)/l(i);
end
vpa(n,8)

```

## 6. Code ví dụ 6 (Code phân tích dàn vòm phẳng siêu tĩnh trong, siêu tĩnh ngoài)

```
%File danvom4.m
```

```
clear all
```

```
clc
```

```
global p k span r kn nx dpha g ea1 ea2 ea3 h
```

```
p=100; ea1=46.621*2*10^4; ea2=12.92*2*10^4; ea3=12.92*2*10^4;
```

```
k=1/8; span=48; h=0.8; r=(span*(1+4*k*k)/8)/k; nx=6;
```

```
dpha=atan((span/2)/((r*r-span*span/4)^(1/2)))/nx;
```

```
for m=1:13
```

```
    x(m)=r*sin((m-7)*dpha);    y(m)=r*cos((m-7)*dpha);
```

```
end
```

```
for m=1:13
```

```
    x(m+13)=r*sin((7-m)*dpha);    y(m+13)=h+r*cos((7-m)*dpha);
```

```
end
```

```
u1=0; v1=0; v13=0; u13=0;
```

```
syms u2 u3 u4 u5 u6 u7 u8 u9 u10 u11 u12 u14 u15 u16 u17 u18 u19...
```

```
    u20 u21 u22 u23 u24 u25 u26
```

```
syms v2 v3 v4 v5 v6 v7 v8 v9 v10 v11 v12 v14 v15 v16 v17 v18 v19...
```

```
    v20 v21 v22 v23 v24 v25 v26
```

```
u=[u1;u2;u3;u4;u5;u6;u7;u8;u9;u10;u11;u12;u13;u14;u15;u16;u17;u18;u19;
```

```
    u20;u21;u22;u23;u24;u25;u26];
```

```
v=[v1;v2;v3;v4;v5;v6;v7;v8;v9;v10;v11;v12;v13;v14;v15;v16;v17;v18;v19;
```

```
    v20;v21;v22;v23;v24;v25;v26];
```

```
syms f1 f2 f3 f4 f5 f6 f7 f8 f9 f10 f11 f12 f13 f14 f15 f16 f17 f18 f19...
```

```
    f20 f21 f22 f23 f24 f25 f26 f27 f28 f29 f30 f31 f32 f33 f34 f35 f36...
```

```

f37 f38 f39 f40 f41 f42 f43 f44 f45 f46 f47 f48 f49 f50
f=[f1;f2;f3;f4;f5;f6;f7;f8;f9;f10;f11;f12;f13;f14;f15;f16;f17;f18;f19;
f20;f21;f22;f23;f24;f25;f26;f27;f28;f29;f30;f31;f32;f33;f34;f35;f36;
f37;f38;f39;f40;f41;f42;f43;f44;f45;f46;f47;f48;f49;f50];
syms l1 l2 l3 l4 l5 l6 l7 l8 l9 l10 l11 l12 l13 l14 l15 l16 l17 l18 l19...
l20 l21 l22 l23 l24 l25 l26 l27 l28 l29 l30 l31 l32 l33 l34 l35 l36...
l37 l38 l39 l40 l41 l42 l43 l44 l45 l46 l47 l48 l49
l=[l1;l2;l3;l4;l5;l6;l7;l8;l9;l10;l11;l12;l13;l14;l15;l16;l17;l18;l19;
l20;l21;l22;l23;l24;l25;l26;l27;l28;l29;l30;l31;l32;l33;l34;l35;l36;
l37;l38;l39;l40;l41;l42;l43;l44;l45;l46;l47;l48;l49];
syms bdl1 bdl2 bdl3 bdl4 bdl5 bdl6 bdl7 bdl8 bdl9 bdl10 bdl11 bdl12...
bdl13 bdl14 bdl15 bdl16 bdl17 bdl18 bdl19 bdl20 bdl21 bdl22 bdl23...
bdl24 bdl25 bdl26 bdl27 bdl28 bdl29 bdl30 bdl31 bdl32 bdl33 bdl34...
bdl35 bdl36 bdl37 bdl38 bdl39 bdl40 bdl41 bdl42 bdl43 bdl44 bdl45...
bdl46 bdl47 bdl48 bdl49
bdl=[bdl1;bdl2;bdl3;bdl4;bdl5;bdl6;bdl7;bdl8;bdl9;bdl10;bdl11;bdl12;bdl13;
bdl14;bdl15;bdl16;bdl17;bdl18;bdl19;bdl20;bdl21;bdl22;bdl23;bdl24;
bdl25;bdl26;bdl27;bdl28;bdl29;bdl30;bdl31;bdl32;bdl33;bdl34;bdl35;
bdl36;bdl37;bdl38;bdl39;bdl40;bdl41;bdl42;bdl43;bdl44;bdl45;bdl46;
bdl47;bdl48;bdl49];
f(1)=0;
for i=1:12
l(i)=((x(i)-x(i+1))^2+(y(i)-y(i+1))^2)^(1/2);
bdl(i)=((x(i)-x(i+1))*(u(i)-u(i+1))+(y(i)-y(i+1))*(v(i)-v(i+1))))/l(i);
f(i+1)=f(i)+ea1*((bdl(i))^2)/l(i);
end
for i=1:12
l(12+i)=((x(i+13)-x(i+14))^2+(y(i+13)-y(i+14))^2)^(1/2);
bdl(12+i)=((x(i+13)-x(i+14))*(u(i+13)-u(i+14))+(y(i+13)-y(i+14))*...
(v(i+13)-v(i+14)))/l(12+i);
f(13+i)=f(12+i)+ea1*((bdl(12+i))^2)/l(12+i);
end
for i=1:13
l(24+i)=sqrt((x(i)-x(27-i))^2+(y(i)-y(27-i))^2);
bdl(24+i)=((x(i)-x(27-i))*(u(i)-u(27-i))+(y(i)-y(27-i))*(v(i)-v(27-i)))/l(24+i);
f(25+i)=f(24+i)+ea2*((bdl(24+i))^2)/l(24+i);
end
for i=1:6
l(37+i)=sqrt((x(2*i-1)-x(27-2*i))^2+(y(2*i-1)-y(27-2*i))^2);
bdl(37+i)=((x(2*i-1)-x(27-2*i))*(u(2*i-1)-u(27-2*i))+(y(2*i-1)-y(27-...
2*i))*v(2*i-1)-v(27-2*i)))/l(37+i);
f(38+i)=f(37+i)+ea3*((bdl(37+i))^2)/l(37+i);
end
for i=1:6

```

```

l(43+i)=sqrt((x(2*i+1)-x(27-2*i))^2+(y(2*i+1)-y(27-2*i))^2);
bdl(43+i)=((x(2*i+1)-x(27-2*i))*(u(2*i+1)-u(27-2*i))+
(y(2*i+1)-y(27-2*i))*(v(2*i+1)-v(27-2*i)))/l(43+i);
f(44+i)=f(43+i)+ea3*((bdl(43+i))^2)/l(43+i);
end
for i=1:6
l(49+i)=sqrt((x(2*i)-x(28-2*i))^2+(y(2*i)-y(28-2*i))^2);
bdl(49+i)=((x(2*i)-x(28-2*i))*(u(2*i)-u(28-2*i))+
(y(2*i)-y(28-2*i))*(v(2*i)-v(28-2*i)))/l(49+i);
f(50+i)=f(49+i)+ea3*((bdl(49+i))^2)/l(49+i);
end
for i=1:6
l(55+i)=sqrt((x(2*i)-x(26-2*i))^2+(y(2*i)-y(26-2*i))^2);
bdl(55+i)=((x(2*i)-x(26-2*i))*(u(2*i)-u(26-2*i))+
(y(2*i)-y(26-2*i))*(v(2*i)-v(26-2*i)))/l(55+i);
f(56+i)=f(55+i)+ea3*((bdl(55+i))^2)/l(55+i);
end
q=2*p*(v(14)/2+v(15)+v(16)+v(17)+v(18)+v(19)+v(20)+v(21)+v(22)+v(23)...
+v(24)+v(25)+v(26)/2);
g=f(62)+q;
syms a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10 a11 a12 a13 a14 a15 a16 a17 a18 a19...
a20 a21 a22 a23 a24 a25 a26 a27 a28 a29 a30 a31 a32 a33 a34 a35 a36...
a37 a38 a39 a40 a41 a42 a43 a44 a45 a46 a47 a48 a49
a=[a1;a2;a3;a4;a5;a6;a7;a8;a9;a10;a11;a12;a13;a14;a15;a16;a17;a18;a19;
a20;a21;a22;a23;a24;a25;a26;a27;a28;a29;a30;a31;a32;a33;a34;a35;a36;
a37;a38;a39;a40;a41;a42;a43;a44;a45;a46;a47;a48];
b=[u2;u3;u4;u5;u6;u7;u8;u9;u10;u11;u12;u14;u15;u16;u17;u18;u19;u20;u21;
u22;u23;u24;u25;u26;v2;v3;v4;v5;v6;v7;v8;v9;v10;v11;v12;v14;v15;v16;v17;
v18;v19;v20;v21;v22;v23;v24;v25;v26];
for i=1:48
a(i)=diff(g,b(i));
end
g=simplify(a);
% file myfun.m
function f=myfun(x)
global g
for i=1:11
magic_str=['u',int2str(i+1),'=x(i)']; eval(magic_str);
end
for i=1:13
magic_str=['u',int2str(i+13),'=x(i+11)']; eval(magic_str);
end
for i=1:11
magic_str=['v',int2str(i+1),'=x(24+i)']; eval(magic_str);

```



```

end
for i=1:13
    magic_str=['v',int2str(i+13),'=x(35+i)'];    eval(magic_str);
end
f=eval(g);
return
% file cal.m
x0=zeros(48,1); options=optimset('display','iter','maxfunevals',1000);
[x,fval,exitflag]=fsolve(@myfun,x0,options)
global p k span r kn nx dpha g ea1 ea2 ea3 h
u=zeros(26,1); v=zeros(26,1);
for i=1:11
    u(i+1)=x(i);
end
for i=1:13
    u(i+13)=x(i+11);
end
for i=1:11
    v(i+1)=x(24+i);
end
for i=1:13
    v(i+13)=x(35+i);
end
for m=1:13
    x(m)=r*sin((m-7)*dpha);    y(m)=r*cos((m-7)*dpha);
end
for m=1:13
    x(m+13)=r*sin((7-m)*dpha);    y(m+13)=h+r*cos((7-m)*dpha);
end
syms n1 n2 n3 n4 n5 n6 n7 n8 n9 n10 n11 n12 n13 n14 n15 n16 n17 n18 n19...
    n20 n21 n22 n23 n24 n25 n26 n27 n28 n29 n30 n31 n32 n33 n34 n35 n36...
    n37 n38 n39 n40 n41 n42 n43 n44 n45 n46 n47 n48 n49 n50 n51 n52 n53...
    n54 n55 n56 n57 n58 n59 n60 n61
n=[n1;n2;n3;n4;n5;n6;n7;n8;n9;n10;n11;n12;n13;n14;n15;n16;n17;n18;n19;n20;
    n21;n22;n23;n24;n25;n26;n27;n28;n29;n30;n31;n32;n33;n34;n35;n36;n37;
    n38;n39;n40;n41;n42;n43;n44;n45;n46;n47;n48;n49;n50;n51;n52;n53;n54;
    n55;n56;n57;n58;n59;n60;n61];
for i=1:12
    l(i)=((x(i)-x(i+1))^2+(y(i)-y(i+1))^2)^(1/2);
    bdl(i)=((x(i)-x(i+1))*(u(i)-u(i+1))+(y(i)-y(i+1))*(v(i)-v(i+1))))/l(i);
end
for i=1:12
    l(12+i)=((x(i+13)-x(i+14))^2+(y(i+13)-y(i+14))^2)^(1/2);
    bdl(12+i)=((x(i+13)-x(i+14))*(u(i+13)-u(i+14))+(y(i+13)-y(i+14))*...

```

```

    (v(i+13)-v(i+14))/l(12+i);
end
    for i=1:13
    l(24+i)=sqrt((x(i)-x(27-i))^2+(y(i)-y(27-i))^2);
    bdl(24+i)=((x(i)-x(27-i))*(u(i)-u(27-i))+(y(i)-y(27-i))*(v(i)-v(27-i)))/l(24+i);
    end
for i=1:6
    l(37+i)=sqrt((x(2*i-1)-x(27-2*i))^2+(y(2*i-1)-y(27-2*i))^2);
    bdl(37+i)=((x(2*i-1)-x(27-2*i))*(u(2*i-1)-u(27-2*i))+(y(2*i-1)-y(27-...
        2*i))*(v(2*i-1)-v(27-2*i)))/l(37+i);
end
for i=1:6
    l(43+i)=sqrt((x(2*i+1)-x(27-2*i))^2+(y(2*i+1)-y(27-2*i))^2);
    bdl(43+i)=((x(2*i+1)-x(27-2*i))*(u(2*i+1)-u(27-2*i))+(y(2*i+1)-y(27-...
        2*i))*(v(2*i+1)-v(27-2*i)))/l(43+i);
end
for i=1:6
    l(49+i)=sqrt((x(2*i)-x(28-2*i))^2+(y(2*i)-y(28-2*i))^2);
    bdl(49+i)=((x(2*i)-x(28-2*i))*(u(2*i)-u(28-2*i))+(y(2*i)-y(28-2*i))*...
        (v(2*i)-v(28-2*i)))/l(49+i);
end
for i=1:6
    l(55+i)=sqrt((x(2*i)-x(26-2*i))^2+(y(2*i)-y(26-2*i))^2);
    bdl(55+i)=((x(2*i)-x(26-2*i))*(u(2*i)-u(26-2*i))+(y(2*i)-y(26-2*i))*...
        (v(2*i)-v(26-2*i)))/l(55+i);
end
for i=1:24
    n(i)=(bdl(i)*ea1)/l(i);
end
for i=25:1:37
    n(i)=(bdl(i)*ea2)/l(i);
end
for i=38:1:61
    n(i)=(bdl(i)*ea3)/l(i);
end
vpa(n,8)

```

## 7. Code ví dụ 7 (Dàn cầu không gian một lớp)

```

%File dancau.m
clear all
clc
global p k span r kn nx dpha g ea ea1 ea2
p=40;ea=12.92*2*10^4; ea1=ea/2; ea2=10.642*2*10^4; k=1/4; span=40;
r=(span*(1+4*k*k)/8)/k; kn=8; nx=6;
dpha=atan((span/2)/((r*r-span*span/4)^(1/2)))/nx;

```

```

x=zeros(169,1); y=zeros(169,1); z=zeros(169,1);
x(1)=x(1)+0; y(1)=y(1)+0; z(1)=z(1)+r;
  for m=1:8
    x(m+1)=x(m+1)+r*sin(1*dpha)*cos((((m-1)/1)*2*pi)/kn);
    y(m+1)=y(m+1)+r*sin(1*dpha)*sin((((m-1)/1)*2*pi)/kn);
    z(m+1)=z(m+1)+r*cos(1*dpha);
  end
  for m=1:16
    x(9+m)=x(9+m)+r*sin(2*dpha)*cos((((m-1)/2)*2*pi)/kn);
    y(m+9)=y(m+9)+r*sin(2*dpha)*sin((((m-1)/2)*2*pi)/kn);
    z(m+9)=z(m+9)+r*cos(2*dpha);
  end
  for m=1:24
    x(25+m)=x(25+m)+r*sin(3*dpha)*cos((((m-1)/3)*2*pi)/kn);
    y(m+25)=y(m+25)+r*sin(3*dpha)*sin((((m-1)/3)*2*pi)/kn);
    z(m+25)=z(m+25)+r*cos(3*dpha);
  end
  for m=1:32
    x(49+m)=x(49+m)+r*sin(4*dpha)*cos((((m-1)/4)*2*pi)/kn);
    y(m+49)=y(m+49)+r*sin(4*dpha)*sin((((m-1)/4)*2*pi)/kn);
    z(m+49)=z(m+49)+r*cos(4*dpha);
  end
  for m=1:40
    x(81+m)=x(81+m)+r*sin(5*dpha)*cos((((m-1)/5)*2*pi)/kn);
    y(m+81)=y(m+81)+r*sin(5*dpha)*sin((((m-1)/5)*2*pi)/kn);
    z(m+81)=z(m+81)+r*cos(5*dpha);
  end
  for m=1:48
    x(121+m)=x(121+m)+r*sin(6*dpha)*cos((((m-1)/6)*2*pi)/kn);
    y(m+121)=y(m+121)+r*sin(6*dpha)*sin((((m-1)/6)*2*pi)/kn);
    z(m+121)=z(m+121)+r*cos(6*dpha);
  end
  u1=0;v1=0;v2=0;v10=0;v26=0;v50=0;v82=0;u122=0;v122=0;u123=0;
v123=0;u124=0;v124=0;u125=0;v125=0;u126=0;v126=0;u127=0;
v127=0;u128=0;v128=0;w122=0;w123=0;w124=0;w125=0;w126=0;
w127=0;w128=0;
syms u2 u3 u4 u5 u6 u7 u8 u9 u10 u11 u12 u13 u14 u15 u16 u17 u18 u19...
  u20 u21 u22 u23 u24 u25 u26 u27 u28 u29 u30 u31 u32 u33 u34 u35 u36...
  u37 u38 u39 u40 u41 u42 u43 u44 u45 u46 u47 u48 u49 u50 u51 u52 u53...
  u54 u55 u56 u57 u58 u59 u60 u61 u62 u63 u64 u65 u66 u67 u68 u69 u70...
  u71 u72 u73 u74 u75 u76 u77 u78 u79 u80 u81 u82 u83 u84 u85 u86 u87...
u88 u89 u90 u91 u92 u93 u94 u95 u96 u97 u98 u99 u100 u101 u102...
  u103 u104 u105 u106 u107 u108 u109 u110 u111 u112 u113 u114...
  u115 u116 u117 u118 u119 u120 u121
syms v3 v4 v5 v6 v7 v8 v9 v11 v13 v14 v15 v16 v17 v18 v19...

```

v20 v21 v22 v23 v24 v25 v27 v28 v30 v31 v32 v33 v34 v35 v36...  
v37 v38 v39 v40 v41 v42 v43 v44 v45 v46 v47 v48 v49 v51 v52 v53...  
v55 v56 v57 v58 v59 v60 v61 v62 v63 v64 v65 v66 v67 v68 v69 v70...  
v71 v72 v73 v74 v75 v76 v77 v78 v79 v80 v81 v83 v84 v85 v86...  
v88 v89 v90 v91 v92 v93 v94 v95 v96 v97 v98 v99 v100 v101...  
v102 v103 v104 v105 v106 v107 v108 v109 v110 v111 v112...  
v113 v114 v115 v116 v117 v118 v119 v120 v121  
syms w1 w2 w3 w4 w5 w6 w7 w8 w9 w10 w11 w12 w13 w14 w15...  
w16 w17 w18 w19 w20 w21 w22 w23 w24 w25 w26 w27 w28 w29...  
w30 w31 w32 w33 w34 w35 w36 w37 w38 w39 w40 w41 w42 w43...  
w44 w45 w46 w47 w48 w49 w50 w51 w52 w53 w54 w55 w56 w57...  
w58 w59 w60 w61 w62 w63 w64 w65 w66 w67 w68 w69 w70...  
w71 w72 w73 w74 w75 w76 w77 w78 w79 w80 w81 w82 w83...  
w84 w85 w86 w87 w88 w89 w90 w91 w92 w93 w94 w95 w96...  
w97 w98 w99 w100 w101 w102 w103 w104 w105 w106...  
w107 w108 w109 w110 w111 w112 w113 w114 w115 w116 w117 w118...  
w119 w120 w121  
u=[u1;u2;u3;u4;u5;u6;u7;u8;u9;u10;u11;u12;u13;u14;u15;u16;u17;u18;u19;  
u20;u21;u22;u23;u24;u25;u26;u27;u28;u29;u30;u31;u32;u33;u34;u35;u36;  
u37;u38;u39;u40;u41;u42;u43;u44;u45;u46;u47;u48;u49;u50;u51;u52;u53;  
u54;u55;u56;u57;u58;u59;u60;u61;u62;u63;u64;u65;u66;u67;u68;u69;u70;  
u71;u72;u73;u74;u75;u76;u77;u78;u79;u80;u81;u82;u83;u84;u85;u86;u87;  
u88;u89;u90;u91;u92;u93;u94;u95;u96;u97;u98;u99;u100;u101;u102;u103;  
u104;u105;u106;u107;u108;u109;u110;u111;u112;u113;u114;u115;u116;  
u117;u118;u119;u120;u121;u122;u123;u124;u125;u126;u127;u128];  
v=[v1;v2;v3;v4;v5;v6;v7;v8;v9;v10;v11;v12;v13;v14;v15;v16;v17;v18;v19;  
v20;v21;v22;v23;v24;v25;v26;v27;v28;v29;v30;v31;v32;v33;v34;v35;v36;  
v37;v38;v39;v40;v41;v42;v43;v44;v45;v46;v47;v48;v49;v50;v51;v52;v53;  
u54;v55;v56;v57;v58;v59;v60;v61;v62;v63;v64;v65;v66;v67;v68;v69;v70;  
v71;v72;v73;v74;v75;v76;v77;v78;v79;v80;v81;v82;v83;v84;v85;v86;  
u87;v88;v89;v90;v91;v92;v93;v94;v95;v96;v97;v98;v99;v100;v101;v102;  
v103;v104;v105;v106;v107;v108;v109;v110;v111;v112;v113;v114;v115;  
v116;v117;v118;v119;v120;v121;v122;v123;v124;v125;v126;v127;v128];  
w=[w1;w2;w3;w4;w5;w6;w7;w8;w9;w10;w11;w12;w13;w14;w15;w16;  
w17;w18;w19;w20;w21;w22;w23;w24;w25;w26;w27;w28;w29;w30;w31;  
w32;w33;w34;w35;w36;w37;w38;w39;w40;w41;w42;w43;w44;w45;w46;  
w47;w48;w49;w50;w51;w52;w53;w54;w55;w56;w57;w58;w59;w60;w61;  
w62;w63;w64;w65;w66;w67;w68;w69;w70;w71;w72;w73;w74;w75;w76;  
w77;w78;w79;w80;w81;w82;w83;w84;w85;w86;w87;w88;w89;w90;w91;  
w92;w93;w94;w95;w96;w97;w98;w99;w100;w101;w102;w103;w104;w105;  
w106;w107;w108;w109;w110;w111;w112;w113;w114;w115;w116;w117;  
w118;w119;w120;w121;w122;w123;w124;w125;w126;w127;w128];  
syms f1 f2 f3 f4 f5 f6 f7 f8 f9 f10 f11 f12 f13 f14 f15 f16 f17 f18 f19...  
f20 f21 f22 f23 f24 f25 f26 f27 f28 f29 f30 f31 f32 f33 f34 f35 f36...

```

f37 f38 f39 f40 f41 f42 f43 f44 f45 f46 f47 f48 f49 f50 f51 f52 f53...
f54 f55 f56 f57 f58
f=[f1;f2;f3;f4;f5;f6;f7;f8;f9;f10;f11;f12;f13;f14;f15;f16;f17;f18;f19;
f20;f21;f22;f23;f24;f25;f26;f27;f28;f29;f30;f31;f32;f33;f34;f35;f36;
f37;f38;f39;f40;f41;f42;f43;f44;f45;f46;f47;f48;f49;f50;f51;f52;f53;
f54;f55;f56;f57;f58];
syms l1 l2 l3 l4 l5 l6 l7 l8 l9 l10 l11 l12 l13 l14 l15 l16 l17 l18 l19...
l20 l21 l22 l23 l24 l25 l26 l27 l28 l29 l30 l31 l32 l33 l34 l35 l36...
l37 l38 l39 l40 l41 l42 l43 l44 l45 l46 l47 l48 l49 l50 l51 l52 l53...
l54 l55 l56 l57
l=[l1;l2;l3;l4;l5;l6;l7;l8;l9;l10;l11;l12;l13;l14;l15;l16;l17;l18;l19;
l20;l21;l22;l23;l24;l25;l26;l27;l28;l29;l30;l31;l32;l33;l34;l35;l36;
l37;l38;l39;l40;l41;l42;l43;l44;l45;l46;l47;l48;l49;l50;l51;l52;l53;
l54;l55;l56;l57];
syms bdl1 bdl2 bdl3 bdl4 bdl5 bdl6 bdl7 bdl8 bdl9 bdl10 bdl11 bdl12 bdl13...
bdl14 bdl15 bdl16 bdl17 bdl18 bdl19 bdl20 bdl21 bdl22 bdl23 bdl24...
bdl25 bdl26 bdl27 bdl28 bdl29 bdl30 bdl31 bdl32 bdl33 bdl34 bdl35...
bdl36 bdl37 bdl38 bdl39 bdl40 bdl41 bdl42 bdl43 bdl44 bdl45 bdl46...
bdl47 bdl48 bdl49 bdl50 bdl51 bdl52 bdl53 bdl54 bdl55 bdl56 bdl57
bdl=[bdl1;bdl2;bdl3;bdl4;bdl5;bdl6;bdl7;bdl8;bdl9;bdl10;bdl11;bdl12;bdl13;
bdl14;bdl15;bdl16;bdl17;bdl18;bdl19;bdl20;bdl21;bdl22;bdl23;bdl24;
bdl25;bdl26;bdl27;bdl28;bdl29;bdl30;bdl31;bdl32;bdl33;bdl34;bdl35;
bdl36;bdl37;bdl38;bdl39;bdl40;bdl41;bdl42;bdl43;bdl44;bdl45;bdl46;
bdl47;bdl48;bdl49;bdl50;bdl51;bdl52;bdl53;bdl54;bdl55;bdl56;bdl57];
f(1)=0;
for i=1:2
    l(i)=((x(1)-x(i+1))^2+(y(1)-y(i+1))^2+(z(1)-z(i+1))^2)^(1/2);
    bdl(i)=((x(1)-x(i+1))*(u(1)-u(i+1))+(y(1)-y(i+1))*(v(1)-v(i+1))...
+(z(1)-z(i+1))*(w(1)-w(i+1)))/l(i);
    f(i+1)=f(i)+ea1*((bdl(i))^2)/l(i);
end
for i=1:2
    l(2+i)=((x(i+1)-x(2*i+8))^2+(y(i+1)-y(2*i+8))^2+(z(i+1)-...
z(2*i+8))^2)^(1/2);
    bdl(2+i)=((x(i+1)-x(i*2+8))*(u(i+1)-u(i*2+8))+(y(i+1)-y(i*2+8))*...
(v(i+1)-v(i*2+8))+(z(i+1)-z(i*2+8))*(w(i+1)-w(i*2+8)))/l(2+i);
    f(3+i)=f(2+i)+ea1*((bdl(2+i))^2)/l(2+i);
end
for i=1:2
    l(4+i)=sqrt((x(2*i+8)-x(3*i+23))^2+(y(2*i+8)-y(3*i+23))^2+...
(z(2*i+8)-z(3*i+23))^2);
    bdl(4+i)=((x(2*i+8)-x(3*i+23))*(u(2*i+8)-u(3*i+23))+(y(2*i+8)...
-y(3*i+23))*(v(2*i+8)-v(3*i+23))+(z(2*i+8)-z(3*i+23))*...
(w(2*i+8)-w(3*i+23)))/l(4+i);

```

```

    f(5+i)=f(4+i)+ea1*((bdl(4+i))^2)/l(4+i);
end
for i=1:2
    l(6+i)=sqrt((x(3*i+23)-x(4*i+46))^2+(y(3*i+23)-y(4*i+46))^2+...
        (z(3*i+23)-z(4*i+46))^2);
    bdl(6+i)=((x(3*i+23)-x(4*i+46))*(u(3*i+23)-u(4*i+46))+...
        (y(3*i+23)-y(4*i+46))*(v(3*i+23)-v(4*i+46))+...
        (z(3*i+23)-z(4*i+46))*(w(3*i+23)-w(4*i+46)))/l(6+i);
    f(7+i)=f(6+i)+ea1*((bdl(6+i))^2)/l(6+i);
end
for i=1:2
    l(8+i)=sqrt((x(4*i+46)-x(5*i+77))^2+(y(4*i+46)-y(5*i+77))^2+...
        (z(4*i+46)-z(5*i+77))^2);
    bdl(8+i)=((x(4*i+46)-x(5*i+77))*(u(4*i+46)-u(5*i+77))+...
        (y(4*i+46)-y(5*i+77))*(v(4*i+46)-v(5*i+77))+...
        (z(4*i+46)-z(5*i+77))*(w(4*i+46)-w(5*i+77)))/l(8+i);
    f(9+i)=f(8+i)+ea1*((bdl(8+i))^2)/l(8+i);
end
for i=1:2
    l(10+i)=sqrt((x(5*i+77)-x(6*i+116))^2+(y(5*i+77)-y(6*i+116))^2+...
        (z(5*i+77)-z(6*i+116))^2);
    bdl(10+i)=((x(5*i+77)-x(6*i+116))*(u(5*i+77)-u(6*i+116))+...
        (y(5*i+77)-y(6*i+116))*(v(5*i+77)-v(6*i+116))+...
        (z(5*i+77)-z(6*i+116))*(w(5*i+77)-w(6*i+116)))/l(10+i);
    f(11+i)=f(10+i)+ea1*((bdl(10+i))^2)/l(10+i);
end
l(13)=sqrt((x(3)-x(2))^2+(y(3)-y(2))^2+(z(3)-z(2))^2);
bdl(13)=((x(3)-x(2))*(u(3)-u(2))+...
    (y(3)-y(2))*(v(3)-v(2))+...
    (z(3)-z(2))*(w(3)-w(2)))/l(13);
f(14)=f(13)+ea*((bdl(13))^2)/l(13);
for i=1:2
    l(13+i)=sqrt((x(i+9)-x(i+10))^2+(y(i+9)-y(i+10))^2+(z(i+9)-z(i+10))^2);
    bdl(13+i)=((x(i+9)-x(i+10))*(u(i+9)-u(i+10))+...
        (y(i+9)-y(i+10))*(v(i+9)-v(i+10))+...
        (z(i+9)-z(i+10))*(w(i+9)-w(i+10)))/l(13+i);
    f(14+i)=f(13+i)+ea*((bdl(13+i))^2)/l(13+i);
end
for i=1:3
    l(15+i)=sqrt((x(i+25)-x(i+26))^2+(y(i+25)-y(i+26))^2+(z(i+25)-z(i+26))^2);
    bdl(15+i)=((x(i+25)-x(i+26))*(u(i+25)-u(i+26))+...
        (y(i+25)-y(i+26))*(v(i+25)-v(i+26))+...
        (z(i+25)-z(i+26))*(w(i+25)-w(i+26)))/l(15+i);
    f(16+i)=f(15+i)+ea*((bdl(15+i))^2)/l(15+i);
end
for i=1:4
    l(18+i)=sqrt((x(i+49)-x(i+50))^2+(y(i+49)-y(i+50))^2+(z(i+49)-z(i+50))^2);

```

```

    bdl(18+i)=((x(i+49)-x(i+50))*(u(i+49)-u(i+50))+(y(i+49)-y(i+50))...
        *(v(i+49)-v(i+50))+(z(i+49)-z(i+50))*(w(i+49)-w(i+50))))/l(18+i);
    f(19+i)=f(18+i)+ea*((bdl(18+i))^2)/l(18+i);
end
for i=1:5
    l(22+i)=sqrt((x(i+81)-x(i+82))^2+(y(i+81)-y(i+82))^2+(z(i+81)-z(i+82))^2);
    bdl(22+i)=((x(i+81)-x(i+82))*(u(i+81)-u(i+82))+(y(i+81)-y(i+82))...
        *(v(i+81)-v(i+82))+(z(i+81)-z(i+82))*(w(i+81)-w(i+82))))/l(22+i);
    f(23+i)=f(22+i)+ea*((bdl(22+i))^2)/l(22+i);
end
l(28)=sqrt((x(2)-x(11))^2+(y(2)-y(11))^2+(z(2)-z(11))^2);
bdl(28)=((x(2)-x(11))*(u(2)-u(11))+(y(2)-y(11))*(v(2)-v(11))+...
    (z(2)-z(11))*(w(2)-w(11)))/l(28);
f(29)=f(28)+ea2*((bdl(28))^2)/l(28);
l(29)=sqrt((x(3)-x(11))^2+(y(3)-y(11))^2+(z(3)-z(11))^2);
bdl(29)=((x(3)-x(11))*(u(3)-u(11))+(y(3)-y(11))*(v(3)-v(11))+...
    (z(3)-z(11))*(w(3)-w(11)))/l(29);
f(30)=f(29)+ea2*((bdl(29))^2)/l(29);
for i=1:2
    l(29+i)=sqrt((x(i+9)-x(i+26))^2+(y(i+9)-y(i+26))^2+(z(i+9)-z(i+26))^2);
    bdl(29+i)=((x(i+9)-x(i+26))*(u(i+9)-u(i+26))+(y(i+9)-y(i+26))*...
        (v(i+9)-v(i+26))+(z(i+9)-z(i+26))*(w(i+9)-w(i+26))))/l(29+i);
    f(30+i)=f(29+i)+ea2*((bdl(29+i))^2)/l(29+i);
end
for i=1:2
    l(31+i)=sqrt((x(i+10)-x(i+26))^2+(y(i+10)-y(i+26))^2+(z(i+10)-z(i+26))^2);
    bdl(31+i)=((x(i+10)-x(i+26))*(u(i+10)-u(i+26))+(y(i+10)-y(i+26))*...
        (v(i+10)-v(i+26))+(z(i+10)-z(i+26))*(w(i+10)-w(i+26))))/l(31+i);
    f(32+i)=f(31+i)+ea2*((bdl(31+i))^2)/l(31+i);
end
for i=1:3
    l(33+i)=sqrt((x(i+25)-x(i+50))^2+(y(i+25)-y(i+50))^2+(z(i+25)-z(i+50))^2);
    bdl(33+i)=((x(i+25)-x(i+50))*(u(i+25)-u(i+50))+(y(i+25)-y(i+50))*...
        (v(i+25)-v(i+50))+(z(i+25)-z(i+50))*(w(i+25)-w(i+50))))/l(33+i);
    f(34+i)=f(33+i)+ea2*((bdl(33+i))^2)/l(33+i);
end
for i=1:3
    l(36+i)=sqrt((x(i+26)-x(i+50))^2+(y(i+26)-y(i+50))^2+(z(i+26)-z(i+50))^2);
    bdl(36+i)=((x(i+26)-x(i+50))*(u(i+26)-u(i+50))+(y(i+26)-y(i+50))*...
        (v(i+26)-v(i+50))+(z(i+26)-z(i+50))*(w(i+26)-w(i+50))))/l(36+i);
    f(37+i)=f(36+i)+ea2*((bdl(36+i))^2)/l(36+i);
end
for i=1:4
    l(39+i)=sqrt((x(i+49)-x(i+82))^2+(y(i+49)-y(i+82))^2+(z(i+49)-z(i+82))^2);

```

```

    bdl(39+i)=((x(i+49)-x(i+82))*(u(i+49)-u(i+82))+(y(i+49)-y(i+82))*...
    (v(i+49)-v(i+82))+(z(i+49)-z(i+82))*(w(i+49)-w(i+82)))/l(39+i);
    f(40+i)=f(39+i)+ea2*((bdl(39+i))^2)/l(39+i);
end
for i=1:4
    l(43+i)=sqrt((x(i+50)-x(i+82))^2+(y(i+50)-y(i+82))^2+(z(i+50)-z(i+82))^2);
    bdl(43+i)=((x(i+50)-x(i+82))*(u(i+50)-u(i+82))+(y(i+50)-y(i+82))*...
    (v(i+50)-v(i+82))+(z(i+50)-z(i+82))*(w(i+50)-w(i+82)))/l(43+i);
    f(44+i)=f(43+i)+ea2*((bdl(43+i))^2)/l(43+i);
end
for i=1:5
    l(47+i)=sqrt((x(i+81)-x(i+122))^2+(y(i+81)-y(i+122))^2+(z(i+81)-...
z(i+122))^2);
    bdl(47+i)=((x(i+81)-x(i+122))*(u(i+81)-u(i+122))+(y(i+81)-...
    y(i+122))*(v(i+81)-v(i+122))+(z(i+81)-z(i+122))*(w(i+81)-w(i+122)))/l(47+i);
    f(48+i)=f(47+i)+ea2*((bdl(47+i))^2)/l(47+i);
end
for i=1:5
    l(52+i)=sqrt((x(i+82)-x(i+122))^2+(y(i+82)-y(i+122))^2+(z(i+82)-...
z(i+122))^2);
    bdl(52+i)=((x(i+82)-x(i+122))*(u(i+82)-u(i+122))+(y(i+82)-y(i+...
    122))*(v(i+82)-v(i+122))+(z(i+82)-z(i+122))*(w(i+82)-w(i+122)))/l(52+i);
    f(53+i)=f(52+i)+ea2*((bdl(52+i))^2)/l(52+i);
end
q=2*p*((w(1)/8)*4/3+((w(2)+w(10)+w(26)+w(50)+w(82)+w(3)+w(12)+...
w(29)+w(54)+w(87))/2)+w(11)+w(27)+w(51)+w(83)+w(28)+w(52)+...
w(53)+w(84)+w(85)+w(86));
g=f(58)+q;
syms a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10 a11 a12 a13 a14 a15 a16 a17 a18 a19...
a20 a21 a22 a23 a24 a25 a26 a27 a28 a29 a30 a31 a32 a33 a34 a35 a36...
a37 a38 a39 a40 a41 a42 a43 a44 a45 a46 a47 a48 a49 a50 a51
a=[a1;a2;a3;a4;a5;a6;a7;a8;a9;a10;a11;a12;a13;a14;a15;a16;a17;a18;a19;
a20;a21;a22;a23;a24;a25;a26;a27;a28;a29;a30;a31;a32;a33;a34;a35;a36;
a37;a38;a39;a40;a41;a42;a43;a44;a45;a46;a47;a48;a49;a50;a51];
b=[u2;u3;u10;u11;u12;u26;u27;u28;u29;u50;u51;u52;u53;u54;u82;u83;u84;
u85;u86;u87;v11;v27;v28;v51;v52;v53;v83;v84;v85;v86;w1;w2;w3;w10;
w11;w12;w26;w27;w28;w29;w50;w51;w52;w53;w54;w82;w83;w84;w85;
w86;w87];
for i=1:51
    a(i)=diff(g,b(i));
end
g=simplify(a);
% File myfun.m
function f=myfun(x)

```



```

global g
for i=1:2
    magic_str=['u',int2str(i+1),'=x(i)']; eval(magic_str);
end
for i=1:3
    magic_str=['u',int2str(i+9),'=x(2+i)']; eval(magic_str);
end
for i=1:4
    magic_str=['u',int2str(i+25),'=x(5+i)']; eval(magic_str);
end
for i=1:5
    magic_str=['u',int2str(i+49),'=x(9+i)']; eval(magic_str);
end
for i=1:6
    magic_str=['u',int2str(i+81),'=x(14+i)']; eval(magic_str);
end
for i=1:1
    magic_str=['v',int2str(10+i),'=x(20+i)']; eval(magic_str);
end
for i=1:2
    magic_str=['v',int2str(i+26),'=x(21+i)']; eval(magic_str);
end
for i=1:3
    magic_str=['v',int2str(i+50),'=x(23+i)']; eval(magic_str);
end
for i=1:4
    magic_str=['v',int2str(i+82),'=x(26+i)']; eval(magic_str);
end
for i=1:3
    magic_str=['w',int2str(i),'=x(30+i)']; eval(magic_str);
end
for i=1:3
    magic_str=['w',int2str(i+9),'=x(33+i)']; eval(magic_str);
end
for i=1:4
    magic_str=['w',int2str(i+25),'=x(36+i)']; eval(magic_str);
end
for i=1:5
    magic_str=['w',int2str(i+49),'=x(40+i)']; eval(magic_str);
end
for i=1:6
    magic_str=['w',int2str(i+81),'=x(45+i)']; eval(magic_str);
end
f=eval(g);

```

```

return
%File cal.m
x0=zeros(51,1); options=optimset('display','iter','maxfunevals',1000);
[x,fval,exitflag]=fsolve(@myfun,x0,options)
%chuyen vi
global p k span r kn nx dpha g ea ea1 ea2
u=zeros(169,1);v=zeros(169,1);w=zeros(169,1);
for i=1:2
    u(i+1)=x(i);
end
for i=1:3
    u(i+9)=x(2+i);
end
for i=1:4
    u(i+25)=x(5+i);
end
for i=1:5
    u(i+49)=x(9+i);
end
for i=1:6
    u(i+81)=x(14+i);
end
v(11)=x(21);
for i=1:2
    v(i+26)=x(21+i);
end
for i=1:3
    v(i+50)=x(23+i);
end
for i=1:4
    v(i+82)=x(26+i);
end
for i=1:3
    w(i)=x(30+i);
end
for i=1:3
    w(i+9)=x(33+i);
end
for i=1:4
    w(i+25)=x(36+i);
end
for i=1:5
    w(i+49)=x(40+i);
end

```

```

for i=1:6
    w(i+81)=x(45+i);
end
v(3)=x(2);v(12)=x(5);v(29)=x(9);v(54)=x(14);v(87)=x(20);
for i=1:3
    uu(i)=u(i); vv(i)=v(i); ww(i)=w(i);
end
for i=1:3
    uu(i+3)=u(i+9); vv(i+3)=v(i+9); ww(i+3)=w(i+9);
end
for i=1:4
    uu(i+6)=u(i+25); vv(i+6)=v(i+25); ww(i+6)=w(i+25);
end
for i=1:5
    uu(i+10)=u(i+49); vv(i+10)=v(i+49); ww(i+10)=w(i+49);
end
for i=1:6
    uu(i+15)=u(i+81); vv(i+15)=v(i+81); ww(i+15)=w(i+81);
end
x=zeros(169,1);y=zeros(169,1);z=zeros(169,1);x(1)=x(1)+0;y(1)=y(1)+0;
z(1)=z(1)+r;
for m=1:8
    x(m+1)=x(m+1)+r*sin(1*dpha)*cos((((m-1)/1)*2*pi)/kn);
    y(m+1)=y(m+1)+r*sin(1*dpha)*sin((((m-1)/1)*2*pi)/kn);
    z(m+1)=z(m+1)+r*cos(1*dpha);
end
for m=1:16
    x(9+m)=x(9+m)+r*sin(2*dpha)*cos((((m-1)/2)*2*pi)/kn);
    y(m+9)=y(m+9)+r*sin(2*dpha)*sin((((m-1)/2)*2*pi)/kn);
    z(m+9)=z(m+9)+r*cos(2*dpha);
end
for m=1:24
    x(25+m)=x(25+m)+r*sin(3*dpha)*cos((((m-1)/3)*2*pi)/kn);
    y(m+25)=y(m+25)+r*sin(3*dpha)*sin((((m-1)/3)*2*pi)/kn);
    z(m+25)=z(m+25)+r*cos(3*dpha);
end
for m=1:32
    x(49+m)=x(49+m)+r*sin(4*dpha)*cos((((m-1)/4)*2*pi)/kn);
    y(m+49)=y(m+49)+r*sin(4*dpha)*sin((((m-1)/4)*2*pi)/kn);
    z(m+49)=z(m+49)+r*cos(4*dpha);
end
for m=1:40
    x(81+m)=x(81+m)+r*sin(5*dpha)*cos((((m-1)/5)*2*pi)/kn);
    y(m+81)=y(m+81)+r*sin(5*dpha)*sin((((m-1)/5)*2*pi)/kn);

```

```

    z(m+81)=z(m+81)+r*cos(5*dpha);
end
for m=1:48
    x(121+m)=x(121+m)+r*sin(6*dpha)*cos((((m-1)/6)*2*pi)/kn);
    y(m+121)=y(m+121)+r*sin(6*dpha)*sin((((m-1)/6)*2*pi)/kn);
    z(m+121)=z(m+121)+r*cos(6*dpha);
end
syms n1 n2 n3 n4 n5 n6 n7 n8 n9 n10 n11 n12 n13 n14 n15 n16 n17 n18... n19 n20
n21 n22 n23 n24 n25 n26 n27 n28 n29 n30 n31 n32 n33 n34 n35... n36 n37 n38
n39 n40 n41 n42 n43 n44 n45 n46 n47 n48 n49 n50 n51 n52... n53 n54 n55 n56
n57
n=[n1;n2;n3;n4;n5;n6;n7;n8;n9;n10;n11;n12;n13;n14;n15;n16;n17;n18;n19;
n20;n21;n22;n23;n24;n25;n26;n27;n28;n29;n30;n31;n32;n33;n34;n35;n36;
n37;n38;n39;n40;n41;n42;n43;n44;n45;n46;n47;n48;n49;n50;n51;n52;n53;
n54;n55;n56;n57];
for i=1:2
    l(i)=((x(1)-x(i+1))^2+(y(1)-y(i+1))^2+(z(1)-z(i+1))^2)^(1/2);
    bdl(i)=((x(1)-x(i+1))*(u(1)-u(i+1))+(y(1)-y(i+1))*(v(1)-v(i+1))...
    +(z(1)-z(i+1))*(w(1)-w(i+1)))/l(i);
end
for i=1:2
    l(2+i)=((x(i+1)-x(2*i+8))^2+(y(i+1)-y(2*i+8))^2+(z(i+1)-...
z(2*i+8))^2)^(1/2);
    bdl(2+i)=((x(i+1)-x(i*2+8))*(u(i+1)-u(i*2+8))+(y(i+1)-y(i*2+8))*...
    (v(i+1)-v(i*2+8))+(z(i+1)-z(i*2+8))*(w(i+1)-w(i*2+8)))/l(2+i);
end
for i=1:2
    l(4+i)=sqrt((x(2*i+8)-x(3*i+23))^2+(y(2*i+8)-y(3*i+23))^2+...
    (z(2*i+8)-z(3*i+23))^2);
    bdl(4+i)=((x(2*i+8)-x(3*i+23))*(u(2*i+8)-u(3*i+23))+(y(2*i+8)...
    -y(3*i+23))*(v(2*i+8)-v(3*i+23))+(z(2*i+8)-z(3*i+23))*...
    (w(2*i+8)-w(3*i+23)))/l(4+i);
end
for i=1:2
    l(6+i)=sqrt((x(3*i+23)-x(4*i+46))^2+(y(3*i+23)-y(4*i+46))^2+...
    (z(3*i+23)-z(4*i+46))^2);
    bdl(6+i)=((x(3*i+23)-x(4*i+46))*(u(3*i+23)-u(4*i+46))+(y(3*i+23)...
    -y(4*i+46))*(v(3*i+23)-v(4*i+46))+(z(3*i+23)-z(4*i+46))*...
    (w(3*i+23)-w(4*i+46)))/l(6+i);
end
for i=1:2
    l(8+i)=sqrt((x(4*i+46)-x(5*i+77))^2+(y(4*i+46)-y(5*i+77))^2+...
    (z(4*i+46)-z(5*i+77))^2);
    bdl(8+i)=((x(4*i+46)-x(5*i+77))*(u(4*i+46)-u(5*i+77))+(y(4*i+46)...

```

```

        -y(5*i+77))*(v(4*i+46)-v(5*i+77))+(z(4*i+46)-z(5*i+77))*...
        (w(4*i+46)-w(5*i+77))/l(8+i);
end
for i=1:2
    l(10+i)=sqrt((x(5*i+77)-x(6*i+116))^2+(y(5*i+77)-y(6*i+116))^2+...
        (z(5*i+77)-z(6*i+116))^2);
    bdl(10+i)=((x(5*i+77)-x(6*i+116))*(u(5*i+77)-u(6*i+116))+...
        (y(5*i+77)-y(6*i+116))*(v(5*i+77)-v(6*i+116))+(z(5*i+77)-...
        z(6*i+116))*(w(5*i+77)-w(6*i+116)))/l(10+i);
end
l(13)=sqrt((x(3)-x(2))^2+(y(3)-y(2))^2+(z(3)-z(2))^2);
bdl(13)=((x(3)-x(2))*(u(3)-u(2))+(y(3)-y(2))*(v(3)-v(2))+(z(3)-...
    z(2))*(w(3)-w(2)))/l(13);
for i=1:2
    l(13+i)=sqrt((x(i+9)-x(i+10))^2+(y(i+9)-y(i+10))^2+(z(i+9)-z(i+10))^2);
    bdl(13+i)=((x(i+9)-x(i+10))*(u(i+9)-u(i+10))+(y(i+9)-y(i+10))*...
        (v(i+9)-v(i+10))+(z(i+9)-z(i+10))*(w(i+9)-w(i+10)))/l(13+i);
end
for i=1:3
    l(15+i)=sqrt((x(i+25)-x(i+26))^2+(y(i+25)-y(i+26))^2+(z(i+25)-z(i+26))^2);
    bdl(15+i)=((x(i+25)-x(i+26))*(u(i+25)-u(i+26))+(y(i+25)-y(i+26))...
        *(v(i+25)-v(i+26))+(z(i+25)-z(i+26))*(w(i+25)-w(i+26)))/l(15+i);
end
for i=1:4
    l(18+i)=sqrt((x(i+49)-x(i+50))^2+(y(i+49)-y(i+50))^2+(z(i+49)-z(i+50))^2);
    bdl(18+i)=((x(i+49)-x(i+50))*(u(i+49)-u(i+50))+(y(i+49)-y(i+50))...
        *(v(i+49)-v(i+50))+(z(i+49)-z(i+50))*(w(i+49)-w(i+50)))/l(18+i);
end
for i=1:5
    l(22+i)=sqrt((x(i+81)-x(i+82))^2+(y(i+81)-y(i+82))^2+(z(i+81)-z(i+82))^2);
    bdl(22+i)=((x(i+81)-x(i+82))*(u(i+81)-u(i+82))+(y(i+81)-y(i+82))...
        *(v(i+81)-v(i+82))+(z(i+81)-z(i+82))*(w(i+81)-w(i+82)))/l(22+i);
end
l(28)=sqrt((x(2)-x(11))^2+(y(2)-y(11))^2+(z(2)-z(11))^2);
bdl(28)=((x(2)-x(11))*(u(2)-u(11))+(y(2)-y(11))*(v(2)-v(11))+...
    (z(2)-z(11))*(w(2)-w(11)))/l(28);
l(29)=sqrt((x(3)-x(11))^2+(y(3)-y(11))^2+(z(3)-z(11))^2);
bdl(29)=((x(3)-x(11))*(u(3)-u(11))+(y(3)-y(11))*(v(3)-v(11))+...
    (z(3)-z(11))*(w(3)-w(11)))/l(29);
for i=1:2
    l(29+i)=sqrt((x(i+9)-x(i+26))^2+(y(i+9)-y(i+26))^2+(z(i+9)-z(i+26))^2);
    bdl(29+i)=((x(i+9)-x(i+26))*(u(i+9)-u(i+26))+(y(i+9)-y(i+26))*...
        (v(i+9)-v(i+26))+(z(i+9)-z(i+26))*(w(i+9)-w(i+26)))/l(29+i);
end

```

```

for i=1:2
    l(31+i)=sqrt((x(i+10)-x(i+26))^2+(y(i+10)-y(i+26))^2+(z(i+10)-z(i+26))^2);
    bdl(31+i)=((x(i+10)-x(i+26))*(u(i+10)-u(i+26)))+(y(i+10)-y(i+26))*...
        (v(i+10)-v(i+26)))+(z(i+10)-z(i+26))*(w(i+10)-w(i+26)))/l(31+i);
end
for i=1:3
    l(33+i)=sqrt((x(i+25)-x(i+50))^2+(y(i+25)-y(i+50))^2+(z(i+25)-z(i+50))^2);
    bdl(33+i)=((x(i+25)-x(i+50))*(u(i+25)-u(i+50)))+(y(i+25)-y(i+50))*...
        (v(i+25)-v(i+50)))+(z(i+25)-z(i+50))*(w(i+25)-w(i+50)))/l(33+i);
end
for i=1:3
    l(36+i)=sqrt((x(i+26)-x(i+50))^2+(y(i+26)-y(i+50))^2+(z(i+26)-z(i+50))^2);
    bdl(36+i)=((x(i+26)-x(i+50))*(u(i+26)-u(i+50)))+(y(i+26)-y(i+50))*...
        (v(i+26)-v(i+50)))+(z(i+26)-z(i+50))*(w(i+26)-w(i+50)))/l(36+i);
end
for i=1:4
    l(39+i)=sqrt((x(i+49)-x(i+82))^2+(y(i+49)-y(i+82))^2+(z(i+49)-z(i+82))^2);
    bdl(39+i)=((x(i+49)-x(i+82))*(u(i+49)-u(i+82)))+(y(i+49)-y(i+82))*...
        (v(i+49)-v(i+82)))+(z(i+49)-z(i+82))*(w(i+49)-w(i+82)))/l(39+i);
end
for i=1:4
    l(43+i)=sqrt((x(i+50)-x(i+82))^2+(y(i+50)-y(i+82))^2+(z(i+50)-z(i+82))^2);
    bdl(43+i)=((x(i+50)-x(i+82))*(u(i+50)-u(i+82)))+(y(i+50)-y(i+82))*...
        (v(i+50)-v(i+82)))+(z(i+50)-z(i+82))*(w(i+50)-w(i+82)))/l(43+i);
end
for i=1:5
    l(47+i)=sqrt((x(i+81)-x(i+122))^2+(y(i+81)-y(i+122))^2+(z(i+81)-...
z(i+122))^2);
    bdl(47+i)=((x(i+81)-x(i+122))*(u(i+81)-u(i+122)))+(y(i+81)-...
y(i+122))*(v(i+81)-v(i+122)))+(z(i+81)-z(i+122))*(w(i+81)-w(i+122)))/l(47+i);

```

```

end
for i=1:5
    l(52+i)=sqrt((x(i+82)-x(i+122))^2+(y(i+82)-y(i+122))^2+(z(i+82)-...
z(i+122))^2);
    bdl(52+i)=((x(i+82)-x(i+122))*(u(i+82)-u(i+122))+(y(i+82)-y(i+...
122))*(v(i+82)-v(i+122))+(z(i+82)-z(i+122))*(w(i+82)-w(i+122))))/l(52+i);
end
for i=1:12
    n(i)=(bdl(i)*ea1)/l(i);
end
for i=13:1:27
    n(i)=(bdl(i)*ea)/l(i);
end
for i=28:1:57
    n(i)=(bdl(i)*ea2)/l(i);
end
vpa(n,8)

```