BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC DÂN LẬP HẢI PHÒNG

BÙI VĂN HƯNG

PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN ĐỐI VỚI BÀI TOÁN DẦM LIÊN TỤC CHỊU TẢI TRỌNG PHÂN BỐ ĐỀU

Chuyên ngành: **Kỹ thuật Xây dựng Công trình Dân dụng & Công nghiệp**
Mã số: **60.58.02.08**

LUẬN VĂN THẠC SỸ KỸ THUẬT

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS.TS. TRẦN HỮU NGHỊ

Hải Phòng, 2017

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các số liệu, kết quả trong luận văn là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Tác giả luận văn

Bùi Văn Hưng

LỜI CẢM ƠN

Tác giả luận văn xin trân trọng bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất đối với GS.TS. Trần Hữu Nghịđã hướng dẫn và tận tình giúp đỡ và cho nhiều chỉ dẫn khoa học có giá trị cũng như thường xuyên động viên, tạo mọi điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu hoàn thành luận văn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các nhà khoa học, các chuyên gia trong và ngoài trường Đại học Dân lập Hải phòng đã tạo điều kiện giúp đỡ, quan tâm góp ý cho bản luận văn được hoàn thiện hơn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn các cán bộ, giáo viên của Khoa xây dựng, Phòng đào tạo Đại học và Sau đại học- trường Đại học Dân lập Hải phòng, và các đồng nghiệp đã tạo điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tác giả trong quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tác giả luận văn

Bùi Văn Hưng

MỤC LỤC

LỜI CAM ĐOAN i

LỜI CẢM ƠN iii

MỤC LỤC iv

MỞ ĐẦU 1

CHƯƠNG 1.BÀI TOÁN CƠ HỌC KẾT CẤU VÀCÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI 3

1.1. Phép tính biến phân - Các định nghĩa cơ bản và phương trình Euler 3

1.1.1. Các định nghĩa.. 3

1.1.2. Cực trị của phiếm hàm, phương trình Euler. [2,3,12,13]....................... 4

1.1.3. Bài toán cực trị có điều kiện - phương pháp thừa số Lagrange 7

1.1.4. Phương pháp trực tiếp trong bài toán biến phân - phương pháp sai phân hữu hạn [13] 7

1.2. Bài toán cơ học kết cấu 10

1.3. Các phương pháp giải hiện nay... 10

1.3.1. Phương pháp lực 10

1.3.2. Phương pháp chuyển vị.. 11

1.3.3. Phương pháp hỗn hợp và phương pháp liên hợp 11

1.3.4. Phương pháp sai phân hữu hạn 11

1.3.5. Phương pháp hỗn hợp sai phân – biến phân 12

CHƯƠNG 2.PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠNĐỐI VỚI DẦM CHỊU UỐN 13

2.1. PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN 13

2.1.1. Hàm nội suy của phần tử.. 15

2.1.2. Ma trận độ cứng của phần tử.. 17

2.1.3. Ma trận độ cứng tổng thể 18

2.1.4. Xét điều kiện ngoại lực 20
2.1.5. Xác định nội lực 20
CHƯƠNG 3.PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN ĐỐI VỚI DẦM CHỊU UỐN.. 21
3.1. Lý thuyết dầm Euler – Bernoulli.. 21
3.1.1. Dầm chịu uốn thuần túy phẳng 21
3.1.2. Dầm chịu uốn ngang phẳng 24
3.2.Giải bài toán dầm liên tục bằng phương pháp phần tử hữu hạn 31
3.2.1.Tính toán dầm liên tục 31
KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ 58
KẾT LUẬN 58
KIẾN NGHỊ 58
Danh mục tài liệu tham khảo **.. 59**

MỞ ĐẦU

Bài toán cơ học kết cấu hiện nay nói chung được xây dựng theo bốn đường lối đó là: Xây dựng phương trình vi phân cân bằng phân tố; Phương pháp năng lượng; Phương pháp nguyên lý công ảo và Phương pháp sử dụng trực tiếp Phương trình Lagrange. Các phương pháp giải gồm có: Phương pháp được coi là chính xác như, phương pháp lực, phương pháp chuyển vị, phương pháp hỗn hợp, phương pháp liên hợp và các phương pháp gần đúng như: Phương pháp phần tử hữu hạn, phương pháp sai phân hữu hạn, phương pháp hỗn hợp sai phân - biến phân.

Phương pháp phần tử hữu hạn là phương pháp được xây dựng dựa trên ý tưởng rời rạc hóa công trình thành những phần tử nhỏ. Các phần tử nhỏ được nối lại với nhau thông qua các phương trình cân bằng và các phương trình liên tục. Để giải quyết bài toán cơ học kết cấu, có thể tiếp cận phương pháp này theoba mô hình gồm:Mô hình chuyển vị, xem chuyển vị là đại lượng cần tìm và hàm nội suy biểu diễn gần đúng dạng phân bố của chuyển vị trong phần tử; Mô hình cân bằng,hàm nội suy biểu diễn gần đúng dạng phân bố của ứng suất hay nội lực trong phần tử và mô hình hỗn hợp, coi các đại lượng chuyển vị và ứng suất là hai yếu tố độc lập riêng biệt. Các hàm nội suy biểu diễn gần đúng dạng phân bố của cả chuyển vị lẫn ứng suất trong phần tử.

Đối tượng, phương pháp và phạm vi nghiên cứu của đề tài

Trong luận văn này, tác giả sử dụng phương phần tử hữu hạntheo mô hình chuyển vị để xây dựng và giải bài toán dầm liên tục chịu tác dụng của tải trọng tĩnhphân bố đều.

Mục đích nghiên cứu của đề tài

"Phương pháp phần tử hữu hạn đối với bài toán dầm liên tục chịu tải trọng phân bố đều"

Nhiệm vụ nghiên cứu của đề tài

1. Tìm hiểu và giới thiệu các phương pháp giải bài toán cơ học kết cấu hiện nay.
2. Trình bày phương pháp phần tử hữu hạn đối với dầm chịu uốn
3. Trình bày lý thuyết dầm Euler - Bernoulli, và áp dụng Phương pháp phần tử hữu hạn để giải bài toán dầmliên tục, chịu tác dụng của tải trọng tĩnhphân bố đều.
4. Lập chương trình máy tính điện tử cho các bài toán nêu trên.

CHƯƠNG 1.
BÀI TOÁN CƠ HỌC KẾT CẤU VÀ CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Trong chương này, trước tiên trình bày các vấn đề về phép tính biến phân, ở đây chỉ trình bày các khái niệm cơ bản; phương trình EuLer và bài toán cực trị có ràng buộc (phương pháp thừa số lagrange). Đây là những vấn đề cần thiết đối với các bài toán cơ học. Sau đó giới thiệu bài toán cơ học kết cấu (bài toán tĩnh) và các phương pháp giải thường dùng hiện nay.

1.1. Phép tính biến phân - Các định nghĩa cơ bản và phương trình Euler

1.1.1.Các định nghĩa

- Biến phân δy của hàm y(x) của biến độc lập x là một hàm của x được xác định tại mỗi giá trị của x và bằng hiệu của một hàm mới Y(x) và hàm đã có y(x): $\delta y = Y(x) - y(x)$. δy gây ra sự thay đổi quan hệ hàm giữa y và x và không được nhầm lẫn với số gia Δy khi có số gia Δx.

- Nếu cho hàm $F\left[\; y_1(x), y_2(x),..y_n(x); x \;\right]$ thì số gia của hàm đó khi có các biến phân δy_i của các hàm y_i được viết như sau:

$$\Delta F \equiv F\left[y_1 + \delta y_1, y_2 + \delta y_2,.., y_n + \delta y_n; x\right] - F\left[\; y_1, y_2,..y_n; x \;\right] \quad (1.1)$$

- Nếu hàm y(x) và δy là khả vi thì $\delta y'$ của $y'(x)$ do δy gây ra được xác định như sau: $\delta y' \equiv \delta \dfrac{dy}{dx} \equiv \dfrac{d}{dx}(\delta y) \equiv Y'(x) - y'(x)$ (1.2)

- Nếu cho hàm $F\left[\; y_1(x), y_2(x),..y_n(x); y'_1(x), y'_2(x),..y'_n(x); x \;\right]$ thì gia số của nó tương ứng với các biến phân δy_i là:

$$\Delta F \equiv F\left[y_1 + \delta y_1, y_2 + \delta y_2,.., y_n + \delta y_n; y'_1 + \delta y'_1, y'_2 + \delta y'_2,.., y'_n + \delta y'_n, x\right] - F\left[\; y_1, y_2,..y_n; y'_1, y'_2,..y'_n, x \;\right] \quad (1.3)$$

▪ Nếu hàm F có đạo hàm riêng liên tục bậc 2 thì số gia của nó được xác định theo (1.3) có thể viết dưới dạng chuỗi Tay-lo như sau:

$$\Delta F = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial F}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial F}{\partial y'_i}\delta y_i^{'}\right| + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_k}\delta y_i \delta y_k + \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_k^{'}}\delta y_i \delta y_k^{'} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_i^{'} \partial y_k}\delta y_i^{'} \delta y_k\right| + R\left(\rho^2\right) \quad (1.4)$$

$R\left(\rho^2\right)$ là đại lượng vô cùng bé bậc cao với $\rho = \sqrt{\delta y_1^2 + \delta y'^2_1 + \delta y_2^2 + \delta y'^2_2 + ... + \delta y_n^2 + \delta y'^2_n}$ (1.5)

Tổng đầu tiên trong (1.4) tương ứng với bậc một của δy_i và $\delta y'_i$ được gọi là biến phân bậc một của hàm F có ký hiệu δF, tổng thứ hai tương ứng với tích của chúng và bằng một nửa biến phân bậc hai $\delta^2 F$ của F.

1.1.2. Cực trị của phiếm hàm, phương trình Euler. [2,3,12,13]

Như đã nói ở trên,đối tượng của phép tính biến phân là tìm những hàm chưa biết y(x) để đảm bảo cực trị cho tích phân xác định sau:

$$I = \int_{x1}^{x2} F\left[y(x), y^{'}(x), x\right] dx \quad (1.6a)$$

hoặc là $I = \int_{x1}^{x2} F\left[y_1(x), y_2(x), .., y_n(x), y_1^{'}(x), y_2^{'}(x), .., y_n^{'}(x), x\right] dx$ (1.6b)

[Phép ánh xạ đặt mỗi hàm (hệ hàm) nào đó xác định trên một tập nào đó tương ứng với một đại lượng vô hướng (scalar) được gọi là phiếm hàm].

Phiếm hàm I có cực tiểu (địa phương) đối với hàm y(x) hoặc hệ hàm $y_i(x)$ nếu như tồn tại số dương ε để số gia ΔZ.

$$\Delta Z \equiv \Delta \int_{x1}^{x2} F dx \equiv \int_{x1}^{x2} \Delta F dx > 0 \quad (1.7)$$

Đối với tất cả các biến phân δy hoặc tất cả hệ biến phân δy_i thỏa mãn điều kiện $0 < \sqrt{\delta y_i^2 + \delta y'^2_i} < \varepsilon$

hoặc $0 < \sqrt{\delta y_1^2 + \delta y'^2_1 + \delta y_2^2 + \delta y'^2_2 + ... + \delta y_n^2 + \delta y'^2_n} < \varepsilon$ khi $x_1 \le x \le x_2$.

Cực đại (địa phương) của Z khi ΔZ < 0.

Có hai phương pháp để tìm cực trị của(1.6): Giải trực tiếp trên phiếm hàm hoặc đưa phiếm hàm về phương trình vi phân.

Khi đưa phiếm hàm (1.6a) về phương trình vi phân thì từ (1.4) ta có điều kiện cần để phiếm hàm có cực trị là:

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \delta F(y, y', x) dx = 0 \quad \text{(a)}$$

Với δI là biến phân bậc nhất xác định theo (1.4):

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx = 0 \quad \text{(b)}$$

Tích phân từng phần biểu thức (b) ta sẽ có:

$$\delta I = \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left| \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right| \delta y dx = 0 \quad \text{(c)}$$

Khi các điểm biên là cố định thì số hạng thứ nhất của (c) bằng không

$$\frac{\partial F}{\partial y} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} = 0$$

Và do δy tùy ý cho nên từ (c) suy ra điều kiện cần để phiếm hàm (1.6a) đạt cực trị là:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (1.8)$$

Phương trình (1.8) được gọi là phương trình Euler của phiếm hàm (1.6a).

Trong một số tài liệu, phương trình Euler thường được suy ra từ bổ đề sau:

Bổ đề: *Cho phiếm hàm tuyến tính trong không gian D1 (Gồm các hàm xác định được trên đoạn [x_1,x_2] liên tục cùng với đạo hàm cấp 1 của nó).*

Nếu $$\int_{x1}^{x2} \left[a(x) \delta y(x) + b(x) \delta y'(x) \right] dx = 0$$

Với mọi hàm $\delta y \in D_1$ sao cho $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$ thì b(x) vi phân được và a(x) - b'(x)=0

Như vậy, bài toán tìm cực trị của phiếm hàm(1.6a) dẫn về giải phương trình (1.8) với các điều kiện biên đã cho.

Khi phiếm hàm (1.6b) có hệ hàm $y_i(i=1..n)$ cần tìm thì ứng với mỗi y_i sẽ có một phương trình Euler dạng (1.8).

Trong trường hợp giá trị của hàm y tại x_1 hoặc x_2 hoặc tại cả hai cận x_1 và $x_2$không xác định (trường hợp các biên di động) thì ứng với mỗi trường hợp như vậy, ngoài phương trình Euler (1.8) còn phải xét thêm các điều kiện biên.

Trong trường hợp hàm F dưới dấu tích phân chứa các đạo hàm cấp cao

$$I = \int_{x1}^{x2} F\left[y_1, y_2, .., y_n, y_1^{'}, y_2^{'}, .., y_n^{'}, y_1^{''}, y_2^{''}, .., y_n^{''}, .., x\right].dx \quad (1.9)$$

thì sử dụng biến phân bậc nhất của F:

$$\delta F = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial F}{\partial y_i'} \delta y_i' + \frac{\partial F}{\partial y_i''} \delta y_i'' + \ldots \right) \quad (1.10)$$

vào điều kiện cần (a) và bằng cách tích phân từng phần 2 lần, 3 lần … ta sẽ nhận được hệ phương trình EuLer:

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i''}\right) - \frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'''}\right) + ... = 0 \quad (1.11)$$

Hệ phương trình (1.11) được giải với các điều kiện biên của y_i và các đạo hàm đến bậc (r_i-1) của nó ($r_i$là bậc đạo hàm của y_i).

Các công thức trên có thể mở rộng cho trường hợp hàm nhiều biến độc lập x_i.

Chú ý rằng các phương trình Euler(1.8) và (1.11) là điều kiện cần để các phiếm hàm (1.6)và (1.9) tương ứng với chúng đạt cực trị.Đối với các bài toán cơ các phương trình Euler chính là các phương trình cân bằng(sẽ thấy trong phần tiếp theo) nên chúng cũng là điều kiện đủ.

1.1.3. Bài toán cực trị có điều kiện - phương pháp thừa số Lagrange

Bài toán đặt ra là: Cần tìm hệ hàm $y_1, y_2, .., y_n$ làm cực trị cho phiếm hàm

$$I = \int_{x1}^{x2} F\left(y_1, y_2, ..., y_n, y'_1, y'_2, .., y'_n, x\right) dx \quad \text{(a)}$$

Với điều kiện ràng buộc

$$\varphi_j\left(y_1, y_2, ..., y_n, x\right) = 0 \quad \text{(Với j = 1, 2, …, m; m < n)} \qquad \text{(b)}$$

n: Số hàm cần tìm ; m: số ràng buộc

Ta có định lý sau:

Phiếm hàm (a) đạt cực trị trên hệ hàm cần tìm $y_1, y_2, .., y_n$ với điều kiện ràng buộc (b) thì hệ hàm đó cần thỏa mãn hệ phương trình Euler sau:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_i'}\right) - \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} = 0 \qquad i = 1,2,\ldots n \qquad \text{(c)}$$

Với $\Phi = F + \sum_{j=1}^{m} \lambda_i(x).\varphi_j$ được gọi là phiếm hàm Lagrange mở rộng.

Các hàm $\lambda_i(x)$ được gọi là thừa số Lagrange. Nếu bài toán có nghiệm thì (m+n) hàm $y_i\left(x\right)$, $\lambda_i(x)$ được xác định từ phương trình (c) và (b) với các điều kiện biên đã cho. (c) là điều kiện cần chứ chưa đủ. φ_j chứa cả y_i' vẫn dùng được.

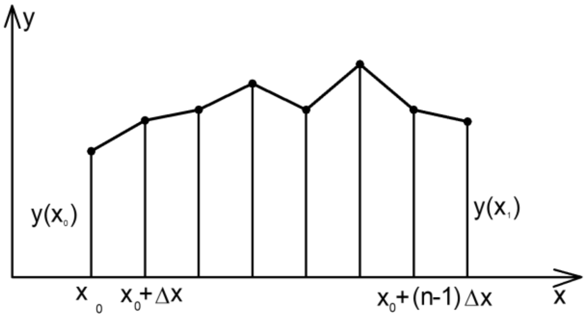
1.1.4. Phương pháp trực tiếp trong bài toán biến phân - phương pháp sai phân hữu hạn [13]

Tư tưởng của phương pháp sai phân hữu hạn là xét giá trị của phiếm hàm

$$I\left[y\left(x\right)\right]$$

Chẳng hạn $I = \int_{x0}^{x1} F\left(y, y', x\right) dx$; $y(x_0) = a$, $y(x_1) = b$

Không phải trên các đường cong có thể nhận bất kỳ trong một bài toán biến phân cho trước, mà chỉ xét các giá trị của phiếm hàm trên các đường gãy khúc thiết lập từ n đỉnh cho trước có hoành độ là: $x_0+\Delta x$, $x_0+2\Delta x$, ..., $x_0+(n-1)\Delta x$.



Ở đây $\Delta x = \dfrac{x_1 - x_0}{n}$

Trên các đường gấp khúc này, phiếm hàm $I\left[y(x)\right]$ trở thành hàm $\varphi(y_1, y_2, ..., y_{n-1})$ của các tung độ $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$ của các đỉnh đường gấp khúc, bởi vì đường gấp khúc hoàn toàn được xác định bởi các tung độ này.

Ta sẽ chọn các tung độ $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$ để hàm $\varphi(y_1, y_2, ..., y_{n-1})$ đạt cực trị, tức là xác định $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$ từ hệ phương trình $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_1}=0$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_2}=0$, … , $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_{n-1}}=0$. Sau đó chuyển qua giới hạn khi n $\to\infty$.

Trong phạm vi của một số điều kiện nào đó của hàm F, ta sẽ nhận được nghiệm của bài toán biến phân. Nhưng để thuận tiện hơn nữa, giá trị của phiếm hàm Iđược tính gần đúng trên các đường gấp khúc nêu trên, chẳng hạn, trong bài toánđơn giản nhất, thay tích phân:

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_0+k\Delta x}^{x_0+(k+1)\Delta x} F(x,y,\frac{y_{k+1}-y_k}{\Delta x}).dx$$

bằng tổng tích phân $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right).\Delta x$.

Với tư cách là thí dụ, ta đưa ra phương trình Euler đối với phiếm hàm

$$I=\int_{x0}^{x1} F\left(y, y^{'}, x\right)dx$$

Trong trường hợp này trên đường gấp khúc đang xét:

$$I\left[y(x)\right] \approx \varphi(y_1, y_2, ..., y_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right).\Delta x$$

Vì chỉ có hai số hạng thứ i và thứ (i-1) của tổng này phụ thuộc vào y_i:

$$F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right)\Delta x \text{ và } F\left(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}\right)\Delta x$$

nên phương trình $\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} = 0$ (i = 1,2,.., n - 1) có dạng:

$$F_y\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right)\Delta x + F_{y'}\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right).\left(-\frac{1}{\Delta x}\right)\Delta x$$

$$+F_{y'}\left(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}\right)\frac{1}{\Delta x}\Delta x = 0 \text{ (i =1,2,..,(n-1))}$$

Hay là: $$F_y\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right) - \frac{F_{y'}\left(x_i, y_i, \frac{y_i}{\Delta x}\right) - F_{y'}\left(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{\Delta y_{i-1}}{\Delta x}\right)}{\Delta x} = 0$$

Hay: $$F_y\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right) - \frac{\Delta F_{y'}}{\Delta x} = 0$$

Chuyển qua giới hạn khi n $\to\infty$ ta có phương trình Euler: $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$

Đó là phương trình mà ẩn hàm y(x) phải tìm cần thỏa mãn.Tương tự, có thể nhận được điều kiện cần cơ bản của cực trị trong các bài toán biến phân khác.

Nếu không thực hiện quá trình quá giới hạn thì từ hệ phương trình $\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} = 0$ có thể xác định được các tung độ cần tìm $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$, và do đó nhận được đường gấp khúc là nghiệm gần đúng của bài toán biến phân.

Chính Euler đã dùng sai phân hữu hạn nêu trên khi đưa ra phương trình mang tên ông(phương trình Euler của phép tính biến phân).

1.2. Bài toán cơ học kết cấu

Bài toán cơ học kết cấu nhằm xác định nội lực và chuyển vị của hệ thanh, tấm, vỏ dưới tác dụng của các loại tải trọng, nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức,…và được chia làm hai loại:

- Bài toán tĩnh định: là bài toán có cấu tạo hình học bất biến hình và đủ liên kết tựa với đất, các liên kết sắp xếp hợp lý, chịu các loại tải trọng. Để xác định nội lực và chuyển vị chỉ cần dùng các phương trình cân bằng tĩnh học là đủ;
- Bài toán siêu tĩnh: là bài toán có cấu tạo hình học bất biến hình và thừa liên kết (nội hoặc ngoại) chịu các loại tải trọng, nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức,…Để xác định nội lực và chuyển vị ngoài các phương trình cân bằng ta còn phải bổ sung các phương trình biến dạng.

Nếu tính đến tận ứng suất, có thể nói rằng mọi bài toán cơ học vật rắn biến dạng nói chung và bài toán cơ học kết cấu nói riêng đều là bài toán siêu tĩnh.

1.3. Các phương pháp giải hiện nay

Đã có nhiều phương pháp để giải bài toán siêu tĩnh. Hai phương pháp truyền thống cơ bản là phương pháp lực và phương pháp chuyển vị. Khi sử dụng chúng thường phải giải hệ phương trình đại số tuyến tính. Số lượng các phương trình tùy thuộc vào phương pháp phân tích. Từ phương pháp chuyển vị ta có hai cách tính gần đúng hay được sử dụng là H. Cross và G. Kani. Từ khi xuất hiện máy tính điện tử, người ta bổ sung thêm các phương pháp số khác như: Phương pháp phần tử hữu hạn; Phương pháp sai phân hữu hạn…

1.3.1. Phương pháp lực

Trong hệ siêu tĩnh ta thay các liên kết thừa bằng các lực chưa biết, còn giá trị các chuyển vị trong hệ cơ bản tương ứng với vị trí và phương của các lực ẩn số do bản thân các lực đó và do các nguyên nhân bên ngoài gây ra bằng không. Từ điều kiện này ta lập được hệ các phương trình đại số tuyến tính, giải hệ này ta tìm được các ẩn số và từ đó suy ra các đại lượng cần tìm.

1.3.2. Phương pháp chuyển vị

Khác với phương pháp lực, phương pháp chuyển vị lấy chuyển vị tại các nút làm ẩn. Những chuyển vị này phải có giá trị sao cho phản lực tại các liên kết đặt thêm vào hệ do bản thân chúng và do các nguyên nhân bên ngoài gây ra bằng không. Lập hệ phương trình đại số tuyến tính thỏa mãn điều kiện này và giải hệ đó ta tìm được các ẩn, từ đó xác định các đại lượng còn lại. Hệ cơ bản trong phương pháp chuyển vị là duy nhất và giới hạn giải các bài toán phụ thuộc vào số các phần tử mẫu có sẵn.

1.3.3. Phương pháp hỗn hợp và phương pháp liên hợp

Phương pháp hỗn hợp, phương pháp liên hợp là sự kết hợp song song giữa phương pháp lực và phương pháp chuyển vị. Trong phương pháp này ta có thể chọn hệ cơ bản theo phương pháp lực nhưng không loại bỏ hết các liên kết thừa mà chỉ loại bỏ các liên kết thuộc bộ phận thích hợp với phương pháp lực; hoặc chọn hệ cơ bản theo phương pháp chuyển vị nhưng không đặt đầy đủ các liên kết phụ nhằm ngăn cản toàn bộ các chuyển vị nút mà chỉ đặt các liên kết phụ tại các nút thuộc bộ phận thích hợp với phương pháp chuyển vị. Trường hợp đầu hệ cơ bản là siêu tĩnh, còn trường hợp sau hệ cơ bản là siêu động.

Trong cả hai cách nói trên, bài toán ban đầu được đưa về hai bài toán độc lập: Một theo phương pháp lực và một theo phương pháp chuyển vị.

1.3.4. Phương pháp sai phân hữu hạn

Phương pháp sai phân hữu hạn cũng là thay thế hệ liên tục bằng mô hình rời rạc, song hàm cần tìm (hàm mang đến cho phiếm hàm giá trị dừng),nhận những giá trị gần đúng tại một số hữu hạn điểm của miền tích phân, còn giá trị các điểm trung gian sẽ được xác định nhờ một phương pháp tích phân nào đó.

Phương pháp này cho lời giải số của phương trình vi phân về chuyển vị và nội lực tại các điểm nút. Thông thường ta phải thay đạo hàm bằng các sai phân của hàm tại các nút.Phương trình vi phân của chuyển vị hoặc nội lực được viết dưới dạng sai phân tại mỗi nút, biểu thị quan hệ của chuyển vị tại một nút và các nút lân cận dưới tác dụng của ngoại lực.

1.3.5. Phương pháp hỗn hợp sai phân – biến phân

Kết hợp phương pháp sai phân với phương pháp biến phân ta có một phương pháp linh động hơn: Hoặc là sai phân các đạo hàm trong phương trình biến phân hoặc là sai phân theo một phương và biến phân theo một phương khác (đối với bài toán hai chiều).

CHƯƠNG 2
PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN
ĐỐI VỚI DẦM CHỊU UỐN

2.1. PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH) chia công trình thành những phần nhỏ được gọi là phần tử. Việc tính toán được thực hiện đối với mỗi phần tử, sau đó kết nối chúng lại với nhau có được toàn bộ công trình.

Khi dùng phương pháp sai phân hữu hạn, trạng thái của công trình (ví dụ chuyển vị của dầm, tấm v.v…) được tính tại mỗi điểm của lưới sai phân, trạng thái công trình tại các điểm nằm giữa các nút của lưới sai phân được tính bằng cách nội suy tuyến tính. Từ cách nhìn này thấy rõ ưu điểm của phương pháp PTHH so với phương pháp sai phân hữu hạn là trạng thái các điểm trong mỗi phần tử được xác định theo các hàm nội suy (còn gọi là hàm dạng) chọn trước. Do vậy, để có kết quả có độ chính xác tương đương nhau, phương pháp PTHH thường dùng ít ẩn hơn so với phương pháp sai phân hữu hạn. Theo E.Wilson, thuật ngữ PTHH được giáo sư Ray Clough đưa ra vào năm 1960 và ông xem phương pháp PTHH là khả năng nữa (alternative) của phương pháp sai phân hữu hạn.

Các hàm nội suy được viết theo tọa độ tự nhiên (xem phần sau) được dùng vừa để mô tả trạng thái (ví dụ chuyển vị của dầm, tấm v.v…) và có thể vừa để mô tả dạng hình học (ví dụ dầm cong, vỏ…) của công trình cho phép dễ dàng lập trình và tạo điều kiện tự động hóa quá trình tính toán (phần tử hữu hạn dùng hàm nội suy như vậy được gọi là phần tử đẳng thông số, (Isoparametric finite element). Các hàm nội suy viết theo tọa độ tự nhiên do B.Irons và O.Zienkiewicz đưa ra năm 1968.

Do kích thước phần tử nhỏ, trạng thái (ví dụ chuyển vị của dầm, tấm…) của các điểm trong mỗi phần tử khác nhau ít cho nên các hàm nội suy được dùng là các đa thức bậc thấp, ví dụ đối với độ võng của dầm hàm nội suy thường dùng là các đa thức bậc ba theo tọa độ x, đối với độ võng của tấm là các đa thức bậc ba theo tọa độ x và bậc ba theo tọa độ y v.v.. Vì dùng các đa thức bậc thấp cho nên các lực tác dụng trong mỗi phần tử cũng như lực quán tính (bài toán động lực học) đều phải qui về các nút. Vì phương pháp PTHH xét cân bằng tại nút nên lực tác dụng trong phần tử cũng như lực quán tính đều phải quy về các lực tập trung tác dụng tại nút.

Hàm nội suy được chọn sao cho kết quả tính là ổn định: kết quả là duy nhất, thay đổi bé của điều kiện biên hoặc điều kiện ban đầu không làm thay đổi kết quả tính.

Dựa vào hàm nội suy có thể tính được trường ứng suất và trường chuyển vị của mỗi phần tử và do đó ta thiết lập được ma trận độ cứng phần tử. Dựa trên ma trận độ cứng phần tử xây dựng được ma trận độ cứng tổng thể của công trình.

Phương trình cơ bản để giải bài toán cơ học kết cấu theo phương pháp phần tử hữu hạn, có dạng như sau:

$$[K]\{\Delta\} = \{F\} \tag{2.1}$$

Trong đó: $[K]$ là ma trận độ cứng tổng thể của toàn kết cấu, là ma trận vuông có kích thước là số ẩn của toàn bộ kết cấu, nghĩa là số ẩn của phương pháp, $\{\Delta\}$ là véc tơ chuyển vị nút của toàn kết cấu (đối với bài toán không xét biến dạng trượt ngang), là véc tơ chuyển vị nút và lực cắt (đối với bài toán có xét đến biến dạng trượt ngang), $\{F\}$ là véc tơ lực nút.

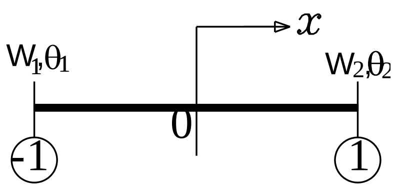
Giải hệ phương trình (2.1) ta có thể dùng các chương trình có sẵn trong Matlab để giải. Nếu như gọi r là nghiệm của bài toán thì $r = [K]\backslash\{F\}$.

Trong đề tài này tác giả dùng chương trình Matlab nói trên để giải các bài toán.

2.1.1. Hàm nội suy của phần tử

Hàm nội suy chuyển vị và góc xoay tại hai nút đầu phần tử

Trong khi tính dầm ta có thể sử dụng phần tử chịu uốn hai nút, như hình 2.1.



Hình 2.1. Phần tử dầm

Tại mỗi nút có các thông số là chuyển vị W_1, θ_1, W_2, θ_2, do đó chuyển vị trong mỗi phần tử được viết theo công thức sau:

$$W = [fw_1 fw_2 fx_1 fx_2]\mathrm{X} \qquad (3.2)$$

Trong đó: $\mathrm{X} = [W_1 W_2 \theta_1 \theta_2]'$

$$\theta_1 = \frac{dW}{dx}\bigg|_{x=-1}; \theta_2 = \frac{dW}{dx}\bigg|_{x=1}$$

Các hàm $fw_1,\ fw_2,\ fx_1,\ fx_2$, là các hàm nội suy cần được xác định. Ta viết hàm nội suy dạng đa thức bậc 3, $W = a_0 + a_1 x + a_1 x^2 + a_3 x^3$, dưới dạng ma trận hàm độ võng W được viết như sau:

$$W = [1\ \ x\ \ \ x^2 x^3]\mathrm{X}_a \qquad (2.3a)$$

Trong đó: $X_a = [a_0 a_1 a_2 a_3]'$

Bây giờ ta tìm mối liên hệ giữa X và X_a

Thay x=-1 vào (2.3a) ta có

$$W_1 = [1\ -1\quad\ 1\ \ -1\ ]\mathrm{X}_a \qquad (a)$$

Thay x=1 vào (3.3a) ta có

$$W_2 = [1\quad 1\quad 1\quad 1\ ]\mathrm{X}_a \qquad (b)$$

Lấy đạo hàm (3.3) theo x ta có

$$\frac{dW}{dx} = [0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2]\mathrm{X}_a \tag{2.3b}$$

Thay x=-1 vào (2.3b) ta có

$$\theta_1 = [0 \quad 1 \quad -2 \quad 3\,]\mathrm{X}_a \tag{c}$$

Thay x=1 vào (2.40b) ta có

$$\theta_2 = [0 \quad 1 \quad 2 \quad 3\,]\mathrm{X}_a \tag{d}$$

Từ a, b, c và d ta nhận được

$$X = [W_1 W_2 \theta_1 \theta_2]' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\mathrm{X}_a = a\mathrm{X}_a \rightarrow \mathrm{X}_a = a^{-1}\mathrm{X}$$

Trong đó: $a = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Từ đó ta tìm được các hàm nội suy $fw_1,\ fw_2,\ fx_1,\ fx_2$, như sau:

$$\left.\begin{aligned} fw_1 &= \tfrac{1}{4}(x-1)^2(x+2), \\ fw_2 &= \tfrac{1}{4}(x+1)^2(2-x) \\ fx_1 &= \tfrac{1}{4}(x-1)^2(x+1) \\ fx_1 &= \tfrac{1}{4}(x-1)^2(x+1) \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

Các hàm nội suy (2.4) thường được dùng để tính phần tử chịu uốn và cho kết quả hội tụ.

$$W = [fw_1 fw_2 fx_1 fx_2]\mathrm{X} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(x-1)^2(x+2) & \frac{1}{4}(x+1)^2(2-x) \\ \frac{1}{4}(x-1)^2(x+1) & \frac{1}{4}(x-1)^2(x+1) \end{bmatrix}\mathrm{X} \tag{2.2a}$$

Như vậy, nếu biết được các thông số W_1, θ_1, W_2, θ_2 tại hai đầu phần tử thì chuyển vị tại mỗi điểm bất kỳ trong phần tử đó được xác định theo đa thức bậc 3 sau đây

$$W = fw_1 W_1 + fw_2 W_2 + fx_1 \theta_1 + fx_2 \theta_2 \tag{2.5}$$

2.1.2. Ma trận độ cứng của phần tử

Trường hợp không xét biến dạng trượt ngang

Trong trường hợp không xét ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang, mỗi phần tử có hai chuyển vị nút W1, W2, và hai góc xoay θ_1, θ_2, tổng cộng có bốn thông số (4 ẩn) cần xác định.

Gọi X là véc tơ cột chứa bốn ẩn của phần tử theo thứ tự sau

$$X = [W_1 W_2 \theta_1 \theta_2] \tag{2.6}$$

Thì có thể viết lại biểu thức (2.5) dưới dạng ma trận như sau

$$W = [fw_1 + fw_2 + fx_1 + fx_2]X \tag{2.7}$$

Sau khi đã biết các hàm chuyển vị thì dễ dàng tính được biến dạng uốn χ_x, nội lực mômen uốn M_x, của phần tử như sau:

$$\chi_x = \left[-\frac{d^2W}{dx^2}\beta^2\right] \tag{2.8}$$

$$M_x = EJ\chi_x \tag{2.9}$$

Trong các công thức trên $\beta = {}^{2}/_{\Delta x}$ là hệ số đưa chiều dài hai đơn vị của phần tử về chiều dài thực Δx của nó.

Biết được hàm độ võng của phần tử thì dễ dàng tính được ma trận độ cứng phần tử. Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss ta viết lượng cưỡng bức đối với bài toán tĩnh như sau:

$$\mathrm{Z} = \int_{-1}^{1} M_x[\chi_x]dx \rightarrow min \tag{2.10}$$

Trong đó χ_x là các biểu thức chứa các ẩn X(i) cho nên điều kiện dừng của (2.10) được viết lại như sau:

$$\delta\mathrm{Z} = \int_{-1}^{1} M_x \delta[\chi_x]dx = 0$$

hay

$$\delta\mathrm{Z} = \frac{1}{\beta}\left(\int_{-1}^{1} M_x \left[\frac{\partial\chi_x}{\partial X_i}\right]dx\right) = 0 \tag{2.11}$$

hệ số $^1/_\beta = {}^{\Delta x}/_2$ là hệ số để đưa tích phân từ (-1) đến (1) về tích phân theo chiều dài phần tử. Có bốn ẩn ta có được bốn phương trình và có dạng (2.1), viết lại như sau:

$$[\mathrm{K}]_e\{\mathit{\Delta}\}_e = \{F\}_e \tag{2.12}$$

Trong đó: $[\mathrm{K}]_e$ là ma trận độ cứng phần tử e, $\{\mathit{\Delta}\}_e$ là véc tơ chuyển vị nút tại hai đầu phần tử e, $\{F\}_e$ là véc tơ tải trọng tương ứng với chuyển vị nút $\{\mathit{\Delta}\}_e$.

Các tích phân trong (2.11) có thể tính chính xác hoặc có thể tính theo các tích phân gần đúng (tích phân số) của Gauss. Sau khi tính (2.11), nhận được ma trận độ cứng phần tử $[\mathrm{K}]_e(4x4)$.

2.1.3. Ma trận độ cứng tổng thể

Biết được ma trận độ cứng phần [K]e tử thì dễ dàng xây dựng được ma trận độ cứng toàn hệ [K]. Giả sử thanh chỉ có một phần tử thì ma trận $[\mathrm{K}]_e$ chính là ma trận độ cứng tổng thể của thanh. Giả sử chuyển vị tại nút (1) bằng không thì ta bỏ dòng 1, cột 1 của ma trận $[\mathrm{K}]_e$.

Chú ý ngoài các ẩn chuyển vị, góc xoay, lực cắt của hệ còn phải xét thêm các ẩn là các thừa số Lagrange λ của các điều kiện liên kết tại đầu hoặc cuối các phần tử. Ngoài ra còn cần đưa thêm các điều kiện liên tục về góc xoay tại điểm tiếp giáp giữa hai phần tử.

Việc thành lập ma trận độ cứng tổng thể [K] của toàn kết cấu từ các ma trận độ cứng phần tử [K]e có thể trình bày như sau:

Hệ phương trình cơ bản để giải bài toán kết cấu theo phương pháp chuyển vị có dạng (2.1), viết lại dưới đây.

$$[\mathrm{K}]\{\Delta\} = \{\mathrm{F}\}$$

Trong đó: véc tơ ẩn chuyển vị nút {Δ} gồm các thành phần xếp theo thứ tự chuyển vị nút của toàn bộ kết cấu, véc tơ lực nút {F} và ma trận độ cứng toàn hệ [K] cũng là các thành phần xếp theo thứ tự tương ứng với chuyển vị nút. [K] và $\{F\}$ ở đây được lập từ các ma trận độ cứng $[K]_e$ và lực nút $\{F\}_e$ của từng phần tử trong kết cấu ở hệ tọa độ chung.

Đối với mỗi phần tử e có một hệ phương trình cân bằng dạng (2.12) ở hệ tọa độ chung là:

$$[K]_e\{\Delta\}_e = \{F\}_e$$

Trong đó: $\{\Delta\}_e$ là véc tơ chuyển vị nút có các thành phần được xếp theo thứ tự đã được quy định sẵn cho từng phần tử. Cấu trúc của ma trận độ cứng phần tử $[K]_e$ và véc tơ lực nút $\{F\}_e$ cũng tương ứng với chuyển vị nút $\{\Delta\}_e$.

Do thứ tự các thành phần trong véc tơ chuyển vị nút $\{\Delta\}_e$ của từng phần tử nói chung khác với thứ tự trong véc tơ chuyển vị nút $\{\Delta\}$ của toàn kết cấu, nên cần lưu ý xếp đúng vị trí của từng phần tử trong $[K]_e$và $\{F\}_e$ vào $[K]$ và $\{F\}$. Việc sắp xếp này thường được áp dụng phương pháp số mã có nội dung như sau:

Mỗi chuyển vị nút và lực nút tương ứng được dùng hai số mã để đặt tên:

- Số mã cục bộ: là số mã từ 1 đến m (m là tổng số chuyển vị nút của mỗi phần tử). Đó là thứ tự sắp xếp trong véc tơ chuyển vị nút $\{\Delta\}_e$ và véc tơ lực nút $\{F\}_e$ của một phần tử. Nếu các phần tử có các chuyển vị nút (m) như nhau thì số mã cục bộ của chuyển vị nút giống nhau.
- Số mã toàn thể: là số mã từ 1 đến n (n là tổng số chuyển vị nút của toàn kết cấu). Đó là thứ tự sắp xếp trong véc tơ chuyển vị nút $\{\Delta\}$ và lực nút $\{F\}$ của toàn kết cấu.

Mỗi thành phần của $[K]_e$ và $\{F\}_e$ tương ứng với một số mã cục bộ của chuyển vị nút cụ thể. Căn cứ vào số mã toàn thể của chuyển vị nút cụ thể này mà sắp xếp trị của thành phần $[K]_e$và $\{F\}_e$ vào đúng vị trí trong ma trận $[K]$ và véc tơ lực $\{F\}$ của toàn kết cấu. Các thành phần trong ma trận độ cứng của từng phần tử được xếp vào cùng một vị trí của ma trận toàn hệ thì được cộng lại với nhau. Phần ví dụ minh họa được trình bày thông qua các ví dụ ở phần sau.

2.1.4. Xét điều kiện ngoại lực

Do dùng hàm độ võng của phần tử là đa thức bậc ba cho nên các lực tác dụng lên phần tử đều phải quy về nút kể cả lực quán tính trong bài toán động.

2.1.5. Xác định nội lực

Giải hệ phương trình $[K]\{\Delta\} = \{F\}$ ta sẽ nhận được véc tơ chuyển vị của toàn kết cấu, từ đó xác định được nội lực cần tìm của toàn cơ hệ.

CHƯƠNG 3.

PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠNĐỐI VỚI DẦM CHỊU UỐN

3.1. Lý thuyết dầm Euler – Bernoulli

Dầm chịu uốn là cấu kiện có kích thước tiết diện nhỏ hơn nhiều lần so với chiều dài của nó, trên mặt cắt ngang dầm tồn tại hai thành phần nội lực là mômen uốn M và lực cắt Q. Tải trọng tác dụng lên dầm nằm trong mặt phẳng có chứa đường trung bình của dầm và thẳng góc với trục dầm. Dưới đây ta xét hai trường hợp dầm chịu uốn thuần túy phẳng và uốn ngang phẳng.

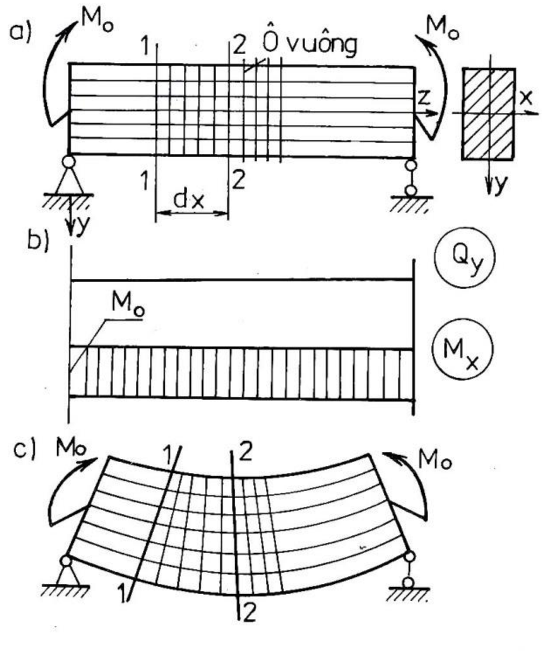
3.1.1. Dầm chịu uốn thuần túy phẳng

Dầm chịu uốn thuần túy phẳng là dầm mà trên mọi mặt cắt ngang dầm chỉ có một thành phần nội lực là mômen uốn nằm trong mặt phẳng quán tính chính trung tâm.

Ứng suất trên mặt cắt ngang

Giả sử dầm có mặt cắt ngang hình chữ nhật (bxh) chịu uốn thuần túy như, hình 2.1a. Ta tiến hành thí nghiệm sau:

Trước khi dầm chịu lực ta vạch lên mặt ngoài dầm những đường thẳng song song và vuông góc với trục dầm tạo nên những ô vuông, hình 2.1a. Sau khi dầm biến dạng, hình 2.1c, ta thấy rằng những đường song song với trục dầm trở thành những đường cong, những đường thẳng vuông góc với trục dầm vẫn thẳng và vuông góc với trục dầm. Từ đó người ta đưa ra hai giả thiết sau đây:



Hình 3.1. Dầm chịu uốn thuần túy

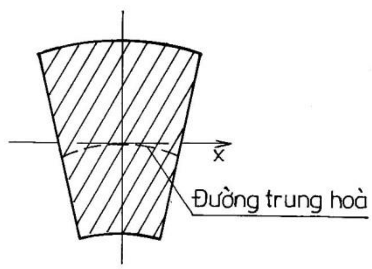
- Mặt cắt ngang dầm ban đầu phẳng và vuông góc với trục dầm, sau biến dạng vẫn phẳng và vuông góc với trục dầm (giả thiết về mặt cắt ngang, giả thiết Bernoulli).
- Trong quá trình biến dạng các thớ dọc của dầm không ép lên nhau và không đẩy xa nhau (giả thiết về các thớ dọc).

Ngoài ra khi tính toán dầm ta còn dựa vào các giả thiết sau:

- Vật liệu có tính chất liên tục, đồng nhất và đẳng hướng
- Biến dạng của vật thể là biến dạng đàn hồi và đàn hồi tuyệt đối.
- Biến dạng của vật thể do ngoại lực gây ra là nhỏ so với kích thước của chúng.
- Tuân theo nguyên lý độc lập tác dụng

Từ hình 3.1c, ta nhận thấy rằng: khi dầm bị uốn thì các thớ trên co lại, các thớ dưới giãn ra. Do vậy khi chuyển từ thớ co sang thớ giãn sẽ có thớ không co, không giãn. Thớ này gọi là thớ trung hòa. Tập hợp các thớ trung hòa gọi là lớp trung hòa, giao của lớp trung hòa với mặt cắt ngang gọi là đường trung hòa. Nếu ta xét một mặt cắt ngang nào đó của dầm thì sau khi bị uốn nó sẽ cho hình dạng như hình 3.2.

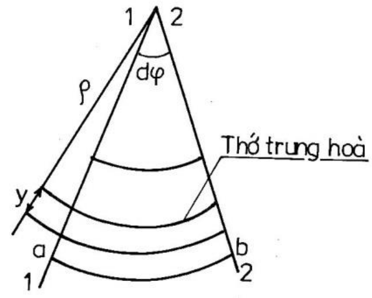
Đường trung hòa của mặt cắt ngang là một đường cong. Vì chuyển vị của các điểm trên mặt cắt ngang của dầm là bé, nên ta coi rằng hình dáng mặt cắt ngang dầm không thay đổi sau khi biến dạng.



Hình 3.2. Mặt cắt ngang dầm

Khi đó đường trung hòa của mặt cắt ngang là đường thẳng và giả sử lấy trục ox trùng với đường trung hòa.

Xét biến dạng của đoạn dầm dz được cắt ra khỏi dầm bằng hai mặt cắt 1-1 và 2-2. Sau biến dạng hai mặt cắt này làm với nhau một góc $d\varphi$ và thớ trung hòa có bán kính cong là ρ (hình 3.3). Theo tính chất của thớ trung hòa ta có:



Hình 3.3. Hai mặt cắt sau khi uốn

$$dz = \rho d\varphi (3.1)$$

Ta xét biến dạng của thớ ab cách thớ trung hòa một khoảng là y, ta có:

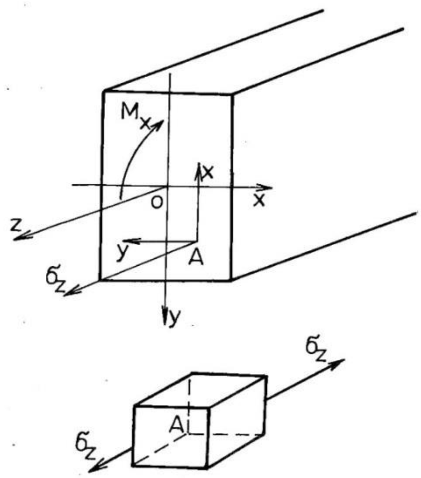
$$\overline{ab_t} = dz = \rho d\varphi;\ \overline{ab_s} = dz = (\rho + y)d\varphi (3.2)$$

Từ (3.2) ta suy ra:

$$\varepsilon_z = \frac{\overline{ab_s} - \overline{ab_t}}{\overline{ab_t}} = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi};\ (3.3)$$

Xét ứng suất tại điểm bất kỳ A(x,y) trên mặt cắt ngang nào đó của dầm (hình 3.4a). Trong đó trục oy là trục đối xứng của mặt cắt ngang, trục ox trùng với đường trung hòa của mặt cắt ngang.

Ta tách ra tại A một phân tố hình hộp bằng các mặt cắt song song với các mặt tọa độ (hình 3.4b). Khi đó theo giả thiết thứ nhất thì góc của phân tố sau biến dạng không đổi, nên ta suy ra trên các mặt của phân tố không có ứng suất tiếp. Mặt khác theo giả thiết thứ hai thì trên các mặt của phân tố song song với trục Z không có ứng suất pháp, nghĩa là $\sigma_x = \sigma_x = 0$. Do vậy trên các mặt của phân tố chỉ có ứng suất pháp σ_z và theo định luật Hooke ta có:



Hình 3.4. Phân tố A

$$\sigma_z = E\varepsilon_z = E\frac{y}{\rho}; (2.4)$$

Dầm chịu uốn thuần túy nên ta có

$$N_z = \int_F \ \sigma_z dF = 0 \ (2.5)$$

$$M_x = \int_F \ \sigma_z y dF = 0 \ \ (2.6)$$

Thay (3.4) vào (3.5) ta được

$$N_z = \int_F \ E\frac{y}{\rho}dF = \frac{E}{\rho}\int_F \ ydF = 0 \ = \frac{E}{\rho}S_x = 0(2.7)$$

$S_x = 0$ nghĩa là ox là trục quán tính chính trung tâm. Vì y là trục đối xứng nên suy ra oxy là trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt ngang. Thay (3.4) vào (3.6) ta được:

$$M_x = \int_F \ \sigma_z y dF = \frac{E}{\rho}\int_F \ E\frac{y^2}{\rho}dF = \frac{E}{\rho}J_x(3.8)$$

Suy ra: $\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x}(3.9)$

EJ_x là độ cứng của dầm khi uốn. Thay (2.9) vào (2.4) ta có:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{EJ_x}y(3.10)$$

Từ công thức (3.10) ta có các nhận xét:

- Luật phân bố của σ_z trên mặt cắt ngang dầm là bậc nhất đối với y.
- Những điểm trên mặtc ắt ngang có cùng tung độ y (nghĩa là những điểm nằm trên đường thẳng song song với trục trung hòa x) sẽ có trị số bằng nhau và nó tỉ lệ với khoảng cách từ các điểm đó tới trục trung hòa.
- Những điểm nằm trên trục trung hòa y=0 có trị số $\sigma_z = 0$. Những điểm xa trục trung hòa nhất sẽ có trị số ứng suất lớn nhất và bé nhất.

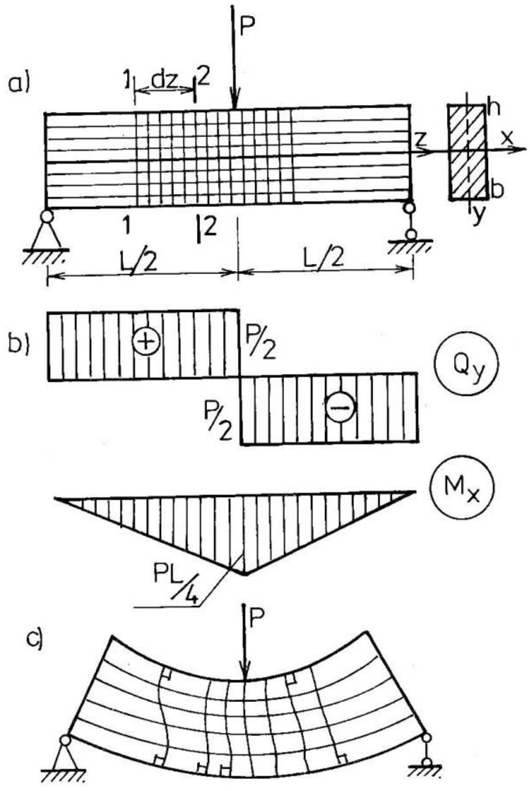
3.1.2. Dầm chịu uốn ngang phẳng

Dầm chịu uốn ngang phẳng là dầm mà các mặt cắt ngang của nó có các thành phần nội lực là lực cắt Q_y và mômen uốn M_x nằm trong mặt phẳng quán tính chính trung tâm của dầm.

Ứng suất trên mặt cắt ngang

Xét dầm chịu uốn ngang phẳng như trên hình 3.5a. Ta quan sát thí nghiệm sau:

Trước khi dầm chịu lực ta vạch lên mặt ngoài dầm những đường thẳng song song và vuông góc với trục dầm tạo. Sau khi dầm biến dạng ta thấy rằng những đường thẳng song song với trục dầm trở thành những đường cong nhưng vẫn còn song song với trục dầm, những đường thẳng vuông góc với trục dầm không còn thẳng và vuông góc với trục dầm nữa hình3.5c.

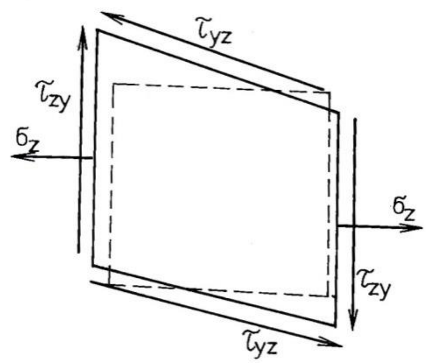


Hình 3.5. Dầm chịu uốn ngang phẳng

Điều đó chứng tỏ mặt cắt ngang dầm sau biến dạng bị vênh đi. Nếu tại điểm A bất kỳ của dầm ta tách ra một phân tố bằng các mặt song song với các mặt tọa độ thì sau khi biến dạng các góc vuông của phân tố không còn vuông nữa, nghĩa là phân tố có biến dạng góc. Suy ra trên các mặt phân tố sẽ có ứng suất tiếp.

Trong lý thuyết đàn hồi người ta đã chứng minh được rằng trên các mặt của phân tố có các ứng suất sau:

$\sigma_y, \sigma_z, \tau_{zy,} \tau_{yz,}$. Nhưng thực tế cho thấy rằng ứng suất pháp σ_y, rất bé so với các thành phần khác nên ta bỏ qua, nghĩa là khi dầm chịu uốn ngang phẳng thì trên mặt cắt ngang dầm có hai thành phần ứng suất là: ứng suất pháp σ_z, và ứng suất tiếp hình 3.6.



Hình 3.6. Phân tố dầm chịu uốn ngang phẳng

a. Ứng suất pháp σ_z:

Trong mục trước nhờ giả thiết Bernoulli về mặt cắt ngang phẳng ta đã đưa tới công thức tính ứng suất pháp σ_z trên mặt cắt ngang dầm là:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{EJ_x} y \tag{3.11}$$

Trong trường hợp dầm bị uốn ngang phẳng thì sau biến dạng mặt cắt ngang dầm bị vênh đi, nghĩa là không còn phẳng nữa. Như vậy mọi lập luận để đưa tới công thức (3.11) để tính ứng suất pháp σ_z không phù hợp nữa. Tuy nhiên trong lý thuyết đàn hồi người ta đã chứng minh được rằng đối với dầm chịu uốn ngang phẳng ta vẫn có thể dùng công thức (3.11) để tính ứng suất σ_z mà sai số không lớn lắm.

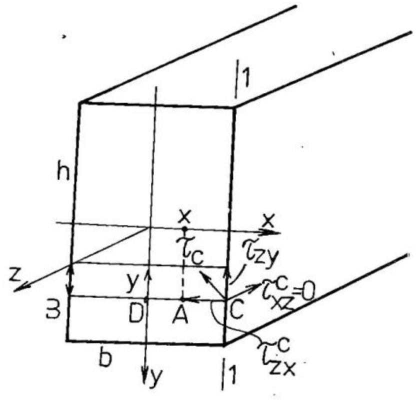
b. Ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang dầm chịu uốn ngang phẳng (công thức Durapski):

Giả sử có dầm mặt cắt ngang là hình chữ nhật hẹp (b<h) chịu uốn ngang phẳng hình 3.7.

Ta xét ứng suất tiếp tại điểm bất kỳ A(x,y) trên mặt cắt ngang 1-1 nào đó của dầm. Qua điểm A ta kẻ đường thẳng song song với trục ox cắt biên của mặt cắt tại B và C, cắt trục oy tại D. Trước hết ta xét ứng suất tiếp tại B,C và D.

Ứng suất tiếp tại C là $\tau_{c,}$ giả sử có phương bất kỳ trong 1-1.

Phân $\tau_{c,}$ thành hai thành phần: τ_{zx}^{c} và τ_{zy}^{c}. Nhưng theo định luật đối ứng của ứng suất tiếp thì ta có: $\tau_{zx}^{c} = \tau_{xz}^{c} = 0$ ($\tau_{xz}^{c} = 0$ vì mặt bên dầm theo giả thiết không có tải trọng tác dụng) hình 3.7.



Hình 3.7.

Do vậy $\tau_{c} = \tau_{zy}^{c}$ có phương song song với oy. Do tính chất đối xứng ta suy ra $\tau_{B} = \tau_{zy}^{B} = \tau_{zy}^{C}$.

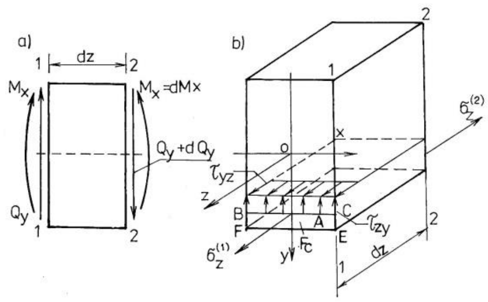
Cũng do tính chất đối xứng và giả thiết hình chữ nhật hẹp nên $\tau_{D} = \tau_{yz}^{D} = \tau_{yz}^{B} = \tau_{yz}^{C}$.

Do giả thiết hình chữ nhật hẹp nên CD=b/2 càng nhỏ mà ứng suất tiếp tại C và D chỉ có phương y. Do vậy ta suy ra là ứng suất tiếp tại A chỉ có phương y: $\tau_{A} = \tau_{yz}^{A}$. Đồng thời:

$$\tau_{yz}^{A} = \frac{\tau_{yz}^{C} + \tau_{yz}^{D}}{2} = \tau_{yz}^{C} = \tau_{yz}^{D}$$

Như vậy ứng suất tiếp của các điểm trên đường thẳng BC qua A chỉ có phương y và trị số bằng nhau. Nghĩa là ứng suất tiếp trên BC phân bố đều với cường độ là τ_{zy}. Để tính τ_{zy} ta cắt một đoạn dầm dz bằng hai mặt cắt 1-1 và 2-2, hình 2.8.

Sau đó cắt đoạn dầm dz bằng một mặt phẳng qua điểm A song song với trục Z. Mặt phẳng này chia đoạn dầm dz ra làm hai phần. Nếu gọi BC = bc và dt (BCEF)=Fc thì từ điều kiện cân bằng của phân dưới của đoạn dz hình…ta suy ra:



Hình 3.8.

$$\sum Z = \int_{Fc} \sigma_z^{(1)} dF - \int_{Fc} \sigma_z^{(2)} dF + \tau_{yz} bcdZ = 0$$

Mặt khác ta lại có

$$\sigma_z^{(1)} = \frac{M_x}{J_x} y \text{(a)}$$

$$\sigma_z^{(2)} = \frac{M_x + dM_x}{J_x} y \text{(b)}$$

Thay (b) vào (a) ta được:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{1}{bc.dz}\left[\int_{Fc} \frac{M_x + dM_x}{J_x} ydF - \int_{Fc} \frac{M_x}{J_x} ydF\right] =$$

$$= \frac{1}{J_x.bc}\frac{dM_x}{dz}\int_{Fc} ydF \qquad \text{(c)}$$

Ta có: $\frac{dM_x}{dz} = Q_y;\ \int_{Fc} ydF = S_x^c$(d)

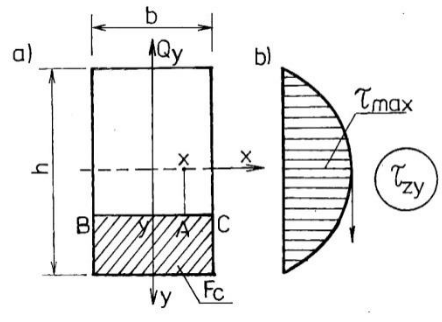
S_x^c: gọi là mômen tĩnh của phần diện tích Fc đối với trục x. Thay (d) vào (c) ta suy ra:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^c}{J_x.bc} \text{(3.12)}$$

Trong đó bc gọi là bề rộng của mặt cắt ngang qua điểm cần tính ứng suất A. Công thức (3.12) gọi là công thức Durapski. Từ công thức này và theo điều kiện cân bằng của phần thanh ở trên ta suy ra là τ_{yz} cùng chiều với trục z, τ_{zy} cùng chiều với Q_y. Nghĩa là dấu của τ_{zy} và Q_y như nhau. Do vậy ở đây chỉ cần tính trị số của τ_{zy} theo (3.12) còn dấu của nó được xác định từ biểu đồ lực cắt Q_y.

c. *Luật phân bố ứng suất tiếp τ_{zy} đối với mặt cắt hình chữ nhật:*

Giả sử mặt cắt ngang dầm chịu uốn ngang phẳng là hình chữ nhật bề rộng b, chiều cao h. Ta đi tìm luật phân bố của ứng suất tiếp τ_{zy} đối với mặt cắt nếu lực cắt tại mặt cắt này là Q_y.



Hình 2.9.

Ta xét điểm bất kỳ A(x,y) trên mặt cắt, ta có bc=BC=b.

$$S_x^c = \left(\frac{h}{2} - y\right).b\left[y + \frac{1}{2}(\frac{h}{2} - y)\right] = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

Suy ra: $\tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^c}{J_x.bc} = \frac{Q_y \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{J_x.b} = \frac{Q_y}{2J_x}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$(3.13)

Từ (3.13) ta nhận thấy rằng: Luật phân bố τ_{zy} trên mặt cắt là parabol bậc hai đối với y. Với y=0 (những điểm nằm trên trục trung hòa ox) thì:

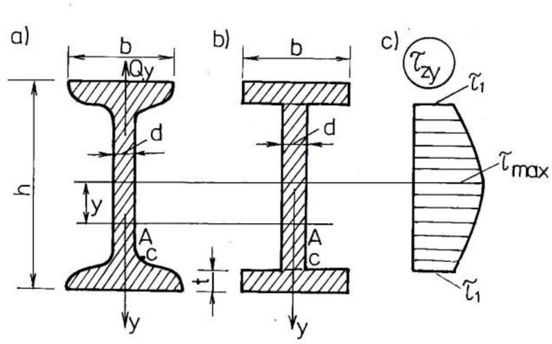
$$\tau_{zy}(0) = \tau_{max} = \frac{Q_y h^2}{8.J_x} = \frac{3Q_y}{2F} \quad (3.14)$$

$$y = \pm\frac{h}{2}\ thì\ \tau_{zy} = 0$$

Từ đó ta có thể vẽ được biểu đồ τ_{zy} cho mặt cắt như, hình 3.9b.

d. Luật phân bố ứng suất tiếp τ_{zy} đối với mặt cắt hình chữ I:

Xét dầm chịu uốn ngang phẳng có mặt cắt ngang hình chữ I hình 2.10. Để đơn giản ta có thể coi mặt cắt bao gồm ba hình chữ nhật ghép lại: Hình chữ nhật long rộng d, cao (h-2t) và hai hình chữ nhật đế rộng b cao t, hình 2.10b.



Hình 3.10.

Thực tế cho thấy ứng suất tiếp do Q_y gây ra ở phần đế rất bé so với phần lòng. Do vậy ở đây ta chỉ xét sự phân bố ứng suất tiếp τ_{yz} ở phần long mặt cắt chữ I mà thôi.

Ta xét điểm bất kỳ A(x,y) thuộc long ta có: bc=d.$S_x^c = S_x - \frac{1}{2}dy^2$

Suy ra: $\tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^c}{J_x.bc} = \frac{Q_y\left(S_x - \frac{1}{2}dy^2\right)}{J_x.d}$(3.15)

Từ (3.15) ta nhận thấy rằng: Luật phân bố τ_{zy} của phần lòng mặt cắt chữ I là parabol bậc hai đối với y. Với y=0 (những điểm nằm trên trục trung hòa ox) thì:

$$\tau_{zy}\,(0) = \tau_{max} = \frac{Q_y S_x}{J_x.bc}(3.16)$$

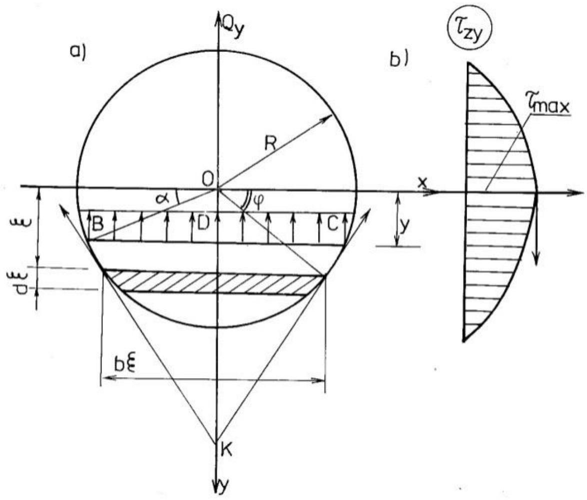
Đối với điểm C tiếp giáp giữa long và đế của chữ I, nhưng thuộc phần long thì ta có: $y_c = \frac{h}{2} - t$ Từ đó ta có:

$$\tau_c = \tau_1 = \tau_{zy}\left(\frac{h}{2} - t\right) = \frac{Q_y\left[S_x - \frac{1}{2}d\left(\frac{h}{2}-t\right)^2\right]}{J_x.d}\ (3.17)$$

Biểu đồ τ_{zy}^1 của phần long mặt cắt chữ I được vẽ trên, hình 3.10c.

e. Luật phân bố ứng suất tiếp τ_{zy} đối với mặt cắt hình tròn:

Xét dầm chịu uốn ngang phẳng có mặt cắt ngang hình tròn bán kính R, và lực cắt trên mặt cắ này là Q_y, hình 3.11. Ta xét ứng suất tiếp trên đường BC song song với trục ox và cách ox một khoảng bằng y. Ta thấy rằng tại các điểm biên B,C ứng suất tiếp τ tiếp tuyến với chu vi hình tròn và do đối xứng thì ứng suất tiếp tại D có phương y.



Hình 2.11.

Ta thừa nhận rằng ứng suất tiếp tại các điểm khác nhau trên BC có phương qua điểm K đồng thời thành phần song song oy của chúng là bằng nhau, nghĩa là thành phần τ_{zy} phân bố đều trên BC, hình 3.11a. Ta đi tìm luật phân bố của τ_{zy}. Ta có:

bc=2R.cosα

$$S_x^c = \int_{Fc} \rho dF = \int_y^R \rho bdF = \int_\alpha^{\pi/2} Rsin\varphi .2Rcos\varphi .d(Rsin\varphi)$$

$$= 2R^3 \int_\alpha^{\pi/2} cos^2\varphi .sin\varphi d(\varphi)$$

$$= -2R^3 \int_\alpha^{\pi/2} cos^2\varphi d(cos\varphi) = \frac{2}{3} R^3 cos^3\alpha$$

Suy ra: $\tau_{zy} = \frac{Q_y\frac{2}{3}R^3cos^3\alpha}{J_x.2Rcos\alpha} = \frac{Q_yR^2cos^3\alpha}{3J_x} = \frac{Q_yR^2(1-sin^2\alpha)}{3J_x}$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y(R^2-y^2)}{3J_x} \quad (2.18)$$

Biểu đồ τ_{zy} được vẽ trên hình 3.11b, trong đó:

$$\tau_{zy}(0) = \tau_{max} = \frac{Q_yR^2}{3J_x} = \frac{4Q_y}{3\pi R^2} = \frac{4Q_y}{3F} \quad (2.19)$$

Biểu đồ τ_{zy} của mặt cắt hình tròn được vẽ trên, hình 3.11b.

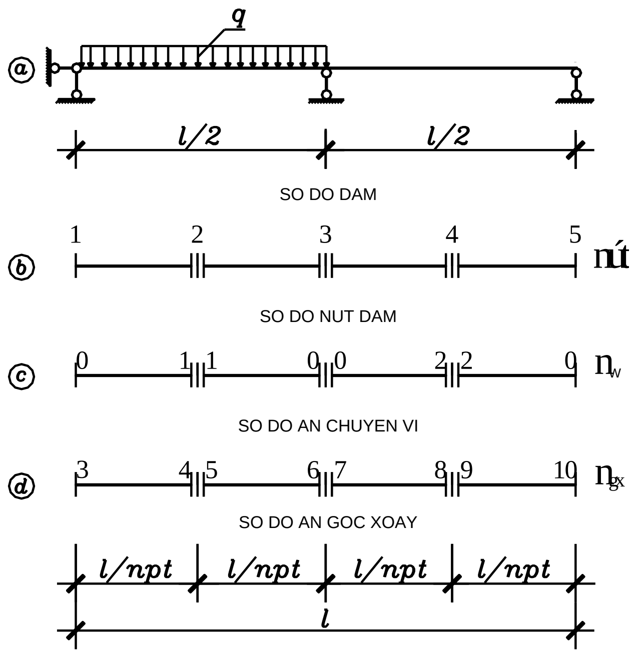
3.2. Giải bài toán dầm liên tục bằng phương pháp phần tử hữu hạn

3.2.1. Tính toán dầm liên tục

Ví dụ 3.1: Dầm liên tục (hình 3.1)

Xác định nội lực và chuyển vị của dầm liên tục tổng chiều dài các nhịp l, độ cứng uốn EJ, chịu tải phân bố đều q, hình 3.1a.

Rời rạc hóa kết cấu dầm ra thành n_{pt} phần tử.Các nút của phần tử phải trùng với vị trí đặt lực tập trung, hay vị trí thay đổi tiết diện, chiều dài các phần tử có thể khác nhau.



Hình 3.1. *Dầm liên tục hai nhịp*

Mỗi phần tử có 4 ẩn $v_1, v_2, \theta_1, \theta_2$ vậy nếu n_{pt} phần tử rời rạc thì tổng cộng có $4x\,n_{pt}$ ẩn. Nhưng vì cần đảm bảo liên tục giữa các chuyển vị là chuyển vị của nút cuối phần tử thứ e bằng chuyển vị của nút đầu phầntử thứ $(e+1)$ nên số ẩn của thanh sẽ nhỏ hơn $4x\,n_{pt}$.Khi giải ta chỉ cần đảm bảo điều kiện liên tục của chuyển vị còn điều kiện liên tục về góc xoay được xét bằng cách cách đưa vào các điều kiện ràng buộc. Ví dụ dầm trong (ví dụ 3.1a) ta chia thành 4 phần tử (hình 3.1b).

Khi chia dầm thành 4 phần tử thì số nút dầm sẽ là 5, thứ tự từ trái sang phải là [1, 2, 3, 4, 5] (hình 3.1b), số ẩn chuyển vị n_w=, thứ tự từ trái sang phải là [1, 2] (hình 3.1c), ở đây ẩn chuyển vị tại hai đầu và vị trí gối trung gian của dầm bằng không, ẩn góc xoay n_{gx}=8, thứ tự từ trái sang phải là [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10] (hình 3.1d).

Như vậy, tổng cộng số ẩn là 10 ẩn < 4x4=16 ẩn. Gọi ma trận n_w là ma trận chuyển vị có kích thước $n_w\left(n_{pt},2\right)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ẩn số là chuyển vị tại nút của các phần tử (hình 3.1).

$$n_w(1,:)=[0 \quad 1]; n_w(2,:)=[1 \quad 0]; n_w(3,:)=[0 \quad 2]; n_w(4,:)=[2 \quad 0]$$

$$n_w=[0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 2 \quad 0]$$

Gọi ma trận n_{gx}là ma trận chuyển vị có kích thước $n_{gx}(n_{pt},2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ẩn số là góc xoay tại nút của các phần tử (hình 3.5).

$$n_{gx}(1,:)=[3 \quad 4]; n_{gx}(2,:)=[5 \quad 6]; n_{gx}(3,:)=[7 \quad 8]; n_{gx}(4,:)=[9 \quad 10]$$

$$n_{gx}=[3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10]$$

Sau khi biết ẩn số thực của dầm ta có thể xây dựng độ cứng tổng thể của dầm (có rất nhiều cách ghép nối phần tử khác nhau, tùy vào trình độ lập trình của mỗi người nên tác giả không trình bày chi tiết cách ghép nối các phần tử lại để được ma trận độ cứng của toàn dầm và có thể xem trong code mô đun chương trình của tác giả)

Nếu bài toán có n_w ẩn số chuyển vị và n_{gx} ẩn số góc xoay thì ma trận độ cứng của dầm là K có kích thước (nxn), $K\left(n,n\right)$với $n=(n_w+n_{gx})$. Như ở ví dụ 3.1, n=10. Bây giờ xét điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử.

Điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử được viết như sau:

$$\left.\frac{dy_i}{dx}\right|_{nut2}-\left.\frac{dy_{i+1}}{dx}\right|_{nut1}=0 \qquad \text{(a)}$$

hay:

$$\left.\begin{aligned}
&\delta\lambda_1\left[\frac{dy_1}{dx}\bigg|_{nut2}-\frac{dy_2}{dx}\bigg|_{nut1}\right]=0\\
&\delta\lambda_2\left[\frac{dy_2}{dx}\bigg|_{nut2}-\frac{dy_3}{dx}\bigg|_{nut1}\right]=0\\
&\delta\lambda_3\left[\frac{dy_3}{dx}\bigg|_{nut2}-\frac{dy_4}{dx}\bigg|_{nut1}\right]=0
\end{aligned}\right\}\quad\text{(b)}$$

Trong đó λ_i cũng là ẩn số của bài toán (có k ẩn số), do đó tổng số ẩn số của bài toán lúc đó là (n+k) do đó ma trận độ cứng của phần tử lúc này cũng phải thêm k dòng và k cột như vậy kích thước của ma trận độ cứng là $K(n+k, n+k)$. Gọi k_1 là góc xoay tại nút 2 của phần tử trước, k_2 là góc xoay tại nút 1 của phần tử sau thì ta có các hệ số trong ma trận độ cứng K:

$$k(n+i, k_1)=\frac{2}{\Delta x};\ k(n+i, k_2)=-\frac{2}{\Delta x}\ (i=1\div k)\qquad\text{(c)}$$

$$k(k_1, n+i)=\frac{2}{\Delta x};\ k(k_2, n+i)=-\frac{2}{\Delta x}\ (i=1\div k)\qquad\text{(d)}$$

Nếu có hai phần tử thì có một điều kiện về góc xoay, có n_{pt} phần tử thì có $(2n_{pt}-1)$ điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử. Như vậy cuối cùng ta sẽ thiết lập được phương trình:

$$[K]\{\Delta\}=\{F\}\quad\text{(e)}$$

trong đó: $\{F\} = \begin{bmatrix} \left.\begin{matrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{matrix}\right\} so-hang = n \\ \left.\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right\} so-hang = k \end{bmatrix}$; $\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{Bmatrix}$ là ẩn số của bài toán

Trong ví dụ 3.1 khi chia thanh ra thành 4 phần tử, ta có:

- Ma trận độ cứng phần tử [K_e], như sau:

$$[K_e] = \begin{bmatrix} 768 & -768 & 96 & 96 \\ -768 & 768 & -96 & -96 \\ 96 & -96 & 16 & 8 \\ 96 & -96 & 8 & 16 \end{bmatrix}$$

- Ma trận độ cứng toàn dầm [K]:

Ghép nối các ma trận độ cứng phần tử [K_e] vào hệ tọa độ chung, ta được ma trận độ cứng tổng thể của toàn kết cấu như sau:

$$[K]=\begin{bmatrix} 1536 & 0 & -96 & -96 & 96 & 96 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -96 & 1056 \\ 0 & 1536 & 0 & 0 & 0 & 0 & -96 & -96 & 96 & 96 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -96 & 0 & 16 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & -128 \\ -96 & 0 & 8 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8 & -136 \\ 96 & 0 & 0 & 0 & 16 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 96 & 0 & 0 & 0 & 8 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -96 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 8 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -96 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 96 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 8 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 96 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -96 & 0 & 16 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1056 & 0 & -128 & -136 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Véc tơ lực nút{F}:

$$[F] = \begin{Bmatrix} 0.25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Giải phương trình (e) ta nhận được:

$$\{\Delta\} = [K]^{-1}\{F\}$$

Theo ngôn ngữ lập trình Matlab ta có thể viết:

$$\{\Delta\} = [K] \backslash \{F\}$$

Kết quả chuyển vị, góc xoay tại các nút:

$$\{W\} = \begin{Bmatrix} W_2 \\ W_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0002 \\ -0.0001 \end{Bmatrix} x\ Pl^3 \quad ; \quad \{\varphi\} = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0010 \\ 0.0010 \\ -0.0014 \\ 0.0002 \\ 0.0007 \end{Bmatrix} x\ Pl^2$$

Mômen uốn của dầm:

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.01354 \\ -0.0083 \\ -0.0042 \\ 0 \end{Bmatrix} x\ Pl$$

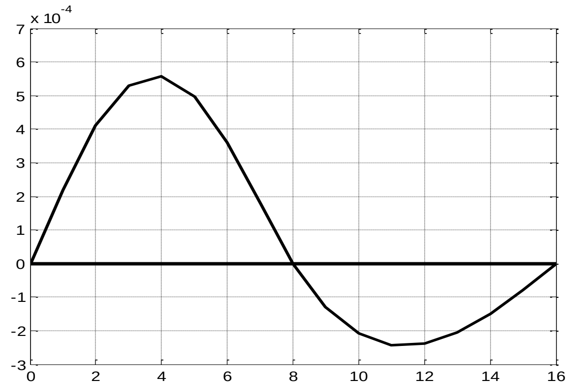
Ta thấy kết quả trên:

- Khi chia dầm thành 4 phần tử nhận được kết quả chưa trùng khớp với kết quả chính xác tại một số mặt cắt dầm.

- Khi chia dầm thành 16 phần tử ta nhận được kết quả như sau:

+ Về chuyển vị, hình 3.2a.

$$\{W\}=\begin{Bmatrix} W_2 \\ W_4 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0.0005571 \\ -0.0002389 \end{Bmatrix} x\ Pl^3$$

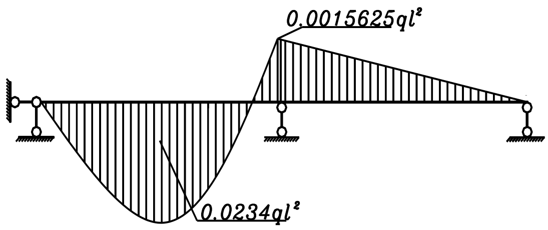


Hình 3.2a. Đường độ võng của dầm

trùng khớp với kết quả chính xác

+ Về chuyển vị, hình 3.4a.

$$\{M\}=\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.02361 \\ -0.01529 \\ -0.007644 \\ 0 \end{Bmatrix} x\ Pl$$



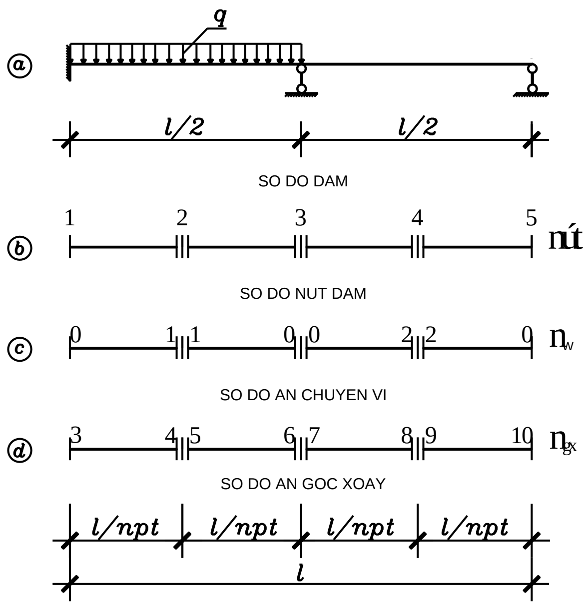
Hình 3.2b. Biểu đồ M

gần như trùng khớp với kết quả chính xác theo hình 3.2b.

Ví dụ 3.2: Dầm liên tục (hình 3.3)

Xác định nội lực và chuyển vị của dầm có tổng chiều dài các nhịp l, độ cứng uốn EJ, chịu tải trọng tập trung, hình 3.3a.

Rời rạc hóa kết cấu dầm ra thành n_{pt} phần tử.Các nút của phần tử phải trùng với vị trí đặt lực tập trung, hay vị trí thay đổi tiết diện, chiều dài các phần tử có thể khác nhau. Mỗi phần tử có 4 ẩn $v_1, v_2, \theta_1, \theta_2$ vậy nếu n_{pt} phần tử rời rạc thì tổng cộng có $4n_{pt}$ ẩn.



Hình 3.3. Dầm hai nhịp

Nhưng vì cần đảm bảo liên tục giữa các chuyển vị là chuyển vị của nút cuối phần tử thứ e bằng chuyển vị của nút đầu phầntử thứ $(e+1)$ nên số bậc tự do của thanh sẽ nhỏ hơn $4n_{pt}$ .Khi giải ta chỉ cần đảm bảo điều kiện liên tục của chuyển vị còn điều kiện liên tục về góc xoay được xét bằng cách cách đưa vào các điều kiện ràng buộc. Ví dụ dầm trong (ví dụ 3.3a) ta chia thành 4 phần tử (hình 3.3b)

Khi chia dầm thành 4 phần tử thì số nút dầm sẽ là 5, thứ tự từ trái sang phải là [1, 2, 3, 4, 5] (hình 3.1b), số ẩn chuyển vị n_w=, thứ tự từ trái sang phải là [1, 2] (hình 3.1c), ở đây ẩn chuyển vị tại hai đầu và vị trí gối trung gian của dầm bằng không, ẩn góc xoay n_{gx}=8, thứ tự từ trái sang phải là [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10] (hình 3.1d).

Như vậy, tổng cộng số ẩn là 10 ẩn < 4x4=16 ẩn. Gọi ma trận n_w là ma trận chuyển vị có kích thước $n_w\left(n_{pt},2\right)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ẩn số là chuyển vị tại nút của các phần tử (hình 3.1).

$$n_w(1,:)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}; n_w(2,:)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}; n_w(3,:)=\begin{bmatrix}0 & 2\end{bmatrix}; n_w(4,:)=\begin{bmatrix}2 & 0\end{bmatrix}$$

$$n_w=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

Gọi ma trận n_{gx} là ma trận chuyển vị có kích thước $n_{gx}(n_{pt},2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ẩn số là góc xoay tại nút của các phần tử (hình 3.5).

$$n_{gx}(1,:)=\begin{bmatrix}3 & 4\end{bmatrix}; n_{gx}(2,:)=\begin{bmatrix}5 & 6\end{bmatrix}; n_{gx}(3,:)=\begin{bmatrix}7 & 8\end{bmatrix}; n_{gx}(4,:)=\begin{bmatrix}9 & 10\end{bmatrix}$$

$$n_{gx}=\begin{bmatrix}3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10\end{bmatrix}$$

Sau khi biết ẩn số thực của dầm ta có thể xây dựng độ cứng tổng thể của dầm (có rất nhiều cách ghép nối phần tử khác nhau, tùy vào trình độ lập trình của mỗi người nên tác giả không trình bày chi tiết cách ghép nối các phần tử lại để được ma trận độ cứng của toàn dầm và có thể xem trong code mô đun chương trình của tác giả)

Nếu bài toán có n_w ẩn số chuyển vị và n_{gx} ẩn số góc xoay thì ma trận độ cứng của dầm là K có kích thước (nxn), $K\left(n,n\right)$với n=(n_w+n_{gx}). Như ở ví dụ 3.2, n=10. Bây giờ xét điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử.

Điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử được viết như sau:

$$\left.\frac{dy_i}{dx}\right|_{nut2}-\left.\frac{dy_{i+1}}{dx}\right|_{nut1}=0 \quad \text{(a)}$$

hay: $$\left.\begin{aligned} &\delta\lambda_1\left[\left.\frac{dy_1}{dx}\right|_{nut2} - \left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{nut1}\right] = 0 \\ &\delta\lambda_2\left[\left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{nut2} - \left.\frac{dy_3}{dx}\right|_{nut1}\right] = 0 \\ &\delta\lambda_3\left[\left.\frac{dy_3}{dx}\right|_{nut2} - \left.\frac{dy_4}{dx}\right|_{nut1}\right] = 0 \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

Trong đó λ_i cũng là ẩn số của bài toán (có k ẩn số), do đó tổng số ẩn số của bài toán lúc đó là (n+k) do đó ma trận độ cứng của phần tử lúc này cũng phải thêm k dòng và k cột như vậy kích thước của ma trận độ cứng là $K(n+k, n+k)$. Gọi k_1 là góc xoay tại nút 2 của phần tử trước, k_2 là góc xoay tại nút 1 của phần tử sau thì ta có các hệ số trong ma trận độ cứng K:

$$k(n+i, k_1) = \frac{2}{\Delta x};\ k(n+i, k_2) = -\frac{2}{\Delta x}\ (i = 1 \div k) \quad (c)$$

$$k(k_1, n+i) = \frac{2}{\Delta x};\ k(k_2, n+i) = -\frac{2}{\Delta x}\ (i = 1 \div k) \quad (d)$$

Nếu có hai phần tử thì có một điều kiện về góc xoay, có n_{pt} phần tử thì có $(2n_{pt} - 1)$ điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử. Như vậy cuối cùng ta sẽ thiết lập được phương trình:

$$[K]\{\Delta\} = \{F\} \quad (e)$$

$$\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{Bmatrix}$$

trong đó: $\{F\} = \begin{bmatrix} \left.\begin{matrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{matrix}\right\} so-hang=n \\ \left.\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right\} so-hang=k \end{bmatrix}$; $\{\Delta\}$ là ẩn số của bài toán

Trong ví dụ 3.2 khi chia thanh ra thành 4 phần tử, ta có:

- Ma trận độ cứng phần tử [K$_e$], như sau:

$$[K_e] = \begin{bmatrix} 768 & -768 & 96 & 96 \\ -768 & 768 & -96 & -96 \\ 96 & -96 & 16 & 8 \\ 96 & -96 & 8 & 16 \end{bmatrix}$$

- Ma trận độ cứng toàn dầm [K]:

Ghép nối các ma trận độ cứng phần tử [K_e] vào hệ tọa độ chung, ta được ma trận độ cứng tổng thể của toàn kết cấu như sau:

$$[K]=\begin{bmatrix}
1536 & 0 & -96 & -96 & 96 & 96 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1536 & 0 & 0 & 0 & 0 & -96 & -96 & 96 & 96 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-96 & 0 & 16 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-96 & 0 & 8 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
96 & 0 & 0 & 0 & 16 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
96 & 0 & 0 & 0 & 8 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -96 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -96 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 96 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 96 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1056 & 0 & -128 & -136 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

- Véc tơ lực nút{F}**:**

$$[F]=\left\{\begin{matrix} 0.25\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{matrix}\right\}$$

Giải phương trình (e) ta nhận được:

$$\{\Delta\}=[K]^{-1}\{F\}$$

Theo ngôn ngữ lập trình Matlab ta có thể viết:

$$\{\Delta\} = [K] \backslash \{F\}$$

Kết quả chuyển vị, góc xoay tại các nút:

$$\{W\} = \begin{Bmatrix} W_2 \\ W_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0001073 \\ -0.00007233 \end{Bmatrix} x\ Pl^3 \quad ;$$

$$\{\varphi\} = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.0008 \\ -0.0008 \\ 0.0001 \\ 0.0004 \end{Bmatrix} x\ Pl^2$$

Mômen uốn của dầm:

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.003637 \\ 0.007219 \\ -0.004629 \\ -0.002315 \\ 0 \end{Bmatrix} x\ Pl$$

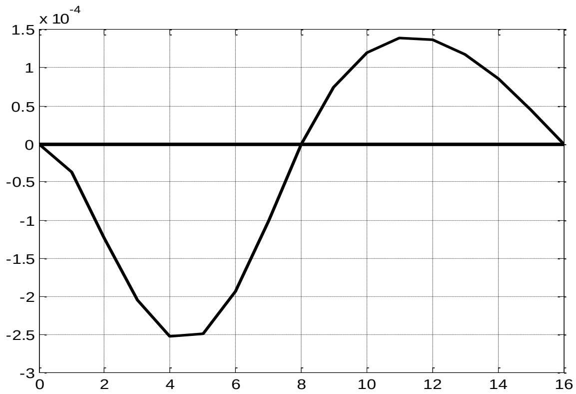
Ta thấy kết quả trên:

- Khi chia dầm thành 4 phần tử nhận được kết quả chưa trùng khớp với kết quả chính xác tại một số mặt cắt dầm.

- Khi chia dầm thành 16 phần tử ta nhận được kết quả như sau:

+ Về chuyển vị, hình 3.4a.

$$\{W\} = \begin{Bmatrix} W_2 \\ W_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0009263 \\ 0.0004177 \end{Bmatrix} x\ Pl^3$$

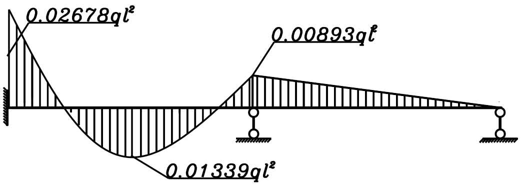


Hình 3.4a. *Đường độ võng của dầm*

trùng khớp với kết quả chính xác

+ Về chuyển vị, hình 3.4a.

$$\{M\}=\begin{Bmatrix} M_1\\ M_2\\ M_3\\ M_4\\ M_5\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -0.06739\\ 0.07146\\ -0.02673\\ -0.01337\\ 0\end{Bmatrix} x\, Pl$$

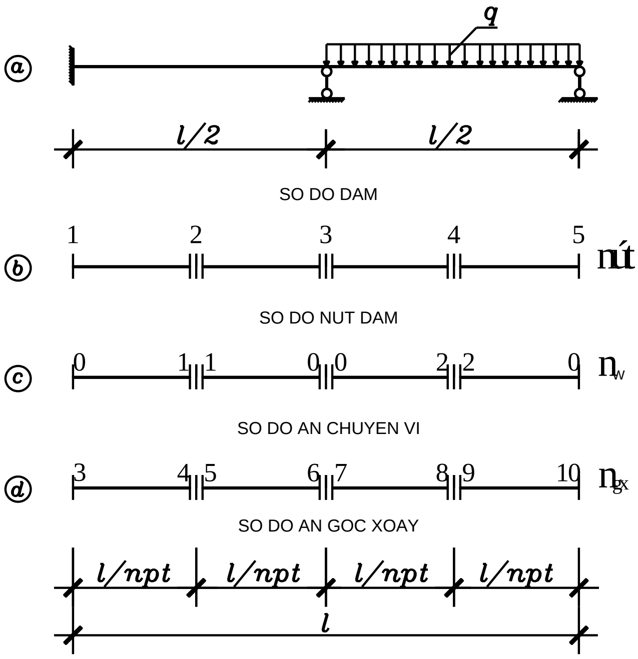


Hình 3.4b. *Biểu đồ M*

gần như trùng khớp với kết quả chính xác theo hình 3.5b.

Ví dụ 3.3: Dầm hai nhịp (hình 3.5)

Xác định nội lực và chuyển vị của dầm liên tục hai nhịp có tổng chiều dài các nhịp l, độ cứng uốn EJ, chịu tải trọng tập trung P tại nhịp 2, hình 3.5a. Rời rạc hóa kết cấu dầm ra thành n_{pt} phần tử.Các nút của phần tử phải trùng với vị trí đặt lực tập trung, hay vị trí thay đổi tiết diện, chiều dài các phần tử có thể khác nhau. Mỗi phần tử có 4 ẩn $v_1, v_2, \theta_1, \theta_2$ vậy nếu n_{pt} phần tử rời rạc thì tổng cộng có $4n_{pt}$ ẩn.



Hình 3.5. Dầm hai nhịp

Nhưng vì cần đảm bảo liên tục giữa các chuyển vị là chuyển vị của nút cuối phần tử thứ e bằng chuyển vị của nút đầu phầntử thứ $(e+1)$ nên số bậc tự do của thanh sẽ nhỏ hơn 4 n_{pt} .Khi giải ta chỉ cần đảm bảo điều kiện liên tục của chuyển vị còn điều kiện liên tục về góc xoay được xét bằng cách cách đưa vào các điều kiện ràng buộc. Ví dụ dầm trong (ví dụ 3.5a) ta chia thành 4 phần tử (hình 3.5b)

Khi chia dầm thành 4 phần tử thì số nút dầm sẽ là 5, thứ tự từ trái sang phải là [1, 2, 3, 4, 5] (hình 3.5b), số ẩn chuyển vị n_w=, thứ tự từ trái sang phải là [1, 2] (hình 3.5c), ở đây ẩn chuyển vị tại hai đầu và vị trí gối trung gian của dầm bằng không, ẩn góc xoay n_{gx}=8, thứ tự từ trái sang phải là [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10] (hình 3.5d).

Như vậy, tổng cộng số ẩn là 10 ẩn < 4x4=16 ẩn. Gọi ma trận n_w là ma trận chuyển vị có kích thước $n_w\left(n_{pt},2\right)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ẩn số là chuyển vị tại nút của các phần tử (hình 3.1).

$$n_w(1,:)=[0 \quad 1]; n_w(2,:)=[1 \quad 0]; n_w(3,:)=[0 \quad 2]; n_w(4,:)=[2 \quad 0]$$

$$n_w=[0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 2 \quad 0]$$

Gọi ma trận n_{gx} là ma trận chuyển vị có kích thước $n_{gx}(n_{pt},2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ẩn số là góc xoay tại nút của các phần tử (hình 3.5).

$$n_{gx}(1,:)=[3 \quad 4]; n_{gx}(2,:)=[5 \quad 6]; n_{gx}(3,:)=[7 \quad 8]; n_{gx}(4,:)=[9 \quad 10]$$

$$n_{gx}=[3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10]$$

Sau khi biết ẩn số thực của dầm ta có thể xây dựng độ cứng tổng thể của dầm (có rất nhiều cách ghép nối phần tử khác nhau, tùy vào trình độ lập trình của mỗi người nên tác giả không trình bày chi tiết cách ghép nối các phần tử lại để được ma trận độ cứng của toàn dầm và có thể xem trong code mô đun chương trình của tác giả)

Nếu bài toán có n_w ẩn số chuyển vị và n_{gx} ẩn số góc xoay thì ma trận độ cứng của dầm là K có kích thước (nxn), $K(n,n)$ với n=(n_w+n_{gx}). Như ở ví dụ 3.3, n=10. Bây giờ xét điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử.

Điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử được viết như sau:

$$\left.\frac{dy_i}{dx}\right|_{nut2} - \left.\frac{dy_{i+1}}{dx}\right|_{nut1} = 0 \qquad \text{(a)}$$

hay:

$$\left.\begin{aligned} &\delta\lambda_1\left[\left.\frac{dy_1}{dx}\right|_{nut2} - \left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{nut1}\right] = 0 \\ &\delta\lambda_2\left[\left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{nut2} - \left.\frac{dy_3}{dx}\right|_{nut1}\right] = 0 \\ &\delta\lambda_3\left[\left.\frac{dy_3}{dx}\right|_{nut2} - \left.\frac{dy_4}{dx}\right|_{nut1}\right] = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(b)}$$

Trong đó λ_i cũng là ẩn số của bài toán (có k ẩn số), do đó tổng số ẩn số của bài toán lúc đó là (n+k) do đó ma trận độ cứng của phần tử lúc này cũng phải thêm k dòng và k cột như vậy kích thước của ma trận độ cứng là $K(n+k, n+k)$. Gọi k_1 là góc xoay tại nút 2 của phần tử trước, k_2 là góc xoay tại nút 1 của phần tử sau thì ta có các hệ số trong ma trận độ cứng K:

$$k(n+i, k_1) = \frac{2}{\Delta x};\ k(n+i, k_2) = -\frac{2}{\Delta x}\ (i = 1 \div k) \qquad \text{(c)}$$

$$k(k_1, n+i) = \frac{2}{\Delta x};\ k(k_2, n+i) = -\frac{2}{\Delta x}\ (i = 1 \div k) \qquad \text{(d)}$$

Nếu có hai phần tử thì có một điều kiện về góc xoay, có n_{pt} phần tử thì có $(2n_{pt} - 1)$ điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử. Như vậy cuối cùng ta sẽ thiết lập được phương trình:

$$[K]\{\Delta\} = \{F\} \qquad \text{(e)}$$

$$
\text{trong đó:}\ \{F\} = \begin{bmatrix} \left.\begin{matrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{matrix}\right\} \text{so} - \text{hang} = n \\ \left.\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right\} \text{so} - \text{hang} = k \end{bmatrix};\qquad \{\Delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{Bmatrix} \text{ là ẩn số của bài toán}
$$

Trong ví dụ 3.3 khi chia thanh ra thành 4 phần tử, ta có:

- Ma trận độ cứng phần tử [K_e], như sau:

$$
[K_e] = \begin{bmatrix} 768 & -768 & 96 & 96 \\ -768 & 768 & -96 & -96 \\ 96 & -96 & 16 & 8 \\ 96 & -96 & 8 & 16 \end{bmatrix}
$$

- Ma trận độ cứng toàn dầm [K]:

Ghép nối các ma trận độ cứng phần tử [K_e] vào hệ tọa độ chung, ta được ma trận độ cứng tổng thể của toàn kết cấu như sau:

$$
[K] = \begin{bmatrix}
1536 & 0 & -96 & -96 & 96 & 96 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1536 & 0 & 0 & 0 & 0 & -96 & -96 & 96 & 96 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-96 & 0 & 16 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-96 & 0 & 8 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
96 & 0 & 0 & 0 & 16 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
96 & 0 & 0 & 0 & 8 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -96 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -96 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 96 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 96 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1056 & 0 & -128 & -136 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

- Véc tơ lực nút{F}:

$$[F] = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Giải phương trình (e) ta nhận được:

$$\{\Delta\} = [K]^{-1}\{F\}$$

Theo ngôn ngữ lập trình Matlab ta có thể viết:

$$\{\Delta\} = [K]\backslash\{F\}$$

Kết quả chuyển vị, góc xoay tại các nút:

$$\{W\} = \begin{Bmatrix} W_2 \\ W_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0001 \\ 0.0004 \end{Bmatrix} x\ Pl^3 \; ; \quad \{\varphi\} = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0000 \\ -0.0006 \\ 0.0016 \\ 0.0003 \\ -0.0027 \end{Bmatrix} x\ Pl^2$$

Mômen uốn của dầm:

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.002451 \\ 0.000603 \\ 0.01393 \\ -0.02429 \\ 0 \end{Bmatrix} x\ Pl$$

Ta thấy kết quả trên:

- Khi chia dầm thành 4 phần tử nhận được kết quả chưa trùng khớp với kết quả chính xác tại một số mặt cắt dầm.

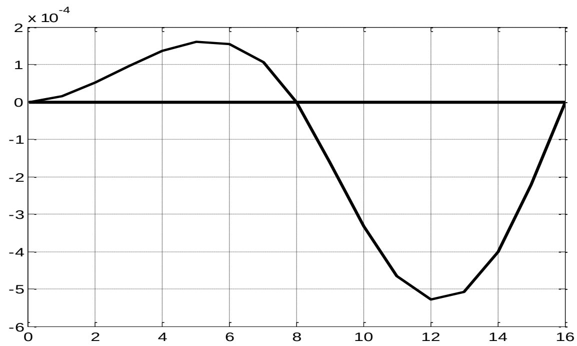
- Khi chia dầm thành 16 phần tử ta nhận được kết quả như sau:

+ Về chuyển vị, hình 3.6a.

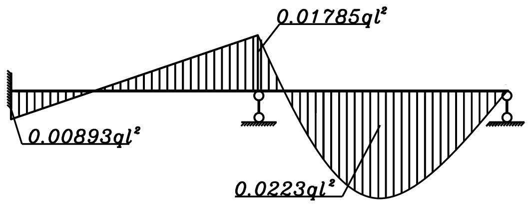
$$\{W\}=\begin{Bmatrix} W_2 \\ W_4 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0.0001371 \\ -0.0005289 \end{Bmatrix} x\ Pl^3$$

trùng khớp với kết quả chính xác

$$\{M\}=\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -0.007822 \\ 0.004397 \\ 0.01758 \\ -0.02246 \\ 0 \end{Bmatrix} x\ Pl$$



Hình 3.6a. *Đường độ võng của dầm*



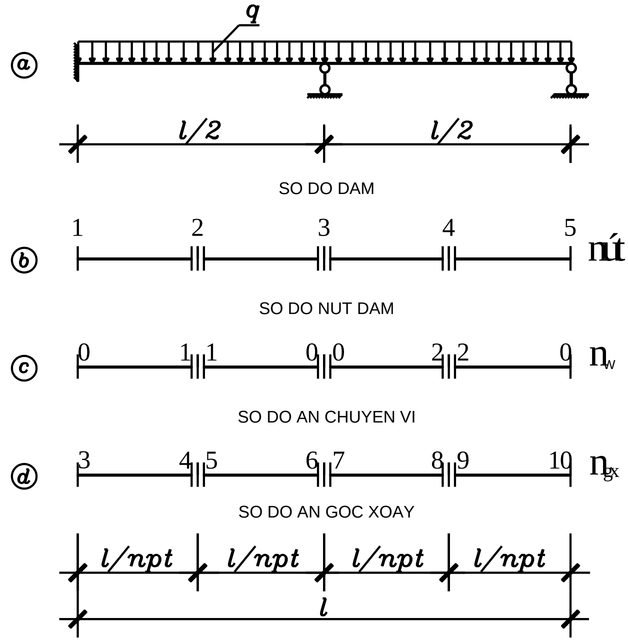
Hình 3.6a. *Biểu đồ M*

Nhận xét: Nếu ta rời rạc hóa dầm thành 16 phần tử, kết quả sẽ trùng khớp với kết quả chính xác nhận được bằng phương pháp giải tích. Khi đó biểu đồ mômen uốn và đường độ võng của dầm như hình 3.6b:

Ví dụ 3.4: Dầm hai nhịp (hình 3.7)

Xác định nội lực và chuyển vị của dầm hai nhịp chiều dài nhịp l, độ cứng uốn EJ, chịu tải trọng phân bố đều q trên toàn dầm, hình 3.7a.

Rời rạc hóa kết cấu dầm ra thành n_{pt} phần tử.Các nút của phần tử phải trùng với vị trí đặt lực tập trung, hay vị trí thay đổi tiết diện, chiều dài các phần tử có thể khác nhau.



Hình 3.7. Dầm hai nhịp

Mỗi phần tử có 4 ẩn $v_1, v_2, \theta_1, \theta_2$ vậy nếu n_{pt} phần tử rời rạc thì tổng cộng có $4n_{pt}$ ẩn. Nhưng vì cần đảm bảo liên tục giữa các chuyển vị là chuyển vị của nút cuối phần tử thứ e bằng chuyển vị của nút đầu phầntử thứ $(e+1)$ nên số bậc tự do của thanh sẽ nhỏ hơn $4n_{pt}$.Khi giải ta chỉ cần đảm bảo điều kiện liên tục của chuyển vị còn điều kiện liên tục về góc xoay được xét bằng cách cách đưa vào các điều kiện ràng buộc. Ví dụ dầm trong (ví dụ 3.1a) ta chia thành 4 phần tử (hình 3.1b)

Như vậy, tổng cộng số ẩn là 11 ẩn < 4x4=16 ẩn. Gọi ma trận n_w là ma trận chuyển vị có kích thước $n_w(n_{pt}, 2)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ẩn số là chuyển vị tại nút của các phần tử (hình 3.1).

$$n_w(1,:) = [0 \quad 1]; n_{gx}(2,:) = [1 \quad 2]; n_{gx}(3,:) = [2 \quad 3]; n_{gx}(4,:) = [3 \quad 4]$$

$$n_w = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Gọi ma trận n_θ là ma trận chuyển vị có kích thước $n_\theta\left(n_{pt},2\right)$ là ma trận có n_{pt} hàng và 2 cột chứa các ẩn số là góc xoay tại nút của các phần tử (hình 3.5).

$$n_{gx}(1,:) = \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}; n_{gx}(2,:) = \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix}; n_{gx}(3,:) = \begin{bmatrix} 9 & 10 \end{bmatrix}; n_{gx}(4,:) = \begin{bmatrix} 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$n_{gx} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

Sau khi biết ẩn số thực của các thanh ta có thể xây dựng độ cứng tổng thể của thanh (có rất nhiều cách ghép nối phần tử khác nhau, tùy vào trình độ lập trình của mỗi người nên tác giả không trình bày chi tiết cách ghép nối các phần tử lại để được ma trận độ cứng của toàn dầm và có thể xem trong code mô đun chương trình của tác giả)

Nếu bài toán có n_{cv} ẩn số chuyển vị và n_{gx} ẩn số góc xoay thì ma trận độ cứng của dầm là K có kích thước (nxn), $K\left(n,n\right)$ với $n = \left(n_{cv} + n_{gx}\right)$. Như ở ví dụ 3.3, $n = 11$. Bây giờ xét điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử.

Điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử được viết như sau:

$$\left.\frac{dy_i}{dx}\right|_{nut2} - \left.\frac{dy_{i+1}}{dx}\right|_{nut1} = 0 \qquad \text{(a)}$$

hay:

$$\left.\begin{aligned} \delta\lambda_1\left[\left.\frac{dy_1}{dx}\right|_{nut2} - \left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{nut1}\right] = 0 \\ \delta\lambda_2\left[\left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{nut2} - \left.\frac{dy_3}{dx}\right|_{nut1}\right] = 0 \\ \delta\lambda_3\left[\left.\frac{dy_3}{dx}\right|_{nut2} - \left.\frac{dy_4}{dx}\right|_{nut1}\right] = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(b)}$$

Trong đó λ_i cũng là ẩn số của bài toán (có k ẩn số), do đó tổng số ẩn số của bài toán lúc đó là (n+k) do đó ma trận độ cứng của phần tử lúc này cũng phải thêm k dòng và k cột như vậy kích thước của ma trận độ cứng là

$K\left(n+k,n+k\right)$. Gọi k_1 là góc xoay tại nút 2 của phần tử trước, k_2 là góc xoay tại nút 1 của phần tử sau thì ta có các hệ số trong ma trận độ cứng K:

$$k\left(n+i,k_1\right)=\frac{2}{\Delta x};\ k\left(n+i,k_2\right)=-\frac{2}{\Delta x}\ (i=1\div k) \qquad \text{(c)}$$

$$k\left(k_1,n+i\right)=\frac{2}{\Delta x};\ k\left(k_2,n+i\right)=-\frac{2}{\Delta x}\ (i=1\div k) \qquad \text{(d)}$$

Nếu có hai phần tử thì có một điều kiện về góc xoay, có n_{pt} phần tử thì có $\left(2n_{pt}-1\right)$ điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử. Như vậy cuối cùng ta sẽ thiết lập được phương trình:

$$[K]\{\Delta\}=\{F\} \text{(e)}$$

trong đó: $\{F\}=\begin{bmatrix}\left.\begin{matrix}F_1\\ \vdots\\ F_n\end{matrix}\right\}so-hang=n\\ \left.\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\right\}so-hang=k\end{bmatrix}$; $\{\Delta\}=\begin{Bmatrix}\delta_1\\ \delta_1\\ \vdots\\ \delta_n\\ \lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_k\end{Bmatrix}$ là ẩn số của bài toán

Trong ví dụ 3.1 khi chia thanh ra thành 4 phần tử, ta có:

- Ma trận độ cứng phần tử [K$_e$], như sau:

$$[K_e]=\begin{bmatrix}768 & -768 & 96 & 96\\ -768 & 768 & -96 & -96\\ 96 & -96 & 16 & 8\\ 96 & -96 & 8 & 16\end{bmatrix}$$

- Ma trận độ cứng toàn dầm [K]:

Ghép nối các ma trận độ cứng phần tử [K_e] vào hệ tọa độ chung, ta được ma trận độ cứng tổng thể của toàn kết cấu như sau:

$$[K]=\begin{bmatrix}
1536 & 0 & -96 & -96 & 96 & 96 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1536 & 0 & 0 & 0 & 0 & -96 & -96 & 96 & 96 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-96 & 0 & 16 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-96 & 0 & 8 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
96 & 0 & 0 & 0 & 16 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
96 & 0 & 0 & 0 & 8 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -96 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -96 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 96 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 96 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1056 & 0 & -128 & -136 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

- Véc tơ lực nút{F}**:**

$$[F]=\begin{Bmatrix} 0.25\\ 0.25\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{Bmatrix}$$

Giải phương trình (e) ta nhận được:

$$\{\Delta\}=[K]^{-1}\{F\}$$

Theo ngôn ngữ lập trình Matlab ta có thể viết:

$$\{\Delta\} = [K] \backslash \{F\}$$

Kết quả chuyển vị và mô men uốn khichia dầm thành 16 phần tử như sau:

$$\{W\} = \begin{Bmatrix} W_2 \\ W_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0001155 \\ -0.000392 \end{Bmatrix} x\, ql^2 \; ; \qquad \{M\} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.01249 \\ -0.00929 \\ 0.02635 \\ -0.01808 \\ 0.0000 \end{Bmatrix} x\, ql^2$$

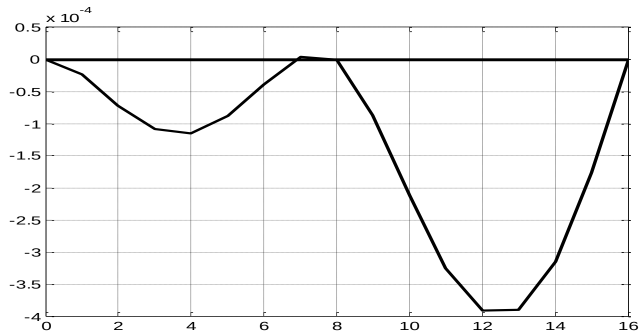
Ta thấy kết quả trên:

- Về mômen tại gối trung gian và tại giữa nhịp thứ 2 trùng khớp với kết quả giải chính xác theo phương pháp giải tích:

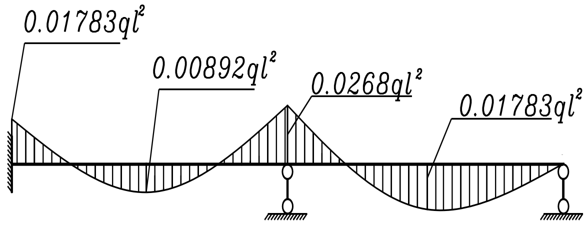
- Momen tại ngàm và giữa nhịp thứ nhất gần trùng khớp với kết quả chính xác

- Về chuyển vị kết quả trùng khớp với kết quả giải chính xác theo phương pháp giải tích:

Biểu đồ mômen uốn và đường độ võng của dầm như hình 3.8:



Hình 3.8a. *Đường độ võng của dầm*



Hình 3.8a. *Biểu đồ M*

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

KẾT LUẬN

Qua kết quả nghiên cứu từ các chương, chương 1 đến chương 3 đối với bài toán dầmliên tục chịu tác dụng của tải trọng tĩnh phân bố đều. Tác giả rút ra các kết luận sau:

1. Trình bày được các phương pháp giải bài toán cơ học kết cấu. Trình bày phương pháp phần tử hữu hạn đối với bài toán cơ học kết cấu.
2. Đãtrình bày được bài toán dầm chịu uốn theo lý thuyết dầm Euler - Bernoulli.
3. Bằng phương pháp phần tử hữu hạn, tác giả đã xác định được nội lực và chuyển vị của các dầm liên tục chịu tải trọng tĩnh phân bố đều có các điều kiện biên khác nhau. Kết quả về nội lực và chuyển vị đều trùng khớp với kết quả nhận được khi giải bằng các phương pháp hiện có.
4. Khi rời rạc hóa kết cấu với số phần tử càng nhiều thì kết quả càng tiệm cận tới kết quả chính xác nhận được từ phương pháp giải tích. Đối với bài toán dầm liên tục chịu tải trọng tĩnh phân bố đều thì để đạt được chuyển vị chính xác cần chia dầm thành từ 4 đến 16 phần tử.

KIẾN NGHỊ

Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn để giải các bài toán khác như: Dầm, khung, dàn, tấm, vỏ....

Danh mục tài liệu tham khảo

I. TIẾNG VIỆT

[1] Hà Huy Cương (2005), *Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss,* Tạp chí Khoa học và kỹ thuật, IV/ Tr. 112 ÷118.

[2] Nguyễn Văn Liên, Nguyễn Phương Thành, Đinh Trọng Bằng (2003), *Giáo trình Sức bền vật liệu,* Nhà xuất bản xây dựng, tái bản lần thứ 3, 330 trang.

[3] Phạm Văn Trung (2006), *Phương pháp mới Tính toán hệ dây và mái treo,* Luận án Tiến sỹ kỹ thuật.

[4] Nguyễn Văn Đạo (2001), *Cơ học giải tích,* Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà nội, 337 trang.

[5] Nguyễn Văn Đạo, Trần Kim Chi, Nguyễn Dũng (2005), *Nhập môn Động lực học phi tuyến và chuyển động hỗn độn.* Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà nội.

[6] Đoàn Văn Duẩn (2007), *Phương pháp nguyên lý Cực trị Gauss đối với các bài toán ổn định công trình,* Luận văn thạc sỹ kỹ thuật.

[7] Đoàn Văn Duẩn (2010), Phương pháp phần tử hữu hạn nghiên cứu ổn định uốn dọc của thanh, Tạp chí kết cấu và Công nghệ xây dựng, số 05, Qúy IV(Tr30-Tr36).

[8] Đoàn Văn Duẩn (2011),Nghiên cứu ổn định đàn hồi của thanh và hệ thanh, Luận án Tiến sỹ kỹ thuật.

[9] Đoàn Văn Duẩn (2012),Phương pháp mới tính toán dây mềm, Tạp chí kết cấu và công nghệ Xây dựng số 09, Qúy II (Tr56-Tr61).

[10] Đoàn Văn Duẩn (2014),Phương pháp chuyển vị cưỡng bức giải bài toán trị riêng và véc tơ riêng,Tạp chí Xây dựng số 11 (Tr82-Tr84).

[11] Đoàn Văn Duẩn (2015),Bài toán cơ học kết cấu dưới dạng tổng quát,Tạp chí Xây dựng số 02 (Tr59-Tr61).

[12] Đoàn Văn Duẩn (2015),Phương pháp so sánh nghiên cứu nội lực và chuyển vị của hệ dầm,Tạp chí Xây dựng số 11 (Tr56-Tr58).

[13] Đoàn Văn Duẩn (2015),Tính toán kết cấu khung chịu uốn bằng phương pháp so sánh,Tạp chí Xây dựng số 12 (Tr62-Tr64).

[14] Trần Thị Kim Huế (2005), *Phương pháp nguyên lý Cực trị Gauss đối với các bài toán cơ học kết cấu,* Luận văn thạc sỹ kỹ thuật.

[15] Nguyễn Thị Liên (2006), *Phương pháp nguyên lý Cực trị Gauss đối với các bài toán động lực học công trình,* Luận văn thạc sỹ kỹ thuật.

[16] Timoshenko C.P, Voinópki- Krige X, (1971), *Tấm và Vỏ.* Người dịch, Phạm Hồng Giang, Vũ Thành Hải, Đoàn Hữu Quang, Nxb Khoa học và kỹ thuật, Hà Nội.

II. TIẾNG PHÁP

[17] Robert L'Hermite (1974), *Flambage et Stabilité – Le flambage élastique des pièces droites*, édition Eyrolles, Paris.

III. TIẾNG ANH

[18] Stephen P.Timoshenko-Jame M.Gere (1961), *Theory of elastic stability*, McGraw-Hill Book Company, Inc, New york – Toronto – London, 541 Tr.

[19] William T.Thomson (1998), *Theory of Vibration with Applications* (Tái bản lần thứ 5). Stanley Thornes (Publishers) Ltd, 546 trang.

[20] Klaus – Jurgen Bathe (1996), *Finite Element procedures.* Part one, Prentice – Hall International, Inc, 484 trang.

[21] Klaus – Jurgen Bathe (1996), *Finite Element procedures.* Part two, Prentice – Hall International, Inc, 553 trang.

[22] Ray W.Clough, Joseph Penzien(1993), *Dynamics of Structures* (Tái bản lần thứ 2), McGraw-Hill Book Company, Inc, 738 trang.

[23] O.C. Zienkiewicz-R.L. Taylor (1991), *The finite element method* (four edition) Volume 2, McGraw-Hill Book Company, Inc, 807 trang.

[24] G.Korn-T.Korn (1961), *Mathematical Handbook for sientists and Engineers,* McGraw-Hill, New york (Bản dịch tiếng Nga, I.Bramovich chủ biên, Nhà xuất bản Nauka-Moscow, 1964).

[25] Stephen P.Timoshenko-J. Goodier (1970), *Theory of elasticity,* McGraw-Hill, New york (Bản dịch tiếng Nga, G. Shapiro chủ biên, Nhà xuất bản Nauka-Moscow, 1979), 560 trang.

[26] D.R.J. Owen, E.Hinton (1986), *Finite Elements in Plasticity:* Theory and Practice,Pineridge Press Lt.

[27] Lars Olovsson, Kjell Simonsson, Mattias Unosson (2006), *Shear locking reduction in eight-node tri-linear solid finite elements,*J. 'Computers @ Structures',84, trg 476-484.

[28] C.A.Brebbia, J.C.F.Telles, L.C.Wrobel(1984), *Boundary Element Techniques. Theory and Applications in Engineering.* Nxb Springer – Verlag.(Bản dịch tiếng Nga, 1987).

[29] Chopra Anil K (1995). *Dynamics of structures.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New – Jersey 07632.

[30] Wilson Edward L. Professor Emeritus of structural Engineering University of California at Berkeley (2002). *Three – Dimensional Static and Dynamic Analysis of structures,* Inc. Berkeley, California, USA. Third edition, Reprint January.

[31] Wilson, E. L., R. L. Taylor, W. P. Doherty and J. Ghaboussi (1971). *"Incompatible Displacement Models",* Proceedings, ORN Symposium on "Numerical and Computer Method in Structural Mechanics". University of Illinois, Urbana. September. Academic Press.

[32] Strang, G (1972). *"Variational Crimes in the Finite Element Method"* in "The Mathematical Foundations of the Finite Element Method". P.689 -710 (ed. A.K. Aziz). Academic Press.

[33] Irons, B. M. and O. C. Zienkiewicz (1968). *"The isoparametric Finite Element System – A New Concept in Finite Element Analysis",* Proc. Conf. "Recent Advances in Stress Analysis". Royal Aeronautical Society. London.

[34] Kolousek Vladimir, DSC Professor, Technical University, Pargue (1973). *Dynamics in engineering structutes.* Butter worths London.

[35] Felippa Carlos A (2004). *Introduction of finite element methods.* Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures University of Colorado Boulder, Colorado 80309-0429, USA, Last updated Fall.