BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC DÂN LẬP HẢI PHÒNG

ĐÀO VĂN HẬU

PHƯƠNG PHÁP MỚI PHÂN TÍCH TUYẾN TÍNH ỔN ĐỊNH CỤC BỘ KẾT CẤU DÀN

Chuyên ngành: **Kỹ thuật Xây dựng Công trình Dân dụng & Công nghiệp**
Mã số: **60.58.02.08**

LUẬN VĂN THẠC SỸ KỸ THUẬT

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. PHẠM VĂN ĐẠT

Hải Phòng, 2017

LỜI CAM ĐOAN

Tên tôi là: Đào Văn Hậu

Sinh ngày: 22-11-1984

Nơi công tác: UBND phường Hồng Hà - TP.Hạ Long - Quảng Ninh

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các số liệu, kết quả trong luận văn là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Hải phòng, ngày 22 tháng 11 năm 2017

Tác giả luận văn

Đào Văn Hậu

LỜI CẢM ƠN

Tác giả luận văn xin trân trọng bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất đối với Tiến sĩ Phạm Văn Đạt vì những ý tưởng khoa học độc đáo, những chỉ bảo sâu sắc về phương pháp mới để phân tích nội lực, chuyển vị bài toán tuyến tính ổn định cục bộ kết cấu dàn và những chia sẻ về kiến thức cơ học, toán học uyên bác của Tiến sĩ. Tiến sĩ đã tận tình giúp đỡ và cho nhiều chỉ dẫn khoa học có giá trị cũng như thường xuyên động viên, tạo mọi điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu hoàn thành luận văn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các nhà khoa học, các chuyên gia trong và ngoài trường Đại học Dân lập Hải phòng đã tạo điều kiện giúp đỡ, quan tâm góp ý cho bản luận văn được hoàn thiện hơn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn các cán bộ, giáo viên của Khoa xây dựng, Phòng đào tạo Đại học và Sau đại học - trường Đại học Dân lập Hải phòng, và các đồng nghiệp đã tạo điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tác giả trong quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Hải phòng, ngày 22 tháng 11 năm 2017

Tác giả luận văn

Đào Văn Hậu

MỤC LỤC

Trang

MỞ ĐẦU

Lý do lựa chọn đề tài

Trong các năm gần đây kinh tế xã hội ngày càng phát triển, thu nhập của người dân ngày một nâng cao vì vậy ngày càng có nhiều các công trình nhà cao tầng, công trình vượt khẩu độ lớn được xây mới nhằm phục vụ cho các hoạt động sinh hoạt và nhu cầu thưởng thức đời sống văn hóa, giải trí của người dân. Vì vậy, vấn đề đặt ra cho các kỹ sư thiết kế cho các công trình này ngoài phải đảm bảo được yêu cầu của mỹ thuật kiến trúc vấn đề quan trọng nhất là các công trình này phải đảm bảo được khả năng chịu lực cũng như sự làm việc bình thường của các hệ thống kỹ thuật và con người làm việc hoặc sinh hoạt bên trong công trình. Một trong những yêu cầu đó là vấn đề ổn định của các kết cấu là một trong những vấn đề bắt buộc phải tính toán và kiểm tra trong quá trình thiết kế công trình.

Bài toán ổn định của kết cấu cho đến nay đã được rất nhiều tác giả quan tâm đưa ra rất nhiều phương pháp khác nhau, các phương pháp này thường dựa vào ba tiêu chí để đánh giá ổn định: tiêu chí dưới dạng tĩnh học, tiêu chí dưới dạng năng lượng và tiêu chí dưới dạng động lực học.

Nhằm có một cách nhìn đơn giản và luôn xác định được lực tới hạn cho bài toán tuyến tính ổn định cục bộ kết cấu dàn đề tài sẽ trình bày một cách giải mới dựa trên toán học quy hoạch tuyến tính.

Mục đích nghiên cứu

Nhằm làm phong phú thêm phương pháp giải làm phong phú thêm các phương pháp giải bài toán tuyến tính ổn định cục bộ kết cấu dàn cũng như có một cách nhìn mới trong việc giải bài toán ổn định cục bộ.

Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đề tài tập trung nghiên cứu phương pháp phân tích tuyến tính kết cấu dàn (dàn phẳng; dàn không gian) chịu tải trọng tĩnh tại các nút dàn với các giả thuyết:

Giả thiết 1: Nút của dàn phải nằm tại giao điểm của các trục thanh và là khớp lý tưởng (các đầu thanh quy tụ ở nút có thể xoay một cách tự do không ma sát).

Giả thiết 2: Tải trọng chỉ tác dụng tại các nút dàn.

Giả thiết 3: Trọng lượng bản thân của các thanh không đáng kể so với tải trọng tổng thể tác dụng lên dàn.

Giả thiết 4: Tải trọng tác dụng lên kết cấu dàn được bảo toàn về phương, chiều và độ lớn trong quá trình kết cấu biến dạng.

Phương pháp nghiên cứu

Dựa trên phương pháp giải bài toán quy hoạch toán học và kết hợp phương pháp nguyên lý cực trị Gauss của GS TSKH Hà Huy Cương.

Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Phân tích được bài toán ổn định cục bộ tuyến tính kết cấu dàn chịu tải trọng tĩnh tại các nút dàn bằng phương pháp quy hoạch toán học là một vấn đề rất có ý nghĩa thực tiễn.

Bố cục của đề tài

Ngoài phần mở đầu, phần kết luận, tài liệu tham khảo và phụ lục. Nội dung chính của đề tài được bố cục trong 3 chương:

- Chương 1 Tổng quan về phân tích ổn định kết cấu công trình: Trong chương này trình bày ứng dụng và sự phát triển của kết cấu dàn trong các công trình xây dựng. Đồng thời trong chương còn trình bày các phương pháp phân tích ổn định kết cấu công trình hiện nay thường được trình bày trong các sách cơ học. Cuối chương là các vấn đề được đặt ra để nghiên cứu trong đề tài

- Chương 2 Lý thuyết quy hoạch toán học và phương pháp phân tích tuyến tính ổn định cục bộ kết cấu dàn: Trong chương này sẽ trình bày Bài toán quy hoạch toán học tuyến tính: các khái niệm và phương pháp giải. Cuối chương đề tài sẽ trình bày phương pháp đưa bài toán ổn định cục bộ kết cấu dàn về bài toán quy hoạch toán học để giải.

- Chương 3 Một số ví dụ phân tích tuyến tính ổn định kết cấu dàn: Dựa trên bài toán quy hoạch toán học tuyến tính và cách đưa bài toán ổn định cục bộ kết cấu dàn về bài toán quy hoạch toán học đã trình bày trong chương 2, chương này sẽ đưa ra một số ví dụ phân tích.

CHƯƠNG 1
TỔNG QUAN VỀ PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH KẾT CẤU CÔNG TRÌNH

1.1. Tầm quan trọng của việc nghiên cứu ổn định công trình

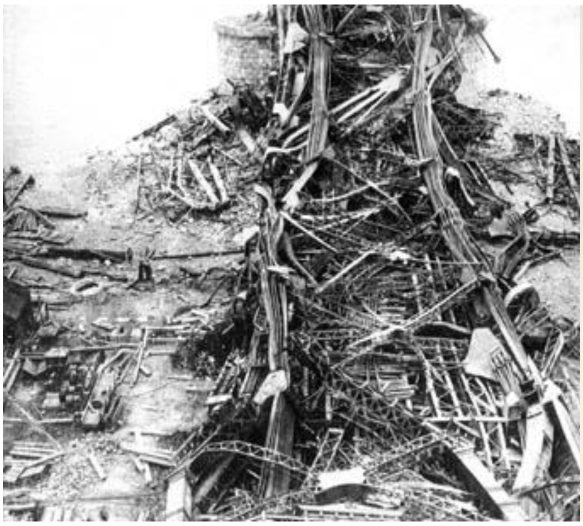
Vấn đề tính toán điều kiện ổn định cho kết cấu là một trong những điều kiện bắt buộc khi tính toán thiết kế kết cấu công trình, nếu khi tính toán thiết kế chỉ tính toán theo điều kiện bền và điều kiện cứng thôi thì chưa đủ để đảm bảo công trình an toàn khi đưa công trình vào sử dụng. Trong thực tế có rất nhiều trường hợp khi kết cấu chịu lực, đặc biệt là đối với kết cấu chịu nén hoặc nén uốn đồng thời, tuy tải trọng tác dụng chưa đạt đến giá trị tải trọng làm kết cấu mất an toàn theo điều kiện bền hoặc điều kiện biến dạng nhưng kết cấu chuyển sang vị trí cân bằng mới khác trạng thái cân bằng ban đầu. Tại trạng thái cân bằng mới này nội lực trong kết cấu tăng lên rất nhanh làm cho kết cấu nhanh chóng bị phá hoại. Lịch sử về công nghệ xây dựng cho thấy, không ít các sự cố sập công trình xẩy ra tại các nước khác nhau do khi thiết kế có thể người thiết kế không xem xét đầy đủ về hiện tượng dao động cũng như sự mất ổn định của kết cấu.

Năm 1875 cầu sắt Kevđa ở Nga là cây cầu dàn hở đã bị phá hủy do hệ thanh biên trên mất ổn định. Năm 1891 cầu Menkhienxtein ở Thụy Sĩ bị phá hủy do mất ổn định [2, 7].

Năm 1907 bể chứa khí Hamburg bị phá hủy do thanh ghép chịu nén bị mất ổn định. Cũng trong năm 1907 cây cầu Quebec ba nhịp với chiều dài hai nhịp ở đầu cầu là 152,2m, chiều dài nhịp giữa là 548,64m. Trong quá trình thi công lắp dựng nhịp giữa cầu, các thanh cánh dưới của cầu đã mất ổn định làm cây cầu bị sụp đổ dẫn đến 75 công nhân đang thi công trên công trình bị tử nạn, chỉ còn 11 công nhân sống sót (hình 1.1) [2, 7, 19].

Năm 1925 Cầu dàn Mujur ở Nga bị phá hủy do thanh ghép bị nén mất ổn định. Ngày 07 tháng 11 năm 1940 Cầu Tacoma ở Mỹ bị mất ổn định vì tác dụng của gió sau 4 tháng 6 ngày kể từ khi hoàn thành xong [2, 7].

Năm 1978 công trình mái dàn nhà thi đấu Hartford có kích thước 91,44m x 109,73m sau trận mưa tuyết lớn một số thanh dàn đã bị mất ổn định làm kết cấu mái dàn nhanh chóng bị sụp đổ (hình 1.2) [19].



Hình 1.1 Cầu Quebec năm 1907 Hình 1.2 Nhà thi đấu Hartford 1978

Ngoài ra, trong khoảng thời gian từ 1951-1977 tại Nga đã có 59 công trình kết cấu thép bị phá hủy, trong số đó có 17 trường hợp là do nguyên nhân mất ổn định tổng thể hoặc mất ổn định cục bộ chiếm 29% [19].

Ngày nay do kinh tế ngày càng phát triển, điều kiện sống của người dân ngày một nâng cao vì vậy ngày càng có nhiều công trình cao tầng, công trình khẩu độ lớn xây dựng, đặc biệt do công nghệ vật liệu ngày càng phát triển do đó các vật liệu mới ngày càng chịu lực tốt hơn vì vậy các kích thước các cấu kiện của kết cấu ngày càng nhỏ gọn và mỏng hơn. Do đó, việc nghiên cứu tính toán ổn định cho kết cấu công trình là một vấn đề rất cần thiết và có ý nghĩa thực tiễn.

Vấn đề nghiên cứu ổn định kết cấu được bắt đầu từ công trình nghiên cứu thực nghiệm do Piter van Musschefnbroek công bố năm 1729, đã đi đến kết luận rằng "*Lực tới hạn tỷ lệ nghịch với bình phương chiều dài thanh*". Mười lăm năm sau nhà toán học L.Euler là người đầu tiên đặt nền móng cho việc nghiên cứu lý thuyết bài toán ổn định. Kết quả nghiên cứu của Euler ban đầu không được chấp nhận và ngay cả với Culông cũng cho rằng độ cứng của cột tỷ lệ thuận với diện tích mặt cắt ngang và không phụ thuộc vào chiều dài thanh. Những quan niệm của Culông dựa trên các kết quả thí nghiệm đối với các cột gỗ và cột sắt có chiều dài tương đối ngắn, những thanh này thường phá hoại thường nhỏ thua tải trọng Euler do vật liệu bị phá hoại chứ không phải do mất ổn định ngang gây ra. E.Lamac là người đầu tiên giải thích thỏa đáng sự phù hợp giữa lý thuyết ổn định của Euler và kết quả thực nghiệm với giả thuyết cơ bản xem vật liệu đàn hồi [2, 7].

Đến cuối thế kỷ XIX vấn đề nghiên cứu ổn định mới được phát triển mạnh mẽ qua các cống hiến của các nhà khoa học như: Giáo sư F.S.Iaxinski, Viện sĩ A.N.Đinnik, Viện sĩ V.G.Galerkin v.v... cho đến nay có rất nhiều các công trình nghiên cứu về ổn định cho kết cấu công trình [7].

1.2. Các phương pháp biến phân năng lượng thường dùng

Các phương trình cân bằng có thể được biểu thị qua ứng suất (nội lực) hoặc biến dạng (chuyển vị) và do đó thế năng biến dạng cũng biểu thị qua ứng suất (nội lực) hoặc biến dạng (chuyển vị).

Trong trường hợp thế năng biến dạng được biểu thị qua ứng suất thì ta có nguyên lý biến phân sau.

1.2.1 Nguyên lý thế năng biến dạng cực tiểu - nguyên lý Castiliano (1847-1884).

Nguyên lý phát biểu như sau: "**Trong tất cả các trạng thái cân bằng lực có thể thì trạng thái cân bằng thực xẩy ra khi thế năng biến dạng là cực tiểu**".

Trạng thái cân bằng lực có thể là trạng thái mà các lực tác dụng lên phân tố thỏa mãn phương trình cân bằng. Đối với bài toán hai chiều (bài toán phẳng), ta viết nguyên lý trên dưới dạng sau:

$$\min\int_V \frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy}\right)dV \tag{1.1}$$

trong đó: V - là diện tích hệ cần tính

Thay: $\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \mu\sigma_y\right)$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \mu\sigma_x\right)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = 2\left(1+\mu\right)\frac{\tau_{xy}}{E}$$

vào (1.1) ta được:

$$\min\int_V \frac{1}{E}\left[\left(\frac{\sigma_x^{\ 2}}{2} + \frac{\sigma_y^{\ 2}}{2}\right) - \mu\sigma_x\sigma_y + \left(1+\mu\right)\tau_{xy}^2\right]dV \tag{1.2}$$

với các ràng buộc:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0 \tag{1.3a}$$

$$\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} = 0 \tag{1.3b}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \tag{1.3c}$$

Trong bài toán trên, hàm mục tiêu là thế năng biến dạng đàn hồi biểu diễn qua ứng suất của bài toán phẳng. Hai phương trình cân bằng (1.3a), (1.3b) không xét đến lực khối (ví dụ trọng lượng của phân tố).

Đây là bài toán cực trị có ràng buộc. Các bài toán cực trị có ràng buộc trong toán học có thể biến đổi thành bài toán không có ràng buộc bằng phương pháp thừa số largrange $\lambda_1(x,y)$, $\lambda_2(x,y)$ viết phiếm hàm Largrange mở rộng để đưa bài toán trên về bài toán không ràng buộc như sau:

$$\begin{gathered}\min\int_S \frac{1}{E}\left[\left(\frac{{\sigma_x}^2}{2}+\frac{{\sigma_y}^2}{2}\right)-\mu\sigma_x\sigma_y+(1+\mu)\tau_{xy}^2\right]dS+\\+\int_S \lambda_1(x,y)\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}\right)dS+\int_S \lambda_2(x,y)\left(\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}\right)dS\end{gathered}\tag{1.4}$$

$\lambda_1(x,y)$, $\lambda_2(x,y)$ là thừa số largrange và cũng là ẩn chưa biết của bài toán.

Do $\tau_{xy}=\tau_{yx}$ nên ta có thể viết lại (1.4) như sau:

$$\begin{gathered}\min\int_S \frac{1}{E}\left[\left(\frac{{\sigma_x}^2}{2}+\frac{{\sigma_y}^2}{2}\right)-\mu\sigma_x\sigma_y+(1+\mu)\left(\frac{\tau_{xy}+\tau_{yx}}{2}\right)^2\right]dS+\\+\int_S \lambda_1(x,y)\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}\right)dS+\int_S \lambda_2(x,y)\left(\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}\right)dS\end{gathered}\tag{1.5a}$$

Theo phép tính biến phân, từ phiếm hàm (1.5a), lấy biến phân theo các ứng suất pháp: σ_x,σ_y các ứng suất tiếp $\tau_{xy}=\tau_{yx}$ và thừa số largrange $\lambda_1(x,y),\lambda_2(x,y)$ ta nhận được hệ 6 phương trình sau:

$$\frac{1}{E}\left(\sigma_x-\mu\sigma_y\right)-\frac{\partial\lambda_1(x,y)}{\partial x}=0\tag{1.6b}$$

$$\frac{1}{E}\left(\sigma_y-\mu\sigma_x\right)-\frac{\partial\lambda_2(x,y)}{\partial y}=0\tag{1.6c}$$

$$\frac{1+\mu}{2E}\left(\tau_{xy}+\tau_{yx}\right)-\frac{\partial\lambda_1(x,y)}{\partial y}=0\tag{1.6d}$$

$$\frac{1+\mu}{2E}\left(\tau_{yx}+\tau_{xy}\right)-\frac{\partial\lambda_2(x,y)}{\partial x}=0\tag{1.6e}$$

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0\tag{1.6f}$$

$$\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}=0 \qquad (1.6g)$$

Trong bài toán này do có ràng buộc: ứng suất tiếp $\tau_{xy}=\tau_{yx}$ nên từ hệ phương trình trên ta có được 5 phương trình cân bằng xác định các ứng suất và chuyển vị của cơ hệ.

Mặt khác công hai phương trình (16d) và (16e) ta được:

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial\lambda_1(x,y)}{\partial y}+\frac{\partial\lambda_2(x,y)}{\partial x}\right) \qquad (1.6h)$$

Từ biểu thức (1.6b), (1.6c) và (1.6h) ta thấy rằng $\lambda_1(x,y)$, $\lambda_2(x,y)$ có thứ nguyên là chuyển vị, hơn nữa $\lambda_1(x,y)$ là chuyển vị ngang theo phương x và $\lambda_2(x,y)$ là chuyển vị đứng theo phương y. Phương trình (16h) là phương trình liên hệ giữa ứng suất tiếp và biến dạng trượt $\varepsilon_{xy}=\frac{\gamma_{xy}}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$. Hai phương trình (1.6b) và (1.6c) xác định biến dạng ε_x và ε_y qua ứng suất của trường đàn hồi.

Trong trường hợp dùng ẩn là ứng suất, ta cần loại bỏ hai hàm ẩn $\lambda_1(x,y)$ và $\lambda_2(x,y)$ trong hệ 6 phương trình từ (1.6b) đến (1.6g) nêu trên để chỉ còn các phương trình theo ẩn là ứng suất.

Bốn phương trình đầu của hệ 6 phương trình (1.6b) đến (1.6g) nêu trên có thể dẫn về một phương trình của ứng suất như sau:

Đạo hàm phương trình (1.6b) theo y kết hợp với phương trình (1.6d) ta nhận được:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma_x-\mu\sigma_y\right)=E\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\lambda_1(x,y)}{\partial x}=E\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\lambda_1(x,y)}{\partial y}=\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau_{xy}+\tau_{yx}\right) \qquad (1.6k)$$

Đạo hàm phương trình (1.6c) theo x kết hợp với phương trình (1.6e) ta nhận được:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_y-\mu\sigma_x\right)=E\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\lambda_2(x,y)}{\partial y}=E\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\lambda_2(x,y)}{\partial x}=\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\tau_{xy}+\tau_{yx}\right) \quad (1.6m)$$

Đạo hàm (1.6k) theo y ta được:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sigma_x-\mu\sigma_y\right)=\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\tau_{xy}+\tau_{yx}\right) \quad (1.6n)$$

Đạo hàm (1.6m) theo x ta được:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma_y-\mu\sigma_x\right)=\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\tau_{xy}+\tau_{yx}\right) \quad (1.6p)$$

Lấy hai vế trái và vế phải của (1.6n) và (1.6p) cộng với nhau ta có:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sigma_x-\mu\sigma_y\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma_y-\mu\sigma_x\right)=\left(1+\mu\right)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\tau_{xy}+\tau_{yx}\right) \quad (1.6q)$$

Ta đạo hàm (1.6f) theo y và đạo hàm (1.6g) theo x sau đó cộng lại với nhau, ta nhận được:

$$\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\tau_{yx}}{\partial y\partial x}=-\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2} \quad (1.6r)$$

hay:

$$\frac{\partial^2\left(\tau_{xy}+\tau_{yx}\right)}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2} \quad (1.6s)$$

thay biểu thức (1.6s) vào biểu thức (1.6q), ta có:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sigma_x-\mu\sigma_y\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma_y-\mu\sigma_x\right)=\left(1+\mu\right)\left(-\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}\right) \quad (1.6t)$$

hoặc:

$$\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}-\mu\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2}-\mu\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}-\mu\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}-\mu\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2} \quad (1.6u)$$

Biểu thức (1.6u) được rút gọn lại như sau:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma_x+\sigma_y\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sigma_x+\sigma_y\right)=0 \quad (1.6v)$$

Như vậy khi loại bỏ các thừa số Largrange ta có thể dẫn về hệ 3 phương trình sau:

$$\nabla^2\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = 0 \qquad (1.7a)$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \qquad (1.7b)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \qquad (1.7c)$$

trong công thức trên: ∇^2 - toán tử Laplace: $\nabla^2 = \frac{\partial^2(K)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(K)}{\partial y^2}$

Hệ phương trình (1.7a), (1.7b) và (1.7c) cho ta đầy đủ các phương trình để xác định 3 hàm ẩn số là các ứng suất pháp: σ_x, σ_y và các ứng suất tiếp $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Phương trình (1.7a) chính là phương trình liên tục viết dưới dạng ứng suất.

1.2.2 Nguyên lý công bù cực đại

Trên (hình 1.3a) biểu thị quan hệ giữa ứng suất và biến dạng của vật liệu đàn hồi tuyến tính và ta thấy thế năng biến dạng được tính bằng $\frac{1}{2}\sigma\varepsilon$ và được biểu thị bằng đường gạch đứng, công bù được biểu thị bằng đường gạch ngang.

Công bù bằng tích của ngoại lực và chuyển vị trừ đi năng lượng biến dạng.

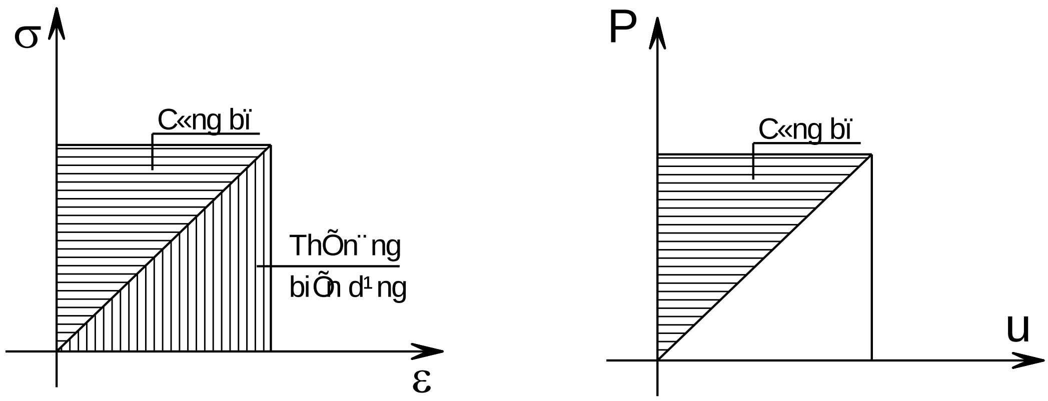
[công ngoại lực – thế năng biến dạng] $\rightarrow$ max

Khi dùng ẩn là chuyển vị và biến dạng thì có nguyên lý công bù cực đại và được phát biểu như sau: "**Trong tất cả các chuyển vị động học có thể (khả dĩ) thì chuyển vị thực là chuyển vị có công bù cực đại**".

Chuyển vị động học có thể là chuyển vị thỏa mãn các phương trình liên hệ giữa chuyển vị - biến dạng và thỏa mãn các điều kiện biên.

Đối với bài toán 2 chiều, mỗi điểm có chuyển vị u theo phưỡng và chuyển vị v theo phương y; p_x và p_x là lực tác dụng tưng ứng theo phương ngang x và theo phương đứng y thì công bù được viết như sau:

$$\left[\int_V^1 \left(p_x u + p_y v\right) dV - \Pi\right] \tag{1.8}$$



a) Quan hệ giữa ứng suất (σ) và biến dạng (ε) của vật liệu đàn hồi tuyến tính

b) Quan hệ giữa lực tác dụng (P) và chuyển vị (u)

Hình 1.3 Quan hệ giữa $\sigma - \varepsilon$ và P-u

Khi tính thế năng biến dạng Π, ta chú ý rằng các ứng suất pháp σ_x, σ_y gây ra các biến dạng dài $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ và còn gây ra biến dạng thể tích tương đối $\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right)$ cho nên thế năng biến dạng của bài toán hai chiều được viết như sau:

$$\Pi = \int_V^1 \left[\frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_x^2 + 2\mu\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y^2\right) + G\gamma_{xy}^2\right] dV \tag{1.9}$$

trong đó: G là mô đun đàn hồi trượt $G = \dfrac{E}{2(1+\mu)}$

Bây giờ ta viết nguyên lý công bù cực đại cho bài toán hai chiều như sau:

$$\max\left[\int_V \left(p_x u + p_y v\right) dV - \int_V^1 \left[\frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_x^2 + 2\mu\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y^2\right) + G\gamma_{xy}^2\right] dV\right] \tag{1.10}$$

Với ràng buộc là các phương trình liên hệ giữa chuyển vị và biến dạng:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x};\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y};\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

Thay các biến dạng tỉ đối: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ vào hàm mục tiêu ta có (chú ý max[A]=min[-A]):

$$\min\left[-\int_V \left(p_x u + p_y v\right) dV\right] +$$

$$\min\left[\frac{1}{2}\int_V^1 \left[\frac{E}{\left(1-\mu^2\right)}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{E}{2\left(1+\mu\right)}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right] dV\right]$$

(1.11)

Trong phiếm hàm trên chứa hai hàm ẩn là $u(x,y)$ và $v(x,y)$ chưa biết. Sử dụng phép tính biến phân nhận được hai phương trình cân bằng sau:

$$\frac{E}{1-\mu^2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right] + p_x = 0 \qquad (1.12a)$$

$$\frac{E}{1-\mu^2}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right] + p_y = 0 \qquad (1.12b)$$

Phương trình (1.12a; 1.12b) là hai phương trình cân bằng viết theo chuyển vị của bài toán phẳng.

1.2.3 Nguyên lý công ảo

Nguyên lý công ảo được xử dụng rộng rãi trong cơ học. Theo K.F.Gauss (1777-1855) thì mọi nguyên lý trong cơ học hoặc trực tiếp hoặc gián tiếp đều rút ra từ nguyên lý chuyển vị ảo.

Xét cơ hệ chất điểm ở trạng thái cân bằng ta có:

$$\sum X = 0;\ \sum Y = 0;\ \sum Z = 0 \qquad (1.13)$$

$\sum X = 0; \sum Y = 0; \sum Z = 0$: là tổng hình chiếu của tất cả các lực tác dụng lên trục của hệ tọa độ Đề các. Ta viết biểu thức như sau:

$$\sum X\delta u + \sum Y\delta v + \sum Z\delta w = 0 \qquad (1.14)$$

ở đây xem các $\delta u;\delta v;\delta w$: là các thừa số bất kỳ.

Từ (1.13) ta có (1.14) và ngược lại từ (1.14) ta nhận được (1.13) bởi vì các $\delta u;\delta v;\delta w$ là những thừa số bất kỳ. Bây giờ xem $\delta u;\delta v;\delta w$ là các biến phân của chuyển vị ảo theo ba chiều của hệ tọa độ vuông góc. Chuyển vị ảo là chuyển vị bé do nguyên nhân bất kỳ bên ngoài nào đó gây ra. Các chuyển vị ảo này phải thỏa mãn các điều kiện liên kết của hệ.

Khi có chuyển vị ảo thì vị trí của các lực tác dụng trên hệ có thể thay đổi nhưng phương chiều và độ lớn của nó vẫn giữ nguyên không đổi. Như vậy, các chuyển vị ảo $\delta u;\delta v;\delta w$ là các đại lượng độc lập với lực tác dụng và từ hai biểu thức (1.13) và (1.14) ta có nguyên lý công ảo: "**Nếu như tổng công các lực tác dụng của hệ thực hiện trên các chuyển vị ảo bằng không thì hệ ở trạng thái cân bằng"**

Đối với hệ đàn hồi (hệ biến dạng) thì ngoài ngoại lực còn có nội lực. Vấn đề đặt ra ở đây là tính công của nội lực thế nào. Trước hết ta cần đưa thêm yêu cầu đối với chuyển vị ảo như sau:

Chuyển vị ảo phải thỏa mãn các liên hệ giữa chuyển vị và biến dạng. Nếu như các chuyển vị có biến dạng $\varepsilon_u = \frac{\partial u}{\partial x};\varepsilon_v = \frac{\partial v}{\partial y};...$ thì biến phân các chuyển vị ảo $\delta u;\delta v;\delta w$ cũng phải có biến dạng ảo tương ứng: $\frac{\partial}{\partial x}\delta u;\frac{\partial}{\partial y}\delta v;\frac{\partial}{\partial z}\delta w...$

Thông thường công của nội lực (hoặc ứng suất) được tính qua thế năng biến dạng. Khi đó có các chuyển vị ảo $\delta u;\delta v;\delta w$ thì thế năng biến dạng Π sẽ thay đổi bằng đại lượng biến phân $\delta\Pi$. Do đó, nguyên lý chuyển vị ảo đối với hệ biến dạng được viết như sau:

$$\delta\left(\Pi - \sum X\delta u - \sum Y\delta v - \sum Z\delta w\right) = 0 \tag{1.15}$$

Các đại lượng biến phân (1.15) đều là chuyển vị ảo cho nên nếu xem nội lực (ứng suất) trong quá trình chuyển vị ảo cũng không đổi thì dấu biến phân trong (1.15) có thể viết lại như sau:

$$\delta\left(\Pi - \sum Xu - \sum Yv - \sum Zw\right) = 0 \tag{1.16}$$

Trong bài toán hai chiều, giả thuyết mỗi điểm có chuyển vị u theo chiều ngang x, v theo chiều đứng y, p_x và p_y là lực khối tác dụng theo chiều x và chiều y tương ứng, nguyên lý công ảo được viết như sau:

$$-\int_S \left(p_x\delta u + p_y\delta v\right)dS + \int_S \left(\sigma_x\delta\varepsilon_x + \sigma_y\delta\varepsilon_y + \tau_{xy}\delta\varepsilon_{xy}\right)dS = 0 \tag{1.17}$$

hay:

$$-\int_S \left(p_x\delta u + p_y\delta v\right)dS + \int_S \left(\sigma_x\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \sigma_y\delta\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \tau_{xy}\delta\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)dS = 0 \tag{1.18}$$

Phiếm hàm trên có hai đại lượng biến phân là ∂u và ∂v độc lập với nhau, nên sử dụng phép tính biến phân ta nhận được hai phương trình cân bằng sau:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + p_x = 0 \tag{1.19}$$

$$\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + p_y = 0 \tag{1.20}$$

Đây là hai phương trình của bài toán phẳng khi có lực khối là p_x và p_y.

Trên cở sở nguyên lý công ảo trên, ta tìm cách xây dựng phương trình chuyển động của dầm Euler – Bernoulli qua ví dụ sau:

Từ những trình bày ở trên cho thấy nguyên lý công ảo hay nguyên lý công khả dĩ hay nguyên lý chuyển vị khả dĩ là phương pháp rất thuận tiện để xây dựng phương trình cân bằng của cơ hệ và được sử dụng rất rộng rãi trong cơ học. Nguyên lý công ảo cũng được sử dụng rộng rãi trong tính toán công trình theo phương pháp phần tử hữu hạn.

1.3 Nguyên lý cực trị Gauss

Nhà toán học người Đức K.F.Gauss năm 1829 đã đưa ra nguyên lý sau đây đối với các cơ hệ chất điểm: *"Chuyển động của hệ chất điểm có liên kết tùy ý chịu tác động bất kỳ ở mỗi thời điểm sẽ xảy ra một cách phù hợp nhất một cách có thể với chuyển động của hệ đó khi hoàn toàn tự do, nghĩa là chuyển động xảy ra với lượng ràng buộc tối thiểu nếu như số đo lượng ràng buộc lấy bằng tổng các tích khối lượng chất điểm với bình phương độ lệch vị trí chất điểm so với vị trí khi chúng hoàn toàn tự do."* [1].

Gọi m_i là khối lượng chất điểm, A_i là vị trí của nó, B_i là vị trí sau thời đoạn vô cùng bé do tác động lực ngoài và vận tốc ở đầu thời điểm gây ra, C_i là vị trí có thể (ràng buộc bởi liên kết) thì lượng ràng buộc được viết như sau:

$$Z = \sum_i m_i \left(\overline{B_i C_i}\right)^2 \rightarrow \min \qquad (1.21)$$

Do hệ cần tính và hệ hoàn toàn tự do đều chịu lực giống nhau, nên trong biểu thức lượng cưỡng bức không xuất hiện lực tác dụng. Lượng ràng buộc có dạng bình phương tối thiểu là phương pháp toán do Gauss đưa ra.

1.3.1 Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss với cơ hệ chất điểm

Xét hệ chất điểm có liên kết tùy ý ở một thời điểm bất kỳ nào đó có nghĩa là phải đưa lực quán tính f_i của hệ tại thời điểm nào đó tác dụng lên hệ. Đối với hệ hoàn toàn tự do lực quán tính f_{0i} của nó bằng với ngoại lực (chỉ số '0' ở chân ký tự chỉ rằng ký tự đó ở hệ so sánh, trường hợp này hoàn toàn tự do có cùng khối lượng và cùng chịu tác dụng lực ngoài giống như hệ có liên kết). Như vậy, các lực tác dụng lên hệ có liên kết gồm các lực $f_i = m_i.\ddot{r}_i$ và các lực $f_{0i} = m_i.\ddot{r}_{0i}$ (thay cho ngoại lực). Theo nguyên lý chuyển vị ảo đối với liên kết giữ (liên kết dưới dạng đẳng thức) và không giữ (liên kết dưới dạng bất đẳng thức) điều kiện cần và đủ để hệ ở trạng thái cân bằng là:

$$\delta Z = \sum_i \left(f_i - f_{0i}\right)\delta r_i \leq 0 \tag{1.22}$$

Để nhận được biểu thức (1.22) cần xem các chuyển vị r_i độc lập đối với lực tác dụng. Cho nên biểu thức (1.22) có thể viết:

$$Z = \sum_i \left(f_i - f_{0i}\right) r_i \rightarrow \min \tag{1.23}$$

Nếu như chuyển vị ảo r_i thỏa mãn các điều kiện liên kết đã cho của hệ cần tính thì ta có thể dùng vận tốc ảo $\dot{r}_i$ làm đại lượng biến phân, nghĩa là:

$$\delta Z = \sum_i \left(f_i - f_{0i}\right)\delta \dot{r}_i \leq 0 \tag{1.24}$$

hay:

$$Z = \sum_i \left(f_i - f_{0i}\right)\dot{r}_i \rightarrow \min \tag{1.25}$$

trong biểu thức (1.24), (1.25) vận tốc của chất điểm là đại lượng biến phân.

Cuối cùng khi chuyển vị ảo r_i thỏa mãn các điều kiện liên kết đã cho của hệ cần tính thì ta có thể dùng gia tốc ảo $\ddot{r}_i$ làm đại lượng biến phân, ta có:

$$\delta Z = \sum_i \left(f_i - f_{0i}\right)\delta \ddot{r}_i \leq 0 \qquad 1.26)$$

hay:

$$Z = \sum_i \left(f_i - f_{0i}\right)\ddot{r}_i \rightarrow \min \tag{1.27}$$

Ta biến đổi thuần túy về mặt toán học biểu thức (1.27):

$$Z = \sum_i \left(f_i - f_{0i}\right)\ddot{r}_i \rightarrow \min$$

$$Z = \sum_i \left(f_i - f_{0i}\right)\left(\ddot{r}_i - \ddot{r}_{0i}\right) \rightarrow \min$$

$$Z = \sum_i \left(f_i - f_{0i}\right)\left(\frac{f_i}{m_i} - \frac{f_{0i}}{m_i}\right) \rightarrow \min$$

$$Z = \sum_i \frac{1}{m_i}\left(f_i - f_{0i}\right)^2 \rightarrow \min \tag{1.28}$$

$$Z = \sum_i m_i \left(\frac{f_i}{m_i} - \ddot{r}_{0i} \right)^2 \to \min \tag{1.29}$$

Hai biểu thức (1.28), (1.29) là hai biểu thức thường dùng của nguyên lý cực tiểu Gauss với đại lượng biến phân là gia tốc.

Các biểu thức (1.23), (1.25), (1.27) và (1.29) là tương đương và được gọi là lượng ràng buộc chuyển động của cơ hệ cần tính.

1.3.2. Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss đối với bài toán cơ học kết cấu hệ thanh

Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss do GS TSKH Hà Huy Cương đưa ra là phương pháp sử dụng trực tiếp nguyên lý cực tiểu Gauss vào cơ hệ bằng cách:

- So sánh chuyển động của cơ hệ đang xét với chuyển động của nó khi hoàn toàn tự do. So sánh được hiểu theo nghĩa là tìm cực trị của lượng ràng buộc.

- Phương pháp nguyên lý chuyển vị ảo với bất đẳng thức Gauss đối với liên kết không giữ, xem liên kết giữ là trường hợp riêng.

Những nội dung trên là nội dung tổng quát của phương pháp nguyên lý cực trị Gauss.

Trong bài toán cơ học kết cấu hệ thanh chịu tải trọng tĩnh mà ứng suất và biến dạng tuân theo định luật Hooke thì mối quan hệ giữa nội lực và biến dạng được viết như sau:

$$\begin{aligned} &M_x = EI_x.\chi_x; \quad M_y = EI_y.\chi_y; \quad M_z = GI_\rho.\theta; \\ &Q_x = \frac{GA}{\alpha}.\gamma_{xz}; \quad Q_y = \frac{GA}{\alpha}.\gamma_{yz}; \quad N = EA.\varepsilon_z \end{aligned} \tag{1.30}$$

Như vậy theo (1.29) lượng ràng buộc của bài toán có thể được viết dưới dạng bình phương tối thiểu như sau:

$$Z=\int_0^{l^{(0)}}\frac{\left(M_x-M_{0x}\right)}{EI_x}.\chi_x dz+\int_0^{l^{(0)}}\frac{\left(M_y-M_{0y}\right)}{EI_y}.\chi_y dz+\int_0^{l^{(0)}}\frac{\left(M_z-M_{0z}\right)}{GI_\rho}.\theta dz+$$
$$+\int_0^{l^{(0)}}\frac{\alpha\left(Q_x-Q_{0x}\right)}{GA}\gamma_{xz}dz+\int_0^{l^{(0)}}\frac{\alpha\left(Q_y-Q_{0y}\right)}{GA}\gamma_{yz}dz+\int_0^{l^{(0)}}\frac{\left(N-N_0\right)}{EA}\varepsilon_z dz\to\min \quad (1.31)$$

trong đó: α là hệ số tập trung ứng suất tiếp do lực cắt gây ra tại trục dầm [2].

Phương pháp nguyên lý cực Gauss đã được rất nhiều học viên cao học cũng như các nghiên cứu sinh đã áp dụng để giải quyết được nhiều bài toán khác nhau trong cơ học. Đây cũng là một cách tiếp cận khác so với cách tiếp cận của các phương pháp thường được trình bày trong một số sách cơ học hiện nay.

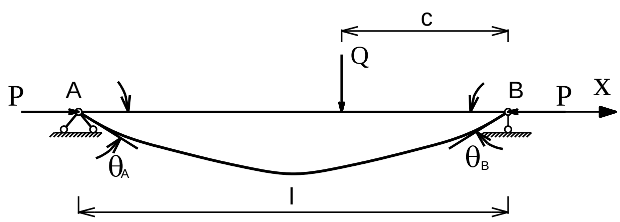
Trong kết cấu dàn các thanh chỉ chịu kéo hoặc chịu nén. Như vậy, từ công thức (1.31) suy ra lượng ràng buộc viết cho kết cấu dàn bao gồm n thanh dàn:

$$Z=\sum_{i=1}^{n}\int_0^{l_i^{(0)}}\frac{(N_i-N_{0i})^2}{E_iA_i}dz\to\min \quad (1.32)$$

1.4. Khái niệm ổn định và mất ổn định công trình

Để hiểu được ổn định được của thanh vừa chịu nén vừa chịu uốn ta có thể nghiên cứu bài toán dầm – cột theo lý thuyết dầm cột (Beam –Columns Theory) của Timoshenko. Vì vậy trong phần này tác giả trình bày khái niệm ổn định và không ổn định theo lý thuyết dầm cột của Timoshenko.

<u>Ví dụ 1.1</u>: Xét dầm đơn giản chiều dài l chịu tác dụng đồng thời của tải trọng ngang Q và tải dọc trục P như (hình 1.4).



Hình 1.4 Ví dụ 1.1

Ta có thể xác định được mômen ở phía bên trái và phía phải của dầm trên (hình 1.4) lần lượt là:

$$M = \frac{Qc}{l}x + Py, M = \frac{Q(l-c)}{l}(l-x) + Py \tag{1.32}$$

ở đây y là hàm độ võng của dầm. Lời giải của Timoshenko cho ta hai hàm độ võng tương ứng với hai đoạn bên trái và bên phải Q.

$$y = \frac{Q\sin(kc)}{Pk\sin(kl)}\sin(kx) - \frac{Qc}{Pl}x \qquad 0 \le x \le (l-c) \tag{1.33}$$

$$y = \frac{Q\sin(k(l-c))}{Pk\sin(kl)}\sin(k(l-x)) - \frac{Q(l-c)}{Pl}(l-x) \qquad (l-c) \le x \le l \tag{1.34}$$

Trong đó: $k = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$

Trường hợp riêng khi tải trọng đặt chính giữa của dầm, trục võng sẽ đối xứng và ta chỉ cần xét đoạn dầm ở phía trái tải trọng. Lúc này muốn tìm độ võng lớn nhất, chỉ việc thay $x = c = l/2$ vào phương trình (1.33) ta được:

$$\delta = y|_{x=l/2} = \frac{Q}{2Pk}\left(tg\left(\frac{kl}{2}\right) - \frac{kl}{2}\right) \tag{1.35}$$

Để thấy rõ ảnh hưởng của lực dọc P tới độ võng của dầm ta dùng biến đổi sau:

$$u = \frac{kl}{2} = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{EJ}} \tag{1.36}$$

Khi đó công thức (3.4) trở thành

$$\delta = y|_{x=l/2} = \frac{Ql^3}{48EJ}\frac{3\left(tg(u) - u\right)}{u^3} = \frac{Ql^3}{48EJ}\chi(u) \tag{1.37}$$

Thừa số thứ nhất $\frac{Ql^3}{48EJ}$ ở vế phải của phương trình trên biểu thị độ võng của dầm khi chỉ có lực ngang Q tác động. Thừa số thứ hai $\chi(u) = \frac{3\left(tg(u) - u\right)}{u^3}$ biểu thị ảnh hưởng của lực dọc P tới độ võng δ.

- Khi P nhỏ giá trị u theo phương trình (3.5) là nhỏ và thừa số $\chi(u)$ xấp xỉ bằng đơn vị.

- Khi $u = \pi / 2$ thì $\chi(u)$ tiến tới vô hạn, chuyển vị δ của dầm cũng tăng lên vô hạn, ta nói dầm bị mất ổn định. Trong trường hợp này từ phương trình (1.37) ta tìm ra:

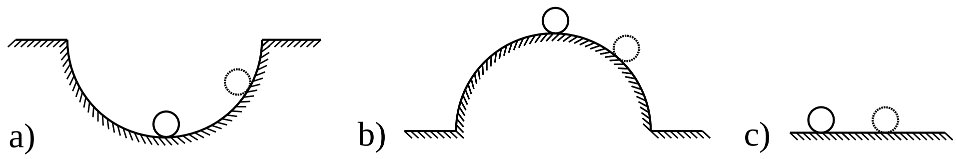
$$P = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \tag{1.38}$$

Đây chính là trị số lực nén làm cho độ võng của dầm tăng lên vô hạn. Như vậy, có thể kết luận rằng, khi lực nén P tiến dần tới trị số tới hạn (1.38) thì dù lực ngang có nhỏ đến mấy cũng vẫn gây lên chuyển vị rất lớn. Ta gọi trạng thái này là mất ổn định, trị số tới hạn của lực nén là tải trọng tới hạn với ký hiệu là P_{th}.

Phương pháp nghiên cứu này có cách nhìn rất thực tiễn (xét dầm chịu tác dụng đồng thời của lực ngang và lực dọc) bởi vì dù không biết về lý thuyết ổn định nhưng người kỹ sư cũng biết khi dầm chịu tác động đồng thời của lực ngang và lực dọc thì khả năng mất ổn định (chuyển vị của dầm tăng lên rất lớn).

Timoshenko cũng dùng lý thuyết dầm cột để nghiên cứu ổn định của thanh chịu nén có các điều kiện biên khác nhau.

Một cách hình dung tốt nhất về khái niệm ổn định là ta xét các trường hợp viên bi cứng trên các mặt phẳng cứng, mặt cầu cứng lõm và lồi (hình 1.5)



Hình 1.5 Trạng thái ổn định và mất ổn định của viên bi

Trong trường hợp a: Mặt cầu lõm, sự cân bằng của viên bi là ổn định bởi vì kích nó ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu (đáy cầu) rồi thả ra thì nó sẽ trở về vị trí đáy cầu hoặc lân cận vị trí đó (nếu có ma sát).

Trong trường hợp b: Mặt cầu lồi, sự cân bằng là không ổn định, bởi vì kích viên bi ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu rồi thả bi ra thì viên bi sẽ không trở lại vị trí ban đầu nữa.

Trong trường hợp c: Kích viên bi ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu thì nó lăn trên mặt ngang đến khi ngừng chuyển động, nó có vị trí cân bằng mới khác với trạng thái cân bằng ban đầu. Trong trường hợp này ta nói rằng trạng thái cân bằng ban đầu là phiếm định (không phân biệt).

Ở trên ta đã nói trạng thái cân bằng của viên bi. Suy rộng ra ta cũng có thể nói như vậy đối với các trạng thái cân bằng của cơ hệ phức tạp, ví dụ trạng thái ứng suất và biến dạng, trạng thái nội lực và chuyển vị hoặc là trạng thái năng lượng.

Trở lại (hình 1.5a). Khi lệch khỏi vị trí cân bằng, trọng tâm của viên bi lên cao, thế năng của nó tăng. Trạng thái cân bằng ổn định là trạng thái có thế năng tối thiểu. Ở (hình 1.5b), khi lệch với trị số nhỏ, trọng tâm của viên bi giảm, thế năng của nó giảm. Trạng thái cân bằng không ổn định ứng với thế năng lớn. Ở (hình 1.5c) khi lệch ra khỏi vị trí cân bằng, trọng tâm của viên bi không thay đổi, trạng thái cân bằng là phiếm định hoặc không phân biệt.

Như hình 1.5, để biết được trạng thái cân bằng của cơ hệ có ổn định hay không thì ta kích thích nó ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu. Phương pháp chung để đánh giá sự mất ổn định của cơ hệ là: Đưa hệ ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu của nó và kiểm tra xem nó có tồn tại trạng thái cân bằng mới không. Nếu như tìm được trạng thái cân bằng mới khác với trạng thái cân bằng ban đầu thì hệ là mất ổn định và lực giữ cho hệ ở trạng thái cân bằng mới này gọi là lực tới hạn, trường hợp ngược lại là hệ ổn định.

Nói đến ổn định của cơ hệ là nói đến ổn định của trạng thái cân bằng, mà trạng thái cân bằng là nghiệm của phương trình vi phân, cho nên nói đến ổn định của cơ hệ là nói đến ổn định của nghiệm của các phương trình vi phân. Như vậy khi nghiệm của phương trình vi phân cân bằng là ổn định thì trạng thái cân bằng là ổn định, còn nghiệm của phương trình vi phân cân bằng không ổn định thì trạng thái cân bằng là không ổn định.

Cách xây dựng bài toán ổn định là đưa hệ ra khỏi vị trí cân bằng và xem có tồn tại trạng thái cân bằng mới không, nếu tồn tại trạng thái cân bằng mới thì trạng thái cân bằng ban đầu là không ổn định. Trong trường hợp không cần giải bài toán ổn định đến cùng chúng ta vẫn có thể biết được hệ có ổn định hay không ổn định thông qua các tiêu chí về sự cân bằng ổn định sau:

- Tiêu chí ổn định dưới dạng tĩnh học [7, 19]: Trong tĩnh học, sự cân bằng của kết cấu được thể hiện bằng các phương trình cân bằng tĩnh học song điều kiện cân bằng đó không nói nên được dạng cân bằng đó là ổn định hay không ổn định. Để khẳng định vấn đề này ta cần khảo sát hệ ở trạng thái lệch khỏi dạng cân bằng đang nghiên cứu. Giả sử trạng thái lệch này sự cân bằng có thể thực hiện được về nguyên tắc có thể tìm giá trị P^* của lực từ điều kiện cân bằng tĩnh học của hệ ở trạng thái lệch để đối chiếu với giá trị P của lực đã cho ở trạng thái ban đầu.

+ Nếu $P > P^*$: lực cần giữ cho hệ ở trạng thái lệch không thể giữ hệ ở trạng thái lệch mà còn làm tăng độ lệch, hệ không thể trở về trạng thái cân bằng ban đầu, nghĩa là cân bằng không ổn định.

+ Nếu $P < P^*$: lực cần giữ cho hệ ở trạng thái lệch có thể giữ hệ ở trạng thái lệch được, hệ phải trở về trạng thái cân bằng ban đầu, nghĩa là cân bằng ổn định.

+ Nếu $P = P^*$: lực cần giữ cho hệ ở trạng thái lệch bằng lực đã cho thì sự cân bằng là phiếm định.

Trong trường hợp khi sự cân bằng ở trạng thái lệch không thể thực hiện được về nguyên tắc ta cần căn cứ vào lực tác dụng trên hệ để phán đoán cách thức chuyển động của hệ. Nếu độ lệch tăng thì sự cân bằng là không ổn định còn nếu độ lệch giảm thì sự cân bằng là không ổn định.

- Tiêu chí ổn định dưới dạng động lực học [7, 19]: Tiêu chí của sự cân bằng ổn định dưới dạng động học được xây dựng trên cơ sở khuynh hướng chuyển động của hệ sau khi lệch khỏi dạng cân bằng ban đầu bằng một nhiễu loạn nào đó rồi bỏ nhiễu loạn đó đi. Nếu sau khi nhiễu loạn mất đi, hệ dao động tắt dần hay trở về trạng thái cân bằng ban đầu không dao động thì cân bằng là ổn định. Ngược lại là cân bằng không ổn định.

Để thực hiện ta cần khảo sát chuyển động bé của hệ ở lân cận vị trí cân bằng:

+ Nếu chuyển động tắt dần hoặc điều hòa (khi không kể đến lực cản) thì cân bằng là ổn định.

+ Nếu chuyển động không tuần hoàn (xa dần trạng thái ban đầu), mang đặc trưng dẫn đến sự tăng dần của biên độ chuyển động thì cân bằng là không ổn định.

- Tiêu chí ổn định dưới dạng năng lượng [7, 19]: Ngoại lực có khuynh hướng sinh công dương, do đó nếu ở trạng thái lệch, thế năng biến dạng của hệ được tích lũy lớn hơn công của ngoại lực thì năng lượng tích lũy đó có khả năng đưa hệ về trạng thái cân bằng ban đầu tức là hệ ổn định. Ngược lại thì hệ mất ổn định. Để áp dụng tiêu chuẩn ổn định về năng lượng, ta thường vận dụng nguyên lý Lejeune-Dirichlet: "*Nếu hệ ở trạng thái cân bằng ổn định thì thế năng toàn phần đạt giá trị cực tiểu so với tất cả vị trí của hệ ở lân cận vị trí cân bằng ban đầu với những chuyển vị vô cùng bé. Nếu hệ ở trạng thái cân bằng không ổn định thì thế năng toàn phần đạt giá trị cực đại. Nếu hệ ở trạng thái cân bằng phiếm định thì thế năng toàn phần không đổi*".

Theo nguyên lý Lejeune-Dirichlet, nếu gọi U là thế năng toàn phần và T là công của ngoại lực thì:

+ Nếu $\delta U > \delta T$ hệ ở trạng thái cân bằng ổn định

+ Nếu $\delta U < \delta T$ hệ ở trạng thái cân bằng không ổn định

+ Nếu $\delta U = \delta T$ hệ ở trạng thái cân bằng phiếm định

Ngoài ra tiêu chí về năng lượng cũng có thể diễn đạt theo điều kiện cực trị của thế năng toàn phần [7].

1.5. Các phương pháp phân tích bài toán ổn định kết cấu hiện nay

1.5.1 Phương pháp tĩnh học

Khi giải bài toán ổn định theo phương pháp tĩnh có thể thực hiện qua các bước như sau [7, 15, 17, 18, 19]:

Bước 1: Tạo cho hệ nghiên cứu một dạng cân bằng lệch khỏi dạng cân bằng ban đầu.

Bước 2: Xác định trị số lực tới hạn (trị số lực cần thiết giữ cho hệ ở dạng cân bằng mới, lệch khỏi dạng cân bằng đầu). Lực tới hạn xác định từ phương trình đặc trưng (hay còn gọi là phương trình ổn định).

Người nghiên cứu có thể vận dụng nội dung nói trên khi áp dụng: Phương pháp thiết lập và giải phương trình vi phân; Phương pháp thông số ban đầu; Phương pháp lực; Phương pháp chuyển vị; Phương pháp hỗn hợp; Phương pháp sai phân hữu hạn; Phương pháp dây xích; Phương pháp nghiệm đúng tại từng điểm; Phương pháp Bubnov-Galerkin; Phương pháp giải đúng dần.

Trong thực tế, áp dụng các phương pháp tĩnh học để tìm nghiệm chính xác của bài toán ổn định thường gặp nhiều khó khăn và đôi khi không thể thực hiện được [7].

1.5.2 Phương pháp động lực học

Khi giải bài toán ổn định theo phương pháp động có thể thực hiện qua các bước như sau [7, 10, 15, 16, 19]:

Bước 1: Lập và giải phương trình dao động riêng của hệ.

Bước 2: Xác định lực tới hạn bằng cách biện luận tính chất nghiệm của chuyển động: nếu dao động của hệ có biên độ tăng không ngừng theo thời gian thì dạng cân bằng ban đầu là không ổn định; ngược lại, nếu hệ luôn dao động bé quanh vị trí cân bằng ban đầu hoặc tắt dần thì là dạng đó là ổn định.

1.5.3 Phương pháp năng lượng

Khi giải bài toán ổn định theo phương pháp năng lượng có thể thực hiện qua các bước như sau [7, 10, 15, 18, 19]:

Bước 1: Giả thiết trước dạng biến dạng của hệ ở trạng thái lệch khỏi dạng cân bằng ban đầu.

Bước 2: Xuất phát từ dạng biến dạng đã giả thiết, lập biểu thức thế năng biến dạng và công của ngoại lực để viết điều kiện tới hạn của hệ.

Bước 3: Từ điều kiện tới hạn, xác định giá trị của lực tới hạn.

Có thể vận dụng các phương pháp năng lượng bằng cách áp dụng: Trực tiếp nguyên lý Lejeune-Dirichlet; Phương pháp Rayleigh-Ritz; Phương pháp Timoshenko.

Do giả thiết trước biến dạng của hệ nên kết quả lực tới hạn tìm được thường là gần đúng và cho kết quả lớn hơn giá trị của lực tới hạn chính xác. Như vậy mức độ chính xác của kết quả theo các phương pháp năng lượng phụ thuộc vào khả năng phán đoán biến dạng của hệ ở trạng thái lệch: hàm chuyển vị được chọn càng gần với đường đàn hồi thực của thanh thì kết quả càng chính xác. Theo cách làm này thì hàm chuyển vị chọn trước thỏa mãn càng nhiều điều kiện biên hình học và tĩnh học càng tốt nhưng ít nhất phải thỏa mãn điều kiện biên tĩnh học [7, 15, 17, 18, 19].

Đường lối của ba loại phương pháp (phương pháp tĩnh; phương pháp động; phương pháp năng lượng) tuy khác nhau nhưng cho cùng một kết quả đối với hệ bảo toàn. Đối với hệ không bảo toàn, các phương pháp tĩnh và các phương pháp năng lượng dẫn đến kết quả không chính xác, người ta phải sử dụng các phương pháp động lực học [7, 15, 17, 18, 19].

Hệ bảo toàn tức là những hệ chịu lực bảo toàn. Lực bảo toàn có tính chất sau đây [7]:

- Độ biến thiên công của lực bằng vi phân toàn phần của thế năng.
- Công sinh ra bởi các lực trên các chuyển vị hữu hạn không phụ thuộc vào đường di chuyển của lực mà chỉ phụ thuộc vào vị trí điểm đặt đầu và điểm đặt cuối của lực.
- Tuân theo nguyên lý bảo toàn năng lượng.

Sự xuất hiện của ma sát nội do quan hệ phi đàn hồi hay ma sát ngoại sẽ dẫn đến hệ lực không bảo toàn.

1.6. Mục tiêu nghiên cứu của đề tài

Qua các phân tích ở các phần trên của đề tài, nhằm làm có một cách phân tích ổn định cục bộ kết cấu dàn khi chịu tải trọng tĩnh mục tiêu nghiên cứu của đề tài như sau:

1) Dựa trên phương pháp nguyên lý cực trị Gauss kết hợp với toán quy hoạch xây dựng được phương pháp mới để phân tích ổn định cục bộ cho kết cấu dàn chịu tải trọng tĩnh.

2) Ứng dụng phương pháp trong đề tài kết hợp với phần mềm Matlab lập được các code chương trình để tự động hóa phân tích ổn định cục bộ cho một số bài toán kết cấu dàn.

3) Khảo sát phân tích ổn định cục bộ kết cấu dàn cho một số kết cấu dàn cụ thể, đồng thời kiểm độ tin cậy của các kết quả phân tích trong các cí dụ phân tích này.

CHƯƠNG 2
LÝ THUYẾT QUY HOẠCH TOÁN HỌC VÀ PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH TUYẾN TÍNH ỔN ĐỊNH CỤC BỘ KẾT CẤU DÀN

2.1 Khái niệm bài toán quy hoạch

Trong các bài toán phân tích, tính toán kết cấu công trình ta thường gặp các dạng bài toán sau:

- Bài toán tính toán kết cấu công trình: Bài toán tính toán kết cấu công trình ta có thể viết dưới dạng các phương trình cân bằng hoặc cũng có thể đưa về bài toán cực trị của các phiếm hàm với các điều kiện ràng buộc. Trong tính toán kết cấu công trình ta thường gặp một số phương pháp: Phương pháp năng lượng với các ràng buộc về biến dạng; Phương pháp thế năng biến dạng cực tiểu với các ràng buộc về cân bằng; Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss với các ràng buộc về biến dạng…

- Bài toán phân tích tính toán tối ưu kết cấu công trình: là các bài toán phải tìm các đại lượng để thiết kế tối ưu. Các đại lượng này có thể là: kích thước hình học, tính chất cơ học vật lý của vật liệu kết cấu hoặc trọng lượng của vật liệu... Với các điều kiện ràng buộc của bài toán có thể dưới dạng bất đẳng thức tuyến tính hay phi tuyến hoặc đẳng thức tuyến tính hay phi tuyến, ví dụ như: chuyển vị tại một vị trí nào đấy của công trình $\leq$ [chuyển vị cho phép]; $\sigma \leq [\sigma]$ …

- Bài toán phân tích tải trọng giới hạn tác dụng lên kết cấu (Limit Analysys) hoặc các bài toán phân tích thích nghi của kết cấu (Shakedown Analysis) thông thường viết dưới dạng toán học là cực trị một phiếm hàm nào đó với các điều kiện cân bằng về lực và các điều kiện ràng buộc về ứng suất hoặc chuyển vị của một điểm nào đó trên kết cấu.

Trong các bài toán này, ta có thể sử dụng các phương pháp biến phân để giải trực tiếp, nhưng thuận tiện hơn cả là chúng ta thường dùng các phương pháp quy hoạch toán học để giải.

2.1.1 Quy hoạch toán học

Cho trước một hàm $f(x)$ trong đó $x \in$ miền xác định A. Tìm một phần tử x_0 thuộc A sao cho $f(x_0) \le f(x)$ với mọi x thuộc A ("cực tiểu hóa") hoặc sao cho $f(x_0) \ge f(x)$ với mọi x thuộc A ("cực đại hóa").

Một phát biểu bài toán như vậy được gọi là một quy hoạch toán học (Mathematical programming). Nhiều bài toán thực tế và lý thuyết có thể được mô hình theo cách tổng quát trên.

Miền xác định A của hàm f được gọi là không gian tìm kiếm. Thông thường, A là một tập con của không gian Euclid R_n thường được xác định bởi một tập các ràng buộc là các đẳng thức hoặc bất đẳng thức mà các phần tử của A phải thỏa mãn. Hàm f được gọi là hàm mục tiêu. Lời giải khả thi nào cực tiểu hóa (hoặc cực đại hóa, nếu đó là mục tiêu) của hàm mục tiêu được gọi là lời giải tối ưu.

Thông thường, sẽ có một vài cực tiểu địa phương và cực đại địa phương, trong đó một cực tiểu địa phương x* được định nghĩa là một điểm thỏa mãn điều kiện:

Với giá trị δ > 0 nào đó và với mọi giá trị x sao cho $\|x - x^*\| \le \delta$; và công thức sau luôn đúng: $f(x^*) \le f(x)$

Nghĩa là, tại vùng xung quanh x*, mọi giá trị của hàm đều lớn hơn hoặc bằng giá trị tại điểm đó. Cực đại địa phương được định nghĩa tương tự. Thông thường, việc tìm cực tiểu địa phương là dễ dàng – cần thêm các thông tin về bài toán (chẳng hạn, hàm mục tiêu là hàm lồi) để đảm bảo rằng lời giản tìm được là cực tiểu toàn cục.

Như vậy một bài toán quy hoạch có thể trình bày dưới dạng bài toán: Xác định x để: Hàm mục tiêu (objective functions) $f(X)$ đạt giá trị cực trị với các ràng buộc (constraints) $h_i(X) \geq 0, i = 1, 2, ..., m$; $g_j(X) = 0, j = 1, 2, ..., p$. Trong đó X là không gian véctơ n chiều $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}^T$ được gọi là biến số (variables).

2.1.2 Phân loại bài toán quy hoạch toán

Tùy vào mức độ phức tạp của bài toán quy hoạch toán học có thể được phân bài toán quy hoạch toán học ra thành các loại bài toán sau:

Quy hoạch không có ràng buộc

Quy hoạch không ràng buộc là bài toán tìm X* để:

Hàm mục tiêu: $\min(max) z = F(X), X = (x_1, ..., x_n)$ (2.1)

* Điều kiện cần tối ưu địa phương:

- F(X) khả vi tại X^*.
- $\nabla F(X^*) = 0$ X^* là điểm dừng.

* Điều kiện đủ của cực tiểu địa phương:

Ngoài hai điều kiện cần nói trên, còn thêm điều kiện ma trận Hesse xác định dương: $H = \nabla^2 F(X^*) > 0$

$$H = \left[\frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_i \partial x_j}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

*Điều kiện đủ của cực đại địa phương:

Ngoài hai điều kiện cần nói trên, còn thêm điều kiện ma trận Hesse xác định âm: $H = \nabla^2 F(X^*) < 0$ (2.3)

Quy hoạch tuyến tính

Nếu tất cả các ràng buộc và hàm mục tiêu đều là các hàm tuyến tính theo các biến thì ta có được bài toán quy hoạch tuyến tính.

* Dạng ma trận của bài toán quy hoạch tuyến tính:

- Hàm mục tiêu: $z = F(X) = c^T X \Rightarrow \min(max)$ (2.4a)

- Ràng buộc:

$$\begin{aligned} aX &= b; \\ X &\geq 0. \end{aligned} \tag{2.4b}$$

Trong đó: X=$\{x_1, x_2, ..., x_n\}^T$; b=$\{b_1, b_2, ..., b_m\}^T$; c=$\{c_1, c_2, ..., c_n\}^T$;

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mm} \end{bmatrix}$$

Nếu bài toán quy hoạch tuyến tính mà ràng buộc là các bất đẳng thức:

- Hàm mục tiêu: $z = F(X) = c^T X \Rightarrow \min(max)$ (2.5a)

- Ràng buộc:

$$\begin{aligned} aX &\geq b; \\ X &\geq 0. \end{aligned} \tag{2.5b}$$

thì ta có thể chuyển điều kiện ràng buộc (2.5b) về dạng đẳng thức bằng cách thêm các biến bù $s_i, i = 1 \div m$ và các ràng buộc (2.5b) được viết lại như sau:

$$\begin{aligned} aX + s &= b; \\ X &\geq 0; \\ s &\geq 0. \end{aligned} \tag{2.5c}$$

trong đó: s=$\{s_1, s_2, ..., s_m\}^T$ và như vậy véctơ nghiệm mới là (n+m) chiều $\{x_1, x_2, ..., x_n, s_1, s_2, ..., s_m\}^T$

Quy hoạch bình phương

Bài toán quy hoạch bình phương là bài toán quy hoạch mà hàm mục tiêu là hàm bậc hai của các biến.

* Dạng ma trận của bài toán quy hoạch :

- Hàm mục tiêu: $\min F(x) = c^T X + \frac{1}{2} X^T DX$ (2.6a)

- Ràng buộc:

$$\begin{aligned} &\mathrm{aX} \le b \\ &X \ge 0 \end{aligned} \tag{2.6b}$$

Trong đó: $X = \{x_1 \quad x_2 \quad ... \quad x_n\}^T$; $b = \{b_1 \quad b_2 \quad ... \quad b_m\}^T$; $c = \{c_1 \quad c_2 \quad ... \quad c_n\}^T$

$$D = \begin{Bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & & & \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{Bmatrix}; \quad a = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Bmatrix}$$

Trong phương trình (2.5) $x^T Dx$ đại diện cho phần bình phương của hàm mục tiêu với ma trận D là ma trận xác định-tích cực đối xứng (symmetric positive-definite matrix). Nếu D=0 bài toán quy hoạch trở thành bài toán quy hoạch tuyến tính. Để giải bài toán quy hoạch bình phương thường dùng phương pháp nhân thừa số Largrange với việc sử dụng các biến bù $s_i^2, i = 1 \div m$ và biến thặng dư $t_j^2, j = 1 \div n$. Như vậy, bài toán quy hoạch bình phương được viết lại như sau:

- Hàm mục tiêu: $\min F(x) = c^T X + \frac{1}{2} X^T DX$ (2.7a)

- Ràng buộc:

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}_i^T \mathrm{X} + \mathrm{s}_i^2 = b_i \qquad i = 1, 2..., m \\ &-x_j + t_j^2 = 0 \qquad j = 1, 2..., n \end{aligned} \tag{2.7b}$$

Hàm Largrange có thể được viết như sau:

$$L(X, s, t, \lambda, \theta) = c^T X + \frac{1}{2} X^T DX + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\mathrm{A}_i^T \mathrm{X} + \mathrm{s}_i^2 - b_i \right) + \sum_{j=1}^{n} \theta_j \left(-\mathrm{x}_j + \mathrm{s}_j^2 \right) \tag{2.8}$$

Quy hoạch phi tuyến

Bài toán quy hoạch phi tuyến là bài toán quy hoạch mà hàm mục tiêu hoặc một trong những ràng buộc là phi tuyến. Trong trường hợp tổng quát cả hàm mục tiêu và các ràng buộc là những hàm phi tuyến.

Quy hoạch hình học

Quy hoạch hình học là một trong những phương pháp quy hoạch toán học được Duffin, Peterson và Zener phát triển để giải bài toán tối ưu có dạng ràng buộc là các đa thức, mỗi số hạng của đa thức là tích các biến mang số mũ, các hệ số của đa thức là dương.

Quy hoạch hình học chia thành hai loại: Quy hoạch hình học không ràng buộc và Quy hoạch hình học có ràng buộc:

* Quy hoạch hình học không ràng buộc: là bài toán quy hoạch có dạng

$$\begin{aligned} &\min(max) z = F(X) = \sum_{j=1}^{N} c_j \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ij}} = \sum_{j=1}^{N} c_j x_1^{a_{1j}} \ldots x_n^{a_{nj}} \\ &c_j > 0, x_i > 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

* Quy hoạch hình học có ràng buộc: là bài toán quy hoạch có dạng

- Hàm mục tiêu:

$$\begin{aligned} &\min(max) z = F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ij}} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_1^{a_{1j}} \ldots x_n^{a_{nj}} \\ &c_j > 0, x_i > 0. \end{aligned} \tag{2.10a}$$

- Ràng buộc:

$$\begin{aligned} &g_k(x) = \sum_{j=1}^{M} c_{kj} \prod_{i=1}^{n} x_i a^{kij} = 1; k = 1 \div m \\ &c_{kj} > 0, c_j > 0, x_i > 0. \end{aligned} \tag{2.10b}$$

Quy hoạch rời rạc (Quy hoạch số nguyên)

Quy hoạch rời rạc là các bài toán quy hoạch trong đó một số hoặc toàn bộ các biến số của bài toán quy hoạch được mô tả như các biến số nguyên hoặc rời rạc.

2.2 Điều kiện Kuhn – Tucker

Điều kiện Kuhn-Tucker có nhiều tài liệu gọi là điều kiện Karush-Kuhn-Tucker để giải các bài toán quy hoạch có các ràng buộc là các bất đẳng thức.

Xét bài toán quy hoạch:

- Hàm mục tiêu: $\min z = F(X), X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ (2.11)

- Ràng buộc: $g_j(X) \le 0; \ j = 1 \div m.$ (2.12)

Hàm Largrange đối với bài toán có thể viết dưới dạng:

$$L(\lambda, X) = F(X) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(X) \tag{2.13}$$

Định lý: (Kuhn-Tucker) [8,Tr.31] Điểm tối ưu của bài toán quy hoạch có hàm mục tiêu $\min z = F(X)$ với các ràng buộc $g(X) \le 0$ nếu tồn tại thừa số Largrange $\lambda \ge 0$ và thỏa mãn $\begin{cases} \nabla f + \lambda^T \nabla g = 0 \\ \lambda_i g_i = 0 \quad i = 1 \div m \end{cases}$

Ví dụ:2.1 Bài toán quy hoạch của Luenberger [8, Tr33].

Hàm mục tiêu: $z = F(X) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 10x - 10y \to \min$

Hệ ràng buộc:

$$x^2 + y^2 \le 5;$$
$$3x + y \le 6;$$

Lời giải:

Hàm Largrange có dạng:

$$L(\lambda, X) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 10x - 10y + \lambda_1\left(x^2 + y^2 - 5\right) + \lambda_2\left(3x + y - 6\right)$$

Các điều kiện Kuhn – Tucker:

$\nabla f + \lambda^T \nabla g = 0$; $\quad \lambda_i g_i = 0$; $\quad \lambda \ge 0$.

hay:

$$4x + 2y - 10 + 2x\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0;$$

$$2x + 2y - 10 + 2y\lambda_1 + \lambda_2 = 0;$$

$\lambda_1\left(x^2+y^2-5\right)=0;$

$\lambda_2\left(3x+y-6\right)=0;$

$\lambda_1 \geq 0; \lambda_2 \geq 0.$

Lời giải duy nhất thỏa mãn tất cả các điều kiện Kuhn-Tucker và là nghiệm tối ưu của bài toán là x=1; y=2; $\lambda_1=1$; $\lambda_2=0$. do đó F(X)=-10.

2.3 Bài toán đối ngẫu

Bài toán đối ngẫu của bài toán quy hoạch là một trong các bài toán rất quan trọng trong của bài toán quy hoạch toán học, trong nhiều trường hợp bài toán quy hoạch gốc rất khó tìm được nghiệm nhưng bài toán đối ngẫu của nó thì ta có thể dễ dàng tìm được nghiệm của nó hoặc việc tìm nghiệm sẽ đơn giản hơn nhiều. Vì vậy trong phần này tác giả sẽ trình bày các xác định bài toán đối ngẫu của bài toán quy hoạch tuyến tính gốc.

Xét một quy hoạch tuyến tính:

$$\begin{aligned}&\min c^T X,\\&\mathrm{AX}=b,\\&X\geq 0\end{aligned}\tag{2.14}$$

Trong đó véctơ: $X=\{x_1,x_2,x_3,...,x_n\}$, $b=\{b_1,b_2,b_3,...,b_m\}$

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & & & \\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

Nếu ta biết trước một nghiệm chấp nhận được X^0 thì ta được cận trên của mục tiêu tối ưu. Giả sử tồn tại nghiệm tối ưu X^* thì $c^T X^* \leq c^T X^0$. Tuy chưa tìm được X^*, nhưng nếu biết một cận dưới của mục tiêu tối ưu thì đã tìm được miền của giá trị mục tiêu tối ưu. Như vậy ta thử đi tìm một cận dưới.

Bài toán quy hoạch tuyến tính (2.14) có thể được viết dưới dạng:

$$\begin{aligned}&\min\left[c^T X+y^T\left(\mathrm{b\text{-}AX}\right)\right],\\&X\geq 0\end{aligned}\tag{2.15}$$

$y = \{y_1, y_2, y_3, ..., y_m\}$: được gọi là thừa số Largrange.

Đặt g(y) là giá trị tối ưu của bài toán (2.15) (phụ thuộc vào giá trị véctơ y) và g(y) là cận dưới cho giá trị mục tiêu tối ưu $c^T X^*$ bởi vì:

$$g(y) = \min_{x \geq 0} \left[c^T X + y^T \left(\text{b-AX} \right) \right] \leq c^T X^* + y^T \left(\text{b-AX}^* \right) = c^T X^*$$

Vậy ta đã có được một cận dưới cho giá trị mục tiêu tối ưu của (2.14) là g(y). Như vậy bài toán quy hoạch (2.14) trở thành bài toán:

$$\max_{y \in R^m} (\text{g(x)}) \tag{2.16}$$

Bài toán (2.16) được gọi là bài toán đối ngẫu (dual problem) của quy hoạch tuyến tính (2.14). Bây giờ ta biến đổi (2.16):

$$g(Y) = \min_{x \geq 0} \left[c^T X + Y^T \left(\text{b-AX} \right) \right] = Y^T b + \min_{x \geq 0} \left[c^T - Y^T A \right] X$$

mặt khác:

$$\min_{x \geq 0} \left[c^T - Y^T A \right] X = \begin{cases} 0 & \left(c^T - Y^T A \geq 0^T \right) \\ -\infty & \left(c^T - Y^T A < 0 \right) \end{cases}$$

Như vậy (2.16) tương đương:

$$\begin{aligned} & max\left(Y^T b \right) \\ & Y^T A \leq c^T \end{aligned} \tag{2.17}$$

Như vậy bài toán quy hoạch tuyến tính (2.14) là bài toán quy hoạch tuyến tính (2.17).

Trong trường hợp bài toán quy hoạch với ràng buộc dưới dạng bất đẳng thức:

$$\begin{aligned} & \min c^T X, \\ & \text{AX} \geq b, \\ & X \geq 0 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Ta sẽ chuyển về dạng đẳng thức bằng các thêm các biến bù s=$\{s_1, s_2, s_3, ..., s_m\}$ như vậy ta có thể viết:

$$\mathrm{AX} \le b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{AX+s}=b \\ s \ge 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} = b, s \ge 0$$

Với biến bù hàm mục tiêu trở thành: $\min c^T X + 0^T s$. Như vậy bài toán đối ngẫu của quy hoạch tuyến tính (2.18) là:

$$\max\left(Y^T b\right)$$
$$Y^T \begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} c^T & 0^T \end{bmatrix}$$

tức là:

$$\begin{aligned} &\max\left(Y^T b\right) \\ &Y^T A \le c^T \\ &Y \le 0 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Giả sử ma trận A có các hàng là a_i^T và các cột là A_j. Giả sử bài toán gốc có cấu trúc như bên trái bảng khi đó bài toán đối ngẫu được định nghĩa với cấu trúc tương ứng ở bên phải:

$\min\left(c^T X\right)$	$\max\left(Y^T b\right)$
Với ràng buộc	Với ràng buộc
$a_i^T X = b_i, i \in M_1$	y_i tự do $i \in M_1$
$a_i^T X \le b_i, i \in M_2$	$y_i \le 0,\ i \in M_2$
$a_i^T X \ge b_i, i \in M_3$	$y_i \ge 0,\ i \in M_3$
$x_j \ge 0, j \in N_1$	$Y^T A_j \le c_i^T, j \in N_1$
$x_j \le 0, j \in N_2$	$Y^T A_j \ge c_i^T, j \in N_2$
x_j tự do, $j \in N_3$	$Y^T A_j = c_i^T, j \in N_3$

Nhận xét:

- Mỗi ràng buộc ở bài toán gốc sẽ ứng với một biến của bài toán đối ngẫu.
- Mỗi biến của bài toán gốc ứng với một ràng buộc ở bài toán đối ngẫu. Đồng thời chiều bất đẳng thức có quan hệ trực tiếp với nhau và cho bằng bảng sau đây:

Bài toán gốc	min	Bài toán đối ngẫu	max
Ràng buộc	$= b_i$	Biến	Tự do
	$\le b_i$		≤ 0
	$\ge b_i$		≥ 0
Biến	Tự do	Ràng buộc	$= c_j$
	≤ 0		$\le c_j$
	≥ 0		$\ge c_j$

Ví dụ:2.2 Xét quy hoạch tuyến tính bên trái dưới đây và sẽ lập được bài toán đối ngẫu của nó như ở bên phải:

$\min\left(x_1 + x_2 + 3x_3\right)$	$\max\left(5y_1 + 6y_2 + 4y_3\right)$
$-x_1 + 3x_2 = 5$	y_1 tự do
$2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 6$	$y_2 \ge 0$
$x_3 \le 4$	$y_3 \le 0$
$x_1 \ge 0$	$-y_1 + 2y_2 \le 1$
$x_2 \ge 0$	$3y_1 - y_2 \ge 1$
x_3 tự do	$3y_2 + y_3 = 3$

2.4 Bài toán quy hoạch tuyến tính và phương pháp giải

Bài toán quy hoạch tuyến tính (Linear programming) là một phương pháp tối ưu hóa áp dụng cho để giải các bài toán tối ưu trong đó hàm mục tiêu và các ràng buộc là các hàm tuyến tính của các biến quyết định (decision variables). Các phương trình ràng buộc (constraint equations) trong bài toán quy hoạch tuyến tính có thể dưới dạng đẳng thức hoặc bất đẳng thức. Bài toán quy hoạch tuyến tính lần đầu tiên được ghi nhận vào năm 1930 bởi các nhà kinh tế trong khi phát triển phương pháp phân bổ tối ưu các nguồn lực. Năm 1947 Dantzig đưa ra mô hình toán học Quy hoạch tuyến tính trong khi nghiên cứu các bài toán lập kế hoạch cho không quân Mỹ. Sau khi Dantzig đưa ra quy hoạch tuyến tính, người ta thấy nhiều bài toán thực tế thuộc lĩnh vực khác nhau có thể mô tả toán học quy hoạch tuyến tính.

2.4.1 Dạng chuẩn của quy hoạch tuyến tính

Quy hoạch tuyến tính tổng quát có thể được bắt đầu từ một trong các dạng chuẩn sau:

* Dạng đại số:

- Hàm mục tiêu: $\min f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ (2.20a)
- Hàm ràng buộc:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ &... \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned} \qquad (2.21a)$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; ...; x_n \geq 0; \qquad (2.22a)$$

Trong đó: c_j, b_i và $a_{ij}\left(i = 1, 2, ...m; j = 1, 2, ..., n\right)$ là các hệ số đã biết, còn x_j là các biến.

* Dạng ma trận:

- Hàm mục tiêu: $\min f(X) = c^T X$ (2.20b)
- Hàm ràng buộc: $\mathrm{aX} = b$ (2.21b)

$\mathrm{X} \geq 0$ (2.22b)

Trong đó: $\mathrm{X}=\left\{x_1, x_2, ..., x_n\right\}^T$; $\mathrm{b}=\left\{b_1, b_2, ..., b_m\right\}^T$;

$$\mathrm{a}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mm} \end{bmatrix}$$

- Đặc điểm của bài toán quy hoạch tuyến tính trong dạng chuẩn:

  + Hàm mục tiêu có dạng là cực trị.

  + Tất cả các hàm ràng buộc có dạng phương trình.

+ Tất cả các biến là không âm và số ẩn không nhỏ hơn số phương trình ràng buộc.

Trong thực tế có bài toán quy hoạch có thể viết dưới các cách khác nhau và có thể chuyển được sang đổi sang dạng chuẩn như sau:

(1) Cực tiểu của hàm mục tiêu $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ với các biến số không âm là bài toán cực đại của hàm mục tiêu với biến số âm.

$\min f(x_1, x_2, ..., x_n)$ tương đương với bài toán:

$\max f^{'} = -f = -c_1x_1 - c_2x_2 - ... - c_nx_n$

Do đó hàm mục tiêu có thể được viết dưới dạng cực tiểu trong quy hoạch tuyến tính.

(2) Trong hầu hết các bài toán tối ưu trong kỹ thuật thì các biến thường đại diện cho kích thước của kết cấu do đó các biến phải không âm. Tuy nhiên có thể có biến không hạn chế (có thể lấy giá trị âm, dương hoặc bằng không) và biến này có thể được viết dưới dạng hai biến không âm. Vì vậy giả sử biến x_j là biến không hạn chế có thể được viết như sau: $x_j = x^{'}_j - x^{"}_j$ trong đó: $x^{'}_j \geq 0$ và $x^{"}_j \geq 0$. Như vậy biến x_j có thể lấy giá trị âm, dương hoặc bằng không tùy thuộc vào giá trị của biến $x^{'}_j$ là nhỏ hơn, lớn hơn hoặc bằng giá trị của $x^{"}_j$.

(3) Nếu trong hàm ràng buộc có dạng bất đẳng thức có dạng: $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_1 + ... + a_{kn}x_n \leq b_k$ thì ta có thể chuyển sang dạng đẳng thức bằng cách thêm biến bù không âm x_{n+1} như sau: $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_1 + ... + a_{kn}x_n + x_{n+1} = b_k$

Tương tự như vậy, với ràng buộc bất đẳng thức dạng: $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_1 + ... + a_{kn}x_n \geq b_k$ ta có thể chuyển sang dạng đẳng thức bằng cách thêm biến bù không âm x_{n+1} như sau: $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_1 + ... + a_{kn}x_n - x_{n+1} = b_k$

2.4.2 Phương pháp hình học giải bài toán quy hoạch tuyến tính

Đối với bài toán quy hoạch tuyến tính chỉ có hai biến ta có thể giải bài toán quy hoạch được bằng phương pháp hình học (phương pháp đồ họa).

Thông qua ví dụ dưới đây NCS trình bày phương pháp hình học trong việc giải bài toán quy hoạc tuyến tính hai biến. Để thấy được vị trí các nghiệm có thể tối ưu của bài toán quy hoạch.

Ví dụ 2.3: Xét quy hoạch tuyến tính

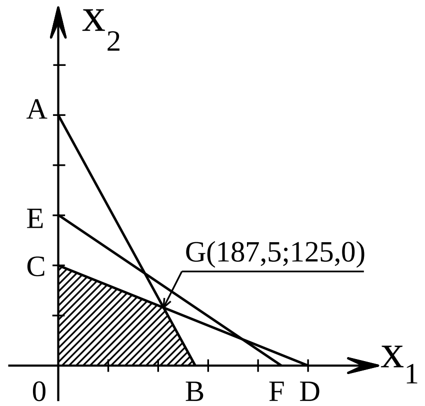
- Hàm mục tiêu: $\max f = 50x + 100y \quad (e_1)$

- Hàm ràng buộc: $10x + 5y \le 2500 \quad (e_2)$

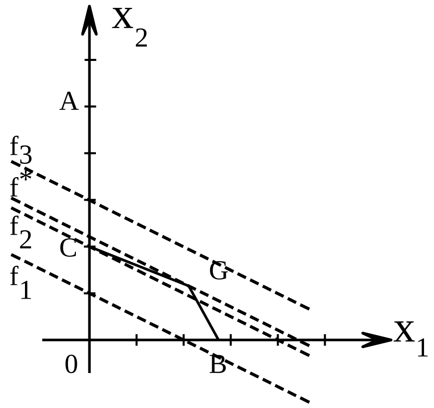
$$
\begin{aligned}
&4x + 10y \le 2000 && (e_3) \\
&x + 1,5y \le 450 && (e_4) \\
&x \ge 0; y \ge 0 && (e_5)
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

Việc xác định các giá trị (x,y) không âm và thỏa mãn các điều kiện ràng buộc từ (e_2) đến (e_4) để giá trị trong hàm f (e_1) đạt giá trị lớn nhất. Ta có thể vẽ được miền lồi trong mặt phẳng (x,y) mà các điểm trong miền lồi này thỏa mãn các điều kiện ràng buộc từ (e_2)đến (e_5) (hình 2.1). Như vậy, mục đích của chúng ta phải tìm điểm nằm trong miền lồi này để hàm mục tiêu đạt giá trị lớn nhất.

Đường mức (level curve, trong trường hợp nhiều biến hơn thì gọi là mặt mức – level surface) của hàm mục tiêu là đường thẳng $50x + 100y = k$. Như vậy, khi giá trị k thay đổi thì đường mức di chuyển và song song với chính nó. Giá trị tối ưu là giá trị k lớn nhất mà đường mức có ít nhất một điểm nằm trong miền lồi (polyhedron). Và như vậy ta có thể tìm được điểm tối ưu của bài toán là điểm G (hình 2.2) có tọa độ $x^* = 187,5; y^* = 125,0$và giá trị của hàm mục tiêu tại vị trí nghiệm tối ưu là: $f = 21.875,00$.



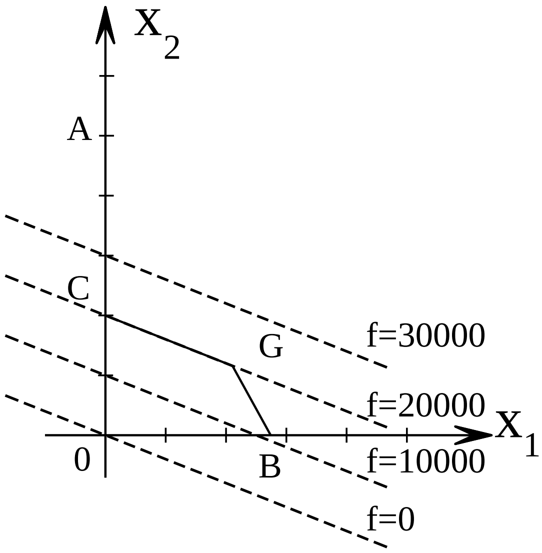
Hình 2.1 Miền chấp nhận của các ràng buộc e_2 đến e_5



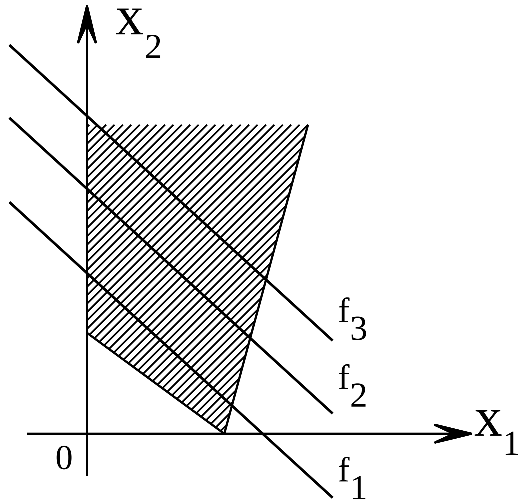
Hình 2.2 Đường của hàm mục tiêu

*** Các trường hợp đặc biệt**

- Khi giá trị điểm mục tiêu không phải là duy nhất. Ví dụ như trong ví dụ trên nhưng hàm mục tiêu là $\max f = 40x + 100y$ thì nghiệm tối ưu của bài toán là tập hợp các điểm nằm trên đường thẳng CG của miền lồi (hình 2.3).
- Khi miền lồi không đóng, khi đó giá trị của hàm mục tiêu có thể tăng lên vô cùng (hình 2.4). Trong trường hợp này bài toán quy hoạch tuyến tính là không bị chặn trên.
- Khi không có điểm nào thỏa mãn điều kiện hạn chế thì lúc này sẽ không có kết quả tối ưu của bài toán.
- Trường hợp cuối cùng là chỉ có một điểm duy nhất thỏa mãn các điều kiện ràng buộc. Điều này chỉ xảy ra khi số điều kiện ràng buộc phải lớn hơn hoặc bằng số biến.



Hình 2.3 Nghiệm tối ưu không duy nhất



Hình 2.4 Miền nghiệm chấp nhận không đóng

Qua ví dụ ở trên cho thấy: Bài toán quy hoạch tuyến tính nếu miền chấp nhận là miền lồi đa diện thì có nghiệm tối ưu chỉ có thể tại đỉnh của miền lồi đa diện.

2.4.3 Phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính

Trước khi nghiên cứu phương pháp chung để giải bài toán quy hoạch tuyến tính chúng ta tìm hiểu phương pháp giải bài toán hệ phương trình tuyến tính. Để đưa ra khái niệm phép xoay toán học (pivotal operations) được áp dụng trong việc giải bài toán quy hoạch tuyến tính theo phương pháp đơn hình và sẽ áp dụng ở phần sau.

Xét hệ phương trình tuyến tính gồm n phương trình và n ẩn số:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \qquad (e_1)\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \qquad (e_2)\\
&\dots\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \qquad (e_n)
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Để giải hệ phương trình trên, một cách đơn giản nhất là ta đơn giản triệt tiêu dần các ẩn số trong các phương trình tuyến tính của hệ phương trình bằng cách: Ví dụ muốn triệt tiêu một biến x_i trong phương trình trong phương trình

e_j. Xét phương trình e_r nhân hai vế của phương trình với k (k là một hệ số không bằng không và sao cho sau khi phương trình e_r nhân hệ số k cộng với phương trình e_j thì hệ số $a_{ji} = 0$) triệt tiêu được một biến x_i trong phương trình e_j. Như vậy ta được một hệ phương trình mới tương đương với hệ phương trình đã cho.

$$
\begin{array}{lll}
a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + ... + 0x_i + ... + a'_{1n}x_n = b'_1 & (e_1) & \\
a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + ... + 0x_i + ... + a'_{2n}x_n = b'_2 & (e_2) & \\
\vdots & & \\
a'_{(j-1)1}x_1 + a'_{(j-1)2}x_2 + ... + 0x_i + ... + a'_{(j-1)n}x_n = b'_{j-1} & (e_{j-1}) & \\
a'_{j1}x_1 + a'_{j2}x_2 + ... + x_i + ... + a'_{jn}x_n = b'_j & (e_j) & (2.25) \\
a'_{(j+1)1}x_1 + a'_{(j+1)2}x_2 + ... + 0x_i + ... + a'_{(j+1)n}x_n = b'_{j+1} & (e_{j+1}) & \\
\vdots & & \\
a'_{n1}x_1 + a'_{n2}x_2 + ... + 0x_i + ... + a'_{nn}x_n = b'_n & (e_n) &
\end{array}
$$

Các hằng số mới a'_{ij} và b'_i trong hệ phương trình mới được suy ra từ hệ phương trình gốc. Quá trình loại bỏ một phần biến này từ một phương trình được gọi là phép xoay và như vậy véctơ X thỏa mãn hệ phương trình (2.24) thì cũng thỏa mãn hệ (2.25) và ngược lại.

Tiếp theo, ta sử dụng phép xoay đối với hệ (2.25) để triệt tiêu một biến tiếp theo, chẳng hạn x_s $(s \neq i)$. Trong phương trình j thì tất cả các hệ số $a''_{tj} = 0$ còn $a''_{tt} = 1$ và như vậy hệ (2.24) được viết lại như sau:

$$
\begin{array}{lll}
1x_1 + 0x_2 + ... + 0x_i + ... + 0x_n = b''_1 & (e_1) & \\
0x_1 + 1x_2 + ... + 0x_i + ... + 0x_n = b''_2 & (e_2) & (2.26) \\
\vdots & & \\
0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_i + ... + 1x_n = b''_n & (e_n) &
\end{array}
$$

Như vậy sau một số phép xoay ta đã đưa hệ ban đầu về dạng (2.26) và từ hệ (2.26) ta dễ dàng xác định được các thành phần véc tơ X.

$$x_i = b''_i \qquad i = (1, 2, ..., n)$$

2.4.4 Phép xoay trong giải hệ phương trình tổng quát

Như ta đã biết số phương trình ràng buộc trong bài toán quy hoạch tuyến tính luôn nhỏ hơn hoặc bằng số biến. Trong mục này sẽ trình bày phép xoay trong trường hợp hệ phương trình tổng quát. Xét hệ phương trình gồm m phương trình và có n ẩn số $(n \geq m)$ với giả thiết hệ với phương trình này có ít nhất một nghiệm.

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\
&... \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned} \qquad (2.27)$$

Để giải ra véc tơ nghiệm X thỏa mãn các phương trình (2.27) không dễ dàng. Nhưng nếu ta xét m biến làm ẩn thì ta có thể dễ dàng tìm được m biến này bằng phép xoay toán học với m biến bất kỳ chẳng hạn: $x_1, x_2, ..., x_m$ và kết quả của các phương trình được viết lại như sau:

Hệ phương trình kinh điển nhờ phép xoay các biến: $x_1, x_2, ..., x_m$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
1x_1 & + & 0x_2 & + & \dots & + & 0x_m & + & a''_{1,m+1}x_{m+1} & + & \dots & + & a''_{1,n}x_n & = & b''_1 \\
0x_1 & + & 1x_2 & + & \dots & + & 0x_m & + & a''_{2,m+1}x_{m+1} & + & \dots & + & a''_{2,n}x_n & = & b''_2 \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & \\
0x_1 & + & 0x_2 & + & \dots & + & 1x_m & + & a''_{1,m+1}x_{m+1} & + & \dots & + & a''_{1,n}x_n & = & b''_n
\end{array} \qquad (2.28)$$

Biến xoay | Biến độc lập không xoay | Hằng

Một nghiệm đặc biệt của hệ phương trình (2.28) có thể được viết như sau:

$$x_i = \begin{cases} b''_i & i = 1, 2, ..., m \\ 0 & i = m+1, ..., n \end{cases} \qquad (2.29)$$

Nghiệm này được gọi là nghiệm cơ sở (basic solution). Các biến xoay $x_1, x_2, ..., x_m$ được gọi là biến cơ sở (basic variables), các biến còn lại được gọi là biến không cơ sở (nonbasic variables). Nếu tất cả các $b"_i \quad i = 1, 2, ..., m$ trong nghiệm của (2.29) là không âm và thỏa mãn các phương trình (2.21) và (2.22) thì nghiệm này được gọi là một nghiệm chấp nhận cơ sở (basic feasible solution).

2.4.5 Thuật toán đơn hình

Điểm xuất phát của của thuật toán đơn hình luôn được xác định từ các phương trình mà các phương trình này bao gồm hàm mục tiêu và các ràng buộc. Do đó, bài toán quy hoạch tuyến tính trở thành bài toán tìm véc tơ $X \geq 0$ để hàm f đạt giá trị cực tiểu và thỏa mãn các phương trình.

$$
\begin{array}{ll}
1x_1 + 0x_2 + ... + 0x_m + a"_{1,m+1}\, x_{m+1} + ... + a"_{1n}\, x_n = b"_1 & (e_1) \\
0x_1 + 1x_2 + ... + 0x_m + a"_{2,m+1}\, x_{m+1} + ... + a"_{2n}\, x_n = b"_2 & (e_2) \\
\vdots & \\
0x_1 + 0x_2 + ... + 1x_m + a"_{m,m+1}\, x_{m+1} + ... + a"_{mn}\, x_n = b"_m & (e_{j-1}) \\
0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_m - f + c"_{m+1}\, x_{m+1} ... + c"_n\, x_n = -f"_0 & (e_j)
\end{array}
\tag{2.30}
$$

Trong đó: $a"_{\mathrm{ij}}, c"_{\mathrm{j}}, b"_{\mathrm{i}}$ và $f"_0$ là các hằng số. Chú ý $-f$ được coi là một biến cơ sở trong hệ (3.30) và như vậy giải hệ phương trình này ta có thể tìm được nghiệm là:

$$
\begin{array}{ll}
x_i = b"_i & i = 1, 2, ..., m \\
f = -f"_0 & \\
x_i = 0 & i = m+1, m+2, ..., n
\end{array}
\tag{2.31}
$$

Nếu nghiệm cơ sở là được chấp nhận với các giá trị của nghiệm $x_i (i = 1, 2, ..., n)$ có giá trị không âm. Do đó: $b"_i \geq 0 (i = 1, 2, ...m)$.

Trong pha I của phương pháp đơn hình nghiệm cơ sở tương ứng với dạng đại số, sau khi đưa vào các biến nhân tạo (artificial variables) sẽ được chấp nhận bằng bài toán bổ trợ (auxiliary problem). Pha II của phương pháp đơn hình được bắt đầu bằng nghiệm cơ sở chấp nhận của bài toán quy hoạch tuyến tính. Điểm bắt đầu của phương pháp đơn hình ở dạng đại số luôn là nghiệm cơ sở chấp nhận.

2.4.5.1 Xác định nghiệm tối ưu

Để xác định điểm tối ưu của bài toán ta có định lý sau [11,Tr.140]:

Định lý: Một nghiệm cơ sở chấp nhận của bài toán quy hoạch tuyến tính có giá trị cực tiểu của hàm mục tiêu là f''_0 nếu như tất cả các giá trị hệ số $c''_i (i = m+1, m+2, ..., n)$ trong (2.30) là không âm.

2.4.5.2 Cách cải thiện nghiệm tối ưu

Trước khi đi vào trình bày lý thuyết cải thiện nghiệm tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính. Tác giả trình bày ví dụ quy hoạch tuyến tính sau.

Ví dụ:2.4 Xét quy hoạch tuyến tính:

- Hàm mục tiêu: $\min z = -5x_1 - 4x_2 - 3x_3$ (2.32a)

- Hệ ràng buộc: $2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 5$

$$4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 11 \qquad (2.32b)$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

Trước hết đưa bài toán về dạng chuẩn bằng cách đưa vào biến bù x_4, x_5, x_6 và viết hệ ở dưới dạng:

- Hàm mục tiêu: $\min z = -5x_1 - 4x_2 - 3x_3$ (2.33a)

- Hệ ràng buộc:

$$\begin{cases} x_4 = -2x_1 - 3x_2 - x_3 + 5 \\ x_5 = -4x_1 - x_2 - 2x_3 + 11 \\ x_6 = -3x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0 \end{cases} \qquad (2.33b)$$

Để bắt đầu ta cần có một nghiệm chấp nhận được. Dễ nhận thấy nghiệm đó là: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 5, x_5 = 11, x_6 = 8$ giá trị của hàm mục tiêu tương ứng z=0.

Trong bước lặp đầu tiên ta xem cải biến nghiệm xuất phát thế nào để được nghiệm chấp nhận mới với mục tiêu nhỏ hơn. Vì hệ số của x_1 ở hàm mục tiêu là âm, nếu ta tăng giá trị x_1 từ 0 lên giá trị dương càng lớn thì z càng giảm (nếu ta giữ $x_2=0$, $x_3=0$) nhưng khi đó các giá trị biến bù cũng thay đổi. Sự thay đổi này không ảnh hưởng hàm mục tiêu nhưng x_1 chỉ được thay đổi sao cho $x_4, x_5, x_6 \ge 0$ vì $x_2=0$, $x_3=0$ nên

Hệ ràng buộc:

$$\begin{aligned} x_4 &= -2x_1 + 5 \\ x_5 &= -4x_1 + 11 \\ x_6 &= -3x_1 + 8 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &\le 5/2 \\ x_1 &\le 11/4 \\ x_1 &\le 8/3 \end{aligned}$$

Vậy ta lấy $x_1 = 5/2$ và khi đó $x_4 = 0$. Ta được nghiệm chấp nhận được mới tốt hơn sau bươc một là:

$$x_1 = 5/2, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 1/2$$

Giá trị mục tiêu là z=-12,5

Nhận xét: Bước lặp đầu tiên dễ thực hiện vì trong nghiệm xuất phát có một nhóm biến bằng 0 và các biến khác biểu diễn qua chúng qua các ràng buộc. Do đó để vào bước 2 ta viết lại bài toán ở dạng tương tự, tức là đổi vai trò của x_1 và x_4 vậy x_1, x_5, x_6 và z sẽ biểu diễn qua x_2, x_3, x_4. Muốn vậy ở ràng buộc đầu ta giải x_1 ra theo x_2, x_3, x_4.

$$x_1 = 5/2 - 3x_2/2 - x_3/2 - x_4/2 \qquad (2.34)$$

Tiếp theo ta thay x_1 trong biểu thức của x_5, x_6 và z bằng biểu thức (2.34) của nó. Cách tốt nhất để thực hiện việc thay này là làm cái gọi là phép toán trên hàng (row operation)

Đối với phương trình cho x_5 ta lấy nó trừ đi hai lần phương trình cho x_4 rồi chuyển x_4 sang vế phải ta được.

$$x_5 = 1 + 5x_2 + 2x_4 \tag{2.35}$$

Làm tương tự cho hàm x_6 và hàng z, ta viết lại được (2.33) ở dạng

$$\begin{array}{l} \underline{z = -12,5 + 3,5x_2 - 0,5x_3 + 2,5x_4} \\ x_1 = 2,5 - 1,5x_2 - 0,5x_3 - 0,5x_4 \\ x_5 = 1 + 5x_2 + 2x_4 \\ x_6 = 0,5 + 0,5x_2 + 1,5x_4 - 0,5x_3 \end{array} \tag{2.36}$$

Đồng thời từ cách viết này ta được ngay nghiệm ở bước 1 bằng cách cho các biến "độc lập" giá trị 0 và đọc ngay được các giá trị tương ứng của các biến "phụ thuộc" x_1=2,5,$x_5 = 1, x_6 = 0,5$

Bắt đầu bước lặp thứ 2 ta lại nhận xét như bước 1. Bây giờ chỉ có hệ số của x_3 của hàm mục tiêu là âm chỉ tăng x_3 từ 0 thành dương và giữ nguyên x_2 và x_4 bằng 0 là giảm z. (Nếu tăng x_2 chẳng hạn thì z tăng, tức là làm nghiệm có "xấu đi"). Cũng như trước, ta tăng x_3 nhiều nhất có thể để x_1, x_5 và x_6 không âm. Từ phương trình x_5 ta thấy x_5 không bị ảnh hưởng theo x_3. Hai phương trình còn lại cho ta $x_3 \le 5$ và $x_3 \le 1$. Ta lấy $x_3 = 1$ và được nghiệm chấp nhận được mới x_1=2,x_2=0,x_3=1,$x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 0$ và giá trị mục tiêu tương ứng là z=-13

Để vào bước lặp 3 ta lại viết phương trình ở dạng x_1, x_3, x_5 và z biểu diễn qua x_2, x_4, x_6. Thực hiện phép toán trên hang đối với phương trình cho x_6 ta được: $x_3 = 1 + x_2 + 2x_4 - 2x_6$ (2.37)

Làm tương tự đối với các hàm khác ta được

$$\begin{array}{l} \underline{z = -13 + 3x_2 + x_4 + x_6} \\ x_1 = 2 - 2x_2 - 2x_4 + x_6 \\ x_5 = 1 + 5x_2 + 2x_4 \\ x_3 = 1 + x_2 + 3x_4 - 2x_6 \end{array} \tag{2.38}$$

Bắt đầu bước 3, ta thấy không có hệ số nào ở hàm mục tiêu là âm nên ta không thể cho biến "độc lập" nào tăng từ 0 thành số dương (và giữ nguyên giá trị 0 cho biến độc lập khác) để giảm hàm mục tiêu. Phương pháp đơn hình phải dừng. Nhưng ta thấy ngay nghiệm chấp nhận ở bước 2 là tối ưu. Thật vậy, hệ (2.38) là tương đương với quy hoạch tuyến tính ban đầu (2.32). Nhận xét (2.38) ta thấy vì các biến phải không âm nên $z \geq -13$ với mọi nghiệm chấp nhận được của quy hoạch tuyến tính, mà nghiệm đã nhận được đã cho z=-13 nên nó là tối ưu. Vậy nghiệm tối ưu là $x_1=2, x_2=0, x_3=1$ và giá trị mục tiêu tối ưu là z=-13.

Trừ z ra, các biến nằm ở vế trái các phương trình (tức là biến "phụ thuộc") ở mỗi bước lặp gọi là biến cơ sở ở bước đó (basic variable). Nghiệm chấp nhận được khi cho các biến không cơ sở giá trị 0 được gọi là nghiệm cơ sở (basic solution). Vậy mỗi bước lặp xác định một nghiệm cơ sở tương ứng.

**** Cải thiện nghiệm của thuật toán đơn hình***

Xét quy hoạch tuyến tính:

- Hàm mục tiêu: $$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (2.39a)$$

- Hàm ràng buộc: $$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, ..., m; \\ &x_j \geq 0, i = 1, ..., n. \end{aligned} \qquad (2.39b)$$

Việc đầu tiên là đưa biến bù vào và đặt tên hàm mục tiêu là z:

$$\begin{aligned} z &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \\ \mathrm{w}_i &= b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, i = 1, ..., m. \end{aligned} \qquad (2.40)$$

Ta thấy ở thí dụ trên đây khi tiến hành thuật toán đơn hình, biến ban đầu và biến bù được xử lý như nhau, không phân biệt. Do đó ta ký hiệu thành một bộ biến x:

$$(x_1,...,x_n,w_1,...,w_m):=(x_1,...,x_n,x_{n+1},...,x_{n+m}) \quad (2.41)$$

Khi đó (2.39) trở thành:

$$\begin{aligned} z &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \\ x_{n+i} &= b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, i = 1,..., m. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Đây là nghiệm xuất phát. Nội dung của thuật toán đơn hình là chuyển từ một hệ phương trình này sang một hệ phương trình khác với giá trị mục tiêu tốt hơn. Mỗi hệ phương trình có m biến cơ sở và n biến không cơ sở. Hãy ký hiệu B là tập các chỉ số tương ứng với các biến cơ sở trong các chỉ số $\{1,2,...,n+m\}$ và N là tập chỉ số của biến không cơ sở. Ở Hệ phương trình xuất phát thì $N=\{1,2,...,n\}$ và $B=\{n+1,...,n+m\}$ nhưng chúng sẽ thay đổi sau mỗi bước. Ở mỗi bước hệ phương trình đều có dạng:

$$\begin{aligned} z &= \bar{z} + \sum_{j\in N} \bar{c}_j x_j, \\ x_i &= \bar{b}_i - \sum_{j\in N} \bar{a}_{ij} x_j, i \in B. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Ở đây số gạch trên đầu ký tự để chỉ rằng đại lượng này thay đổi qua các bước.

Ở mỗi bước lặp, đúng một biến từ không cơ sở trở thành biến cơ sở, được gọi là biến vào (entering variable), và đúng một biến cơ sở trở thành biến không cơ sở, gọi là biến ra (leaving variable). Biến vào được chọn trong các biến có hệ số mục tiêu (tức hệ số trong hàm mục tiêu) âm để làm giảm hàm mục tiêu. Nếu không có hệ số mục tiêu âm ta được phép lựa chọn. Biến vào được chọn một cách tự nhiên có hệ số (âm) nhỏ nhất để hi vọng làm giảm hàm mục tiêu nhiều nhất.

Biến ra được chọn để đảm bảo tính không âm của các biến giả sử biến vào đã chọn là x_k, tức là giá trị của nó trở thành dương. Khi đó các biến đang là cơ sở sẽ bị thay đổi và bằng

$$x_i = \bar{b}_i - \bar{a}_{ik} x_k, i \in B \tag{2.44}$$

x_k được phép lớn đến mức mọi $x_i \geq 0, i \in B$ tức là

$$\frac{1}{x_k} \geq \frac{\bar{a}_{ik}}{\bar{b}_i}, i \in B \tag{2.45}$$

Rõ ràng x_k lớn nhất thỏa mãn mọi bất đẳng thức này sẽ là

$$x_k = \left(\max_{i \in B} \frac{\bar{a}_{ik}}{\bar{b}_i} \right)^{-1} \tag{2.46}$$

Ở đây ta quy ước $\frac{0}{0} = 0$ và ta sẽ xem xét sau trường hợp có số $\bar{b}_i = 0$ và trường hợp không có tỉ số $\frac{\bar{a}_{ik}}{\bar{b}_i}$ nào dương. Vậy quy tắc chọn biến ra là chọn biến có chỉ số $l \in B$ mà $\frac{\bar{a}_{lk}}{\bar{b}_k} = \left(\max_{i \in B} \frac{\bar{a}_{ik}}{\bar{b}_i} \right)$ (2.47)

Sau khi chọn biến vào và biến ra, việc chuyển hệ phương trình sang hệ phương trình mới là nhờ các phép toán hàng. Toàn bộ việc làm này gọi là phép xoay (pivot). Vì thế có thể nhiều biến vào và nhiều biến ra có thể lấy đều đảm bảo giảm mục tiêu và các biến vẫn không âm, ta sẽ thấy có các quy tắc củ thể để tránh sự không xác định đó, gọi là quy tắc xoay (pivot rule).

Ví dụ:2.5 Tìm nghiệm của bài toán quy hoạch tuyến tính bằng phương pháp đơn hình:

-z	$-5x_1$	$-4x_2$	$-3x_3$				=0
	$2x_1$	$+3x_2$	$+x_3$	$+w_1$			=5
	$4x_1$	$+x_2$	$+2x_3$		$+w_2$		=11
	$3x_1$	$4x_2$	$+2x_3$			$+w_3$	=8

Với quy ước kết quả của mỗi bước đều viết dưới dạng như vậy chỉ cần ghi các hệ số là đủ và được viết dưới các bảng sau:

x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	
-5	-4	-3	0	0	0	0
2	3	1	1	0	0	5
4	1	2	0	1	0	11
3	4	2	0	0	1	8

Bước lặp 1:

x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	
-5	-4	-3	0	0	0	0
2	3	1	1	0	0	5
4	1	2	0	1	0	11
3	4	2	0	0	1	8

x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	
0	7/2	-1/2	5/2	0	0	25/2
1	3/2	1/2	1/2	0	0	5/2
0	-5	0	-2	1	0	1
0	-1/2	1/2	-3/2	0	1	1/2

Và làm tương tự như trên với bước lặp 2:

x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	
0	3	0	1	0	1	13
1	2	0	-1	0	1	2
0	-5	0	-2	1	0	1
0	-1	1	-3	0	2	1

Tại bước lặp này ta thấy, tất cả các hệ số ở hàng mục tiêu là không âm do đó ta kết thúc thuật toán.

Từ kết quả cột cuối cho ta kết quả nghiệm tối ưu:

$$\begin{cases} x_1^* = 2; \quad x_2^* = 0; \quad x_3^* = 1; \\ Z_{\min}^* = 13 \end{cases}$$

2.4.5.3 Phương pháp đơn hình với thuật toán hai pha

Việc tìm các giá trị không âm của các biến $x_1, x_2, ..., x_n$ để thỏa mãn các bất phương trình:

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\ & ... \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_1 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \end{aligned} \qquad (2.48a)$$

Và để hàm mục tiêu đạt giá trị nhỏ nhất:

$$c_1x_1 + c_2x_1 + ... + c_nx_n = f \qquad (2.48b)$$

Ở mục trên ta chỉ xét trường hợp vế phải các ràng buộc đều không âm; nhờ vậy hệ phương trình xuất phát là chấp nhận được. (Ta quy ước như vậy nếu nghiệm tương ứng của hệ phương trình, khi cho các biến không cơ sở bằng 0 và đọc ngay ra được các biến khác, là chấp nhận được)

Nếu quy hoạch tuyến tính chuẩn (2.48) có các $b_i<0$ thì ta phải tìm hệ phương trình tương đương xuất phát chấp nhận được bằng một bài toán bổ trợ. Việc tìm bài toán bổ trợ (auxiliary problem) cũng là quy hoạch tuyến tính nhưng có hai tính chất quan trọng sau đây.

- Dễ nhận thấy ngay hệ phương trình xuất phát chấp nhận được của bài toán bổ trợ này.

-Hệ phương trình tối ưu của nó chọn ngay một hệ phương trình chấp nhận được của quy hoạch tuyến tính gốc đang cần xét.

Bài toán bổ trợ đó là:

$$
\begin{aligned}
&\min(x_0),\\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_0 \le b_i, i = 1,...,m, \\
&x_j \ge 0,\ j = 0,1,...,n.
\end{aligned}
\tag{2.49}
$$

Để có một nghiệm chấp nhận được chỉ việc đặt $x_j = 0, j = 1,...,n$ và lấy $x_0 > 0$ đủ lớn. Dễ thấy quy hoạch tuyến tính cần xét có nghiệm chấp nhận được khi và chỉ khi bài toán bổ trợ có nghiệm chấp nhận được với $x_0 = 0$. Nhưng đây rõ ràng là nghiệm tối ưu của bài toán bổ trợ. Vậy quy hoạch tuyến tính cần xét có nghiệm chấp nhận được khi và chỉ khi bài toán bổ trợ có mục tiêu tối ưu bằng 0.

Ví dụ:2.6 Xét bài toán quy hoạch tuyến tính

$$
\begin{aligned}
&\min(2x_1 + x_2),\\
&-x_1 + x_2 \le -1,\\
&-x_1 - 2x_2 \le -2,\\
&x_2 \le 1,\\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
\tag{2.50}
$$

Bài toán bổ trợ là:

$$
\begin{aligned}
&\min x_0,\\
&-x_1 + x_2 - x_0 \le -1,\\
&-x_1 - 2x_2 - x_0 \le -2,\\
&x_2 - x_0 \le 1,\\
&x_0, x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
\tag{2.51}
$$

Ta đưa vào biến bù và viết hệ phương trình xuất phát không chấp nhận được của bài toán bổ trợ (vì có vế phải ràng buộc không âm)

$$
\begin{aligned}
&\zeta = x_0,\\
\hline
&x_3 = -1 + x_1 - x_2 + x_0,\\
&x_4 = -2 + x_1 + 2x_2 + x_0,\\
&x_5 = 1 - x_2 + x_0.
\end{aligned}
\tag{2.52}
$$

Vì hệ phương trình này chưa chấp nhận được, ta chưa thực hiện được bước lặp đầu bằng phép xoay của thuật toán đơn hình, mà cứ lấy x_0 là biến vào và chọn biến ra là biến x_4 " không chấp nhận được nhất"

$$
\begin{array}{l}
\zeta = 2 - x_1 - 2x_2 - x_4, \\
\hline
x_3 = 1 - 3x_2 + x_4, \\
x_4 = -2 + x_1 - 2x_2 + x_0, \\
x_5 = 3 - x_1 - 3x_2 + x_4.
\end{array} \tag{2.53}
$$

Đây đã là hệ phương trình chấp nhận được nên ta bắt đầu thuật toán đơn hình, củ thể phải đưa x_2 vào và x_3 ra khỏi cơ sở, sau khi xoay ta được:

$$
\begin{array}{l}
\zeta = \frac{4}{3} - x_1 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \\
\hline
x_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \\
x_0 = \frac{4}{3} - x_1 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \\
x_5 = 2 - x_1 + x_3
\end{array} \tag{2.54}
$$

ở bước lặp tiếp theo ta đưa x_1 vào vào x_0 ra khỏi cơ sở:

$$
\begin{array}{l}
\zeta = 0 + x_0 \\
\hline
x_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \\
x_1 = \frac{4}{3} - x_0 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \\
x_5 = \frac{2}{3} + x_0 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4
\end{array} \tag{2.55}
$$

Vì không còn hệ số âm ở hàm mục tiêu, hệ phương trình này là tối ưu. Để được hệ phương trình chấp nhận được tương đương với quy hoạch tuyến tính cần xét ban đầu, ta bỏ x_0 khỏi hệ phương trình này (vì giá trị mục tiêu tối ưu $\zeta = x_0 = 0$) và tính giá trị tương ứng của mục tiêu z:

$$z = 2x_1 + x_2 = 3 + x_3 + x_4. \tag{2.56}$$

Vậy hệ phương trình chấp nhận được của quy hoạch tuyến tính cần xét là

$$z=3+x_3+x_4$$

$$x_2=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}x_3+\frac{1}{3}x_4$$

$$x_1=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}x_3+\frac{1}{3}x_4$$

$$x_5=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}x_3-\frac{1}{3}x_4$$

Hệ phương trình này, bài toán đã xác định được nghiệm tối ưu bởi vì các hệ số mục tiêu đều dương. Nhưng trong trường hợp tổng quát ta chỉ đưa được về dạng hệ xuất phát chấp nhận được.

Thông thường người ta ghép luôn bài toán bổ trợ vào thuật toán đơn hình và gọi là pha I (Phase I). Quá trình trực tiếp áp dụng thuật toán đơn hình từ hệ phương trình xuất phát chấp nhận được gọi là pha II (Phase II). Toàn bộ thuật toán gọi là thuật toán hai pha (two – phase algorithm)

2.5 Áp dụng hàm fmincon trong Matlab để giải bài toán quy hoạch

Xét bài toán quy hoạch toán học, tìm x để:

- Hàm mục tiêu: $\min(f(x))$ (2.57a)

- Các điều kiện ràng buộc: $$\begin{cases} c(x) \le 0, \\ ceq(x) = 0, \\ \mathrm{A.x} \le b, \\ Aeq.x = beq, \\ \mathrm{l}_b \ge \mathrm{x} \ge u_b. \end{cases} \quad (2.57b)$$

trong đó: A, Aeq, beq, l_b, u_b là các ma trận; f(x), c(x), ceq(x) là các hàm số; x là một véctơ.

Để giải bài toán quy hoạch này, phần mềm matlab 7.0 cung cấp một hàm fmincon với cú pháp như sau:

$$\mathrm{x=fmincon(f(x),x_0,A,b,Aeq,beq,l_{\mathit{b}})} \quad (2.58)$$

trong đó x_0 có thể là một số, một véctơ hoặc một ma trận cho trước (thông thường lấy bằng 0).

Để thuận tiện cũng như tự động hóa được trong tính toán các ví dụ phân tích về bài toán ổn định cục bộ kết cấu dàn sau này, tác giả sẽ áp dụng hàm fmincon trong Matlab để giải các bài toán quy hoạch toán học.

2.6 Phương pháp phân tích tuyến tính ổn định cục bộ kết cấu dàn

2.6.1 Áp dụng phương pháp cực trị Gauss phân tích nội lực, chuyển vị kết cấu dàn

Khi hệ kết cấu dàn so sánh không liên kết, tải trọng tác dụng lên nút thứ i của dàn là $P_x^{(i)}, P_y^{(i)}, P_z^{(i)}$. Để đưa về hệ so sánh có liên kết ta có thể đặt lo xo tại các nút dàn, có độ cứng theo các phương x, phương y và phương z lần lượt là $k_x^{(i)}$, $k_y^{(i)}$ và $k_z^{(i)}$ lên hệ so sánh mà không làm thay đổi chuyển động của nút với:

$$k_x^{(i)} = \lim_{u_{0i}\to\infty} \frac{P_x^{(i)}}{u_{0i}};\ k_y^{(i)} = \lim_{v_{0i}\to\infty} \frac{P_y^{(i)}}{v_{0i}};\ k_z^{(i)} = \lim_{w_{0i}\to\infty} \frac{P_z^{(i)}}{w_{0i}} \quad (2.59)$$

trong đó: $u_{0i}; v_{0i}; w_{0i}$ là các thành phần chuyển vị tại nút i của hệ so sánh. Ta thấy: khi $u_{0i} \to \infty$, $v_{0i} \to \infty$ và $w_{0i} \to \infty$ thì $k_x^{(i)} \to 0$, $k_y^{(i)} \to 0$ và $k_z^{(i)} \to 0$. Như vậy, có thể đặt lo xo vào hệ so sánh không liên kết mà không làm thay đổi chuyển động của hệ so sánh.

Bây giờ lượng ràng buộc cho kết cấu dàn bao gồm n thanh và có r nút của hệ so sánh không liên kết theo (1.31) được viết như sau:

$$Z_0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(N_k - 0)^2 l_k^{(0)}}{E_k A_k} + \sum_{i=1}^{r} k_x^{(i)}.(u_i - u_{0i})^2 + \sum_{i=1}^{r} k_y^{(i)}.(v_i - v_{0i})^2 + \sum_{i=1}^{r} k_z^{(i)}.(w_i - w_{0i})^2 \to \min \quad (2.60a)$$

hay:
$$Z_0 = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{N_k{}^2 l_k^{(0)}}{E_k A_k} + Z_k \right) \to \min \quad (2.60b)$$

trong đó:
$$Z_k = \sum_{i=1}^{r} k_x^{(i)}.(u_i - u_{0i})^2 + \sum_{i=1}^{r} k_y^{(i)}.(v_i - v_{0i})^2 + \sum_{i=1}^{r} k_z^{(i)}.(w_i - w_{0i})^2 \quad (2.61)$$

Thay biểu thức (2.59) vào biểu thức (2.61), ta có:

$$Z_k = \sum_{i=1}^{r} \lim_{u_{0i}\to\infty} \frac{P_x^{(i)}}{u_{0i}}.\left(u_i - u_{0i}\right)^2 + \sum_{i=1}^{r} \lim_{v_{0i}\to\infty} \frac{P_y^{(i)}}{v_{0i}}.\left(v_i - v_{0i}\right)^2 + \sum_{i=1}^{r} \lim_{w_{0i}\to\infty} \frac{P_z^{(i)}}{w_{0i}}.\left(w_i - w_{0i}\right)^2 \quad (2.62a)$$

Giới hạn của (2.62a) là:

$$Z_k = -\sum_{i=1}^{r} 2P_x^{(i)}.u_i - \sum_{i=1}^{r} 2P_y^{(i)}.v_i - \sum_{i=1}^{r} 2P_z^{(i)}.w_i + \sum_{i=1}^{r} (P_x^{(i)}.u_{0i} + P_y^{(i)}.v_{0i} + P_z^{(i)}.w_{0i}) \quad (2.62b)$$

Thay biểu thức (2.62b) vào biểu thức (2.60b), ta được:

$$Z_0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{N_k{}^2 l_k^{(0)}}{E_k A_k} - \sum_{i=1}^{r} 2P_x^{(i)}.u_i - \sum_{i=1}^{r} 2P_y^{(i)}.v_i - \sum_{i=1}^{r} 2P_z^{(i)}.w_i + \sum_{i=1}^{r} (P_x^{(i)}.u_{0i} + P_y^{(i)}.v_{0i} + P_z^{(i)}.w_{0i}) \to \min \quad (2.63)$$

Trong biểu thức (2.63) $\sum_{i=1}^{r}\left(P_x^{(i)}.u_{0i} + P_y^{(i)}.v_{0i} + P_z^{(i)}.w_{0i}\right)$ là một số nên biểu thức (2.63) tương đương với:

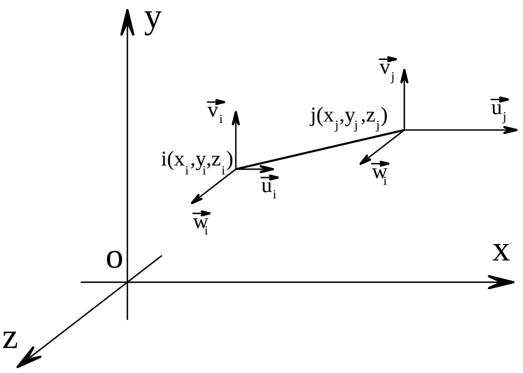
$$Z = \sum_{k=1}^{n} \frac{N_k{}^2 l_k^{(0)}}{E_k A_k} - \sum_{i=1}^{r} 2P_x^{(i)}.u_i - \sum_{i=1}^{r} 2P_y^{(i)}.v_i - \sum_{i=1}^{r} 2P_z^{(i)}.w_i \to \min \quad (2.64a)$$

hoặc viết dưới dạng:

$$Z = \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k A_k (\Delta l_k)^2}{l_k^{(0)}} - \sum_{i=1}^{r} 2P_x^{(i)}.u_i - \sum_{i=1}^{r} 2P_y^{(i)}.v_i - \sum_{i=1}^{r} 2P_z^{(i)}.w_i \to \min \quad (2.64b)$$

trong đó: $P_x^{(i)}, P_y^{(i)}, P_z^{(i)}$ là các thành phần tải trọng tác dụng tại nút i theo phương trục x, phương trục y và phương trục z; u_i, v_i, w_i là các thành phần chuyển vị tại nút i theo phương trục x, phương trục y và phương trục z.

Xét thanh ij trong dàn không gian. Gọi tọa độ ban đầu của các nút lần lượt là $i\left(x_i, y_i, z_i\right)$, $j\left(x_j, y_j, z_j\right)$. Sau khi dàn chịu lực, nút i có chuyển vị: $\overrightarrow{ii'} = \overrightarrow{u_i} + \overrightarrow{v_i} + \overrightarrow{w_i}$; nút j có chuyển vị: $\overrightarrow{jj'} = \overrightarrow{u_j} + \overrightarrow{v_j} + \overrightarrow{w_j}$ (hình 2.5)



Hình 2.5 Sơ đồ chuyển vị của nút thanh trong hệ không gian

Đặt: $$l_{ij} = \frac{x_j - x_i}{\sqrt{\left(x_j - x_i\right)^2 + \left(y_j - y_i\right)^2 + \left(z_j - z_i\right)^2}}; \quad (2.65a)$$

$$m_{ij} = \frac{y_j - y_i}{\sqrt{\left(x_j - x_i\right)^2 + \left(y_j - y_i\right)^2 + \left(z_j - z_i\right)^2}}; \quad (2.65b)$$

$$n_{ij} = \frac{z_j - z_i}{\sqrt{\left(x_j - x_i\right)^2 + \left(y_j - y_i\right)^2 + \left(z_j - z_i\right)^2}}. \quad (2.65c)$$

(l_{ij}, m_{ij}, n_{ij}) gọi là côsin chỉ phương của thanh ij

Chiều dài của thanh dàn trước khi biến dạng:

$$l_{ij}^{(0)} = \sqrt{\left(x_j - x_i\right)^2 + \left(y_j - y_i\right)^2 + \left(z_j - z_i\right)^2} \quad (2.66)$$

Biến dạng dài tuyệt đối của thanh dàn:

$$\Delta l_{ij} = (l_{ij}.u_j + m_{ij}.v_j + n_{ij}.w_j) - (l_{ij}.u_i + m_{ij}.v_i + n_{ij}.w_i) \quad (2.67)$$

Như vậy nếu hệ dàn bao gồm n thanh và r nút chịu tải trọng tác dụng thì lượng ràng buộc của bài toán theo (2.64b) được viết như sau:

$$Z = \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k A_k . \left(\Delta l_k\right)^2}{l_k^{(0)}} - \sum_{i=1}^{r} 2P_x^{(i)}.u_i - \sum_{i=1}^{r} 2P_y^{(i)}.v_i - \sum_{i=1}^{r} 2P_z^{(i)}.w_i \rightarrow \min \quad (2.68a)$$

hay

$$Z = \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k A_k}{\sqrt{\left(x_i - x_j\right)^2 + \left(y_i - y_j\right)^2 + \left(z_i - z_j\right)^2}} \left((l_{ij}.u_j + m_{ij}.v_j + n_{ij}.w_j) - (l_{ij}.u_i + m_{ij}.v_i + n_{ij}.w_i)\right)^2 +$$

$$- \sum_{i=1}^{r} 2P_x^{(i)}.u_i - \sum_{i=1}^{r} 2P_y^{(i)}.v_i - \sum_{i=1}^{r} 2P_z^{(i)}.w_i \rightarrow \min \quad (2.68b)$$

Xét tại nút i của dàn có m thanh quy tụ, điều kiện cực trị của bài toán tại nút dàn i : $\frac{\partial Z}{\partial u_i} = 0; \frac{\partial Z}{\partial v_i} = 0; \frac{\partial Z}{\partial w_i} = 0;$ (2.69a) hay: $$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} \dfrac{2E_{ij}A_{ij}(-l_{ij})\left((l_{ij}.u_j + m_{ij}.v_j + n_{ij}.w_j) - (l_{ij}.u_i + m_{ij}.v_i + n_{ij}.w_i)\right)}{\sqrt{\left(x_i - x_j\right)^2 + \left(y_i - y_j\right)^2 + \left(z_i - z_j\right)^2}} - 2P_x^{(i)} = 0 \\ \sum_{j=1}^{m} \dfrac{2E_{ij}A_{ij}(-m_{ij})\left((l_{ij}.u_j + m_{ij}.v_j + n_{ij}.w_j) - (l_{ij}.u_i + m_{ij}.v_i + n_{ij}.w_i)\right)}{\sqrt{\left(x_i - x_j\right)^2 + \left(y_i - y_j\right)^2 + \left(z_i - z_j\right)^2}} - 2P_y^{(i)} = 0 \\ \sum_{j=1}^{m} \dfrac{2E_{ij}A_{ij}(-n_{ij})\left((l_{ij}.u_j + m_{ij}.v_j + n_{ij}.w_j) - (l_{ij}.u_i + m_{ij}.v_i + n_{ij}.w_i)\right)}{\sqrt{\left(x_i - x_j\right)^2 + \left(y_i - y_j\right)^2 + \left(z_i - z_j\right)^2}} - 2P_z^{(i)} = 0 \end{cases} \quad (2.69b)$$

Các phương trình (2.69b) chính là các phương trình cân bằng tại các nút có chuyển vị và có thể viết dưới dạng rút gọn lại như sau:

$$\sum_{j=1}^{m} N_{ij}.l_{ij} + P_x^{(i)} = 0;\ \sum_{j=1}^{m} N_{ij}.m_{ij} + P_y^{(i)} = 0;\ \sum_{j=1}^{m} N_{ij}.n_{ij} + P_z^{(i)} = 0 \quad (2.69c)$$

Nếu bài toán có C liên kết nối đất và S_n nút dàn thì theo (2.69) sẽ có được hệ phương trình bao gồm $\left(3S_n - C\right)$ phương trình tuyến tính và có $\left(3S_n - C\right)$ ẩn số là các thành phần chuyển vị u, v, w. Giải hệ phương trình (2.25) sẽ tìm được các thành phần chuyển vị u, v, w tại các nút của dàn.

Sau khi tìm được các thành phần chuyển vị tại các nút dàn thay vào phương trình (2.67) sẽ tính được biến dạng dài tuyệt của các thanh dàn.

Nội lực của các thanh dàn được tính theo công thức sau:

$$N_{ij} = \frac{\Delta l_{ij}.E_{ij}A_{ij}}{l_{ij}^{(0)}} = \frac{E_{ij}A_{ij}.\left((l_{ij}.u_j + m_{ij}.v_j + n_{ij}.w_j) - (l_{ij}.u_i + m_{ij}.v_i + n_{ij}.w_i)\right)}{\sqrt{\left(x_i - x_j\right)^2 + \left(y_i - y_j\right)^2}} \quad (2.70)$$

Xét dàn gồm n thanh, r nút chịu tải trọng tác dụng và gọi N_i là nội lực trong thanh dàn thứ i. Lượng ràng buộc của dàn theo (2.64a) được viết như sau:

$$Z = \sum_{k=1}^{n} \frac{N_k{}^2 l_k^{(0)}}{E_k A_k} - \sum_{i=1}^{r} 2P_x^{(i)}.u_i - \sum_{i=1}^{r} 2P_y^{(i)}.v_i - \sum_{i=1}^{r} 2P_z^{(i)}.w_i \to \min \quad (2.71)$$

Nếu chỉ thỏa mãn (2.71) thì dàn chưa đảm bảo điều kiện liên tục về mặt chuyển vị tại các nút dàn. Vì vậy cần phải bổ sung điều kiện liên tục là các thanh đồng quy tại nút thì chuyển vị tại nút đó của các thanh phải bằng nhau. Các phương trình bổ sung để dàn thỏa mãn điều kiện liên tục về chuyển vị được viết như sau: $g_i = \frac{N_i\, l_i^{(0)}}{E_i A_i} - \Delta l_i = 0 \quad (i = 1 \div n)$ (2.72)

trong đó: Δl_i là biến dạng dài tuyệt đối của thanh dàn được xác định theo (2.67).

Như vậy bài toán phân tích, tính toán dàn trở thành bài toán tìm cực trị của phiếm hàm (2.71) với các ràng buộc (2.72). Bài toán này có thể giải bằng phương pháp thừa số Largrange với phiếm hàm mở rộng L như sau:

$$L = Z + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i \to \min \quad (2.73)$$

trong đó: λ_i là thừa số Largrange và cũng là ẩn số của bài toán.

Điều kiện cực trị của (2.28) là:

$$\frac{\partial L}{\partial N_i} = 0\,;\ \frac{\partial L}{\partial u_j} = 0\,;\ \frac{\partial L}{\partial v_j} = 0\,;\ \frac{\partial L}{\partial w_j} = 0\,;\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \ \begin{cases} i = 1 \div n \\ j = 1 \div (3S_n - C) \end{cases} \quad (2.74)$$

Giải hệ phương trình tuyến tính (2.74) sẽ tìm được các thành phần chuyển vị tại các nút dàn và nội lực trong các thanh.

2.6.2 Áp dụng phương pháp cực trị Gauss kết hợp phương pháp quy hoạch toán học để xác định lực tới hạn trong bài toán ổn định cục bộ kết cấu dàn

Xét kết cấu dàn gồm n thanh và m nút, gọi lực tác dụng lên nút r theo các phương là P_{xr}, P_{yr}, P_{zr}. Trước khi mất ổn định thì nội lực trong các thanh dàn phải thỏa mãn điều kiện (2.73):

$$F = \sum_{k=1}^{n} \frac{(N_k)^2 l_k^{(0)}}{E_k F_k} - \sum_{r=1}^{m} 2P_{xr}.u_r - \sum_{r=1}^{m} 2P_{yr}.v_r - \sum_{r=1}^{m} 2P_{zr}.w_r + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.\left(\frac{N_k.l_k^{(0)}}{E_k F_k} - \Delta l_k \right) \to \min \quad (2.75)$$

Kết cấu dàn ổn định cục bộ khi nội lực trong các thanh dàn không vượt quá tải trọng tới hạn thứ nhất của thanh dàn đó tính theo Euler cho thanh hai đầu khớp. Từ đó tác giả đề xuất ra một phương pháp giải bài toán ổn định cục bộ của kết cấu dàn phi tuyến hình học là: Tải trọng tới hạn tác dụng lên kết cấu dàn là tải trọng lớn nhất có thể tác dụng lên kết cấu mà nội lực trong các thanh thỏa mãn hai điều kiện:

- Phiếm hàm lượng ràng buộc mở rộng F của kết cấu dàn tính theo công thức (2.75) đạt cực trị.

- Nội lực trong tất cả các thanh trong dàn không vượt quá tải trọng tới hạn thứ nhất của thanh dàn đó tính theo Euler cho thanh hai đầu khớp.

Sau đây tác giả xin được trình bày chi tiết phương pháp xác định tải trọng tới hạn lên kết cấu dàn như sau:

Theo công thức (2.75) có thể viết lại như sau:

$$\frac{\partial F}{\partial u_j}=\frac{\partial}{\partial u_j}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(N_k)^2 l_k^{(0)}}{E_kF_k}-\sum_{r=1}^{m}2P_{xr}.u_r-\sum_{r=1}^{m}2P_{yr}.v_r-\sum_{r=1}^{m}2P_{zr}.w_r+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k.\left(\frac{N_k.l_k^{(0)}}{E_kF_k}-\Delta l_k\right)\right)=0 \quad (j=1\div m) \tag{2.76a}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_j}=\frac{\partial}{\partial v_j}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(N_k)^2 l_k^{(0)}}{E_kF_k}-\sum_{r=1}^{m}2P_{xr}.u_r-\sum_{r=1}^{m}2P_{yr}.v_r-\sum_{r=1}^{m}2P_{zr}.w_r+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k.\left(\frac{N_k.l_k^{(0)}}{E_kF_k}-\Delta l_k\right)\right)=0 \quad (j=1\div m) \tag{2.76b}$$

$$\frac{\partial F}{\partial w_j}=\frac{\partial}{\partial w_j}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(N_k)^2 l_k^{(0)}}{E_kF_k}-\sum_{r=1}^{m}2P_{xr}.u_r-\sum_{r=1}^{m}2P_{yr}.v_r-\sum_{r=1}^{m}2P_{zr}.w_r+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k.\left(\frac{N_k.l_k^{(0)}}{E_kF_k}-\Delta l_k\right)\right)=0 \quad (j=1\div m) \tag{2.76c}$$

$$\frac{\partial F}{\partial N_i}=\frac{\partial}{\partial N_i}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(N_k)^2 l_k^{(0)}}{E_kF_k}-\sum_{r=1}^{m}2P_{xr}.u_r-\sum_{r=1}^{m}2P_{yr}.v_r-\sum_{r=1}^{m}2P_{zr}.w_r+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k.\left(\frac{N_k.l_k^{(0)}}{E_kF_k}-\Delta l_k\right)\right)=0 \quad (i=1\div n) \tag{2.76d}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_i}=\frac{\partial}{\partial \lambda_i}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(N_k)^2 l_k^{(0)}}{E_kF_k}-\sum_{r=1}^{m}2P_{xr}.u_r-\sum_{r=1}^{m}2P_{yr}.v_r-\sum_{r=1}^{m}2P_{zr}.w_r+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k.\left(\frac{N_k.l_k^{(0)}}{E_kF_k}-\Delta l_k\right)\right)=0 \quad (i=1\div n) \tag{2.76e}$$

Trong đó: $l_k^{(0)}$, Δl_k là chiều dài trước khi biến dạng và độ biến dạng dài tuyệt đối của thanh. Nếu gọi i, j là 2 nút tại hai đầu thanh k, thì $l_k^{(0)}$ và Δl_k được tính bằng công thức sau:

$$l_k^{(0)}=\sqrt{\left(x_j-x_i\right)^2+\left(y_j-y_i\right)^2+\left(z_j-z_i\right)^2} \tag{2.77}$$

$$\Delta l_k=\Big(\left(x_j-x_i\right)\left(u_j-u_i\right)+\left(y_j-y_i\right)\left(v_j-v_i\right)+\left(z_j-z_i\right)\left(w_j-w_i\right)\Big)/\,l_k^{(0)} \tag{2.78}$$

Trong công thức (2.76), (2.77), (2.78): (x_i, y_i, z_i), (x_j, y_j, z_j) lần lượt là tọa độ của nút i, j trước khi dàn biến dạng; (u_i, v_i, w_i), (u_j, v_j, w_j): lần lượt là các thành phần chuyển vị của nút i, j khi dàn biến dạng.

Điều kiện để kết cấu dàn thỏa mãn điều kiện ổn định cục bộ là nội lực trong các thanh không được vượt quá tải trọng tới hạn đầu tiên của từng thanh và có thể được viết như sau:

$$N_k \ge -9{,}8698E^k I_{min}^k / (l_k^{(0)})^2 \qquad k = 1 \div n \tag{2.79a}$$

hay: $$-N_k - 9{,}8698E^k I_{min}^k / (l_k^{(0)})^2 \le 0 \qquad k = 1 \div n \tag{2.79b}$$

Tải trọng tác dụng tới hạn là tải trọng tác dụng lớn nhất lên kết cấu dàn mà nội lực trong các thanh vẫn đảm bảo điều kiện cân bằng (2.76) và điều kiện ổn định cục bộ (2.79).

Như vậy, từ bài tính toán ổn định của kết cấu dàn đưa về bài toán quy hoạch toán học phi tuyến thuần túy như sau:

Hàm mục tiêu: $f = P \to \max$ nhưng để thuận tiện cho việc giải luận văn viết hàm mục tiêu dưới dạng: $f = -P \to \min$ (2.80)

Điều kiện ràng buộc: là các đẳng thức từ điều kiện (2.76) và các bất đẳng thức từ điều kiện (2.79):

$$ceq_{(i)} = \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(N_k)^2 l_k^{(0)}}{E_k F_k} - \sum_{r=1}^{m}2P_{xr}.u_r - \sum_{r=1}^{m}2P_{yr}.v_r - \sum_{r=1}^{m}2P_{zr}.w_r + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k.\left(\frac{N_k.l_k^{(0)}}{E_k F_k} - \Delta l_k\right)\right) = 0 \quad (i = 1 \div m) \tag{2.81a}$$

$$ceq_{(i+m)} = \frac{\partial}{\partial v_i}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(N_k)^2 l_k^{(0)}}{E_k F_k} - \sum_{r=1}^{m}2P_{xr}.u_r - \sum_{r=1}^{m}2P_{yr}.v_r - \sum_{r=1}^{m}2P_{zr}.w_r + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k.\left(\frac{N_k.l_k^{(0)}}{E_k F_k} - \Delta l_k\right)\right) = 0 \quad (i = 1 \div m) \tag{2.81b}$$

$$ceq_{(2m+i)} = \frac{\partial}{\partial w_i}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(N_k)^2 l_k^{(0)}}{E_k F_k} - \sum_{r=1}^{m}2P_{xr}.u_r - \sum_{r=1}^{m}2P_{yr}.v_r - \sum_{r=1}^{m}2P_{zr}.w_r + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k.\left(\frac{N_k.l_k^{(0)}}{E_k F_k} - \Delta l_k\right)\right) = 0 \quad (i = 1 \div m) \tag{2.81c}$$

$$ceq_{(3m+i)} = \frac{\partial}{\partial N_i}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(N_k)^2 l_k^{(0)}}{E_k F_k} - \sum_{r=1}^{m}2P_{xr}.u_r - \sum_{r=1}^{m}2P_{yr}.v_r - \sum_{r=1}^{m}2P_{zr}.w_r + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k.\left(\frac{N_k.l_k^{(0)}}{E_k F_k} - \Delta l_k\right)\right) = 0 \quad (i = 1 \div n) \tag{2.81d}$$

$$ceq_{(3m+n+i)} = \frac{\partial}{\partial \lambda_i}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(N_k)^2 l_k^{(0)}}{E_k F_k} - \sum_{r=1}^{m}2P_{xr}.u_r - \sum_{r=1}^{m}2P_{yr}.v_r - \sum_{r=1}^{m}2P_{zr}.w_r + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k.\left(\frac{N_k.l_k^{(0)}}{E_k F_k} - \Delta l_k\right)\right) = 0 \quad (i = 1 \div n) \tag{2.81e}$$

$$c_{(k)} = -N_k - 9{,}8698E^k I^k_{min} / (l^{(0)}_k)^2 \le 0 \qquad k = 1 \div n \qquad (2.81f)$$

Để giải bài toán quy hoạch toán học với hàm mục tiêu (2.80) và các ràng buộc (2.81), trong đề tài này tác giả sử dụng hàm fmincon trong Optimization toolbox của Matlab 7.0 để giải và có thể tóm tắt phương pháp giải qua các bước sau:

Bước 1: Xây dựng file điều kiện ràng buộc unconfuneq.m là file chứa các phương trình cân bằng $ceq_{(i)} = 0 \quad i = 1 \div (3m + 2n)$ và các bất phương trình dạng $c_{(k)} \le 0 \quad k = 1 \div n$.

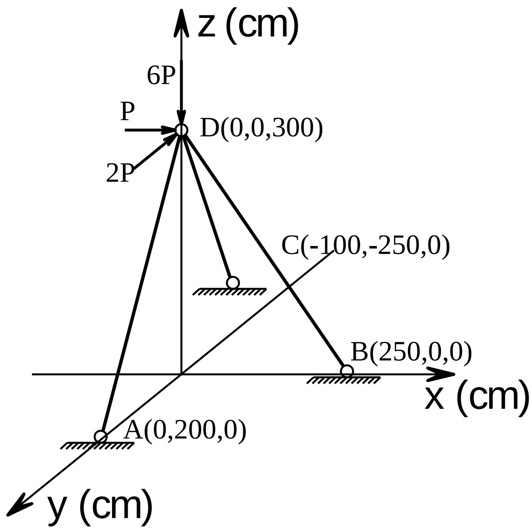
Bước 2: Xây dựng file hàm mục tiêu objfun.m là file chứa hàm mục tiêu: $f = -P$

Bước 3: Giải để tìm tải trọng tới hạn tác dụng lên kết cấu dàn. Giá trị nội lực của các thanh và các thành phần chuyển vị của các nút dàn tại thời điểm tải trọng tác dụng đạt đến tải trọng tới hạn bằng hàm fmincon: [x,fval,exitflag] = fmincon(@objfun,x0,[],[],[],[],[],[],@confuneq,options). Ngoài ra, ta có thể kiểm tra điều kiện các ràng buộc (đẳng thức, bất đẳng thức) khi giá trị tải trọng đạt đến tải trọng tới hạn như sau: [c,ceq] = confuneq(x). Chú ý vì đây là bài toán quy hoạch mà các ràng buộc là phi tuyến nên khi giải bằng hàm fmincon thì ta phải tắt thuật toán LargeScale và cần chọn nghiệm x0 càng gần kết quả tính thì lời giải hội tụ càng nhanh.

CHƯƠNG 3
MỘT SỐ VÍ DỤ PHÂN TÍCH TUYẾN TÍNH ỔN ĐỊNH KẾT CẤU DÀN

3.1 Ví dụ phân tích 1

Ví dụ 3.1: Xác định tải trọng tới hạn lên kết cấu dàn chịu lực như hình 3.1. Biết mặt cắt ngang của các thanh AD, BD và CD là hình vành khuyên có đường kính ngoài D=5cm, đường kính trong d=4cm và mô đun đàn hồi của vật liệu $E=20000(kN/cm^2)$.



Hình 3.1 Ví dụ 3.1

Lời giải

Bài toán có 3 ẩn số là các thành phần chuyển vị tại nút D $\{\delta\}=\{u_D;v_D;w_D\}$ và 3 ẩn số là nội lực trong các thanh $\{N\}=\{N_{AD};N_{BD};N_{CD}\}$. Lượng ràng buộc mở rộng (2.59) của bài toán theo phương pháp lực được viết như sau:

$$L=\sum_{k=1}^{3}\frac{(N_k)^2 l_k^{(0)}}{E_kA_k}-2P.u_D+4P.v_D+12P.w_D+\sum_{k=1}^{3}\lambda_k.\left(\frac{N_k.\left(l_k^{(0)}\right)}{E_kA_k}-\Delta l_k\right)\rightarrow \min \qquad (3.1)$$

Từ bài toán tính toán ổn định cục bộ kết cấu dàn, ta được đưa về bài toán quy hoạch toán học như sau:

- Hàm mục tiêu: $\min(f) = \min(-P)$ (3.2)

- Các điều kiện ràng buộc bao gồm:

+ 9 ràng buộc là các đẳng thức

$$\frac{\partial L}{\partial N_i} = \frac{\partial}{\partial N_i}\left(\sum_{k=1}^{3}\frac{\left(N_k\right)^2 l_k^{(0)}}{E_k A_k} - 2P.u_D + 4P.v_D + 12P.w_D + \sum_{k=1}^{3}\lambda_k.\left(\frac{N_k.\left(l_k^{(0)}\right)}{E_k A_k} - \Delta l_k\right)\right) = 0 \quad \left(i = 1 \div 3\right) \tag{3.3a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial cv_i} = \frac{\partial}{\partial cv_i}\left(\sum_{k=1}^{3}\frac{\left(N_k\right)^2 l_k^{(0)}}{E_k A_k} - 2P.u_D + 4P.v_D + 12P.w_D + \sum_{k=1}^{3}\lambda_k.\left(\frac{N_k.\left(l_k^{(0)}\right)}{E_k A_k} - \Delta l_k\right)\right) = 0 \quad \left(i = 1 \div 3\right) \tag{3.3b}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial}{\partial \lambda_i}\left(\sum_{k=1}^{3}\frac{\left(N_k\right)^2 l_k^{(0)}}{E_k A_k} - 2P.u_D + 4P.v_D + 12P.w_D + \sum_{k=1}^{3}\lambda_k.\left(\frac{N_k.\left(l_k^{(0)}\right)}{E_k A_k} - \Delta l_k\right)\right) = 0 \quad \left(i = 1 \div 3\right) \tag{3.3c}$$

+ 3 ràng buộc là các bất đẳng thức

$$N_k \geq -\frac{9,8698.E_k I_k}{\left(l_k^{(0)}\right)^2} \qquad (k = 1 \div 3)$$

$$\text{hay: } c_{(k)} = -N_k - \frac{9,8698.E_k I_k}{\left(l_k^{(0)}\right)^2} \leq 0 \qquad \left(k = 1 \div 3\right) \tag{3.4}$$

Trong các công thức trên Δl_k được tính theo (2.62). Để giải bài toán quy hoạch toán học với hàm mục tiêu (3.2) và các hàm ràng buộc (3.3), (3.4) đề tài sử dụng hàm fmincon có sẵn trong phần mềm matlab như đã trình bày ở chương 2 để tính toán.

Kết quả tải trọng tới hạn tác dụng lên kết cấu dàn: $P_{th} = 5,5632(kN)$. Khi tải trọng đạt đến tải trọng tới hạn thì thanh CD mất ổn định và nội lực trong các thanh lúc đó là: $N_{AD} = -4,5416(kN)$, $N_{BD} = -17,2161(kN)$, $N_{CD} = -22,0030(kN)$.

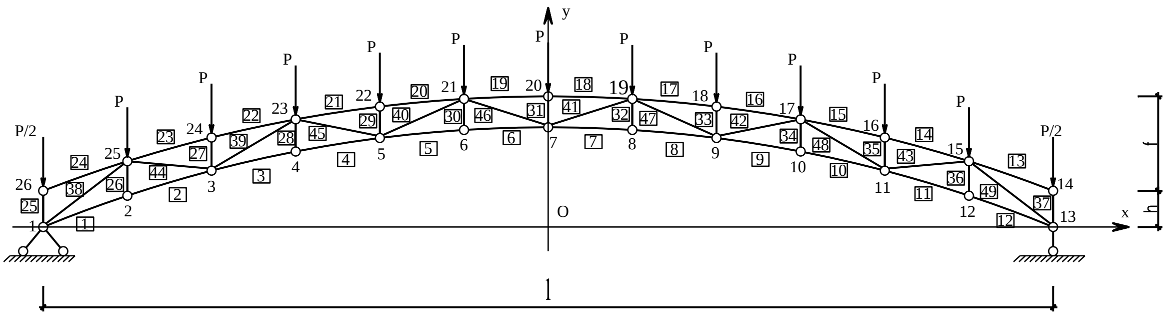
3.2 Ví dụ phân tích 2

Ví dụ 3.2: Xác định tải trọng tới hạn tác dụng lên kết cấu dàn vòm phẳng tĩnh định chịu tải trọng như hình 3.2, biết các thanh có tiết diện hình vành khuyên: D=20cm, d=18cm; $E=2.10^4(kN/cm^2)$; l=4800(cm), h=80(cm) và $k = f / l = 1/3$.

Xây dựng tọa độ của các nút dàn

Dàn vòm có nhịp dàn l, độ thoải của dàn k=f/l và chiều cao của dàn là h (xem hình 3.2 và hình 3.3). Bán kính cong của dàn tính theo công thức:

$$r = \frac{l \times \left(1 + 4k^2\right)}{8k} \tag{3.5}$$



Hình 3.2 Dàn vòm tĩnh định chịu tải trọng thẳng đứng tại các nút dàn

Tọa độ của các nút thuộc cánh dưới là:

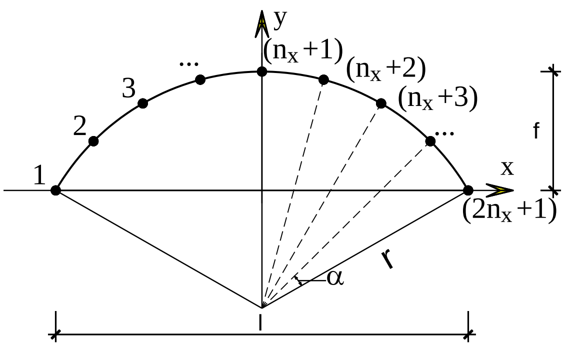
$$\begin{cases} x(i) = r.\sin((i-7).\alpha) \\ y(i) = r\left(\cos((i-7).\alpha) - \cos(6\alpha)\right) \end{cases} \quad \left(i = 1 \div 13\right) \tag{3.6}$$

trong đó:

$$\alpha = \frac{1}{n_x} \arctan \frac{l}{2\sqrt{r^2 - l^2/4}}$$

$2n_x$: là số thanh cánh dưới

Tọa độ của các nút thuộc cánh trên là:



Hình 3.3 Vị trí các nút dàn vòm

$$\begin{cases} x(i+13) = r.\sin((8-i).\alpha) \\ y(i+13) = r\left(\cos((8-i).\alpha) - \cos(6\alpha)\right) + h \end{cases} \quad \left(i = 1 \div 13\right) \qquad (3.7)$$

Với số liệu trong ví dụ: l=48(m), k=1/8, h=0,8 (m) và $n_x = 6$ tính được tọa độ các nút dàn và được lập như bảng 3.1.

Bảng 3.1 Tọa độ các nút của dàn vòm trước khi chịu lực

Điểm	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
x_i (m)	-24,0000	-20,2494	-16,3639	-12,3693	-8,2923	-4,1600
y_i (m)	0,0000	1,8077	3,3034	4,4773	5,3213	5,8301
Điểm	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
x_i (m)	0,0000	4,1600	8,2923	12,3693	16,3639	20,2494
y_i (m)	6,0000	5,8301	5,3213	4,4773	3,3034	1,8077
Điểm	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
x_i (m)	24,0000	24,0000	20,2494	16,3639	12,3693	8,2923
y_i (m)	0,0000	0,8000	2,6077	4,1034	5,2773	6,1213
Điểm	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
x_i (m)	4,1600	0,0000	-4,1600	-8,2923	-12,3693	-16,3639
y_i (m)	6,6301	6,8000	6,6301	6,1213	5,2773	4,1034
Điểm	**25**	**26**				
x_i (m)	-20,2494	-24,0000				
y_i (m)	2,6077	0,8000				

Để tránh lập lại, phần sau của đề tài sẽ không trình bày lại cách xác định tọa độ các nút dàn vòm mà chỉ đưa ra các thông số l, k, h và n_x.

Lời giải

Bài toán có 49 ẩn số là nội lực trong các thanh: $N_i \quad i = 1 \div 49$

Điều kiện biên của bài toán là chuyển vị tại nút 1 theo phương x và phương y bằng không, chuyển vị tại nút 13 theo phương y bằng không nên: $u_1 = v_1 = v_{13} = 0$.

Như vậy, tổng số ẩn chuyển vị tại các nút dàn của bài toán là 49 ẩn số:

$$[\delta]=\begin{bmatrix} u_2;u_3;u_4;u_5;u_6;u_7;u_8;u_9;u_{10};u_{11};u_{12};u_{13};u_{14};u_{15};u_{16};u_{17};u_{18};u_{19};u_{20};\\ u_{21};u_{22};u_{23};u_{24};u_{25};u_{26};v_2;v_3;v_4;v_5;v_6;v_7;v_8;v_9;v_{10};v_{11};v_{12};v_{14};v_{15};\\ v_{16};v_{17};v_{18};v_{19};v_{20};v_{21};v_{22};v_{23};v_{24};v_{25};v_{26} \end{bmatrix}$$

Để xác định được tải trọng tới hạn, trước tiên xác định phiếm hàm lượng ràng buộc mở rộng (2.59) của bài toán theo phương pháp lực và được viết như sau:

$$L=\sum_{k=1}^{49}\frac{(N_k)^2 l_k^{(0)}}{E_kA_k}-\sum_{r=15}^{25}2P.v_r-P(v_{14}+v_{26})+\sum_{k=1}^{49}\lambda_k.\left(\frac{N_k.\left(l_k^{(0)}\right)}{E_kA_k}-\Delta l_k\right)\to \min \quad (3.8)$$

Theo nội dung lý thuyết chương 2, bài toán tính toán ổn định cục bộ kết cấu dàn vòm phẳng tĩnh định được đưa về bài toán quy hoạch toán học như sau:

- Hàm mục tiêu: $\min(f)=\min(-P)$ (3.9)

- Các điều kiện ràng buộc bao gồm:

+ 147 ràng buộc là các đẳng thức

$$\frac{\partial L}{\partial N_i}=\frac{\partial}{\partial N_i}\left(\sum_{k=1}^{49}\frac{(N_k)^2.l_k^{(0)}}{E_kA_k}-\sum_{r=14}^{26}2P_{yr}.v_r+\sum_{k=1}^{49}\lambda_k.\left(\frac{N_k.\left(l_k^{(0)}\right)}{E_kA_k}-\Delta l_k\right)\right)=0 \quad (i=1\div 49) \quad (3.10a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \delta_i}=\frac{\partial}{\partial \delta_i}\left(\sum_{k=1}^{49}\frac{(N_k)^2.l_k^{(0)}}{E_kA_k}-\sum_{r=14}^{26}2P_{yr}.v_r+\sum_{k=1}^{49}\lambda_k.\left(\frac{N_k.\left(l_k^{(0)}\right)}{E_kA_k}-\Delta l_k\right)\right)=0 \quad (i=1\div 49) \quad (3.10b)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}=\frac{\partial}{\partial \lambda_i}\left(\sum_{k=1}^{49}\frac{(N_k)^2.l_k^{(0)}}{E_kA_k}-\sum_{r=14}^{26}2P_{yr}.v_r+\sum_{k=1}^{49}\lambda_k.\left(\frac{N_k.\left(l_k^{(0)}\right)}{E_kA_k}-\Delta l_k\right)\right)=0 \quad (i=1\div 49) \quad (3.10c)$$

+ 49 ràng buộc là các bất đẳng thức

$$N_k\geq-\frac{9,8698.E_kI_k}{\left(l_k^{(0)}\right)^2} \quad (k=1\div 49)$$

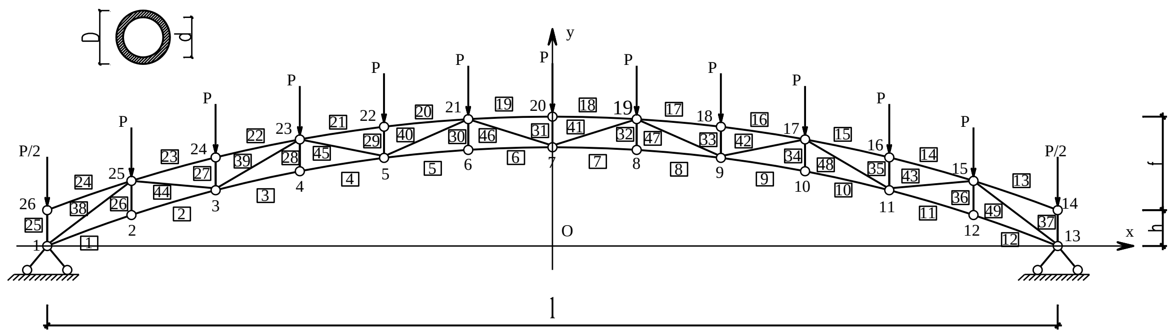
hay: $$c_{(k)}=-N_k-\frac{9,8698.E_kI_k}{\left(l_k^{(0)}\right)^2}\leq 0 \quad (k=1\div 49) \quad (3.11)$$

Để giải bài toán quy hoạch toán học với hàm mục tiêu (3.9) và các hàm ràng buộc (3.10), (3.11) tác giả sử dụng hàm fmincon có sẵn trong phần mềm Matlab như đã trình bày ở chương 2 để tính toán.

Kết quả phân tích tải trọng tới hạn tác dụng lên kết cấu dàn vòm phẳng tĩnh định là: $P_{th} = 26{,}1826(kN)$. Khi tải trọng đạt đến tải trọng tới hạn là thời điểm nội lực các thanh 18 và thanh 19 đạt đến tải trọng tới hạn của các thanh này. Ngoài ra, khi tải trọng tác dụng đạt đến tải trọng tới hạn thì các phương trình cân bằng (3.10) và các bất đẳng thức (3.11) đều thỏa mãn.

3.3 Ví dụ phân tích 3

Ví dụ 3.3: Xác định tải trọng tới hạn tác dụng lên kết cấu dàn vòm phẳng tĩnh định trong, siêu tĩnh ngoài chịu tải trọng như hình 3.3, biết các thanh có tiết diện hình vành khuyên: D=20cm, d=18cm; E=2.10^4(kN/cm^2); l=4800(cm), h=80(cm) và $k = f/l = 1/3$.



Hình 3.4 Dàn vòm phẳng tĩnh định trong, siêu tĩnh ngoài

Lời giải

Bài toán có 49 ẩn số là nội lực trong các thanh dàn: $N_i \quad (i = 1 \div 49)$

Điều kiện biên của bài toán là chuyển vị tại nút 1 và nút 13 theo các phương x và phương y bằng không nên: $u_1 = v_1 = u_{13} = v_{13} = 0$.

Như vậy, bài toán ngoài 49 ẩn số là nội lực còn có 48 ẩn số là chuyển vị tại của các nút dàn:

$$[\delta]=\begin{bmatrix} u_2;u_3;u_4;u_5;u_6;u_7;u_8;u_9;u_{10};u_{11};u_{12};u_{14};u_{15};u_{16};u_{17};u_{18};u_{19};u_{20};u_{21}; \\ u_{22};u_{23};u_{24};u_{25};u_{26};v_2;v_3;v_4;v_5;v_6;v_7;v_8;v_9;v_{10};v_{11};v_{12};v_{14};v_{15};v_{16}; \\ v_{17};v_{18};v_{19};v_{20};v_{21};v_{22};v_{23};v_{24};v_{25};v_{26} \end{bmatrix}$$

Phiếm hàm lượng ràng buộc mở rộng (2.59) của của bài toán có thể được viết như sau:

$$L=\sum_{k=1}^{49}\frac{(N_k)^2 l_k^{(0)}}{E_kA_k}-\sum_{r=15}^{25}2P.v_r-P(v_{14}+v_{26})+\sum_{k=1}^{49}\lambda_k.\left(\frac{N_k.\left(l_k^{(0)}\right)}{E_kA_k}-\Delta l_k\right)\rightarrow \min \qquad (3.12)$$

Theo chương 2, bài toán tính toán ổn định kết cấu dàn vòm phẳng tĩnh định trong, siêu tĩnh ngoài được đưa về bài toán quy hoạch toán học như sau:

- Hàm mục tiêu: $\min(f)=\min(-P)$ (2.13)

- Các điều kiện ràng buộc bao gồm:

+ 146 ràng buộc là các đẳng thức

$$ceq_{(i)}=\frac{\partial L}{\partial N_i}=\frac{\partial}{\partial N_i}\left(\sum_{k=1}^{49}\frac{(N_k)^2.l_k^{(0)}}{E_kA_k}-\sum_{r=14}^{26}2P_{yr}.v_r+\sum_{k=1}^{49}\lambda_k.\left(\frac{N_k.\left(l_k^{(0)}\right)}{E_kA_k}-\Delta l_k\right)\right)=0 \quad (i=1\div 49) \qquad (3.14a)$$

$$ceq_{(i+49)}=\frac{\partial L}{\partial \delta_i}=\frac{\partial}{\partial \delta_i}\left(\sum_{k=1}^{49}\frac{(N_k)^2.l_k^{(0)}}{E_kA_k}-\sum_{r=14}^{26}2P_{yr}.v_r+\sum_{k=1}^{49}\lambda_k.\left(\frac{N_k.\left(l_k^{(0)}\right)}{E_kA_k}-\Delta l_k\right)\right)=0 \quad (i=1\div 48) \qquad (3.14b)$$

$$ceq_{(i+97)}=\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}=\frac{\partial}{\partial \lambda_i}\left(\sum_{k=1}^{49}\frac{(N_k)^2.l_k^{(0)}}{E_kA_k}-\sum_{r=14}^{26}2P_{yr}.v_r+\sum_{k=1}^{49}\lambda_k.\left(\frac{N_k.\left(l_k^{(0)}\right)}{E_kA_k}-\Delta l_k\right)\right)=0 \quad (i=1\div 49) \qquad (3.14c)$$

+ 49 ràng buộc là các bất đẳng thức

$$N_k\geq-\frac{9{,}8698.E_kI_k}{\left(l_k^{(0)}\right)^2} \qquad (k=1\div 49)$$

$$\text{hay: } c_{(k)}=-N_k-\frac{9{,}8698.E_kI_k}{\left(l_k^{(0)}\right)^2}\leq 0 \qquad (k=1\div 49) \qquad (3.15)$$

Để giải bài toán quy hoạch toán học với hàm mục tiêu (3.10) và các hàm ràng buộc (3.14), (3.15) trên, tác giả sử dụng hàm fmincon có sẵn trong phần mềm Matlab như đã trình bày ở chương 2.

Kết quả phân tích tải trọng tới hạn tác dụng lên kết cấu dàn vòm phẳng tĩnh định trong, siêu tĩnh ngoài khi phân tích tuyến tính: $P_{th} = 150,1545(kN)$. Khi tải trọng đạt đến tải trọng tới hạn là thời điểm nội lực các thanh 1 và thanh 12 đạt đến tải trọng tới hạn của các thanh này. Ngoài ra, khi tải trọng tác dụng đạt đến tải trọng tới hạn thì các phương trình cân bằng (3.14) và các bất đẳng thức (3.15) đều thỏa mãn.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Kết luận: Qua các nội dung đã trình bày ở các chương trong đề tài nghiên cứu, có thể rút ra các kết luận sau đây:

1) Đề tài nghiên cứu đã đưa ra một phương pháp giải mới cho bài toán phân tích tuyến tính ổn định cục bộ cho kết cấu dàn chịu tải trọng tĩnh tại các nút dàn, bằng cách đưa bài toán này về bài toán quy hoạch toán học giải thuận tiện hơn nhiều.

2) Do các công nghệ thông tin phát triển, nên hiện nay rất nhiều phần mềm cho phép giải các bài toán quy hoạch với các ràng buộc là đẳng thức hoặc bất đẳng thức với số lượng ràng buộc lớn. Vì vậy, việc giải bài toán tuyến tính ổn định cục bộ kết cấu dàn theo bài toán quy hoạch toán học trở lên đơn giản.

3) Qua các ví dụ phân tích ổn định cục bộ kết cấu dàn vòm cho thấy, kết cấu dàn siêu tĩnh ngoài thường ổn định hơn kết cấu dàn siêu tĩnh trong. Kết cấu dàn siêu tĩnh trong ổn định hơn kết cấu dàn tĩnh định.

4) Luận văn đã kiểm tra nội lực của các thanh tại các ví trí thanh mất ổn định khi giá trị tải trọng đạt đến giá trị tới hạn cho thấy, nội lực của các thanh này đúng bằng giá trị lực tới hạn Euler của thanh. Như vậy, kết quả phân tích phân tích tuyến tính ổn định kết cấu dàn theo phương pháp của đề tài là tin cậy.

Kiến nghị: Có thể sử dụng phương pháp phân tích ổn định cục bộ kết cấu dàn trong đề tài như một phương pháp mới để giảng dạy, học tập và nghiên cứu khi phân tích ổn định cục bộ kết cấu dàn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

[1] Phạm Văn Đạt (2015), *Phân tích kết cấu dàn chịu tải trọng tĩnh theo sơ đồ biến dạng*, Luận văn Tiến sĩ kỹ thuật, Học viện kỹ thuật quân sự.

[2] Đoàn Văn Duẩn (2011), *Nghiên cứu ổn định đàn hồi của kết cấu hệ thanh có xét đến biến dạng trượt,* Luận văn Tiến sĩ kỹ thuật, Đại học Kiến trúc Hà Nội.

[3] Vũ Đình Lai, Nguyễn Xuân Lựu, Bùi Đình Nghi (2002), *Sức bền vật liệu*, Nhà xuất bản Giao thông vận tải.

[4] Nguyễn Thị Thùy Liên (2006), *Phương pháp nguyên lí cực trị Gauss đối với các bài toán động lực học công trình,* Luận văn thạc sĩ kỹ thuật, Đại học Kiến trúc Hà nội.

[5] Nguyễn Văn Liên, Nguyễn Phương Thành, Đinh Trọng Bằng (2003), *Sức bền vật liệu*, Nhà xuất bản xây dựng.

[6] Nguyễn Phương Thành (1996), *Phân tích phi tuyến ổn định của dàn phẳng đàn hồi,* Luận văn thạc sĩ kỹ thuật, Đại học Xây dựng Hà nội.

[7] Lều Thọ Trình, Đỗ Văn Bình (2008), *Ổn định công trình*, Nhà xuất bản Khoa học và kỹ thuật.

Tiếng Anh

[8] R. S. William, M. M. Keith (2009), *Structural Optimization*, Springer Science+Business Media, LLC.

[9] S. P. Timoshenko, D. H. Young (1965), *Theory of Structures*, Macgraw-Hill International Editions

[10] S. P. Timoshenko, M.G. Jame (1961), *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill Book Company, Inc, New York – Toronto – London.

[11] S. R. Singiresu (2009), *Engineering Optimization Theory and Practice*, John Wiley & Sons, Inc.

[12] W. Ch. Peter, K. Anders (2009), *An Introduction to Structural Optimization*, Springer Science + Business Media B.V.

Tiếng Nga

[13] A. P. Ржаницын (1982), *Строительная механика,* Москва «Высшая школа».

[14] Ж.б.бакиров (2004), *Устойчивость механических систем,* Карагандинский государственный технический университет.

[15] A. A. Битюрин (2011), *Лекции по устойчивости стержневых систем*, Оформление. УлГТУ

[16] H.a.алфутов (1978), *Основы расчета на устойчивость упругих систем*, Москва «машиностроение».

[17] A. C. Вольмир (1967), *Устойчивость деформируемых систем*, Издательство «Наука» главная редакция физико атематической литературы.

[18] C. П. Тимошенко (1971), *Устойчивость стержней пластин и оболочек*, издательство «наука» главная редакция физико·математическои литера туры.

Tiếng Trung

[19] 陈骥 (2006), *钢结构稳定理论与设计*, 科学出版社.

[20] 唐家祥, 王仕统,裴若娟(1989), *结构稳定理论*,中国铁道出版社.

[21] 夏志斌 (1989), *结构稳定理论*,高等教育出版社.