BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC DÂN LẬP HẢI PHÒNG

MAI VĂN TRINH

PHƯƠNG PHÁP MỚI NGHIÊN CỨU TỐI ƯU KẾT CẤU DẦM

Chuyên ngành: **Kỹ thuật Xây dựng Công trình Dân dụng & Công nghiệp**
Mã số: **60.58.02.08**

LUẬN VĂN THẠC SỸ KỸ THUẬT

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. ĐOÀN VĂN DUẨN

Hải Phòng, 2017

MỞ ĐẦU

Tối ưu vật liệu bao giờ cũng là mục tiêu của người kỹ sư thiết kế công trình. Với sự phát triển của lý thuyết quy hoạch toán học, phương pháp tối ưu đã được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khoa học và kỹ thuật nhằm mang lại hiệu quả kinh tế cao nhất.

Vấn đề tối ưu kết cấu được nhiều nhà khoa học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu theo nhiều hướng khác nhau. Trong vòng nửa thế kỉ nay, một ngành toán học mới - lý thuyết quy hoạch toán học - đã hình thành và phát triển mạnh mẽ do những đòi hỏi cấp bách về kinh tế để thực hiện các chỉ tiêu tối ưu: nhiều nhất, ít nhất, nhanh nhất, rẻ nhất, tốt nhất...Với lý thuyết quy hoạch, người kĩ sư được trang bị thêm một công cụ toán học rất có hiệu lực để giải các bài toán tối ưu mà trước đây các phương pháp cổ điển chưa thể giải được.

Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss do GS.TSKH. Hà Huy Cương đề xuất là phương pháp cho phép áp dụng nguyên lý cực trị Gauss - vốn được phát biểu cho hệ chất điểm - để giải các bài toán cơ học vật rắn biến dạng nói riêng và bài toán cơ học môi trường liên tục nói chung. Đặc điểm của phương pháp này là bằng một cái nhìn đơn giản luôn cho phép tìm được kết quả chính xác của các bài toán.

Đối tượng, phương pháp và phạm vi nghiên cứu của đề tài

Trong luận văn này, tác giả sử dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss nói trên để xây dựng và giải bài toán tối kết cấu dầm.

Mục đích nghiên cứu của đề tài

"Nghiên cứu tối ưu kết cấu dầm bằng phương pháp mới"

Nhiệm vụ nghiên cứu của đề tài

1. Trình bày tổng quan về tối ưu hóa kết cấu
2. Trình bày cơ sở lý thuyết tính toán tối ưu trong xây dựng.
3. Sử dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss để xây dựng và giải bài toán tối ưu kết cấu dầm.
4. Lập chương trình máy tính điện tử cho các bài toán nêu trên

CHƯƠNG 1
TỔNG QUAN VỀ THIẾT KẾ TỐI ƯU KẾT CẤU DẦM

1.1. Phương pháp thiết kế tối ưu kết cấu

Trong quá trình tính toán thiết kế kết cấu theo cách thông thường nhằm mục đích xác định kích thước các phần tử kết cấu, sắp xếp, bố trí các cấu kiện, chọn vật liệu sử dụng cho từng phần tử kết cấu sao cho thoả mãn các điều kiện của tiêu chuẩn, quy phạm thiết kế, người ta thường dùng phương pháp thử dần để tính toán theo các bước sau:

1. Chọn vật liệu
2. Giả thiết các kích thước hình học
3. Kiểm tra các điều kiện cần thiết đối với kết cấu trôn cơ sở những ràng buộc, theo các trạng thái giới hạn.

Nếu các điều kiện đó không thoả mãn thì phương án trên bị loại bỏ và lại lập một phương án giả thiết khác và kiểm tra lại. Cứ như vậy cho đến khi có một phương án mà các điều kiện cần thiết với kết cấu được thỏa mãn. Đó sẽ là phương án có khả năng lựa được chọn. Với cách thử dần như vậy, số lượng phương án thử sẽ khá nhiều mà mỗi phương án tuỳ thuộc vào các giả thiết đầu như số lượng phương án được lựa chọn chỉ có một. Bởi vậy, trong số những phương án có khả năng, phải lựa chọn mọt phương án hợp lý nhất với mục tiêu của người thiết kế tức là phương án được chọn.

Việc tính thử dần các phương án kết cấu cũng đòi hỏi khối lượng tính toán lớn. Hiện nay, nhờ các phương tiện tính toán hiện đại (máy tính, các chương trình phần mềm v.v...) nên khả năng tính toán nhanh, số lượng các phương án thử cũng có thể mở rộng ra nhiều. Vì vậy, phương án được chọn sẽ dần tiến tới phương án tối ưu hoặc lân cận vùng tối ưu.

Tuy nhiên, khi khối lượng các phương án thử tăng lên rất nhiều thì nếu không có chiến lược tìm kiếm tối ưu hợp lý thì sẽ phải tốn rất nhiều thời gian và công sức tìm kiếm phương án được chọn và đôi khi phương án được chọn vẫn chưa phải là phương án thật sự tối ưu.

Từ vài thập kỷ nay, khi phương pháp số được áp dụng để giải các bài toán quy hoạch phi tuyến với khối lượng biến số và điều kiện ràng buộc lớn đã tạo ra khả năng áp dụng quy hoạch toán học trong thiết kế tối ưu kết cấu. Mô hình bài toán tối ưu kết cấu được xây dựng như sau :

1. Coi kích thước các phần tử kết cấu, các đại lượng đặc trưng vật liệu là ẩn số và gọi chúng là các biến thiết kế;
2. Xây dựng các điều kiện cần thoả mãn của kết cấu như: các điều kiện về trạng thái giới hạn, các điều kiện quy phạm, các điều kiện về thi công v.v...
3. Sử dụng các điều kiện đó dưới dạng bất phương trình hoặc phương trình có chứa biến thiết kế và coi chúng là các hàm ràng buộc.
4. Giải hệ bất phương trình và phương trình.

Hệ bất phương trình và phương trình này thường không cho một nghiệm duy nhất mà thông thường phải chọn một phương án kết cấu để sử dụng. Vì vậy, ta phải loại trừ dần các số nghiệm để đi tới lời giải tốt nhất - đó là phương án tối ưu cần tìm. Muốn đạt kết quả, người ta gán một số vô hướng nào đó vào mỗi phần tử của tập hợp các kết cấu và chọn phương án có giá trị vô hướng đạt cực trị (cực đại hoặc cực tiểu) trong số các kết cấu có khả năng. Giá trị vô hướng này là hàm với biến thiết kế và gọi là hàm mục tiêu. Vì vậy, kết cấu được chọn tương ứng với phương án có hàm mục tiêu đạt cực trị gọi là kết cấu tối ưu.

Như vậy, giải bài toán tối ưu kết cấu đã được dẫn đến giải một bài toán quy hoạch toán học. Thông thường, bài toán tối ưu kết cấu thường dẫn đến một bài toán quy hoạch phi tuyến. Tức là, hàm mục tiêu và các hàm rằng buộc không quan hệ tuyến tính với biến thiết kế và tổng quát; bài toán quy hoạch tồn tại cả các hàm rằng buộc dưới dạng phương trình và bất phương trình

1.2. Tình hình áp dụng lý thuyết quy hoạch trong thiết kế tối ưu

Lý thuyết tối ưu là lý thuyết xây dựng và chọn lời giải tốt nhất cho một (hoặc nhiều) mục đích nào đó.

Trong bài toán học, đó là bài toán tìm giá trị nhỏ nhất hoặc lớn nhất (cực trị) cho một hàm số nào đó, trong miền nhất định của đối số.

Về tên gọi, tuỳ theo mục tiêu có nhiều tên gọi như:

- Bài toán quy hoạch toán học (Mathematical Programing)
- Bài toán tối ưu hoá (Optimisation)
- Bài toán tìm cực trị (Extremum , Minimax)

Lý thuyết tối ưu đã có từ lâu nhưng phát triển theo xu hướng hiện đại, dựa trên lý thuyết quy hoạch toán học mới chỉ xuất hiện khoảng 40 năm trở lại đây. Với sự trợ giúp của các chương trình máy tính đã đưa ra nhiều bài toán và lời giải có hiệu quả và mang tính thực tiễn cao.

Riêng về lý thuyết tối ưu kết cấu xây dựng, có thể phân ra 4 hướng chính sau:

1. Lý thuyết thể tích nhỏ nhất (La yout)

Năm 1954, Maxwell đã đề xuất những suy nghĩ dựa trên cơ sở của lý thuyết tối ưu kết cấu có thể tích nhỏ nhất. Đó là kết cấu có các phần tử được bố trí hợp lý để toàn khối kết cấu có thể tích tối thiểu.

Năm 1904, Michell đã tiếp tục phát triển theo ý tưởng này. Sau đó còn có một số tác giả khác cũng đi theo hướng này.

Lý thuyết nầy chưa xét tới những ràng buộc về dạng hình học của kết cấu, cho nên có những hạn chế.

2. Lý thuyết phá hỏng đồng thời

Kết cấu được coi là tối ưu khi các phần tử đồng thời dạt tới giới hạn về năng lực chịu tải. Tuy nhiên, thuật ngữ (đồng thời) ở đây chỉ hạn chế trong điều kiện chịu tải nhất định.

Những năm 1940 - 1950 một số tác giả như Shanley, Gerard, ... đã nghiên cứu theo phương hướng này và chỉ giải được những bài toán kết cấu đơn giản với một số trường hợp đặt tải độc nhất.

Tuy nhiên, còn có thể phát triển theo một nhánh khác, đó là lý thuyết thiết kế theo độ bền đều với số tiết diện có ứng suất đạt tới giới hạn cho phép là nhiều nhất.

3. Lý thuyết tiêu chuẩn tối ưu

Những năm 60 của thế kỷ XX, Prager, Taylor đã chủ chương dựa trên cơ sở các nguyên lý cực trị trong cơ học và xây dựng được các tiêu chuẩn để chọn kết cấu tối ưu có khối lượng vật liệu nhỏ nhất.

Phương hướng này được áp dụng khá rộng rãi nhưng cũng chỉ hạn chế cho những cấu trúc đơn giản với phương án đặt tải không phức tạp.

4. Dừng lý thuyết quy hoạch toán học

Lý thuyết quy hoạch toán học được nghiên cứu rộng rãi từ những năm 1940 và phát triển nhanh cùng với máy tính điện tử. Tuy nhiên, áp dụng cho thiết kế tối ưu mới chỉ bắt đầu từ những năm 1950 với Livesley, Ecaren . Từ dó đến nay, chỉ trong vài chục năm, phương pháp áp dụng quy hoạch trong tính toán để thiết kế tối ưu kết cấu đã phát triển rộng rãi.

Phương pháp áp dụng lý thuyết quy hoạch để thiết kế tối ưu phát triển nhanh chóng vì nó là phương pháp tổng quát nhất, tất cả các phương pháp khác đều có thể trình bày dưới dạng bài toán quy hoạc toán học được.

Phương pháp toán học bao gồm:

- Quy hoạch tuyến tính (LP)
- Quy hoạch phi tuyến (NLP)
- Quy hoạch động (DP)
- Quy hoạch hình học (GP)

Trong đó bao gồm cả các loại bài toán quy hoạch khác nhau như Quy hoạch Bình phương, Quy hoạch lồi, Bài toán Vận trù, Bài toán Kiểm tra v.v...

CHƯƠNG 2
CƠ SỞ TỐI ƯU KẾT CẤU DẦM THEO PHƯƠNG PHÁP MỚI

2.1. Những khái niệm và định nghĩa về lý thuyết quy hoạch tối ưu

Tối ưu hoá các hàm mục tiêu (Z) là tìm được các biến thiết kế $\vec{x}_k$ trong miền ràng buộc (G) nào đó.

Trong nhiều trường hợp, mô hình toán học có dạng sau:

Tìm giá trị của n biến (x_1, x_2 ..., x_n) thoả mãn hệ ràng buộc (đẳng thức và bất đẳng thức)

gi (x_1.... x_n) > (<) 0   i = 1, ...m ;   (2.1)

h_j (x_1.... x_n) > (<) 0   j = 1,...., p

và làm cho hàm mục tiêu:

$$Z = f(x_1,....,xn) \tag{2.2}$$

đạt cực trị.

2.1.1. Biến thiết kế (BTK)

Trong bài toán thiết kế tối ưu kết cấu biến thiết kế có thể là:

- Kích thước hình học và đặc trưng hình học (A, I, δ...)
- Tham số mô tả hình dạng kết cấu.
- Đặc trưng cơ lý của vật liệu (mác bê tông)

Biến thiết kế có thể chia thành các loại sau:

- Biến liên tục (ví dụ $0 < x < \infty$)
- Biến rời rạc (số cốt thép, đường kính φ, số đinh tán, số bu lông)

2.1.2. Không gian thiết kế (design space)

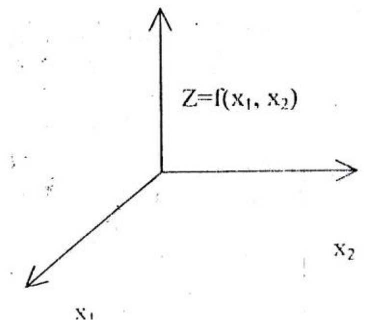
Có thể là 1, 2, 3, n chiều biểu diễn bởi các "trục" tương ứng với biến thiết kế (mỗi trục ứng với 1 biến)

$Z = f(x)$ Không gian 1 chiều   (2.3)

$Z = f(x,y) \equiv f(x_1, x_2)$ Không gian 2 chiều   (2.4)

$Z = f(x_1,...,x_n)$ Không gian n chiều   (2.5)

Ứng với n biến gọi là siêu không gian n chiều (hyper space)



Hình 2.1.

2.1.2. Vectơ thiết kế

Toàn bộ các biến thiết kế được tập hợp lại trong 1 vectơ biến thiết kế:

$$x \equiv \{x\} \equiv [x_1 x_2 \ldots x_n]^T \qquad (2.6)$$

Như vậy, 1 điểm k trong không gian thiết kế n chiều sẽ có n toạ độ.

$$K \Rightarrow [x_1^k x_2^k \ldots x_n^k]^t \equiv \{x_k\} \equiv \vec{x}_k \qquad (2.7)$$

Vectơ $\vec{x}_k$ sẽ có gốc là 0 và ngọn là điểm K.

Trong chiến lược tìm kiếm tối ưu điểm K sẽ chuyển dời từ vị trí nọ đến vị trí kia trong không gian thiết kế.

Công thức chuyển dịch từ K đến K + 1 sẽ là:

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + \alpha_k \vec{d}_k \qquad (2.8)$$

Trong đó: $\vec{d}_k$: vectơ chỉ phương chuyển dời

α_k: cường độ (bước) chuyển dịch

2.1.4. Hàm mục tiêu (HMT) - Objective funtion

Hàm mục tiêu là 1 hàm số được tìm cực trị trong quá trình tối ưu hoá. Đó là cơ sở để chọn một trong các phương án có khả thi. Hàm mục tiêu là hàm vô hướng của các biến thiết kế, Kí hiệu:

$$Z = f(\vec{x}) \qquad (2.9)$$

Chỉ tiêu kinh tế kỹ thuật, nhiều mục tiêu khác nhau - đa mục tiêu.

Biểu diễn hình học của các hàm mục tiêu

- Nếu hàm mục tiêu là hàm tuyến tính đối với biến $\vec{x}$ biểu diễn hình học của nó sẽ là đường thẳng, mặt phẳng hoặc siêu phẳng tuỳ theo bài toán là 2, 3 hoặc n chiều.

- Nếu hàm mục tiêu là hàm phi tuyến: biểu diễn hình học sẽ là họ các đường cong, mặt cong và siêu mặt.

Ví dụ: $Z(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2$

Các đường đồng mức sẽ là các vòng tròn đồng tâm.

- Các dạng hàm mục tiêu đặt biệt khác như:

+ Dạng Pôzinôm trong quy hoạch hình học (GP)

$$Z = \sum C_j x_j^{aj} \ldots \tag{2.10}$$

+ Dạng quy hoạch bình phương (QP):

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum a_{ij} x_i x_j \tag{2.11}$$

2.1.5. Vectơ Gradien của hàm mục tiêu ($\overrightarrow{\Delta Z}$)

Định nghĩa: Gradien của HMT $\vec{Z}$ là một vectơ gồm các số hạng là đạo hàm bậc nhất của Z đối với các biến số x_i (i = 1,...,n)

$$\overrightarrow{\mathrm{Grad}Z} \equiv \left[\frac{\partial Z}{\partial x_1} \frac{\partial Z}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial Z}{\partial x_n} \right]^T \equiv \overrightarrow{\Delta Z} \tag{2.12}$$

Ví dụ: hàm mục tiêu tuyến tính:

$x = \sum_{1}^{n} C_i x_i$ (hằng)

$\overrightarrow{\Delta Z} = [C_1 C_2 \ldots C_n]^T$

HMT phi tuyến, $\overrightarrow{\Delta Z}$ sẽ còn phụ thuộc các biến:

$Z = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$

$\overrightarrow{\Delta Z} \equiv [(4x_1 + 2x_2)(2x_2 + 2x_1)]^T$

Biểu diễn hình học $\overrightarrow{\Delta Z}$

Đó là vectơ thẳng góc với tiếp tuyến của hàm mục tiêu tại điểm đang xét. Đường dốc nhất nó thẳng góc với đường đồng mức tại điểm đó). Biểu thị hướng làm cho hàm mục tiêu biến đổi nhanh nhất.

Hàm mục tiêu tuyến tính, $\overrightarrow{\Delta Z}$ vuông góc họ các đường thẳng, mặt phẳng, siêu phẳng và song song tại mọi điểm.

2.1.6. Các điều kiện ràng buộc (constraints) $g_{j}(\vec{x})$

Định nghĩa: Đó là những hạn chế mà các biến thiết kế phải tuân thủ (Ví dụ $x_1 \geq 0$)

Trong thực tế, thiết kế tối ưu đó là các điều kiện khống chế, bảo đảm cho toàn bộ kết cấu khỏi bị phá hoại về cường độ, độ ổn định, mỏi, chuyển vị lớn, nút ....

Ví dụ: $\sigma < R_0$; $\sigma \leq \varphi R_0$; $f \leq b/100$; $a < a_{qđ}$

Ta cần phân biệt 2 điều kiện ràng buộc:

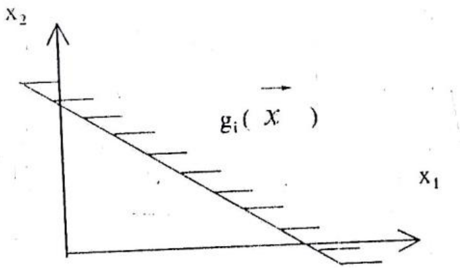
- Ở dạng đẳng thức: $g_i(\vec{x}) = 0$ (i = 1, ..., E)

- Ở dạng bất đẳng thức: $g_i(\vec{x}) \lessgtr$ (i = 1, ..., I)

Biểu diễn hình học:

Mỗi một hàm ràng buộc trong các biểu thức 2, 3 chiều cũng có thể biểu diễn hình học bằng các đường thẳng và mặt phẳng, đường cong hoặc mặt cong. Đối với các bài toán nhiều chiều, đó là các siêu phẳng và siêu mặt.

Ví dụ: điều kiện ràng buộc $g_i(\vec{x}) \equiv x_1 + x_2 - 1 \leq 0$



Hình 2.2.

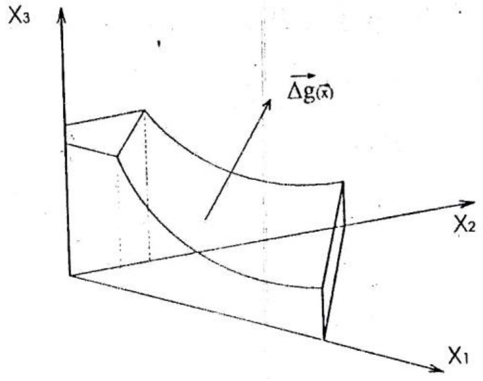
Với các biến thiết kế liên tục thì đường hoặc mặt biểu diễn cũng liên tục.

2.1.7. Vectơ Gradien của hàm ràng buộc $\overrightarrow{\Delta g}(\vec{x})$

Đó là vectơ có thành phần:

$$\{\Delta g_i(\vec{x})\} \equiv \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_1} \frac{\partial g_i}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial g_i}{\partial x_n}\right]^T \qquad (2.13)$$

Vectơ $\overline{\Delta g_i(x)}$ cũng là vectơ trực giao với các hàm ràng buộc (đường thẳng, đường cong, mặt cong, siêu mặt ....)



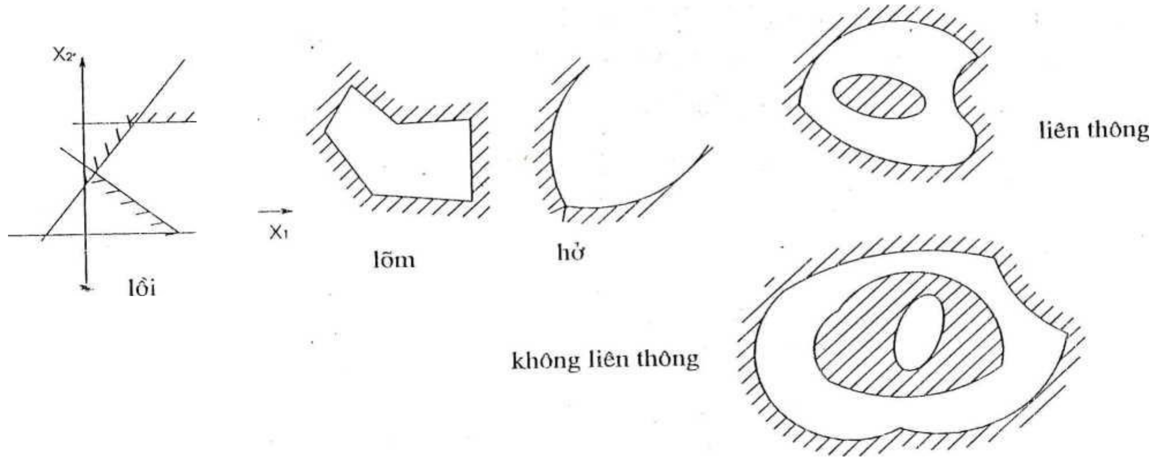
Hình 2.3.

2.1.8. Miền nghiệm (miền ràng buộc)

- Các điều kiện ràng buộc sẽ xác định ra miền nghiệm của biến thiết kế. Nếu hàm ràng buộc là dạng bất đẳng thức, kiền nghiệm sẽ là các phần mặt phẳng, hoặc không gian 3 chiều hoặc n chiều tương ứng.

Miền nghiệm có thể lồi, lõm, kín, hở, liền thông hoặc không liên thông

Chẳng hạn trong không gian 2 chiều ta có:



Hình 2.4.

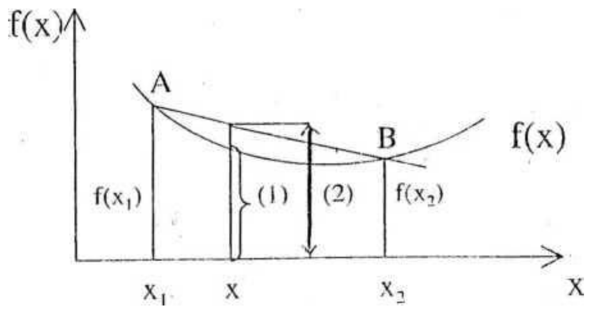
Một hàm f(x) được gọi là lồi nếu các điểm c của 2 điểm AB trên đường biểu diễn không bao giờ nằm "dưới" đường biểu diễn.

Tức là:

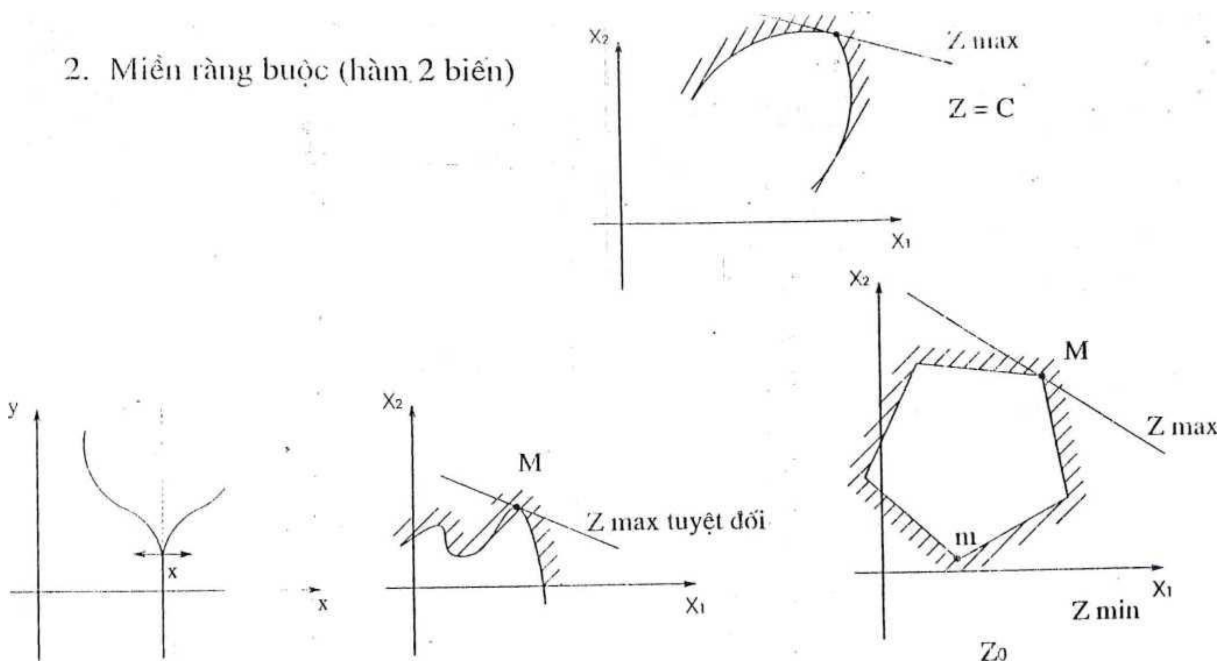
$$f\left[\xi x_1 + (1-\xi)x_2\right] \le \xi f(x_1) + (1-\xi) f(x_2)$$

Trong đó, toạ độ vô hướng ξ là:

$$\xi = \frac{\bar{x} - x_1}{x_2 - x_1} \ (0 < \xi < 1$$



Hình 2.5.



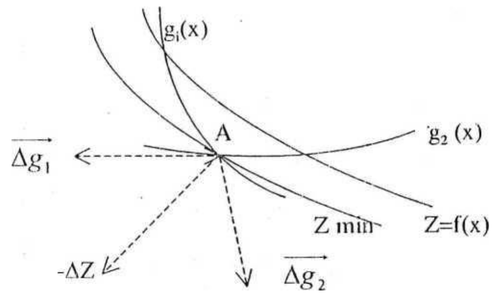
Hình 2.6.

Điều kiện tối ưu KUHN-TUCKER

Điều kiện cần của điểm tối ưu cục bộ là: $\overrightarrow{GradZ}$ phải là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\overrightarrow{GradZ}$ của điều kiện ràng buộc nhưng đổi dấu.

Ví dụ: Z $\rightarrow$ min!

$$\begin{cases} g_1(x) \geq b_1 \\ g_2(x) \geq b_2 \end{cases}$$



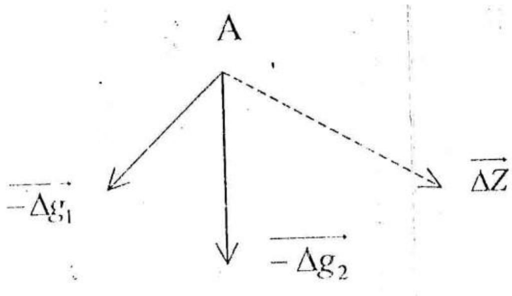
Hình 2.7.

A là điểm tối ưu nên ta có thể viết biểu thức tuyến tính:

$$\left\{\Delta Z\left(\overrightarrow{x_i}\right)\right\} = -\left\{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \Delta g_j\left(\overrightarrow{x_i}\right)\right\}$$

λj = là các thừa số Lagrange

(Nếu $\overrightarrow{\Delta Z}$ nằm ngoài $-\overrightarrow{\Delta g_1}$ và $-\overrightarrow{\Delta g_2}$ không phải là điểm tối ưu)



Hình 2.8.

2.2. Phát biểu bài toán tối ưu:

Nội dung: tìm giá trị của n biến thiết kế

$$\vec{x} \equiv \{x\} = [x_1 x_2 \ldots x_n]^T \quad (2.14)$$

thoả mãn các điều kiện ràng buộc:

$$g_i(\vec{x}) \underset{<}{>} 0 \quad i \in I \text{ (không gian bất đẳng thức)} \quad (2.15)$$

$$h_j(\vec{x}) = 0 \quad j \in E \text{ (không gian đẳng thức)}$$

và làm cực tiểu (cực đại) hàm mục tiêu Z = f ($\vec{x}$)

Mô hình toán:

HMT: Z = $f(\vec{x}) \rightarrow$ min! (max!) (2.16)

ĐKRB $\begin{cases} (\vec{x}) \in R \text{ (thuộc không gian thiết kế n chiều)} \\ G_i(\vec{x}) \begin{pmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{pmatrix} b_i \end{cases}$ (2.17)

Viết tắt: $\vec{x} \in R^n$ [f(x)|G_i(x){≤=≥}b_i]

max

min

Nghiệm chấp nhận của biến thiết kế là tập hợp các giá trị của:

$$x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T \quad (2.18)$$

thoả mãn các điều kiện ràng buộc.

Tập hợp đó được gọi là một "phương pháp chấp nhận"

Nghiệm tối ưu: Trong số các nghiệm chấp nhận, phương án nào làm cho hàm mục tiêu đạt cực trị theo yêu cầu của bài toán sẽ được gọi là nghiệm tối ưu (hoặc phương án tối ưu)

Người ta phân biệt: Cực trị mạnh, yếu, tổng quát, địa phương, tuyệt đối ...

Ví dụ: 1. Hàm 1 biến f(x)

Điều kiện để có cực trị: f'(x) = 0 $\rightarrow \hat{x}$

Nếu có $\begin{cases} f''(\hat{x}) < 0 \text{ cực tiểu (m)} \\ f''(\hat{x}) > 0 \text{ cực đại (M)} \end{cases}$

2.3. Các dạng bài toán tối ưu hoá

2.3.1. Tùy hàm mục tiêu

- Tìm cực tiểu (Min!)
- Tìm cực đại (Max!)
- Đối ngẫu
- Tuyến línb
- Phi tuyến
- Một chiều (1 biến thiết kế)
- Hai chiều (2 biến thiết kế)
- Nhiều chiều (n biến thiết kế)

2.3.2. Tuỳ điều kiện ràng buộc

- Tối ưu hoá không ràng buộc: Unconstraints Prog. (UCP)
- Tối ưu hoá có ràng buộc: + Tuyến tính
  + Phi tuyến
- Điều kiện ràng buộc dạng + dẳng thức
  + bất đẳng thức

(LEP, L1P, NEP, NIP)

2.3.3. Tùy cấu trúc và phương pháp giải

- Phương pháp đơn hình và đơn hình cải tiến.
- Phương pháp vận trù học.
- Phương pháp đồ thị.
- Phương pháp nhân tử Lagrange.

- Phương pháp gradien.
- Phương pháp hàm phạt đền.
- Phương pháp quy hoạch hình học.
- Phương pháp quy hoạch động.
- Phương pháp tuyến tính hóa.
- Phương pháp quy hoạch ngẫu nhiên.
- Phương pháp chia ô lưới.

2.4. Quy hoạch tuyên tính

2.4.1. Phát hiểu bài toán quy hoạch tuyến tính (QHTT)

Tìm n biến thiết kế $\vec{x} = [x_1 \ldots x_2]^T$ làm cực tiểu hóa hàm mục tiêu

$$Z = f(\vec{x}) \rightarrow \min! \tag{2.19}$$

Với $$f(\vec{x}) = \sum_1^n C_i x_i$$

thoả mãn các ĐKRB tuyến tính:

$$g_i(\vec{x})\{\leq = \geq\} b_i \text{ với } \sum a_i x_j \{\leq = \geq\} b_i \tag{2.20}$$

Ký hiệu: Min Z = (c, $\vec{x}$)

$(A, (\vec{x}))\{\leq = \geq\} b$

$(\vec{x}) \geq 0$

Khai triển:

Hàm mục tiêu: $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \min$

Điều kiện ràng buộc:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2x_2} + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ a_{(m+1)1}x_1 + a_{(m+2)}x_2 + \ldots + a_{(m+n)}x_n \leq b_{m+1} \\ a_{p+1}x_1 + a_{p+2}x_2 + \ldots. + a_{pn}x_n \leq b_p \end{cases}$$

2.4.2. Phân loại

Điều kiện ràng buộc có 3 loại:

a. Điều kiện ràng buộc mang dấu ≤ (dạng chuẩn):

$$\left(A,\vec{x}\right)\leq \vec{b}.\left(bi\geq 0\right)$$

b. Điều kiện ràng buộc mang dấu = (dạng chính tắc)

c. Điều kiện ràng buộc mang dấu $\geq$

Trong đó có thể đưa dạng này về dạng khác.

Hàm mục tiêu có 2 loại:

a. Cực đại hoá hàm mục tiêu

b. Cực tiểu hoá hàm mục tiêu

Cũng có thể đổi 2 biểu thức tối ưu này bằng cách nhân với (-1)

Ví dụ: min $Z = x_1 - x_2 \Leftrightarrow \max Z' = -Z = -x_1 + x_2$

2.4.3. Các phương pháp giải

- Phương pháp đồ thị: khi vectơ biến thiết kế (2 chiều) có 2 thành phần.
- Phương pháp simplex (đơn hình): tất cả đưa về chính tắc rồi thế y_i, giả.
- Phương pháp Gromory (đối với QHTT nguyên) $\vec{x}$ là các số nguyên.
- Phương pháp Gradien
- Phương pháp dùng bài toán đối ngẫu (khi số điều kiện ràng buộc lớn hơn số biến thiết kế).

2.4.3.1. Phương pháp đồ thị (biểu diễn hình học):

- Số biến thiết kế $\not> 2$. Cũng có thể áp dụng cho quy hoạch phi tuyến (NLP)

Các bước thực hiện:

+ Điều kiện ràng buộc đưa về dạng đẳng thức và vẽ đường biểu diễn $x_2 = f(x_1)$

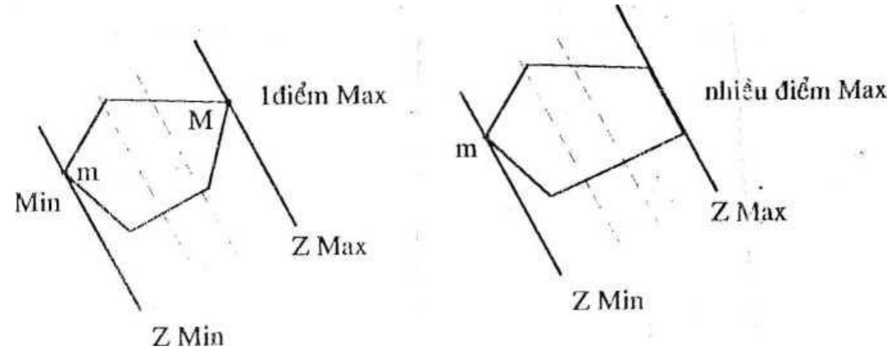
+ Xác định miền ràng buộc (miền nghiệm) bằng các bất đẳng thức.

+ Xác lập vectơ Gradien của hàm mục tiêu $\left(\overline{\Delta Z}\right)$ để xác định hướng của họ đường đồng mức Z của hàm mục tiêu.

+ Xác định tọa độ điểm "cực trị" M (hoặc m).

+ Tính giá trị tối ưu của Z (cực trị).

Người ta đã chứng minh rằng miền lồi bao giờ cũng có 1 phương án tối ưu ít nhất tại 1 điểm cực trị trên biên.



Hình 2.9.

2.4.3.2. Phương pháp đơn hình (Simplex):

Thực chất: cải thiện dần từng bước các phương án để đi tới nghiệm tối ưu. Rất có hiệu lực đối với quy hoạch tuyến tính.

Các bước tiến hành:

Bước 1: Bổ sung và đẳng thức hóa hàm ràng buộc:

- Đưa các biến đệm y_i vào bất đẳng thức $\leq$ b;
- Đưa các biến dư $-x_j$ vào bất đẳng thức $\geq b_j$ và coi là biến chính thức.
- Đưa các biến giả tạo y_k vào đẳng thức.

Viết lại hàm mục tiêu:

- Với biến dư có hệ số 0 ($0x_j$)
- Đưa phương trình hàm muc tiêu $Z = f(\vec{x})$ về dạng $f(\vec{x}) + 0x_j - Z = 0$
- Lập bảng đơn hình.

Bước 2: Chọn phần tử chốt (pivot) với 3 điều kiện:

- Ở cột có số dương lớn nhất của hàng chứa -Z (cột p)
- Ở dòng có tỷ số nhỏ nhất khi chia phần tử ở cột bị cho a_{ip}
- Không được ≤ 0.

Xóa bỏ biến giả.

Bước 3: Nghịch đảo phần tử chốt $(l/a_p)=b$ và viết vào vị trí đo trong bảng mới.

Bước 4: Nhân dòng chốt cũ (trừ phần tử chốt) với nghịch đảo đó (+b’) được các $\vec{e_k}$

Bước 5: Nhân cột chốt cũ (trừ phần tử chốt) với nghịch đảo (-b’).

Bước 6: Tính các phần tử khác theo công thức: $d_{ik} = D_{ik} - f_{ip}e_k$

Trong đó: D_{ik} : phần tử cũ trong hàng i cột k

f_{ip} : phần tử cũ trong hàng i cột chốt p

e_k : phần tử mới trong cột k (bước 4)

Bước 7: Hoán vị x và y ở cột chốt và dòng chốt.

Kết thúc khi hàng -Z đều là số âm.

* Lưu ý:

- Để khử các biến giả tạo y_i, ta chọn phần tử chốt nằm cùng hàng với y_i giả tạo; đó phải là một số dương nhưng không cần phải thỏa mãn các điều kiện trong bước 2. Vì chuyển x và y nên cột chốt bị xóa bỏ (không cần tính).

Trong bảng cần bổ sung cho đủ các biến y ở cột cuối cùng.

2.4.3.3. Phương pháp dùng bài toán đối ngẫu:

Cho bài toán xuất phát (bài toán gốc) quy hoạch tuyến tính (LP)

$$\text{LP}\begin{cases} MinZ = (c,\vec{x}) & (\vec{x} \in R^n) \\ A\ \vec{x} \geq \vec{b} & (\vec{b} \in R^m) \\ \vec{x} \geq 0 \end{cases}$$

Ta tổ chức 1 bài toán khác gọi là đối ngẫu (D):

$$\text{D}\begin{cases} MaxG = (b,\vec{u}) & (\vec{u} \in R^m) \\ A^T\vec{u} \leq c \\ \vec{u} \geq 0 \end{cases}$$

Như vậy:

- Ma trận các hệ số của ĐKRB của (D) là chuyển trí ma trận các hệ số của ĐKRB của (LP)

- Hệ số của các biến mới $\vec{u}$ sẽ là vectơ hàng, chuyển trí của vectơ cột $\vec{b}$

- Ngược lại, với vectơ hệ số $\vec{c}$ ...

* Những điều cần lưu ý khi dùng phương pháp bài toán đối ngẫu:

a. Nếu hàm mục tiêu có nhiều biến thiết kế và điều kiện ràng buộc không quá 2, ta có thể chuyển bài toán gốc sang bài toán đối ngẫu để giải trực tiếp bằng phương pháp đồ thị một cách dễ dàng.

b. Các cặp bài toán đối ngẫu có thể được gọi là:

- Đối xứng: nếu ràng buộc đều là bất đẳng thức.

- Không đối xứng: nếu điều kiện ràng buộc 1 bên là đẳng thức, bên kia là bất đẳng thức.

2.5. Quy hoạch phi tuyến (NLP)

2.5.1. Mô hình toán

$$\underset{\vec{x} \in R^n}{Min(Max)} \left\lfloor f\left(\vec{x}\right) | g_i\left(\vec{x}\right)\{\le = \ge\} b_i \right\rfloor \tag{2.21}$$

Trong đó ít nhất phải có 1 hàm phi tuyến đối với vectơ biến $\vec{x}$

Như vậy: Hàm mục tiêu có thể tuyến tính hoặc phi tuyến, điều kiện ràng buộc cũng vậy (có thể tuyến tính hoặc phi tuyến tính).

Ta cùng phân loại thành 2 dạng bài toán tối ưu phi tuyến:

Dạng 1: không có điều kiện ràng buộc.

Dang 2: có điều kiện ràng buộc.

2.5.2. Các phương pháp giải

Đối với các bài toán quy hoạch phi tuyến, cách giải tổng quát hầu như chưa có. Từ trước tới nay đã có nhiều nghiên cứu và áp dụng trong thực tế nhưng nói chung chua có phương pháp nào được thích dụng trong mọi trường hợp.

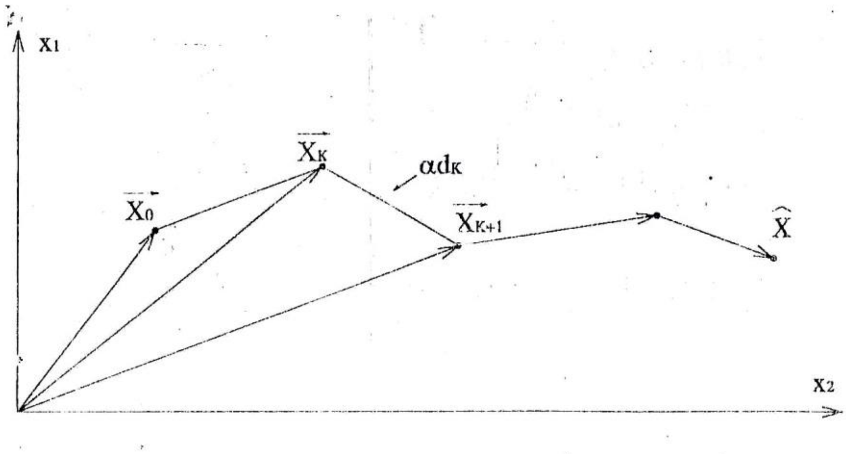
Tuy nhiên, đáng lưu ý là các phương pháp theo những phương hướng sau:

- Dùng nhân tử Lagrange.
- Dùng vectơ gradien và các vectơ dẫn hướng khác.
- Dùng biện pháp tuyến tính hóa.
- Dừng biện pháp tìm kiếm tiền định và ngẫu nhiên.
- Dùng các hàm phạt đền V.V..
- Dùng các lý thuyết quy hoạch khác như quy hoạch hình học ...

Trong các phương pháp trên, nổi trội nhất là các phương pháp dùng vectơ gradien và các vectơ dẫn hướng khác. Nguyên tắc như sau:

Xuất phát từ 1 điểm X_0 (trong không gian n chiều) có tọa độ là $X_0 \equiv \left[x_1^{(0)} x_2^{(0)} \ldots x_n^{(0)}\right]^T$ dịch chuyển đi theo hướng $\vec{d}_0$ một đoạn bằng α_0, ta sẽ tới điểm lân cận trong miền ràng buộc X_1 có tọa độ $\overrightarrow{X_1} \equiv \left[x_1^{(0)} x_2^{(1)} \ldots x_n^{(1)}\right]^T$ với công thức chuyển dịch:

$$\vec{X}_1 = \vec{X}_0 + \alpha_0 \vec{d}_0$$



Hình 2.10.

Cứ thế, chuyển dịch tới những nghiệm khác tốt hơn cho tới nghiệm tối ưu: $\{\overrightarrow{X}\} = \overrightarrow{X_k} + \alpha_k \overrightarrow{d_k}$ làm cho hàm mục tiêu đạt cực trị như mong muốn. Vậy công thức chuyển dịch trung gian thứ K sẽ là:

$$\overrightarrow{X_{k+1}} = \overrightarrow{X_k} + \alpha_k \overrightarrow{d_k}$$

Trong đó: α_k = độ dài (bước) chuyển dịch

$\overrightarrow{d_k}$ = vectơ chỉ hướng chuyển dịch

* Hướng đi đầu tiên nên theo hướng đường dốc nhất (liên quan tới vectơ gradien) với bước đi dài nhất nhưng không vượt quá miền ràng buộc (nhỡ trớn)

* Khái niệm về vectơ gradien và ma trận Hessian.

- Vectơ gradien của hàm mục tiêu sẽ là hướng dốc nhất trên "bình diện" các đường đồng mức biểu thị bởi hàm mục tiêu Z = f($\vec{x}$)

Như vậy, hàm mục tiêu Z = f($\vec{x}$) sẽ tăng nhanh nhất theo hướng $\overrightarrow{\Delta Z}$ và sẽ giảm nhanh nhất theo hướng ngược lại -$\overrightarrow{\Delta Z}$

Thành phần của vectơ $\overrightarrow{\Delta Z} \equiv \left[\frac{\partial Z}{\partial x_1} \frac{\partial Z}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial Z}{\partial x_n}\right]^T$

- Ma trận Hessian [H]

Các số hạng của [H] lần lượt là đạo hàm riêng cấp 2 của hàm mục tiêu lấy đơn vị biến x_i và x_j. [H] có cấu trúc như sau:

$$[H] = [\Delta^2 Z] \equiv [\Delta^2 f] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} \cdots \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1} \cdots\cdots\cdots \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

2.5.3 Các bài toán phi tuyến không ràng buộc

2.5.3.1. Phương pháp Gradien:

Phương pháp đường dốc nhất dựa trên cơ sở của công thức đã dẫn nhưng vectơ chỉ hướng chuyển dịch $\overrightarrow{d_k}$ lấy bằng vectơ gradien.

$$\overrightarrow{X}_{k+1} = \overrightarrow{X}_k + \alpha_k \overrightarrow{d_k} = \overrightarrow{X_k} + \alpha_k \frac{\overrightarrow{\Delta f(x_k)}}{|\Delta f(x_k)|} \tag{2.22}$$

- Theo khai triển Taylor với 3 số hạng, ta có:

$$f(\vec{x}) = f(\overrightarrow{x_k}) + \{\Delta f(\overrightarrow{x_k})\}^T (\vec{x} - \overrightarrow{x_k}) + \frac{1}{2}(\vec{x} - \overrightarrow{x_k})^T [\Delta^2 f(\overrightarrow{x_k})](\vec{x} - \overrightarrow{x_k})$$

- Thay $(\vec{x} - \overrightarrow{x_k}) = \alpha_k \overrightarrow{d_k}$ ta có:

$$f(\vec{x}) = f(\overrightarrow{x_k}) + \{\Delta f(\overrightarrow{x_k})\}^T \alpha_k \overrightarrow{d_k} + \frac{1}{2}(\alpha_k \overrightarrow{d_k})^T [H] \alpha_k \overrightarrow{d_k}$$

- Lấy đạo hàm với α_k và cho bằng 0:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_k} = \{\Delta f(\overrightarrow{x_k})\}^T \overrightarrow{d_k} + \{\overrightarrow{d_k}\}^T . [H] \alpha_k . \overrightarrow{d_k} = 0$$

Cuối cùng, rút ra công thức tính bước chuyển dịch:

$$\alpha_k = -\frac{\{\Delta f(\overrightarrow{x_k})\}^T \overrightarrow{d_k}}{\{\overrightarrow{d_k}\}^T [H] \overrightarrow{d_k}} \tag{2.23}$$

2.5.3.2. Phương pháp Gradien liên hợp:

* Định nghĩa: Vectơ $\overrightarrow{d_i}$ được gọi là liên hợp của vectơ $\overrightarrow{d_j}$ đối với một ma trận [G] xác định dương nếu ta có:

$\overrightarrow{d_i^T} [G] \overrightarrow{d_j} = 0$ (với mọi i, j & i $\neq$ j)

Hướng của 2 vectơ đó gọi là "hướng liên hợp"

* Định lý 1:

Nếu hướng tìm tuyến tính dọc theo các hướng liên hợp, hàm mục tiêu sẽ được triệt tiêu hoá trong không gian theo các hướng đó.

* Định lý 2:

Nếu 2 toạ độ $\vec{Y}$ và $\vec{Z}$ là điểm cực tiểu trong 2 không gian con song song thì hướng $\vec{Z}-\vec{Y}$ sẽ liên hợp với bất kỳ vectơ nào nằm trong các không gian đó.

* Cách tạo hướng liên hợp:

Bằng cách dựa trên 2 định lý trên, ta tạo ra các hướng liên hợp.

Giả sử từ toạ độ xuất phát $\overrightarrow{X_0}$ đã biết, ta chọn bước đi ban đầu là $\overrightarrow{d_0}$ theo 1 hướng $\vec{P}$ nào đó.

Toạ độ tiếp theo $\overrightarrow{X_1}$ sẽ có được bằng cách tính theo công thức đã biết:

$$\overrightarrow{X_1} = \overrightarrow{X_0} + \alpha_0 \overrightarrow{d_0}$$

Trên cơ sở của 1 hàm mục tiêu, ta tính được vectơ gradien tại điểm xuất phát và ma trận Hessian [H] ≡ [G], do đó tính ra bước dịch chuyển:

$$\alpha_0 = -\frac{\left\{\Delta(X_0)^T \overrightarrow{d_0}\right\}}{\overrightarrow{d_0^T}[H]\overrightarrow{d_0}}$$

Tìm vectơ liên hợp $\overrightarrow{d_1}$ bằng công thức định nghĩa:

$$\overrightarrow{d_1^T}[H]\overrightarrow{d_0} = 0$$

và lại tiếp tục tính α_1 tại $\overrightarrow{X_1}$. Cuối cùng tìm được $\overrightarrow{X_2}$....

Cứ như vậy cho tới điểm cần tìm.

2.5.3.3. Các phương pháp điều chỉnh hướng vectơ Gradien:

- Đối với hàm mục tiêu không phức tạp, phương pháp đường dốc nhất sẽ cho ta đi nhanh nhất tới cực trị.

- Đối với hàm có biến đổi đột ngột, nhiều khi phải chỉnh hướng để đạt hiệu quả.

a. Phương pháp Newton - Raphson (Dùng đạo hàm bậc 2) (NR)

$$\overrightarrow{X_{k+1}} = \overrightarrow{X_k} - \alpha_k \left[\eta\left(\overrightarrow{X_k}\right)\right]\left\{\Delta f\left(\overrightarrow{X_k}\right)\right\}$$

Trong đó: $\eta\left(\overrightarrow{X_k}\right)$ là nghịch đảo của MT Hessian [H]

b. Phương pháp Broyden

$$\text{Với } \eta\left(\overrightarrow{X_{k+1}}\right)=\eta\left(\overrightarrow{X_k}\right)+\frac{\left[\Delta\overrightarrow{X_k}+\eta\left(\overrightarrow{X_k}\right)\overrightarrow{\Delta g_k}\right]\left[\Delta\overrightarrow{X_k}-\eta\left(\overrightarrow{X_k}\right)\overrightarrow{\Delta g_k}\right]}{\overrightarrow{\Delta g_k}}$$

3. Phương pháp Davidon - Fletcher-Powell (DEP)

$$\text{Với } \eta^{k+1}=\eta^k+A^{(k)}-B^{(k)}$$

$$A^{(k)}=\frac{\overrightarrow{\Delta x_k}.\overrightarrow{\Delta x_k^T}}{\overrightarrow{\Delta x_k^T}.\overrightarrow{\Delta g_k}}$$

$$B^{(k)}=\frac{\left[\eta^k\right]\overrightarrow{\Delta g_k}\left(\left[\eta^k\right]\left\{\overrightarrow{\Delta g_k}\right\}\right)^T}{\overrightarrow{\Delta g_k^T}\left[\eta^k\right]\overrightarrow{\Delta g_k}}$$

* Nhận xét:

- Các phương pháp trên chí khác nhau ở chỗ điều chỉnh hướng thông qua MT [η].

- Nếu gặp cực tiểu cục bộ, không thể ra khỏi mà phải xuất phát từ điểm khác. Do đó, khó tìm điểm cực trị tổng thể (tuyệt đối).

- Cũng còn những thuật toán khác sử dụng vectơ građien (ví dụ: thuật toán xoay hướng dần...)

2.5.3.4. Các phương pháp không dùng vectơ gradien:

- **Phương pháp chia ô:**

Chia miền nghiệm thành ô, tính Z ứng với tọa độ các nút của mạng lưới và so sánh để rút ra $\hat{Z}$. Có thể chủ động tìm các nút lân cận $\hat{X}$ căn cứ những suy đoán thuộc kỹ năng để nhanh chóng tìm ra nghiệm tối ưu $\hat{X}$.

Phương pháp này cần nhiều thông tin và có tính chất máy móc, độ chính xác phục thuộc vào lưới chia, có ưu điểm tìm được vùng có nghiệm tối ưu tuyệt dồi, vì "quét" hết các nút chia trong vùng nghiệm.

- ***Phương pháp HOOK-HESSI:***

Nguyên lý là chuyển dịch dần theo từng biến số theo chiều hướng tốt (giảm dần hàm mục tiêu nếu bài toán tìm cực tiểu Z min!).

Cũng có thể bước liền theo hướng của tất cả các biến nếu thấy tốt. Trong bài toán tìm cực tiểu Z min!, các bước tiến hành như sau:

- Tìm kiếm 1 điểm lân cận vectơ $\overrightarrow{X_k}$ để có { $\tilde{X}_k$ } sao cho f($\tilde{X}_k$)<f($\overrightarrow{X_k}$).

- Xác định bước tiếp theo bằng công thức:

$$\overrightarrow{X_{k+1}} = \overrightarrow{X_k} + \alpha_k\left(\left\{\tilde{X}_k\right\} - \tilde{X}_k\right)$$

2.5.4. Các bài toán quy hoạch phi tuyến có ràng buộc

Mô hình toán: Min [Z = (x_i) |g_j (x_i){≤=≥b_j]

2.5.4.1. Phương pháp cổ điển: Dùng thừa số Lagrange.

Gọi X là vectơ các nhân tử Lagrange.

Tổ chức lại 1 hàm mới, 2 loại biến $\vec{x}$ và $\vec{\lambda}$:

$$L\left(\overrightarrow{x_i};\overrightarrow{\lambda_j}\right) = f\overrightarrow{x_i} + \left\{\overrightarrow{\lambda_j}\right\}^T\left[b_j - g_j\left(\overrightarrow{x_i}\right)\right]$$

Điều kiện cần để tối ưu là:

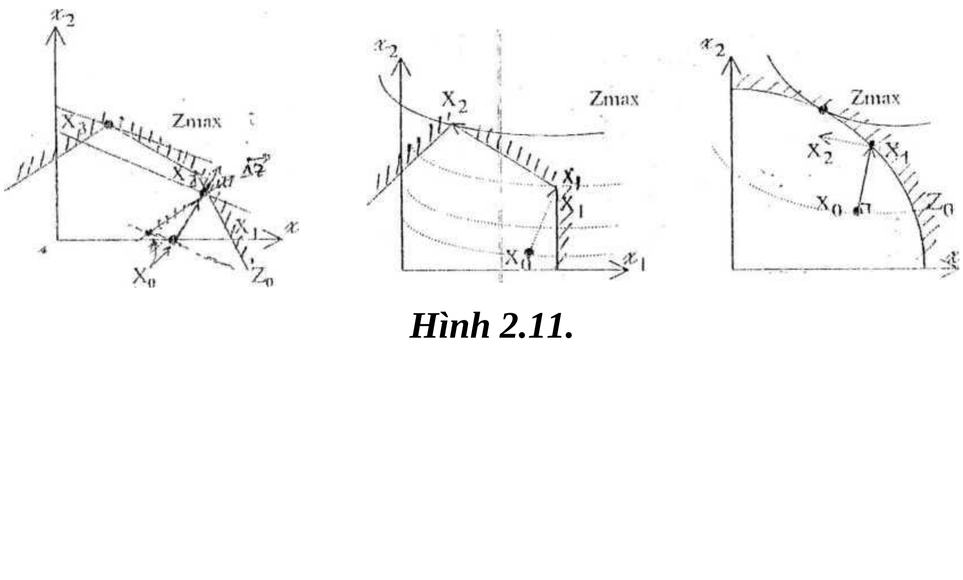
$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum \lambda_j \frac{\partial g_j\left(\vec{x}\right)}{\partial x_i} = 0 \text{ và } \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0$$

2.5.4.2. Phương pháp gradien:

- Có thể áp dụng cho quy hoạch tuyến tính mà không dùng phương pháp đơn hình.

- Thực chất là xuất phát từ 1 điểm {X_0} = [$x_1^{(0)}$ .... $x_n^{(0)]}$ trong miền ràng buộc đi tới 1 điểm khác {X_1} theo hướng "dốc nhất" để nhanh chóng đi tới phương án tối ưu (hướng của vectơ $\overrightarrow{\Delta Z}$)

- Thường chọn điểm {X_1} nằm trên đường biên, sau đó men theo đường biến (đổi hướng, nếu không sẽ quá trớn) theo hướng thích hợp đến {X_2} vẫn nằm trong miền nghiệm .....



Hình 2.11.

2.5.4.3. Phương pháp tính toán bằng chuỗi Taylor:

Bước chuẩn bị:

- Tính các vectơ gradien: $\overrightarrow{\Delta Z}, \overrightarrow{\Delta g_i}$

- Chọn các điểm xuất phát bất kỳ (trong, ngoài) $\overrightarrow{\Delta X_0}$

- Thay vào có Z_0, g_{io}, $\overrightarrow{\Delta Z_0}, \overrightarrow{\Delta g_{j0}}$

Bước 1: Chuyển thành bài toán quy hoạch tuyến tính

- Sử dụng 2 số hạng đầu của chuỗi khai triển Taylor.

- Tìm cực trị của hàm mục tiêu: $Z = Z_0 + [\Delta Z_0]^T\left(\overrightarrow{X} - \overrightarrow{X_0}\right)$ với ràng buộc

$$\left(\overrightarrow{X_1}\right) = g_j\left(\overrightarrow{X_0}\right)Z_0 + \left[\Delta g_i\left(\overrightarrow{X_0}\right)\right]^T\left(\overrightarrow{X_1} - \overrightarrow{X_0}\right) \leq 0$$

Bước 2: Dùng phương pháp gradien (hoặc đơn hình) để tìm phương án tối ưu $\{X_1\}$ và thay $\{X_1\}$ vào $\overrightarrow{X_0}, \overrightarrow{X_2}$ vào $\overrightarrow{X_1}$

Bước 3: Tiếp tục lặp cho đến kết quả 2 vòng cuối cùng bằng nhau.

Nhận xét:

- Phương pháp này không phải lúc nào cũng cho kết quả chính xác, phải chọn điểm xuất phát hợp lý.

- Chỉ hiệu lực khi phương án tối ưu xuất hiện tại giao điểm các đường ràng buộc.

- Có thể cải tiến → dùng phương pháp tuyến tính hóa từng đoạn. Thay đường cong bằng đường thẳng.

- Dùng các phương pháp khác (khử ràng buộc, chia ô, điểm ngẫu nhiên, phương pháp hàm phạt)

2.5.4.4. Phương pháp hàm phạt (Penalty):

-Mục đích cũng là đưa bài toán có ràng buộc phi tuyến về bài toán không ràng buộc.

Nội dung: Từ mô hình phi tuyến tổ chức lại 1 hàm khác gọi là "hàm phạt". Φ gồm các biến $\vec{x}$ và 1 biến mới p thường là nhân tử của tổng bình phương các hàm ràng buộc $g_i\left(\vec{x}\right)$. P thường có mũ ±1.

- Nếu điều kiện ràng buộc là đẳng thức ta có thể có dạng sau:

$$\Phi\left(\vec{x}, p\right) = f\left(\vec{x}\right) + \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{m} g_i^2\left(\vec{x}\right) \text{ (hàm phạt ngoài)}$$

số hạng sau của vế 2 là phần phạt đền ; m = số lượng các ràng buộc

g_i (i = 1÷ m)

- Nếu điều kiện ràng buộc là bất đẳng thức, ta thường dùng

$$\Phi\left(\vec{x}, p\right) = f\left(\vec{x}\right) + p\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i\left(\vec{x}\right)}$$

Hoặc $$\Phi\left(\vec{x}, p\right) = f\left(\vec{x}\right) - p\sum_{1}^{n} Ln\left[g_i\left(\vec{x}\right)\right]$$

Hàm phạt có 2 loại: phạt trong và phạt ngoài

2.6. Quy hoạch hình học (GP)

Pôzinôm:

- Cho một số dương bất kỳ C

Các số thực α_j (j = 1 ÷ n)

Các biến dương x_j ($\vec{x} = [x_1 x_2 ... x_n]^T$

Các hàm $U\left(\vec{x}\right)$ được xác định bởi đẳng thức:

$$U\left(\vec{x}\right)\ C x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}$$

Gọi là Pôzinôm đơn thức

- Tổng hữu hạn các Pôzinôm đơn thức là 1 đa thức cũng gọi là Pozinôm $g\left(\vec{x}\right)$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{m} U_k(x) = \sum_{k=1}^{m} C_k x_1^{\alpha 1k} x_2^{\alpha 2k} ... x_n^{\alpha mk} = \sum_{k=1}^{m} C_k \prod_{j=1}^{n} x_l^{\alpha\, jk}$$

- Nhận xét: + Các hệ số C_k >

+ Mũ là số thực bất kỳ

+ Biến $\vec{x}$ > 0, miền nghiệm có toạ độ dương.

2.6.1. Tính chất của Pôzinôm:

Nếu f và g đều là Pôzinôm, các biểu thức sau cũng sẽ là Pôzinôm:

f±g; f.g ; f/g ; λg+ηf (với λ, η > 0)

- Ma trận luỹ thừa:

Từ các số mũ α_{jk} của các biến x_j trong tổng gồm k pôzinôm (j = 1÷n; k = 1 ÷ m) ta xây dựng được ma trận lũy thừa có kích thước n x m

$$[A] = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}\ldots\alpha_{1m} \\ \alpha_{21}\alpha_{22}\ldots\alpha_{2m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1}\alpha_{n2}\ldots\alpha_{nm} \end{pmatrix}$$

- Vectơ các hệ số:

$$\vec{C} = [c_1 c_2 \ldots c_k \ldots c_m]$$

Ví dụ: 1. $g_1(x)$ $\rightarrow \vec{C}_1 = [n \;\; 1 \;\; 2\ldots.n]^T$

2. $g_2(x, y)$ $\rightarrow \vec{C}_2 = [1 \;\; 2 \;\; 1\ldots.1]^T$

3. $g_3(x, y)$ $\rightarrow \vec{C}_3 = [1 \;\; 1 \;\; \ldots\ldots1]^T$

Vậy, Pôzinôm hoàn toàn xác định khi biết vectơ các hệ số và ma trận mũ.

2.6.2. Bài toán Quy hoạch Hình học:

Gọi $g_0(\vec{x})$ và các $g_i(\vec{x})$ là những Pôzinôm gồm n biến x_j ($j \in R^n$), b_i là các số dương bất kỳ.

Bài toán quy hoạch hình học phát biểu như sau:

Tìm Min Z = $g_0(\vec{x})$

Trong điều kiện ràng buộc: $g_i(x) \leq b_1$ (i = 1 ÷m)

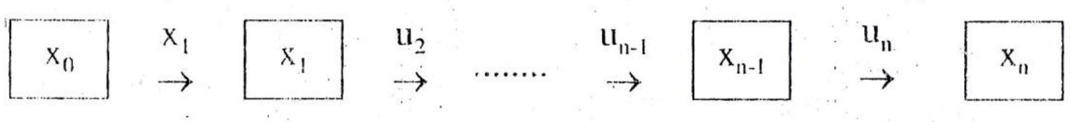
với mọi $x_j > 0$

2.7. Quy hoạch động (DP)

Nguyên lý các quy trình tối ưu do Viện sĩ Pontriaghin xây dựng

Quy hoạch động là phương pháp giải bài toán tối ưu có đặc điểm là quá trình điều khiển sẽ gồm nhiều bước.

Sơ đồ hoá quá trình điều khiển sẽ như sau:



Hình 2.12.

x_0, x_1, x_n là các trạng thái của hệ thống trong từng giai đoạn.

u_0, u_1, u_2 là các quyết định được lựa chọn dần từng bước để đi từng giai đoạn, tạo thành một sách lược.

Mỗi bước có nhiều cách giải quyết nhưng phải lựa chọn cách nào để thu được sách lược tối ưu. Cách cổ điển là tìm mọi cách giải quyết có khả năng (quét toàn bộ). Sau đó chọn giải pháp tối ưu. Vì vậy, rất cồng kềnh, phải xử lý nhiều.

Quy hoạch động trong mỗi bước đi phải tìm ra được quyết định tối ưu theo sơ đồ, ở mỗi bước trạng thái của hệ thống không phụ thuộc toàn bộ các giai đoạn khác mà chỉ phụ thuộc trạng thái trước. Tức là điều khiển ở bước sau không ảnh hưởng đến kết quả đã đạt ở bước trước.

"Sách lược tối ưu của toàn bộ quá trình sẽ là toàn bộ sách lược của từng giai đoạn".

2.8. Lập bài toán thiết kế tối ưu kết cấu

Thiết kế tối ưu bao gồm và kết hợp giữa các bài toán cơ học kết cấu và thực tế công trình trong phạm vi quy định của các tiêu chuẩn và quy trình thiết kế. Bài toán thiết kế tối ưu các kết cấu chủ yếu lạ những bài toán quy hoạch phi tuyến.

Hàm mục tiêu trong đó thường là:

- Cực tiểu hóa các hàm về thể tích.
- Cực tiểu hóa các hàm về trọng lượng.
- Cực tiểu hóa giá thành toàn bộ kết cấu.

Trong các phương án có khả năng, tất nhiên phương án tối ưu theo bất kỳ một quan điểm nào đều là phương án có lợi nhất cho người thiết kế nhưng trong mọi quan điểm, hiệu quả kinh tế được đánh giá bằng giá thành xây dựng vẫn phải là tiêu chuẩn quan trọng nhất. Chính vì vậy, khi thiết kế tối ưu cho các kết cấu thép, việc cực tiểu hoá các hàm thể tích và trọng lượng cũng chính là làm giảm giá thành xây dựng.

Với một hệ kết cấu thanh gồm n phần tử với:

A_i, l_i, γ_i, C_i... là các tham số diện tích tiết diện, chiều dài, trọng lượng đơn vị, đơn giá, phần tử i. Ta có thể lập được các hàm mục tiêu:

$$\text{Min } Z \equiv V = \Sigma A_i l_i \tag{2.24}$$

$$\text{Hoặc Min } Z \equiv P = \Sigma \gamma_i A_i l_i = \Sigma\, b_i l_i \tag{2.25}$$

$$\text{hoặc Min } Z \equiv G = \Sigma C_i \gamma_i A_i l_i = \Sigma\, d_i l_i .... \tag{2.26}$$

Khi lập bài toán tối ưu ta phải chú ý:

- Nên phân loại các phần tử thành từng nhóm.

+ Nhóm các tiết diện A_k , chiều dài l_k bằng nhau $V = \sum_{k=1}^{t} A_k l_k$

+ Nhóm chịu lực đứng, nhóm thanh chéo, xà ngang.

- Đặc trưng hình, học có thể quy về các đặc trưng chung bằng cách quy đổi

hoặc logarit hóa.

Ví dụ: Thép hình xây dựng:

$A = 0{,}78W^{2/3}$ $\rightarrow$ log A = 2/3 lơgW + log 0,78

$A = 0{,}559I^{1/2}$ $\rightarrow$ log A = 1/2 logI + log 0,559

$W = 0{,}607\, I^{3/4}$ $(W = 1{,}451\, A^{3/2};\ I = 3{,}3A^2)$

Vậy nếu là phần tử cột có thể quy ra phần tử xà với: $V = 0{,}559\ \Sigma I_i^{1/2} l_1$

Điều kiện ràng buộc. Có 2 loại:

- Dạng đẳng thức: + Các điều kiện về cân bằng lực.

+ Các điều kiện về biến dạng liên tục

- Dạng bất đẳng thức: + Các điều kiện về độ bền, độ ổn định

+ Các điều kiện về độ cứng (chuyển vị, võng, nứt)

+ Các điều kiện về chảy dẻo

Chẳng hạn như: $\sigma_i \le R_1$ (về ứng suất)

$\delta_i \le \Delta_i$ (về độ võng, chuyển vị)

$K\delta = F$ (điều kiện cân bằng)

2.9. Thiết kế tối ưu hệ thanh

Để thuận lợi cho việc xây dựng bài toán thiết kế tối ưu, ta có thể dùng các phương pháp số để phân tích kết cấu, mà trước hết là phương pháp phần tử hữu hạn theo mô hình tương thích. Mục đích cuối cùng của quy trình thiết kế là chọn diện tích các thanh sao cho thoả mãn các điều kiện ràng buộc (yêu cầu) về ứng suất, chuyển vị, cấu tạo .... và đạt được mục tiêu nào đó về kinh tế.

- Hàm mục tiêu: Để có giá thành vật liệu nhỏ nhất cần phải cực tiểu hoá hàm mục tiêu sau: Xét 1 kết cấu hệ thanh gồm n phần tử, thanh i có chiều dài li, diện tích tiết diện Fi, thể tích là Vi = Fili, trọng lượng đơn vị thể tích γi.

Tổng thể tích kết cấu: V = $\sum V_i = \sum_{i=1}^{n} Fili$ (2.27)

Tổng khối lượng kết cấu:

Tổng giá thành vật liệu: G = ΣCiγiFili

Nói chung, giá thành vật liệu chỉ là chỉ tiêu thiết kế quan trọng cho nên thường được lấy làm hàm mục tiêu. Vì vậy để đạt được hiệu quả kinh tế, ta thường chia riêng các nhóm phần tử. Các nhóm phần tử có thể có tiết diện như nhau, các thanh chéo cùng loại tiết diện.

Đồng thời sử dụng ngay kết quả về xác lập ma trận độ cứng của phần tử và lắp ghép các phần tử trong kết cấu tổng thể làm cơ sở phân tích kết cấu. Ngoài ra cần xây dựng bổ sung một số ma trận và vectơ đặc trưng để sử dụng dễ dàng trong quá trình lập các điều kiện ràng buộc. Ta có thể dùng một số ma trận và các hệ thức của phương pháp phần tử hữu hạn như:

$\vec{\delta}$: Vectơ chuyển vị nút $\phi = L\vec{\delta}$ $\vec{\varepsilon} = [V]\phi$

$\vec{\varepsilon}$: Vectơ biến dạng tổng quát $\vec{\varepsilon} = B\vec{\delta}$

$\vec{\sigma}$: Vectơ ứng lực tổng quát $\vec{\sigma} = D\vec{\varepsilon} = DB\vec{\delta} = S\vec{\delta}$

$\vec{F}$: Vectơ ứng lực nút $\vec{F} = K\vec{\delta}$

K: Ma trận độ cứng phần tử K = $\int B^T DBdv$

D: Ma trận độ cứng vật liệu

T: Ma trận chuyển trục

- Xây dựng thêm các ma trận và vectơ trung gian khác:

* Ma trận liên hệ giữa vectơ nội lực và biến dạng tuyệt đối:

Ví dụ: Thanh khớp thứ i có hai nút 1 và 2:

$$N_i = \frac{A_i E_i}{l_i}\Delta l_i$$ hoặc σ

Vậy i = 1 ÷ n ta có n phần tử độc lập tuyến tính:

$$\overrightarrow{N} = \left\lfloor \frac{A_1E_1}{l_1}\ \frac{A_2E_2}{l_2} .... \frac{A_nE_n}{l_n} \right\rfloor \overrightarrow{\Delta l} = \lfloor k_i \rfloor \Delta l$$

$$\{N\} \equiv \begin{bmatrix} \frac{A_1E_1}{l_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A_2E_2}{l_2} & 0 \\ 0 & 0 & ... \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta l_1 \\ \Delta l_2 \\ .... \end{Bmatrix} = \left\lfloor \frac{A_1E_1}{l_1}\ \frac{A_2E_2}{l_2} ... \frac{A_nE_n}{l_n} \right\rfloor \overrightarrow{\Delta l} = [k]\{\Delta l\}$$

* Ma trận liên hệ giữa biến dạng tuyệt đối $\overrightarrow{\Delta l_i}$ và chuyển vị nút $\vec{\delta}$

+ Mặt phẳng: $\Delta l = \delta_2 - \delta_1 = [-\cos\alpha \quad -\sin\alpha \quad \cos\alpha \quad \sin\alpha] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$

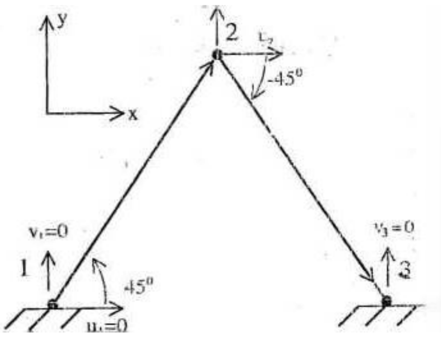
+ Không gian: $\Delta l = [-\cos\alpha \quad -\cos\beta \quad -\cos\gamma \quad \sin\alpha \quad \sin\beta \quad \sin\gamma \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ ... \\ w_2 \end{Bmatrix}$

Tập hợp lại trong 1 phương trình ma trận: (có n thanh, m chuyển vị nút)

$$\overrightarrow{\Delta l} = \begin{Bmatrix} \Delta l_1 \\ \Delta l_2 \\ \\ \Delta l_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 & ... \cos\alpha_i & \sin\alpha_1 \\ & h & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ v_1^{(1)} \\ ... \\ u_2^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ ... \end{Bmatrix}$$

n x 1 nxm mx1

Ví dụ:



Hình 2.13.

$$\overrightarrow{\Delta l} \equiv \begin{Bmatrix} \Delta l_1 \\ \Delta l_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 = 0 \\ v_3 = 0 \end{Bmatrix}$$

Rút gọn:

$$\{\Delta l\} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \equiv [h]\{\delta\}$$

Vậy ta rút ra: $\vec{N} = \lfloor k \rfloor \overrightarrow{\Delta l} = \lfloor k \rfloor h \vec{\delta}$

Nếu $\vec{F}$ = vectơ tải ở nút theo các hướng tương ứng với $\vec{\delta}$

$\vec{F} = \mathrm{K}\vec{\delta}$

Có thể dùng ngay [K] trong PTHH

2.10. Thiết kế tối ưu hệ khung

Thiết kế tối ưu hệ thanh chịu lực dọc trục, ở đây các biểu thức và đẳng thức trong phương pháp phần tử hữu hạn cũng vẫn sử dụng thuận lợi, như ma trận [k], [S] .... (cần chú ý quy ước dấu). Tuy nhiên, để dễ dàng lập các điều kiện ràng buộc cũng cần bổ sung thêm 1 số ma trận và vectơ đặc trưng.

* Ma trận biến đổi chuyển vị [h]: từ quan hệ hình học, các chuyển vị trong toạ độ địa phương u, v, θ được biểu thị theo chuyển vị trong toạ độ chung, u', v', θ' (như hình vẽ trục toạ độ)

Đối với một phần tử bất kỳ ta sẽ có:

$u_1 = u'_1\cos\alpha + v'_1\sin\alpha$

$u_2 = u'_2\cos\alpha + v'_2\sin\alpha$...

Từ đó, ta có hệ thức giữa biến dạng dọc trục:

$$\Delta u = u_2 - u_1 = [-\cos\alpha \quad -\sin\alpha \quad \cos\alpha \quad \sin\alpha]\begin{Bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ u'_2 \\ v'_2 \end{Bmatrix}$$

Cũng twong tự đối với v và θ (θ được bảo toàn trong phép chuyển trục)

Cuối cùng:

$$\{\Delta\} \equiv \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta\theta \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & \ldots & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 & \ldots & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ \theta'_1 \\ \ldots \\ u'_2 \\ v'_2 \\ \theta'_2 \end{Bmatrix} = [h]\{\delta'\}$$

* Ma trận độ cứng toàn bộ: sử dụng các công thức trong phương pháp phần tử hữu hạn viết theo toạ độ chung {F'} = [K].{δ'}

[K'] = Ma trận độ cứng của toàn kết cấu trong toạ độ chung.

- Điều kiện ràng buộc:

+ Về độ bền: $\dfrac{N}{A} + \dfrac{M_1(M_2)}{W} \le R$

+ Về độ cứng: $\{\delta'\} \le \{\Delta\}$

+ Về điều kiện cân bằng: $[K']\{\delta'\} = \{F'\}$

- Xử lý các biến âm: Về nguyên tắc cũng tương tự hệ thanh chịu lực dọc trục. Riêng chuyển vị xoay θ, cần đưa vào biến mới $\lambda > 0$ sao cho $\theta = \lambda - \varphi$

Trong đó: φ = góc xoay cho phép

Điều kiện về độ cứng: $|\theta| < \varphi$. Tức là $-\varphi \le \theta \le \varphi$

Vậy: $-\varphi \le \lambda - \varphi \le \varphi \Rightarrow 0 \le \lambda \le 2\varphi$

Nếu khẳng định $\theta < 0$ ta phải có: $-\varphi \le \theta \le 0$

Vậy $-\varphi \le \lambda - \varphi \le 0 \quad \Rightarrow 0 \le \lambda \le \varphi$

* Nhận xét:

Để xác định nội lực trong các phần tử trong hệ khung, chủ yếu chịu Mômen uón ở 2 đầu, cho nên có thể giảm kích thước của các vectơ vào ma trận đặc trưng, đồng thời tách các vectơ mômen và chuyển vị xoay tương ứng với hai đầu của phần tử.

Vậy, nếu bỏ qua ảnh hưởng của vectơ biến dạng dọc $\overrightarrow{\Delta u}$ trong các phần tử, cấu trúc các vectơ vào ma trận sẽ như sau (đơn vị 1 phần tử):

Vectơ nội lực: $\{N\} = [Q \quad M_1 \quad M_2]^T$

Vectơ biến dạng: $\{\Delta\} = \{\Delta v \quad \theta_1 \quad \theta_2]^T$

Vectơ chuyển nút: $\{\delta_1\} = [u_1 \quad v_1 \quad \theta_1]$; $\{\delta_1 \} = [u_2 \quad v_2 \quad \theta_2 \;]^T$

Vectơ tải nút: $\{F\} = [F_{xl} \quad F_{Y1} \quad F_{ZI} \quad F_{X2} \quad F_{Y2} \; F_{Z2} \,]^T$

Trong toạ độ chung và sau khi lắp ghép các phần tử và xét luôn các điều kiện biên, ta sẽ có ma trận và vectơ ở dạng rút gọn:

Ví dụ: Tính thể tích cực tiểu của 1 khu cho trên hình vẽ với các số liệu cho trước: L = 1m, P = 2KN, $\alpha = 30^0$

Khống chế: Chuyển vị đứng tại C: 4,8mm

Chuyển vị ngang tại B, D: 2,78mm

Ứng suất trong các phần tử $\leq$ 0,15 KN/mm^2

- Hàm mục tiêu: (2 biến I1, I2) $\leftrightarrow$ (xét 1/2 khung)

$V = 0{,}559\sum_{i=1}^{2} L_i I_i^{1/2} \rightarrow$ min! tương ứng với

$V = I_1^{1/2} + I_2^{1/2} \rightarrow$ min!

- Tính [h]: Nhận xét: $u'_1 = v'_2 tg\alpha_2$

và bỏ qua ảnh hưởng lực dọc.

Phần tử 2:

$$\begin{vmatrix}\Delta v\\ \theta_1\\ \theta_2\end{vmatrix} = \begin{bmatrix}\sin\alpha & 0 & \cos\alpha\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u'_1\\ v'_1 = 0\\ \theta'_1\\ h'_2 = 0\\ v'_2\\ \theta'_2 = 0\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}\Delta v\\ \theta_1\\ \theta_2\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\sin\alpha_2 & 0 & \cos\alpha_2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{Bmatrix}u'_1\\ \theta'_1\\ v'_2\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\sin\alpha_2 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v'_2\\ \theta'_1\end{Bmatrix}$$

Vậy:

$$\{\Delta\} = [h]\begin{Bmatrix}v_2\\ \theta_1\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}-tg\alpha_2 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\\ \sec\alpha_2 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v_2\\ \theta_1\end{Bmatrix}$$

- Tính [k]: Nhận xét chỉ để lại các số hạng liên quan:

$$k = \begin{bmatrix}b_1 & d_1 & d_1 & 0 & 0 & 0\\ & e_1 & f_1 & 0 & 0 & 0\\ & & e_1 & 0 & 0 & 0\\ & & & b_2 & d_2 & d_2\\ & & & & e_2 & f_2\\ & & & & & e_2\end{bmatrix}$$ Trong đó:

$$[k][h] = \begin{bmatrix}-b_1 tg\alpha_2 & d_1\\ -d_1 tg\alpha_2 & e_1\\ -d_1 tg\alpha_2 & f_1\\ b_2\sec\alpha_2 & d_2\\ d_2\sec\alpha_2 & e_2\\ d_2\sec\alpha_2 & f_2\end{bmatrix}$$

- Tính nội lực (mômen):

$$\{N\} = \begin{bmatrix} M_{11} \\ M_{21} \\ M_{12} \\ M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_1 tg\alpha_2 & f_1 \\ -d_1 tg\alpha_2 & e_1 \\ d_2 \sec\alpha_2 & f_2 \\ d_2 \sec\alpha_2 & e_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_1 \end{Bmatrix}$$

* Ma trận độ cứng kết cấu [K]

$$[K'] = h^T kh = \begin{bmatrix} b_1^2 tg^2\alpha_2 & -d_1 tg\alpha_2 + d_2 \sec\alpha_2 \\ (dx) & e_1 + e_2 \end{bmatrix}$$

- Điều kiện ràng buộc:

+ Bền: Giải phương trình:

$$\{\mathrm{F}\} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_1 \end{Bmatrix}$$

Thay vào công thức "sức bền vật liệu":

Tại C: $\dfrac{2886.U_2^{0,25}(5I_1 + 2I_2)}{I_2^2 + 32I_1I_2 + 4I_2^2} \leq 0{,}15$

Tại B và A tương tự:

+ Cứng: $v_2 \leq 4{,}8$; $u_1 = v_2 tg\alpha_2 = \dfrac{v_2}{\sqrt{3}} \leq 2{,}78$mm

$\rightarrow v_2 \leq 2{,}78\sqrt{3} = 4{,}8$mm

Hai điều kiện là 1

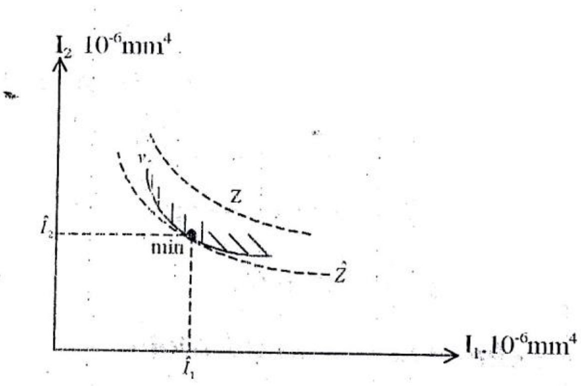
$v_2 = \dfrac{4832000(I_1 + I_2)}{I_1^2 + 32I_1I_2 + 4I_2^2} \leq 4{,}8mm$

Giải bài toán quy hoạch phi tuyến trên bằng phương pháp đồ thị:

Có: $\hat{I}_1 = 0{,}045.10^6$mm^4

$\hat{I}_2 = 0{,}060.10^6$mm^4

$Z_{min} = 457{,}5$



Hình 2.14.

2.11. Tối ưu hoá kết cấu giai đoạn dẻo

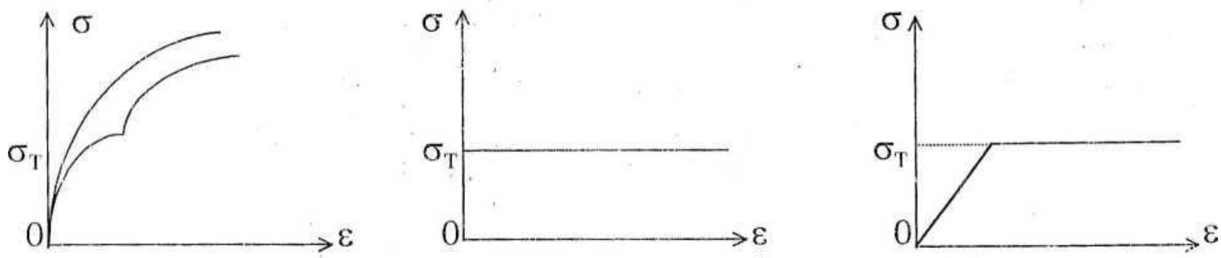
Khi thanh dầm trong kết cấu chịu mô men uốn tới giai đoạn chảy dẻo của vật liệu, các khớp dẻo sẽ hình thành tại một số tiết diện tới hạn (trong kết cấu thép tiền chế có các thanh tiết diện thay đổi thì các tiết diện tới hạn sẽ khác nhau). Tại các khớp dẻo đó, xuất hiện mô men dẻo với giá trị không đổi và bằng:

$M_d = \sigma_T.W_d$

σ_T: giới hạn chảy của vật liệu

W_d: môđun chống uốn dẻo của tiết diện

Từ kết quả thí nghiệm vật liệu thực tế, ta thường dùng 2 sơ đồ lý tưởng hoá cho giai đoạn chảy dẻo của vật liệu.



Vật liệu dẻo lý tưởng Vật liệu đàn dẻo

Hình 2.15.

Trong đó sơ đồ vật liệu dẻo lý tưởng được sử dụng nhiều hơn vì lý do tính toán giản đơn hơn (bỏ qua biến dạng đàn hồi)

Từ công thức: $M_d = \sigma_T .W_d$

biết được W_d ta suy ra M_d và ngược lại

Kết cấu sẽ thiếu dần liên kết, trở thành kết cấu biến hình và bị phá hoại theo một cơ cấu nhất định, tuỳ thuộc M_d và tải trọng tác dụng. Đối với khung một nhịp có thể hình thành cơ cấu phá hoại do hình thành khớp dẻo tại đầu dầm, đầu cột, chân cột, những chỗ có tiết diện thay đổi hoặc có |M| max.

Bài toán tối ưu trọng lượng kết cấu khung thép 1 tầng 1 nhịp

- Hàm mục tiêu: gọi g_j = trọng lượng bản thân (phân bố đều trên chiều dài l_j)

$$Z = \sum_{1}^{e} g_j l_j$$

giữa g_j và Md_j cũng có liên 1 j = 1 ÷ e (số phần tử rời rạc hoá)

$g_j = aMd^b$ với vật liệu thép a = 22,86; b = 0,6 (phi tuyến)

$g_j = C + dM_d$ (tuyến tính)

Hàm mục tiêu có thể viết:

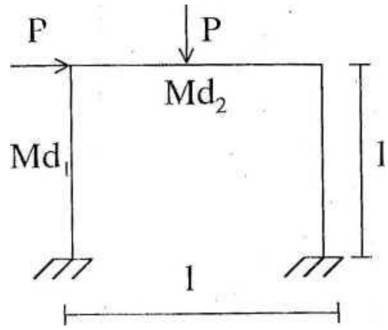
$$Z = \sum_{j=1}^{e} \left(C + dMd_j\right) l_j = \sum_{j=1}^{e} Md_j l_l \rightarrow \min$$

- Các điều kiện ràng buộc:

Dựa trên các cơ cấu phá hoại dẻo, lập các phương trình công khả dĩ cho từng trường hợp. Đó chính là các điều kiện ràng buộc.

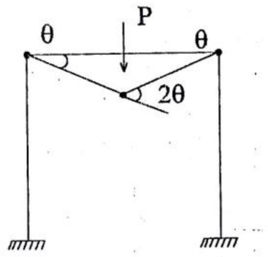
Bài toán thiết kế tối ưu trọng lượng kết cấu khung 1 nhịp

Cho khung như hình vẽ, chiều dài các thanh = 1, tiết diện các thanh không thay đổi. Ngoài lực tác dụng như hình vẽ, xác định mô men chống uốn dẻo để khung có trọng lượng nhỏ nhất.



Hình 2.16.

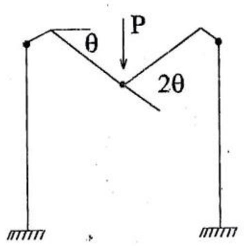
Dự kiến mọi cơ cấu phá hoại:



Khớp dẻo hình thành ở đầu dầm và giữa dầm

Phương trình công khả dĩ :

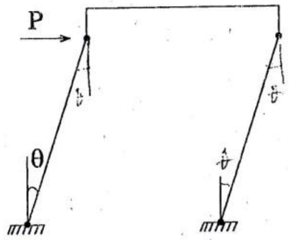
$$pl/2\ \theta = 4Md_2\,\theta$$



Khớp dẻo hình thành ở đầu cột và giữa dầm

Phương trình công khả dĩ :

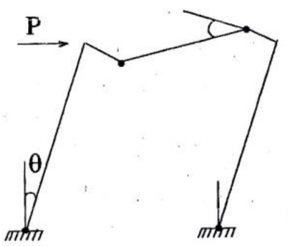
$$pl/2\ \theta = 2Md_1\,\theta + 2Md_2\,\theta$$



Khớp dẻo hình thành ở đầu cột và chân cột

Phương trình công khả dĩ :

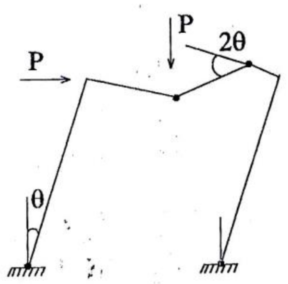
$$pl\ \theta = \cancel{2}\,4Md_1\,\theta$$



Khớp dẻo hình thành ở chân cột và đầu dầm

Phương trình công khả dĩ :

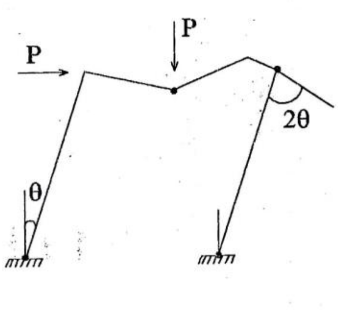
$$pl\ \theta = 2Md_1\,\theta + 2Md_2\,\theta$$



Khớp dẻo hình thành ở chân cột và đầu và giữa dầm

Phương trình công khả dĩ :

$$pl/2\,\theta + pl\,\theta = 2Md_1\,\theta + 4Md_2\,\theta$$



Khớp dẻo hình thành ở chân, đầu cột và giữa dầm

Phương trình công khả dĩ :

$$pl/2\,\theta + pl\,\theta = 4Md_1\,\theta + 2Md_2\,\theta$$

Rút gọn lại

$$x_1 \geq 1/4$$

$$x_1 + x_2 \geq 1/2$$

$$2x_1 + 4x_2 \geq 3/2$$

$$4x_1 + 2x_2 \geq 3/2$$

Để chuẩn bị lập bảng simplex ta đưa vào các biến phụ và làm đẳng thức hoá các điều kiện ràng buộc

$$x_1 - y_1 = 0,25$$

$$x_1 + x_2 - y_2 = 0,5$$

$$2x_1 + 4x_2 - y_3 = 1,5$$

$$4x_1 + 2x_2 - y_4 = 1,5$$

Với yi $\geq$ 0

viết lại hàm mục tiêu

$$2x_1 + x_2 - Z = 0$$

Lập bảng simplex

x_1	x_2	bi	yi
1	0	0,25	y_1
1	1	0,5	y_2
2	4	1,5	y_3
4	2	1,5	y_4
2	1	0	-Z

y_1	x_2	bi	yi
1	0	0,25	x_1
-1	1	0,25	y_2
-2	4	1	y_3
-4	2	0,5	y_4
-2	1	-0,5	-Z

y_1	y_3	bi	yi
1	0	0,25	x_1
0,5	-0,25	0,25	y_2
-0,5	4	0,25	x_2
-3	-0,5	0	y_4
-2,5	-0,25	-0,75	-Z

Nhìn vào bảng ta thấy phương án tối ưu là:

$Z = 0,75$ $x_1 = x_2 = 0,25$

$Z = 3/4pl2$ $Md_1 = p1/4$ $Md_2 = p1/4$

CHƯƠNG 3.
PHƯƠNG PHÁP MỚI NGHIÊN CỨU TỐI ƯU CHIỀU CAO DẦM

Trong chương này tác giả giới thiệu một phương pháp mới "Phương pháp tính toán tối ưu kết cấu khi sử dụng nội lực làm ẩn". Với việc dùng ẩn là nội lực (ứng suất) rất thuận tiện khi xây dựng bài toán đàn hồi cũng như xây dựng bài toán tối ưu. Cần chú ý rằng phương pháp phần tử hữu hạn thỏa mãn gần đúng điều kiện cân bằng trong khi đó sử dụng nội lực hoặc ứng suất luôn đảm bảo chính xác điều kiện cân bằng.

Lagrange là người đặt nền móng đầu tiên cho việc nghiên cứu tối ưu hóa kết cấu thông qua bài toán thiết kế tối ưu cột chịu nén, 1820 [ ]. Đó là bài toán tìm hình dạng tối ưu của cột khi chịu lực nén dọc trục. Lý thuyết tối ưu công trình bắt đầu phát triển vào năm 1904, với công trình nghiên cứu về tối ưu hóa kết cấu của Michell "The limits of economic of material in frame". Nhưng mãi đến năm 1956 Prager mới giải thích rõ công trình nghiên cứu của Michell và gọi đó là Lý thuyết dàn của Michell. Bài toán đặt ra như sau: "Cho một điểm đặt tải trọng trong không gian và cho hai gối tựa. Tìm kết cấu tiết kiệm vật liệu nhất để truyền tải trọng từ điểm đặt tải về hai gối tựa đã cho. Đó là một hệ vô số các thanh cong "Bài toán như vậy là bài toán tối ưu kết cấu dàn", [4, 5, 6]. Tuy nhiên, lý thuyết tối ưu công trình chỉ phát triển mạnh mẽ trong 30 năm trở lại đây khi xuất hiện nhiều phương pháp toán học tối ưu.

Nếu như trước năm 1980 thì phương pháp nghiên cứu tối ưu chỉ dựa vào phương pháp quy hoạch tuyến tính (hàm mục tiêu và các hàm ràng buộc là các phương trình hoặc bất phương trình tuyến tính) mà thành tựu quan trọng nhất là phương pháp diễn hình (Simplex method). Nhờ sự xuất hiện của các phương pháp điểm trong "internal point method", nó cho phép giải bài toán có kích thước lớn. Đó là đặc điểm của bài toán tối ưu công trình. Ngoài ra còn có phương pháp di động tiệm cận (MMA) và các thuật toán giải từng bước (lấy nghiệm trước tìm nghiệm sau tốt hơn). Cũng từ đó xuất hiện mô hình tối ưu mới gọi là mô hình vật thể đẳng hướng với hàm phạt việt liệu, SIMP (Solid insotropic of material penanty). Theo lý thuyết này thì môđun đàn hồi của vật liệu:

$$E = E_0\left(\rho^p\right)$$

Trong đó: (ρ^p) là hàm phạt đối với môđun đàn hồi của vật liệu; ρ là khối lượng đơn vị ($0<\rho<1$); p = (2÷5) tùy thuộc vào hệ số poát xông.

Với mô hình SIMP ta có thể xây dựng các bài toán tối ưu công trình khác nhau và cho phép chọn các phương pháp giải (phương pháp tối ưu – thuật toán tối ưu) thích hợp. Một đặc điểm của phương pháp này là sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn, nghĩa là sử dụng chuyển vị để làm ẩn khi giải bài toán. Như đã biết phương pháp phần tử hữu hạn là phương pháp được sử dụng hết sức rộng rãi trong tính toán công trình và do đó nó được sử dụng để giải bài toán tối ưu công trình là lẽ đương nhiên. Tuy nhiên, với việc dùng ẩn là nội lực mà tác giả dùng dưới đây sẽ cho kết quả tốt vì nó thỏa mãn trực tiếp được phương trình cân bằng.

3.1. Xây dựng bài toán thiết kế tối ưu chiều cao dầm dựa trên nội lực Mômen uốn M.

Xét dầm Euler - Bernoulli, các giả thuyết của lý thuyết này như sau :

– Trục dầm không có ứng suất

– Tiết diện phẳng và thẳng góc với trục dầm, sau khi biến dạng vẫn phẳng và thẳng góc với trục dầm.

– Các thớ dọc của dầm không ép lên nhau (không xét Σσz).

Nhờ giả thuyết trên cho nên chuyển vị của dầm cũng là độ võng của dầm. Trong dầm chỉ có một nội lực là Mômen uốn M.

Gọi EJx là độ cứng chống uốn của dầm. Khi dùng ẩn là nội lực M thì sử dụng nguyên lý thế năng biến dạng đàn hồi tối thiểu ta có:

$$Z = \int_l \frac{M_x^2}{2EJ_x} \to Min \tag{3.1a}$$

với ràng buộc là:

$$\frac{d^2M}{dx^2} + q = 0 \tag{3.1b}$$

trong đó: q là tải trọng phân bố đều trên dầm.

Trong bài toán trên M(x) là 1 hàm của tọa độ x. Vì vậy bài toán (3.1) là bài toán biến phân, tìm cực tiểu của biểu thức (3.1a) với điều kiện ràng buộc (3.1b). Biểu thức (3.1a) là năng lượng biến dạng đàn hồi tối thiểu của dầm; Biểu thức (3.1b) là phương trình vi phân cân bằng của dầm.

Bằng phép tính biến phân ta sẽ nhận được đầy đủ các phương trình cân bằng, các điều kiện biên cũng như mối liên hệ giữa nội lực mômen và chuyển vị của dầm.

Khi cho chiều cao tiết diện dầm h=const theo chiều dài của dầm thì dựa vào phân bố mômen M ta có thể tính toán được chiều cao của dầm $h=h_0$ ứng với M lớn nhất trong dầm. Tuy nhiên, ở những vị trí có M nhỏ hơn ta có thể chọn h nhỏ hơn. Đó là bài toán thiết kế tối ưu chiều cao dầm.

Người kỹ sư có thể dễ dàng xác định được phân bố nội lực M trong dầm và căn cứ vào giá trị M_{max} để xác định chiều cao tiết diện dầm. Như vậy, cách làm này không tiết kiệm vật liệu.

Từ phương trình cần bằng (3.1b) ta thấy rằng phân bố nội lực trong dầm không phụ thuộc vào tiết diện ngang của dầm. Nếu như biết được phân bố nội lực trong dầm với EJ = const là M_0 thì nội lực trong dầm có độ cao h thay đổi cũng là M_0.

Từ đó ta có thể xây dựng bài toán tối ưu chiều cao dầm như sau:

$$\int_l \frac{6M_0^2}{Eh^3}dx + \int_l hdx \rightarrow Min \qquad (3.2a)$$

với điều kiện ràng buộc:

$$0 \le h \le h_0 \qquad (3.2b)$$

hoặc khi đưa về không thứ nguyên bằng cách cho h_0=1 (1 là chiều cao tại vị trí có M_{max}) thì điều kiện ràng buộc có thể viết lại như sau :

$$0 \le h \le 1 \qquad (3.2c)$$

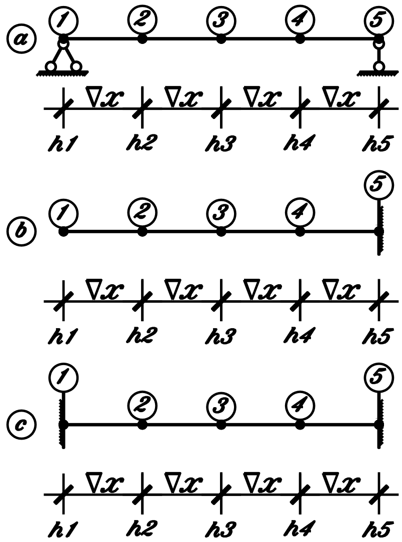
Trong hàm mục tiêu (3.2a), đại lượng thứ nhất là năng lượng biến dạng của dầm, có chiều cao h chưa biết, chiều rộng tiết diện b = 1. Đại lượng thứ hai là thể tích vật liệu của dầm.

Trong công thức (3.2a) ta thấy đại lượng thứ nhất có thứ nguyên là công, đại lượng thứ hai có thứ nguyên là thể tích. Hai đại lượng này hoàn toàn độc lập với nhau và không có liên hệ trực tiếp ở ràng buộc. Ta có thể xem bài toán (3.2a) là bài toán tối ưu đa mục tiêu.

3.2. Phương pháp giải bài toán thiết kế tối ưu chiều cao dầm.

Bài toán trên khó tìm lời giải giải tích cho từng trường hợp liên kết của dầm bất kỳ. Cho nên ta giải bài toán trên theo phương pháp số.

Chia dầm thành các phần tử, tại nút của mối phần tử có ẩn là chiều cao dầm h_i và có M_i đã biết. Chẳng hạn, dầm đơn giản hai đầu khớp, sẽ có ẩn như, hình 3.1.



Hình 3.1. Sơ đồ rời rạc hóa dầm

Bài toán tối ưu chiều cao dầm bây giờ được viết như sau:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \frac{6M_i^2}{Eh_i^3}\Delta x + \sum_{i=1}^{n} h_i \Delta x \rightarrow Min \qquad (3.3a)$$

với các điều kiện ràng buộc

$$0 \le h_i \le 1 \qquad (3.3b)$$

Bài toán (3.3) là bài toán tối ưu thông số. Các M_i là các thông số vì M_i là các ẩn (là mômen uốn M tại các điểm chứ không phải hàm). Vì vậy, ta có thể dùng các chương trình tối ưu của Mathlab để giải. Ở đây ta dùng hàm F_{mincon} để giải bài toán tối ưu có hàm mục tiêu là phi tuyến, ràng buộc là bất đẳng thức tuyến tính và phi tuyến, cũng như phương trình cân bằng tuyến tính hoặc phi tuyến.

Trình tự tính toán:

Với dầm có chiều dài, liên kết, tải trọng cho trước ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tính M_0 và h_0.

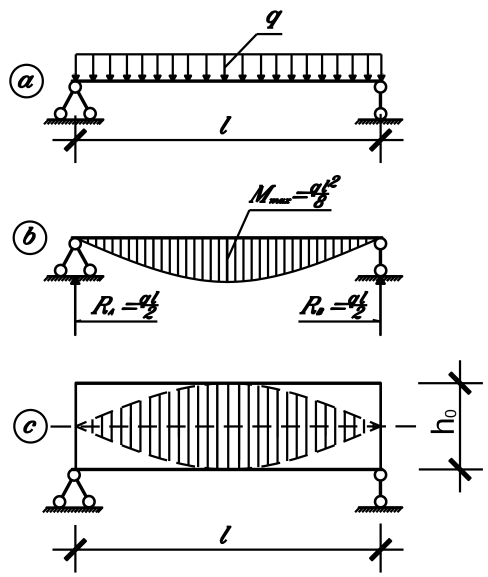
Bước 2: Dùng các kết quả M_0 và h_0 vừa tính ở bước 1, để đưa vào bài toán (3.3a) và (3.3b).

Bước 3: Tìm cực tiểu của bài toán (3.3a).

3.3. Ví dụ tính toán thiết kế tối ưu chiều cao dầm.

Ví dụ 3.3.1: Dầm đơn giản

Cho dầm đơn giản chịu tải trọng phân bố đều q như, hình 3.2a. Chiều dài nhịp l, độ cứng chống uốn EJ=Const, tiết diện dầm b=1, h=h_0 (ứng với M_{max} tại giữa nhịp). Yêu cầu, thiết kế tối ưu chiều cao dầm.



Hình 2. Dầm đơn giản

a. Sơ đồ dầm, b. Biểu đồ moomen,

c. Tiết diện dầm sau khi tối ưu

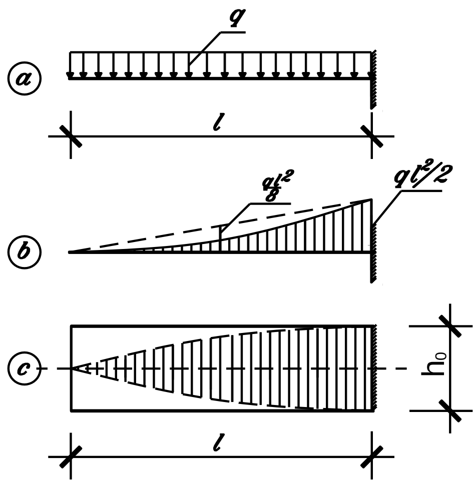
Chia dầm thành 10 đoạn (11 điểm nút), viết biểu thức hàm mục tiêu theo (3.3a). Cực tiểu hóa hàm mục tiêu (3.3a) với điều kiện ràng buộc (3.3b), ta sẽ nhận được phân bố tối ưu chiều cao dầm ứng với phân bố mômen, theo bảng 1.

Bảng 1: Mô men uốn và chiều cao tiết diện dầm tối ưu

Nút (i)	Mômen x ql^2	Chiều cao tiết diện (h)
1	0	0
2	0.0450	0.5991
3	0.0800	0.8004
4	0.1050	0.9149
5	0.1200	0.9785
6	0.1250	1.0000
7	0.1200	0.9785
8	0.1050	0.9149
9	0.0800	0.8004
10	0.0450	0.5991
11	0	0

Ví dụ 3.3.2. Dầm đầu tự do – đầu ngàm

Cho dầm con sơn đầu tự do – đầu ngàm, chịu tải trọng phân bố đều q như, hình 3a. Chiều dài nhịp l, độ cứng chống uốn EJ=Const, tiết diện dầm b=1, $h=h_0$ (ứng với M_{max} tại đầu ngàm). Yêu cầu, thiết kế tối ưu chiều cao dầm.



Hình 3. Dầm hai đầu ngàm

a. Sơ đồ dầm, b. Biểu đồ moomen,

c. Tiết diện dầm sau khi tối ưu

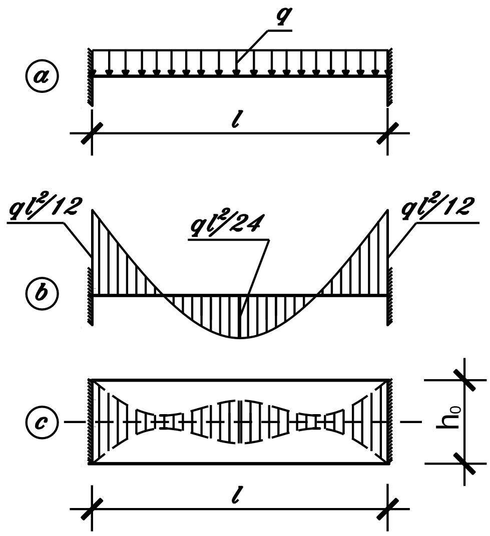
Chia dầm thành 10 đoạn (11 điểm nút), viết biểu thức hàm mục tiêu theo (3.3a). Cực tiểu hóa hàm mục tiêu (3.3a) với điều kiện ràng buộc (3.3b), ta sẽ nhận được phân bố tối ưu chiều cao dầm ứng với phân bố mômen, theo bảng 2.

Bảng 2: Mô men uốn và chiều cao tiết diện dầm tối ưu

Nút (i)	Mômen x ql^2	Chiều cao tiết diện (h)
1	0	0
2	-0.0500	0.3165
3	-0.1000	0.4439
4	-0.1500	0.5476
5	-0.2000	0.6274
6	-0.2500	0.7099
7	-0.3000	0.7721
8	-0.3500	0.8368
9	-0.4000	0.8875
10	-0.4500	0.9424
11	-0.5000	1.0000

Ví dụ 3.3.3. Dầm đầu hai đầu ngàm

Cho dầm con sơn đầu tự do – đầu ngàm, chịu tải trọng phân bố đều q như, hình 3a. Chiều dài nhịp l, độ cứng chống uốn EJ=Const, tiết diện dầm b=1, h=h_0 (ứng với M_{max} tại đầu ngàm). Yêu cầu, thiết kế tối ưu chiều cao dầm.



Hình 4. Dầm hai đầu ngàm

a. Sơ đồ dầm, b. Biểu đồ moomen,

c. Tiết diện dầm sau khi tối ưu

Chia dầm thành 10 đoạn (11 điểm nút), viết biểu thức hàm mục tiêu theo (3.3a). Cực tiểu hóa hàm mục tiêu (3.3a) với điều kiện ràng buộc (3.3b), ta sẽ nhận được phân bố tối ưu chiều cao dầm ứng với phân bố mômen, theo bảng 3.

Bảng 3: Mô men uốn và chiều cao tiết diện dầm tối ưu

Nút (i)	Mômen x ql^2	Chiều cao tiết diện (h)
1	-0.0833	1.0000
2	-0.0383	0.6893
3	-0.0033	0.2134
4	0.0217	0.5179
5	0.0367	0.6737
6	0.0417	0.7229
7	0.0367	0.6717
8	0.0217	0.5188
9	-0.0033	0.2132
10	-0.0383	0.6960
11	-0.0833	1.0000

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1. Kết luận

Tác giả đã xây dựng được phương pháp để nghiên cứu tối ưu chiều cao tiết diện dầm dựa trên nội lực mômen uốn M. Giới thiệu phương pháp số để giải bài toán tối ưu chiều cao dầm một cách đơn giản và nhận được kết quả chính xác.

Phương pháp tính tối ưu chiều cao dầm sử dụng trong luận văn, có thể dùng để tính cho khung nhiều tầng, nhiều nhịp bởi vì ta thường biết trước phân bố nội lực của các thanh trong trường hợp EJ của từng thanh không thay đổi. Như vậy, dùng M_0 của từng thanh để tối ưu chiều cao cho nó và cách chọn thanh nào cần tối ưu tùy thuộc vào kiến trúc sư, tạo điều kiện cho người kiến trúc sư thiết kế khung vừa tiết kiệm vật liệu vừa đáp ứng yêu cầu kiến trúc.

Phương pháp tính tối ưu của dầm và khung như trên là mới, không có trong tài liệu cơ học nào mà tác giả đã biết.

2. Kiến nghị

Đây là một phương pháp mới và đúng nên có thể dùng nó như một công cụ phục vụ công tác giảng dạy và học tập. Dùng phương pháp đã xây dựng ở trên để nghiên cứu tối ưu cho các kết cấu khác như dàn, khung, tấm, vỏ vv...

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Hà Huy Cương (2005), Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, TC Khoa học và kỹ thuật, IV/Tr.112-118.

2. Lê Xuân Huỳnh (2009), Tính toán kết cấu theo lý thuyết tối ưu. Nhà xuất bản Khoa học kỹ thuật, Hà nội.

3. Võ Như Cầu (2005), Phân tích kết cấu theo lý thuyết tối ưu, Nhà xuất bản Khoa học kỹ thuật, Hà nội.

4. Đoàn Văn Duẩn (2016), Phương pháp mới nghiên cứu tối ưu chiều cao dầm, Tạp chí xây dựng, số 3 trang 136-138.

5. Đoàn Văn Duẩn (2016), Phương pháp mới nghiên cứu tối ưu thể tích dàn, Tạp chí xây dựng, số 3 trang 131-133.

6. William R.Spillers và Keith M.Bacbain, Structural Optimization, Springer.

7. Peter W. Christensen, Anders Klarbring An introduction to Structural Optimization NXB Springer 2010.

8. M.P.Bendsoe, Osigmund Topology Optimization NXB Springer 2003.

9. Makoto Ohsaki Optimization of finite Dimentional Structures NXB CRC Press 2011.

PHỤ LỤC TÍNH TOÁN

%DAM DON GIAN. TOI UU DAN HOI

```
p=1;

t0=1.e-6;%chieu cao nho nhat

ptx=20;%SO PHAN TU

n1=ptx+1;%SO NUT
ld=1;
dx=ld/ptx;

nm1=zeros(1,n1);
nt=zeros(1,n1);
k=0;
for m=2:n1-1
    k=k+1;
    nm1(m)=k;
end
for m=2:n1-1
    k=k+1;
    nt(m)=k;
end
numvar=k;
so_an=numvar
%DIEU KIEN h>0.1 va h<1

a=zeros(n1*2,numvar);
b=zeros(n1*2,1);
k=0;
for m=2:n1-1
    k=k+1;
    k1=nt(m);
    a(k,k1)=1;
    b(k)=1;

    k=k+1;
    k1=nt(m);
    a(k,k1)=-1;
    b(k)=-t0;
end

for m=2:n1-1
    s1=(m-1)*dx;
    m0(m)=p/2*s1-p*s1^2/2;%MOMEN UON
end

r0=zeros(numvar,1);
for m=2:n1-1
    k=nt(m);
    r0(k)=1;
    k=nm1(m);
    r0(k)=m0(m);
end

options=optimset('algorithm','active-set');
r=fmincon(@opdam1a,r0,a,b,[],[],[],[],[],options);

x1=zeros(n1,1);
x2=zeros(n1,1);
```

```
        for m=2:n1-1
            k=nm1(m);
            s1=r(k);
            k=nt(m);
            s2=r(k);
            x1(m)=s1;
            x2(m)=s2;
        end
        s1=max(x2);
        x2=x2./s1;
        z1=[x1 x2]
        x0=0:n1-1;
        figure
        plot(x0,x1);
        grid
        figure
        plot(x0,-x2./2,x0,x2./2);
        grid
        z0=0;
        for m=2:n1-1
            s1=dx;
            z0=z0+x2(m)*s1;
        end
        z0/ld
```

%DAM DON GIAN. TOI UU DAN HOI

```
function f1=opdam1a(r)

        p=1;

        edh=2*1.e6;

        ptx=20;

        n1=ptx+1;
        ld=1;
        dx=ld/ptx;
        for m=2:n1-1
            s1=(m-1)*dx;
            m0(m)=p/2*s1-p*s1^2/2;
        end
        nm1=zeros(1,n1);
        nt=zeros(1,n1);
        k=0;
        for m=2:n1-1
            k=k+1;
            nm1(m)=k;
        end
        for m=2:n1-1
            k=k+1;
            nt(m)=k;
        end
        numvar=k;

        f1=0;
```

%Min THE NANG BIEN DANG

```
        for m=2:n1-1
            z0=dx;
            k=nm1(m);
            s1=r(k);
            k=nt(m);
```

```
        s2=r(k);
        s3=m0(m);
        f1=f1+(s1*s2)^2*6/edh*z0/s2^3;
        f1=f1+(s1*s2-s3)^2*6/edh*z0/s2^3;
        f1=f1+(s1-s3)^2*6/edh*z0*1.e9;
    end

    %MIN(The tich)
    for m=2:n1-1
        z0=dx;

        k=nt(m);
        s1=r(k);
        f1=f1+s1*z0;
    end

%DAM NGAM 1 DAU TU DO, DAU CUOI NGAM
%TOI UU DAN HOI

    p=1;

    t0=1.e-6;%chieu cao nho nhat

    ptx=50;%SO PHAN TU

    n1=ptx+1;%SO NUT
    ld=1;
    dx=ld/ptx;

    nm1=zeros(1,n1);
    nt=zeros(1,n1);
    k=0;
    for m=2:n1
        k=k+1;
        nm1(m)=k;
    end
    for m=2:n1
        k=k+1;
        nt(m)=k;
    end
    numvar=k;
    so_an=numvar
    %DIEU KIEN h>0.1 va h<1

    a=zeros(n1*2,numvar);
    b=zeros(n1*2,1);
    k=0;
    for m=2:n1
        k=k+1;
        k1=nt(m);
        a(k,k1)=1;
        b(k)=1;

        k=k+1;
        k1=nt(m);
        a(k,k1)=-1;
        b(k)=-t0;
    end

    for m=2:n1
        s1=(m-1)*dx;
        m0(m)=-p/2*s1;%MOMEN UON
```

```
        end

        r0=zeros(numvar,1);
        for m=2:n1
            k=nt(m);
            r0(k)=1;
            k=nm1(m);
            r0(k)=m0(m);
        end

        options=optimset('algorithm','active-set');
        r=fmincon(@opdam3a,r0,a,b,[],[],[],[],[],options);

        x1=zeros(n1,1);
        x2=zeros(n1,1);
        for m=2:n1
            k=nm1(m);
            s1=r(k);
            k=nt(m);
            s2=r(k);
            x1(m)=s1;
            x2(m)=s2;
        end
        s1=max(x2);
        x2=x2./s1;
        z1=[x1 x2]
        x0=0:n1-1;
        figure
        plot(x0,x1);
        grid
        figure
        plot(x0,-x2./2,x0,x2./2);
        grid
        z0=0;
        for m=2:n1
            s1=dx;
            if m==n1
                s1=dx/2;
            end
            z0=z0+x2(m)*s1;
        end
        z0/ld

% TOI UU DAN HOI
%DAM TU DO-NGAM

function f1=opdam3a(r)

        p=1;

        edh=2*1.e6;

        ptx=50;

        n1=ptx+1;
        ld=1;
        dx=ld/ptx;
        for m=2:n1
            s1=(m-1)*dx;
            m0(m)=-p/2*s1;
        end
```

```
nm1=zeros(1,n1);
nt=zeros(1,n1);
k=0;
for m=2:n1
    k=k+1;
    nm1(m)=k;
end
for m=2:n1
    k=k+1;
    nt(m)=k;
end
numvar=k;

f1=0;
```

%Min THE NANG BIEN DANG

```
for m=2:n1
    z0=dx;
    if m==n1
        z0=dx/2;
    end
    k=nm1(m);
    s1=r(k);
    k=nt(m);
    s2=r(k);
    s3=m0(m);
    f1=f1+(s1*s2)^2*6/edh*z0/s2^3;
    f1=f1+(s1*s2-s3)^2*6/edh*z0/s2^3;
    f1=f1+(s1-s3)^2*6/edh*z0*1.e9;
end
```

%MIN(The tich)

```
for m=2:n1
    z0=dx;
    if m==n1
        z0=dx/2;
    end
    k=nt(m);
    s1=r(k);
    f1=f1+s1*z0;
end
```

%DAM NGAM 2 DAU CUOI. TOI UU DAN HOI

```
p=1;

t0=1.e-6;%chieu cao nho nhat

ptx=50;%SO PHAN TU

n1=ptx+1;%SO NUT
ld=1;
dx=ld/ptx;

nm1=zeros(1,n1);
nt=zeros(1,n1);
k=0;
for m=1:n1
    k=k+1;
    nm1(m)=k;
```

```
        end
        for m=1:n1
            k=k+1;
            nt(m)=k;
        end
        numvar=k;
        so_an=numvar

%DIEU KIEN h>0.1 va h<1

        a=zeros(n1*2,numvar);
        b=zeros(n1*2,1);
        k=0;
        for m=1:n1
            k=k+1;
            k1=nt(m);
            a(k,k1)=1;
            b(k)=1;

            k=k+1;
            k1=nt(m);
            a(k,k1)=-1;
            b(k)=-t0;
        end

        for m=2:n1
            s1=(m-1)*dx;
            m0(m)=-p/12+p/2*s1-p*s1^2/2;%MOMEN UON
        end
        m0(1)=-p/12;

        r0=zeros(numvar,1);
        for m=1:n1
            k=nt(m);
            r0(k)=1;
            k=nm1(m);
            r0(k)=m0(m);
        end

        options=optimset('algorithm','active-set');
        r=fmincon(@opdam2a,r0,a,b,[],[],[],[],[],options);

        x1=zeros(n1,1);
        x2=zeros(n1,1);
        for m=1:n1
            k=nm1(m);
            s1=r(k);
            k=nt(m);
            s2=r(k);
            x1(m)=s1;
            x2(m)=s2;
        end
        s1=max(x2);
        x2=x2./s1;
        z1=[x1 x2]
        x0=0:n1-1;
        figure
        plot(x0,x1);
        grid
        figure
        plot(x0,-x2./2,x0,x2./2);
        grid
        z0=0;
```

```
      for m=1:n1
          s1=dx;
          if m==1|m==n1
              s1=dx/2;
          end
          z0=z0+x2(m)*s1;
      end
      z0/ld
```

%DAM DON GIAN. TOI UU DAN HOI

```
function f1=opdam2a(r)

      p=1;

      edh=2*1.e6;

      ptx=50;

      n1=ptx+1;
      ld=1;
      dx=ld/ptx;
      for m=2:n1
          s1=(m-1)*dx;
          m0(m)=-p/12+p/2*s1-p*s1^2/2;
      end
      m0(1)=-p/12;
      nm1=zeros(1,n1);
      nt=zeros(1,n1);
      k=0;
      for m=1:n1
          k=k+1;
          nm1(m)=k;
      end
      for m=1:n1
          k=k+1;
          nt(m)=k;
      end
      numvar=k;

      f1=0;
```

%Min THE NANG BIEN DANG

```
      for m=1:n1
          z0=dx;
          if m==1
              z0=dx/2;
          end
          if m==n1
              z0=dx/2;
          end
          k=nm1(m);
          s1=r(k);
          k=nt(m);
          s2=r(k);
          s3=m0(m);
          f1=f1+(s1*s2)^2*6/edh*z0/s2^3;
          f1=f1+(s1*s2-s3)^2*6/edh*z0/s2^3;
          f1=f1+(s1-s3)^2*6/edh*z0*1.e9;
      end
```

```
%MIN(The tich)
      for m=1:n1
          z0=dx;
          if m==1
              z0=dx/2;
          end
          if m==n1
              z0=dx/2;
          end
          k=nt(m);
          s1=r(k);
          f1=f1+s1*z0;
      end
```