

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC DÂN LẬP HẢI PHÒNG

---

**VŨ HOÀNG HẢI**

**NGHIÊN CỨU ỔN ĐỊNH CỦA THANH  
BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN**

**LUẬN VĂN THẠC SĨ KỸ THUẬT**

CHUYÊN NGÀNH: KỸ THUẬT XÂY DỰNG CÔNG TRÌNH DÂN DỤNG & CÔNG NGHIỆP

MÃ SỐ: 60.58.02.08

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

**GS. TS. TRẦN HỮU NGHỊ**

**Hải Phòng, 2017**

## MỤC LỤC:

<b>MỞ ĐẦU.....</b>	<b>1</b>
<b>* Lý do chọn đề tài: .....</b>	<b>1</b>
<b>* Đối tượng, phương pháp và phạm vi nghiên cứu của luận văn</b>	<b>1</b>
<b>* Mục đích nghiên cứu của luận văn:.....</b>	<b>1</b>
<b>* Nhiệm vụ nghiên cứu của luận văn: .....</b>	<b>1</b>
<b>* Cấu trúc của luận văn:.....</b>	<b>1</b>
<b>CHƯƠNG 1 .....</b>	<b>3</b>
<b>LÝ THUYẾT ỔN ĐỊNH CÔNG TRÌNH.....</b>	<b>3</b>
<b>1.1. Khái niệm về ổn định và ổn định công trình .....</b>	<b>3</b>
<b>1.2. Tầm quan trọng và lịch sử phát triển của lý thuyết ổn định công trình.....</b>	<b>4</b>
<b>1.3. Các phương pháp xây dựng bài toán ổn định công trình ....</b>	<b>5</b>
<b>1.3.1 Phương pháp tĩnh học.....</b>	<b>5</b>
<b>1.3.2 Phương pháp động lực học.....</b>	<b>6</b>
<b>1.3.3 Phương pháp năng lượng .....</b>	<b>6</b>
<b>CHƯƠNG 2.....</b>	<b>9</b>
<b>PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN LÝ CỰC TRỊ GAUSS .....</b>	<b>9</b>
<b>2.1 Nguyên lí cực trị Gauss.....</b>	<b>9</b>
<b>2.2 Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss .....</b>	<b>11</b>

2.3 Cơ hệ môi trường liên tục: ứng suất và biến dạng.....	19
2.4 Cơ học kết cấu.....	26
2.5 Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss và các phương trình cân bằng của cơ hệ.....	30
2.5.1 Phương trình cân bằng tĩnh đối với môi trường đàn hồi, đồng nhất, đẳng hướng .....	30
2.5.2 Phương trình vi phân của mặt võng của tấm chịu uốn ....	33
<b>CHƯƠNG 2 .....</b>	<b>36</b>
<b>TÍNH TOÁN ỔN ĐỊNH UỐN DỌC CỦA THANH.....</b>	<b>36</b>
<b>BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN .....</b>	<b>36</b>
<b><u>3.1. Bài toán ổn định của thanh chịu nén.....</u></b>	<b>36</b>
<b>3.2. Phương pháp chuyển vị cưỡng bức .....</b>	<b>38</b>
<b>3.3. Phương pháp phần tử hữu hạn.....</b>	<b>39</b>
3.3.1 Nội dung phương pháp phần tử hữu hạn theo mô hình chuyển vị.....	40
3.3.1.1. Rời rạc hoá kết cấu: .....	40
3.3.1.2. Hàm chuyển vị:.....	42
1. PTHH tuyến tính:.....	42
2. PTHH bậc hai .....	43
3.3.1.3. Phương trình cơ bản của phương pháp phần tử hữu hạn .....	43

3.3.1.4. Chuyển hệ trục tọa độ .....	48
3.3.1.5. Ghép nối ma trận độ cứng và vectơ tải trọng nút của toàn hệ .....	49
a. Đánh chỉ số nút và chuyển vị.....	49
b. Ma trận độ cứng .....	50
c. Vectơ lực của toàn hệ .....	50
d. Trường hợp gối đàn hồi tại nút .....	51
3.3.1.6. Xử lý điều kiện biên.....	51
3.3.1.7. Tìm phản lực tại các gối.....	53
3.3.1.8. Trường hợp biết trước một số chuyển vị.....	53
3.3.2. Cách xây dựng ma trận độ cứng của phần tử chịu uốn ..	54
3.3.3. Cách xây dựng ma trận độ cứng tổng thể của kết cấu ....	57
3.3.4. Tính ổn định của các thanh chịu nén có các điều kiện biên khác nhau. ....	62
<b>KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ .....</b>	<b>74</b>
<b>Kết luận: .....</b>	<b>74</b>
<b>Kiến nghị: .....</b>	<b>74</b>
<b>TÀI LIỆU THAM KHẢO .....</b>	<b>1</b>
<b>Tiếng Việt .....</b>	<b>1</b>

## LỜI CẢM ƠN

Tác giả xin trân trọng cảm ơn GS. TS. NGUYỄN. Trần Hữu Nghị, đã hướng dẫn và tạo mọi điều kiện tốt nhất cho tác giả hoàn thành luận văn này.

Xin chân thành cảm ơn toàn thể quý Thầy Cô trong Khoa xây dựng của Trường Đại Học Dân lập Hải Phòng đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cũng như tạo mọi điều kiện thuận lợi nhất cho tôi trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và cho đến khi thực hiện đề tài luận văn này.

Cuối cùng, tôi xin chân thành bày tỏ lòng cảm ơn đến các anh chị và các bạn đồng nghiệp đã hỗ trợ cho tôi rất nhiều trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và cung cấp những tài liệu cũng như những góp ý quý báu để tôi có thể hoàn thành luận văn.

Xin chân thành cảm ơn!

*Hải Phòng, tháng 4 năm 2017*

Tác giả

**Vũ Hoàng Hải**

## MỞ ĐẦU

### \* Lý do chọn đề tài:

Trong những công trình xây dựng hiện nay người ta thường dùng các thanh có chiều dài lớn, tấm - vỏ chịu nén và do đó điều kiện ổn định trong miền đàn hồi có tầm quan trọng đặc biệt, đòi hỏi phải nghiên cứu đầy đủ cả về mặt lý thuyết và thực nghiệm. Bài toán ổn định của kết cấu đã được giải quyết theo nhiều hướng khác nhau, phần lớn xuất phát từ nguyên lý năng lượng mà theo đó kết quả phụ thuộc rất nhiều vào cách chọn dạng của hệ ở trạng thái lệch khỏi dạng cân bằng ban đầu.

Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss do GS.TSKH. Hà Huy Cương đề xuất là phương pháp cho phép áp dụng nguyên lý cực trị Gauss - vốn được phát biểu cho hệ chất điểm - để giải các bài toán cơ học vật rắn biến dạng nói riêng và bài toán cơ học môi trường liên tục nói chung. Đặc điểm của phương pháp này là bằng một cái nhìn đơn giản luôn cho phép tìm được kết quả chính xác của các bài toán dù đó là bài toán tĩnh hay bài toán động, bài toán tuyến tính hay bài toán phi tuyến.

### \* Đối tượng, phương pháp và phạm vi nghiên cứu của luận văn

Trong luận văn này, tác giả sử dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, phương pháp chuyển vị cưỡng bức để xây dựng bài toán và dùng phương pháp phân tử hữu hạn để giải.

### \* Mục đích nghiên cứu của luận văn:

Tính toán ổn định đàn hồi của thanh bằng phương pháp phân tử hữu hạn

### \* Nhiệm vụ nghiên cứu của luận văn:

- Trình bày lý thuyết về ổn định và ổn định công trình
- Trình bày phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, phương pháp chuyển vị cưỡng bức để xây dựng bài toán ổn định của thanh thẳng đàn hồi chịu uốn dọc.

- Xây dựng và giải bài toán ổn định uốn dọc của thanh thẳng đàn hồi bằng phương pháp phân tử hữu hạn

### \* Cấu trúc của luận văn:

Luận văn gồm 3 Chương:

Chương 1: Tổng quan về lý thuyết ổn định công trình.

Chương 2: Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss.

Chương 3: Tính toán ổn định uốn dọc của thanh bằng phương pháp phần tử hữu hạn.

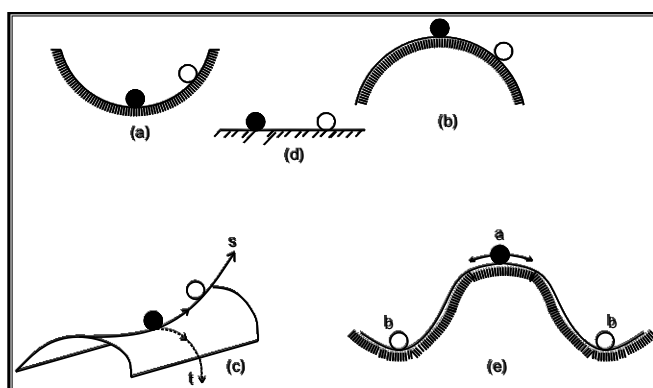
## CHƯƠNG 1

## LÝ THUYẾT ỔN ĐỊNH CÔNG TRÌNH

Trong chương này bàn về lý thuyết ổn định công trình và các phương pháp chung để xây dựng các bài toán ổn định công trình, tiêu chuẩn về ổn định và các phương pháp giải bài toán ổn định công trình.

## 1.1. Khái niệm về ổn định và ổn định công trình

Một cách hình dung tốt nhất về khái niệm ổn định là ta xét các trường hợp viên bi cứng trên các mặt cầu cứng lõm và lồi, Hình 1.1.



Hình 1.1. Các trường hợp mất ổn định

Rõ ràng là trong trường hợp (a), mặt cầu lõm, sự cân bằng của viên bi là ổn định bởi vì kích nó ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu (đáy cầu) rồi thả ra thì nó sẽ trở về vị trí đáy cầu hoặc lân cận với vị trí đó (nếu có ma sát). Trong trường hợp (b), mặt cầu lồi, sự cân bằng là không ổn định, bởi vì kích viên bi ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu rồi thả bi ra thì viên bi sẽ không trở lại vị trí ban đầu nữa. Trong trường hợp (c), hình yên ngựa, sự cân bằng là ổn định khi kích viên bi ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu theo phương  $s$  và là không ổn định theo phương  $t$ . Trong trường hợp (d), kích viên bi ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu thì nó lăn trên mặt phẳng ngang đến khi ngừng chuyển động, nó có vị trí cân bằng mới khác với trạng thái cân bằng ban đầu. Trong trường hợp này ta nói rằng trạng thái cân bằng ban đầu là phiếm định (không phân biệt).

Ở trên ta đã nói đến trạng thái cân bằng của viên bi. Suy rộng ra cũng có thể nói như vậy đối với các trạng thái cân bằng của cơ hệ phức tạp, ví dụ như trạng thái ứng suất và biến dạng, trạng thái nội lực và chuyển vị hoặc là trạng thái năng lượng.



Trở lại hình 1.2a. Khi lệch ra khỏi vị trí cân bằng, trọng tâm của viên bi lên cao, thế năng của nó tăng. Trạng thái cân bằng ổn định là trạng thái có thế năng tối thiểu. Ở hình 1.2b, khi lệch với trị số nhỏ, trọng tâm của viên bi giảm, thế năng của nó giảm. Trạng thái cân bằng không ổn định ứng với thế năng lớn. Hình 1.2d, khi lệch ra khỏi vị trí cân bằng, trọng tâm của viên bi không thay đổi, trạng thái cân bằng là phiếm định hoặc không phân biệt.

Như hình 1.2, để biết được trạng thái cân bằng của cơ hệ có ổn định hay không thì ta phải kích nó ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu. Phương pháp chung để đánh giá sự mất ổn định của cơ hệ là: Đưa hệ ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu của nó và kiểm tra xem nó có tồn tại trạng thái cân bằng mới không. Nếu như tìm được trạng thái cân bằng mới khác với trạng thái cân bằng ban đầu thì hệ là mất ổn định và lực giữ cho hệ ở trạng thái cân bằng mới này gọi là lực tới hạn, trường hợp ngược lại hệ là ổn định.

## **1.2. Tầm quan trọng và lịch sử phát triển của lý thuyết ổn định công trình**

Ngoài việc biết được trạng thái cân bằng của hệ thì còn cần xét xem trạng thái cân bằng đó có phải là trạng thái cân bằng ổn định hay không. Thực tế, có nhiều công trình bị phá hoại do mất ổn định. Lịch sử về công nghệ xây dựng cho thấy không ít tai nạn lớn xảy ra ở các nước khác nhau do khi thiết kế các công trình đó người kỹ sư không xét đến đầy đủ các hiện tượng động cũng như sự mất ổn định. Việc sử dụng thép và các hợp kim có cường độ cao trong những kết cấu hiện đại như kết cấu nhà cao tầng; silo; bể chứa; cầu; tàu thủy và máy bay tất yếu dẫn đến phải sử dụng các cấu kiện thanh, thanh thành mỏng, tấm và vỏ mỏng chịu nén, làm cho hiện tượng mất ổn định đàn hồi trở thành một vấn đề có tầm quan trọng đặc biệt. Thực tế cho thấy nhiều công trình bị sập đổ do mất ổn định, chiếc cầu đường sắt đầu tiên ở Kevđa – Nga là cầu dàn hỏ đã bị phá hủy năm 1875 do hệ thanh biên trên bị mất ổn định, Cầu dàn Québec ở Canada, bị phá hủy vì mất ổn định của thanh chịu nén trong khi xây dựng vào năm 1907 [10, trg 5], Cầu Tacoma ở Mỹ xây dựng hoàn thành ngày 1/7/1940 và bị phá hủy 7/11/1940 do bị mất ổn định vì tác dụng của gió [32, trg 277] v.v...

Vấn đề ổn định kết cấu được bắt đầu từ công trình nghiên cứu bằng thực nghiệm do Piter Musschenbroek công bố năm 1729, đã đi đến kết luận rằng lực tới hạn tỷ lệ nghịch với bình phương chiều dài thanh. Ba mươi năm sau bằng phân tích toán học Leonhard Euler cũng nhận được kết quả như vậy. Đầu tiên các kỹ sư không chấp nhận kết quả thí nghiệm của Piter Musschenbroek và kết quả của lý thuyết Euler ngay cả Culông [31, trg 185] cũng tiếp tục cho rằng độ cứng của cột tỷ lệ thuận với diện tích mặt cắt ngang và không phụ thuộc vào chiều dài thanh. Những quan điểm đó dựa trên các kết quả thí nghiệm của cột gỗ và cột sắt lắp ghép có chiều dài tương đối ngắn, những thanh loại này thường bị phá hoại với tải trọng nhỏ thua tải trọng Euler do vật liệu bị phá hoại mà không phải do mất ổn định ngang gây ra. E.Lamac là người đầu tiên giải thích một cách thỏa đáng sự không phù hợp giữa kết quả lý thuyết và kết quả thực nghiệm, ông ấy chỉ ra rằng lý thuyết Euler là hoàn toàn phù hợp với thực nghiệm khi bảo đảm rằng những giả thiết cơ bản của Euler về xem vật liệu là đàn hồi và điều kiện lý tưởng của các đầu cuối cần phải được bảo đảm. Những thí nghiệm sau này khi người ta rất chú ý bảo đảm của đầu cuối của thanh và bảo đảm cho lực đặt đúng tâm của thanh đã khẳng định tính đúng đắn của công thức Euler.

### **1.3. Các phương pháp xây dựng bài toán ổn định công trình**

#### **1.3.1 Phương pháp tĩnh học**

- Tạo cho hệ nghiên cứu một dạng cân bằng lệch khỏi dạng cân bằng ban đầu.
- Xác định trị số lực tới hạn (trị số lực cần thiết giữ cho hệ ở dạng cân bằng mới, lệch khỏi dạng cân bằng đầu). Lực tới hạn xác định từ phương trình đặc trưng (hay còn gọi là phương trình ổn định).

Người nghiên cứu có thể vận dụng nội dung nói trên khi áp dụng: Phương pháp thiết lập và giải phương trình vi phân; Phương pháp thông số ban đầu; Phương pháp lực; Phương pháp chuyển vị; Phương pháp hỗn hợp; Phương pháp sai phân hữu hạn; Phương pháp dây xích; Phương pháp nghiệm đúng tại từng điểm; Phương pháp Bubnov-Galerkin; Phương pháp giải đúng dần.

Trong thực tế, áp dụng các phương pháp tĩnh học để tìm nghiệm chính xác của bài toán ổn định thường gặp nhiều khó khăn và đôi khi không thể thực hiện được.

### 1.3.2 Phương pháp động lực học

- Lập và giải phương trình dao động riêng của hệ.
- Xác định lực tới hạn bằng cách biện luận tính chất nghiệm của chuyển động: nếu dao động của hệ có biên độ tăng không ngừng theo thời gian thì dạng cân bằng ban đầu là không ổn định; ngược lại, nếu hệ luôn dao động bé quanh vị trí cân bằng ban đầu hoặc tắt dần thì là dạng đó là ổn định.

### 1.3.3 Phương pháp năng lượng

- Giả thiết trước dạng biến dạng của hệ ở trạng thái lệch khỏi dạng cân bằng ban đầu.
- Xuất phát từ dạng biến dạng đã giả thiết, lập biểu thức thế năng biến dạng và công của ngoại lực để viết điều kiện tới hạn của hệ.
- Từ điều kiện tới hạn, xác định giá trị của lực tới hạn.

Có thể vận dụng các phương pháp năng lượng bằng cách áp dụng: Trực tiếp nguyên lý Lejeune-Dirichlet; Phương pháp Rayleigh-Ritz; Phương pháp Timoshenko.

Do giả thiết trước biến dạng của hệ nên kết quả lực tới hạn tìm được thường là gần đúng và cho kết quả lớn hơn giá trị của lực tới hạn chính xác. Như vậy mức độ chính xác của kết quả theo các phương pháp năng lượng phụ thuộc vào khả năng phán đoán biến dạng của hệ ở trạng thái lệch: hàm chuyển vị được chọn càng gần với đường đàn hồi thực của thanh thì kết quả càng chính xác. Theo cách làm này thì hàm chuyển vị chọn trước thỏa mãn càng nhiều điều kiện biên hình học và tĩnh học càng tốt nhưng ít nhất phải thỏa mãn điều kiện biên tĩnh học.

Đường lối của ba loại phương pháp (phương pháp tĩnh; phương pháp động; phương pháp năng lượng) tuy khác nhau nhưng cho cùng một kết quả đối với hệ bảo toàn. Đối với hệ không bảo toàn, các phương pháp tĩnh và các phương pháp năng lượng dẫn đến kết quả không chính xác, người ta phải sử dụng các phương pháp động lực học.

Hệ bảo toàn tức là những hệ chịu lực bảo toàn. Lực bảo toàn có tính chất sau đây :

- Độ biến thiên công của lực bằng vi phân toàn phần của thế năng.
- Công sinh ra bởi các lực trên các chuyển vị hữu hạn không phụ thuộc vào đường di chuyển của lực mà chỉ phụ thuộc vào vị trí điểm đặt đầu và điểm đặt cuối của lực.
- Tuân theo nguyên lý bảo toàn năng lượng.

Sự xuất hiện của ma sát nội do quan hệ phi đàn hồi hay ma sát ngoại sẽ dẫn đến hệ lực không bảo toàn.



## CHƯƠNG 2

### PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN LÝ CỰC TRỊ GAUSS

Chương này trình bày nguyên lý Gauss, sau đó trình bày phương pháp mới dựa trên nguyên lý cực trị Gauss để xây dựng và giải các bài toán cơ học dưới dạng tổng quát, chủ yếu là của cơ hệ vật rắn biến dạng. Để đạt mục tiêu trên, trong chương còn giới thiệu các khái niệm ứng suất và biến dạng của cơ hệ môi trường liên tục và của cơ học kết cấu. Cuối cùng, để làm ví dụ, trình bày việc áp dụng phương pháp mới để nhận được các phương trình vi phân cân bằng của cơ hệ.

#### 2.1. Nguyên lý cực trị Gauss

Năm 1829 nhà toán học người Đức K.F. Gauss đã đưa ra nguyên lý sau đây đối với cơ hệ chất điểm [1, tr. 171]:

*“Chuyển động thực của hệ chất điểm có liên kết tùy ý chịu tác động bất kì ở mỗi thời điểm xảy ra một cách phù hợp nhất có thể với chuyển động của hệ đó khi hoàn toàn tự do, nghĩa là chuyển động thực xảy ra với lượng cưỡng bức tối thiểu nếu như số đo lượng cưỡng bức lấy bằng tổng các tích khối lượng chất điểm với bình phương độ lệch vị trí chất điểm so với vị trí khi chúng hoàn toàn tự do”.*

Gọi  $m_i$  là khối lượng chất điểm,  $A_i$  là vị trí của nó,  $B_i$  là vị trí sau thời đoạn vô cùng bé do tác động lực ngoài và do vận tốc ở đầu thời đoạn gây ra,  $C_i$  là vị trí có thể ( bị ràng buộc bởi liên kết) thì lượng cưỡng bức được viết như sau:

$$Z = \sum_i m_i (\overline{B_i C_i})^2 \rightarrow \text{Min} \quad (2.1)$$

Dấu tổng trong (2.1) lấy theo số chất điểm.

Sử dụng nguyên lý vận tốc ảo và nguyên lý D ‘Alembert, xét hệ ở trạng thái cân bằng và cho rằng có lực với độ lớn tỉ lệ với độ dài  $\overline{B_i C_i}$  tác dụng

theo chiều từ  $C_i$  đến  $B_i$ , Gauss đã chứng minh nguyên lý của mình [1, tr. 172].

Để có thể sử dụng nguyên lý Gauss cần biết đại lượng biến phân của nó. Theo [1, tr. 889], Gibbs (năm 1879) và Appell (năm 1899) đi từ các lập luận khác nhau đều nhận được nguyên lý Gauss và chỉ ra rằng đại lượng biến phân của nguyên lý này là gia tốc. Điều này có nghĩa là:

$$\delta r_i = 0; \quad \delta \dot{r}_i = 0; \quad \delta \ddot{r}_i \neq 0 \quad (2.2)$$

ở đây  $\delta$  là kí hiệu biến phân ( lấy vi phân khi cô định thời gian ),  $r_i$ ,  $\dot{r}_i$  và  $\ddot{r}_i$  lần lượt là vectơ toạ độ, vectơ vận tốc và vectơ gia tốc của điểm  $i$ . Chuyển dịch của chất điểm của hệ có liên kết dưới tác dụng của lực  $F_i$  sau thời đoạn  $dt$  tính theo công thức sau đây:

$$r_i + \dot{r}_i dt + \frac{1}{2} \ddot{r}_i dt^2 \quad (2.3)$$

Vì  $\delta r_i = 0$  và  $\delta \dot{r}_i = 0$  nên chuyển dịch của chất điểm hoàn toàn tự do (có thể hình dung ở đầu thời đoạn  $dt$  liên kết được giải phóng nhưng vẫn giữ lực tác dụng) sau thời đoạn  $dt$  là :

$$r_i + \dot{r}_i dt + \frac{1}{2} \frac{F_i}{m_i} dt^2 \quad (2.4)$$

Hiệu của (2.4) và (2.3) cho ta độ lệch vị trí của chất điểm có liên kết so với vị trí của nó khi hoàn toàn tự do.

Có thể xem  $dt$  là hằng thì lượng cường bức  $Z$  theo (2.1) được viết dưới dạng lực như sau (với độ chính xác bằng thừa số  $dt^4/4$ ) :

$$Z = \sum_i m_i \left( \frac{F_i}{m_i} - \ddot{r}_i \right)^2 \rightarrow Min \quad (2.5)$$

hoặc

$$Z = \sum_i \frac{1}{m_i} (F_i - m_i \ddot{r}_i)^2 \rightarrow Min \quad (2.5a)$$

Khi tính lượng cưỡng bức theo (2.5) cần xem gia tốc là đại lượng biến phân (biến phân kiểu Gauss theo cách nói của Boltzmann). Như vậy, phương pháp tìm cực tiểu của các bài toán cơ học được xây dựng theo nguyên lý (2.5) không thể là bất kỳ mà phải là (khi không có ràng buộc nào khác):

$$\frac{\partial Z}{\partial \ddot{r}_i} = 0 \quad (2.6)$$

Điều kiện (2.6) sẽ cho ta phương trình cân bằng. Thật vậy, áp dụng (2.6) vào (2.5) ta nhận được phương trình cân bằng của hệ (ở đây lực tác dụng bằng lực quán tính). Appell và Boltzmann (năm 1897) còn cho biết nguyên lý Gauss đúng cho hệ liên kết holonom và cả hệ liên kết không holonom [1, tr. 890].

Nguyên lý Gauss (2.1) hoặc (2.5) có dạng của phương pháp bình phương tối thiểu là phương pháp cũng do Gauss đưa ra và được dùng rộng rãi trong toán học hiện đại, trong giải tích cũng như trong lời giải số. Có lẽ vì vậy nguyên lý Gauss thu hút sự chú ý của nhiều nhà khoa học, thí dụ, Hertz (năm 1894) dựa trên ý tưởng lượng cưỡng bức đưa ra nguyên lý đường thẳng nhất (đường có độ cong nhỏ nhất) hoặc Prigogine (năm 1954) và Gyarmati (năm 1965) đã xây dựng được lượng cưỡng bức của các quá trình không hồi phục trong nhiệt động lực học [2].

Các tài liệu giáo khoa về cơ học thường giới thiệu nguyên lý Gauss dưới dạng (2.5) là dạng dùng được để tính toán. Nhưng nguyên lý (2.5) với đại lượng biến phân là gia tốc chỉ là một biểu thị của nguyên lý Gauss (2.1) bởi vì đại lượng biến phân trong cơ học còn có thể là chuyển vị và vận tốc như trình bày sau đây.

## 2.2. Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss

Trong bài viết của mình Gauss nêu nhận xét rằng *nguyên lý vận tốc ảo biến vấn đề tĩnh học thành vấn đề toán học thuần túy, còn nguyên lý D'Alembert đưa bài toán động lực học về bài toán tĩnh học và mọi nguyên lý của cơ học hoặc nhiều hoặc ít đều có thể trực tiếp rút ra từ hai nguyên lý*



trên. Dưới đây trình bày phương pháp dựa trên nguyên lý chuyển vị ảo để nhận được biểu thức (2.1) của nguyên lý Gauss.

Xét hệ chất điểm có liên kết tùy ý ở một thời điểm bất kì nào đó có nghĩa là phải đưa lực quán tính  $f_i$  của hệ tại thời điểm đó tác dụng lên hệ. Đối với hệ hoàn toàn tự do lực quán tính  $f_{0i}$  của nó bằng với ngoại lực (chỉ số '0' ở chân kí tự chỉ rằng kí tự đó thuộc hệ so sánh, trường hợp này là hệ hoàn toàn tự do có cùng khối lượng và cùng chịu tác dụng lực ngoài giống như hệ có liên kết). Như vậy, các lực tác dụng lên hệ có liên kết gồm các lực  $f_i = m_i \ddot{r}_i$  và các lực  $f_{0i} = m_i \ddot{r}_{0i}$  (thay cho ngoại lực). Theo nguyên lý chuyển vị ảo đối với liên kết giữ (liên kết dưới dạng đẳng thức) và không giữ (liên kết dưới dạng bất đẳng thức) điều kiện cần và đủ để hệ ở trạng thái cân bằng là [1, tr. 887] :

$$\sum_i (f_i - f_{0i}) \delta r_i \leq 0 \quad (2.7)$$

Biểu thức (2.7) cũng được Fourier (năm 1798) và Ostrogradsky (năm 1838) độc lập đưa ra.

Có thể nhận xét ngay rằng phần trong ngoặc đơn của (2.7) biểu thị lực tác dụng lên hệ nên phải bằng không để hệ ở trạng thái cân bằng.

Trong biểu thức (2.7) cần xem các chuyển vị  $r_i$  độc lập đối với lực tác dụng. Cho nên từ (2.7) có thể viết:

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) r_i \rightarrow \text{Min} \quad (2.8)$$

Trong (2.8)  $r_i$  là các biến độc lập cần tìm để bảo đảm cho  $Z$  cực tiểu. Vì chuyển vị  $r_{0i}$  của hệ hoàn toàn tự do đã biết nên biểu thức (2.8) tương đương với các biểu thức dưới đây:

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) (r_i - r_{0i}) \rightarrow \text{Min} \quad (2.8a)$$

hoặc

$$Z = \sum_i m_i \left[ \frac{f_i}{m_i} - \ddot{r}_{0i} \right] (r_i - r_{0i}) \rightarrow \text{Min} \quad (2.8b)$$

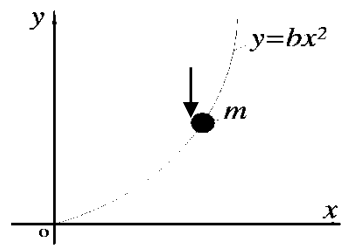
Dễ dàng nhận thấy (2.8b) là tích của khối lượng  $m_i$  với bình phương độ lệch vị trí chất điểm và do đó  $Z$  xác định theo (2.8) là lượng cưỡng bức của

nguyên lý Gauss (với độ chính xác bằng thừa số  $dt^2/2$ ). So với (2.5), lượng cường bức  $Z$  xác định theo (2.8) biểu thị đầy đủ và rõ ràng tư tưởng của nguyên lý Gauss thể hiện ở chỗ, thứ nhất, nó cho phép so sánh hệ có liên kết với hệ hoàn toàn tự do, thứ hai, đại lượng không biết (đại lượng biến phân) trong (2.8) là chuyển vị giống như trong (2.1). Cực tiểu của (2.8) cần và phải được tìm từ điều kiện (khi không có các ràng buộc nào khác):

$$\frac{\partial Z}{\partial r_i} = 0 \quad (2.9)$$

Điều kiện (2.9) áp dụng vào (2.8) cho ta phương trình cân bằng của cơ hệ.

Ví dụ 1 Ví dụ này lấy từ [3, tr. 64]. Viết phương trình chuyển động của khối lượng  $m$  chạy trên đường cong  $y = bx^2$  trong mặt phẳng  $(xy)$ , không có lực ma sát, dưới tác dụng của trường gia tốc  $g$  (Hình 1.1).



Hình 1.1

Các lực tác dụng lên khối lượng  $m$  bao gồm: lực quán tính theo chiều  $y$ , lực trọng trường theo chiều âm của  $y$ , lực quán tính theo  $x$ . Chọn hệ so sánh là hệ có cùng khối lượng  $m$  nằm trong trường gia tốc  $g$  nhưng hoàn toàn tự do. Lượng cường bức được viết theo (2.8) như sau:

$$Z = (m\ddot{y} + mg)y + (m\ddot{x})x \rightarrow \text{Min (a)}$$

Thế  $y = bx^2$  vào (a) ta có

$$Z = (m\ddot{y} + mg)bx^2 + (m\ddot{x})x \rightarrow \text{Min (b)}$$

Xem chuyển vị  $x$  là biến độc lập và từ điều kiện  $\frac{\partial Z}{\partial x} = 0$  nhận được:

$$2bx\ddot{y} + 2bgx + \ddot{x} = 0 \text{ (c)}$$

Thay  $\ddot{y} = 2bx\ddot{x} + 2b\dot{x}^2$  vào (c) nhận được phương trình chuyển động của khối lượng  $m$

$$(4b^2x^2 + 1)\ddot{x} + 4b^2x\dot{x}^2 + 2bgx = 0 \text{ (d)}$$

Phương trình (d) là kết quả cần tìm.

Như nhận xét của Gauss nêu trên, có thể nói biểu thức (2.7) đã biến vấn đề tĩnh học (cân bằng lực) thành vấn đề toán học thuần túy. Thật vậy, nếu ta dùng gia tốc là đại lượng biến phân thì tương tự như (2.7) có thể viết

$$\sum_i (f_i - f_{0i}) \delta \ddot{r}_i \leq 0 \text{ (2.10)}$$

với điều kiện gia tốc  $\ddot{r}_i$  là đại lượng độc lập đối với lực tác dụng.

Từ (1.10) có thể viết

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) \ddot{r}_i \rightarrow \text{Min} \text{ (2.11)}$$

Trong (2.11) cần xem gia tốc  $\ddot{r}_i$  là đại lượng biến phân để bảo đảm cho  $Z$  cực tiểu. Vì gia tốc  $\ddot{r}_{0i}$  của hệ hoàn toàn tự do đã biết nên biểu thức (2.11) tương đương với các biểu thức dưới đây:

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i})(\ddot{r}_i - \ddot{r}_{0i}) \rightarrow \text{Min} \text{ (2.11a)}$$

hoặc 
$$Z = \sum_i m_i \left( \frac{f_i}{m_i} - \ddot{r}_{0i} \right) (\ddot{r}_i - \ddot{r}_{0i}) \rightarrow \text{Min}$$

$$Z = \sum_i m_i (\ddot{r}_i - \ddot{r}_{0i})^2 \rightarrow \text{Min} \text{ (2.11b)}$$

Ta thấy (2.11b) trùng với (2.5). Các gia tốc  $\ddot{r}_i$  phải thỏa mãn các liên kết nếu có và điều kiện cực tiểu của (2.11) là biểu thức (2.6).

**Ví dụ 2.** Làm lại ví dụ 1 (Hình 1) theo nguyên lí (2.5) hoặc biểu thức (2.11)

Khối lượng  $m$  vừa chuyển động theo  $x$ , vừa chuyển động theo  $y$ , nhưng do có liên kết  $y = bx^2$  nên chỉ có một bậc tự do, thí dụ là  $x$ . Các lực tác dụng lên  $m$  bao gồm: Lực quán tính theo chiều  $y$ , lực trọng trường theo chiều âm của  $y$ , lực quán tính theo  $x$ . Lượng cưỡng bức  $Z$  viết theo (2.5) là:

$$Z = m\left(\frac{mg}{m} + \ddot{y}\right)^2 + m\ddot{x}^2 \rightarrow \text{Min (a)}$$

Lấy đạo hàm ràng buộc  $y = bx^2$  theo thời gian hai lần ta có :

$$\ddot{y} = 2bx\ddot{x} + 2b\dot{x}^2 \quad (\text{b})$$

Thay  $\ddot{y}$  trong (a) bằng (b), nhận được

$$Z = (g + 2bx\ddot{x} + 2b\dot{x}^2)^2 + \ddot{x}^2 \rightarrow \text{Min (c)}$$

Xem gia tốc  $\ddot{x}$  là biến độc lập và từ điều kiện  $\partial Z / \partial \ddot{x} = 0$  ta có phương trình chuyển động của khối lượng  $m$  như sau :

$$(4b^2x^2 + 1)\ddot{x} + 4b^2x\dot{x}^2 + 2bgx = 0 \quad (\text{d})$$

Phương trình (d) là kết quả cần tìm.

Tương tự, cũng có thể dùng vận tốc  $\dot{r}_i$  là đại lượng biến phân, khi đó lượng cưỡng bức  $Z$  được viết :

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) \dot{r}_i \rightarrow \text{Min (2.12)}$$

với điều kiện vận tốc  $\dot{r}_i$  là biến độc lập và thoả mãn các liên kết nếu có. Trong trường hợp này điều kiện cực tiểu của nguyên lí(2.12) sẽ là (khi không có ràng buộc nào khác) :

$$\frac{\partial Z}{\partial \dot{r}_i} = 0 \quad (2.13)$$

Làm lại bài toán của ví dụ 1 với đại lượng biến phân là vận tốc (biểu thức 2.12) cũng cho ta kết quả đúng đắn.

Tóm lại, các nguyên lí (2.5) hoặc (2.11) với đại lượng biến phân là gia tốc độc lập đối với lực tác dụng, nguyên lí (2.8) với đại lượng biến phân là

chuyển vị độc lập đối với lực tác dụng và nguyên lý (2.12) với đại lượng biến phân là vận tốc độc lập đối với lực tác dụng đã biến phương trình cân bằng lực (vấn đề cơ học) thành các bài toán toán học thuần túy và có thể được phát biểu như sau : *Chuyển động thực của cơ hệ xảy ra khi lượng cưỡng bức Z*

- *xác định theo (2.5) thì được tìm theo gia tốc, điều kiện (2.6)*
- *xác định theo (2.8) thì được tìm theo chuyển vị, điều kiện (2.9)*
- *xác định theo (2.12) thì được tìm theo vận tốc, điều kiện (2.13)*

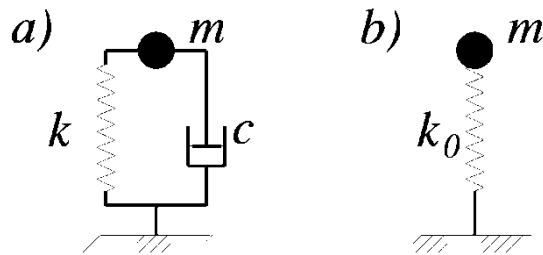
*là cực tiểu.*

Đương nhiên, các đại lượng biến phân gia tốc, chuyển vị và vận tốc phải thỏa mãn các điều kiện liên kết của hệ.

Để có thể áp dụng cho cả các bài toán tĩnh của môi trường liên tục ta sẽ dùng nguyên lý (2.8) với đại lượng biến phân là chuyển vị và điều kiện cực tiểu là (2.9). Nguyên lý (2.5) không cho phép giải các bài toán tĩnh. Do đó, cách trình bày nguyên lý Gauss dưới dạng này đã hạn chế việc sử dụng nguyên lý trong cơ học.

Có thể mở rộng nguyên lý Gauss bằng cách so sánh hệ cần tính với hệ có liên kết tùy ý chịu tác dụng của lực giống như hệ cần tính mà lời giải của nó đã biết. Khi đó thay cho lực ngoài ta dùng lực liên kết và lực quán tính của hệ so sánh với dấu ngược lại để tác động lên hệ cần tính. Điều này là hiển nhiên bởi vì ngoại lực luôn cân bằng với nội lực. Xét ví dụ minh họa sau

Ví dụ 3 Hệ cần tính là khối lượng  $m$  có liên kết lò xo độ cứng  $k$  và liên kết nhớt với hệ số nhớt  $c$  chịu tác dụng lực  $p(t)$  (Hình 2.2). Xét dao động thẳng đứng  $u(t)$  của  $m$  so với vị trí cân bằng tĩnh của nó. Bài toán có một bậc dao động tự do. Ta chọn hệ so sánh có khối lượng  $m_0$  và liên kết lò xo độ cứng  $k_0$  cùng chịu lực  $p(t)$  (Hình 2.2.b).



Hình 2.2 a) Hệ cần tính; b) Hệ so sánh.

Dao động  $u_0(t)$  của hệ so sánh (so với vị trí cân bằng tĩnh của nó) xác định từ phương trình cân bằng sau :

$$m_0\ddot{u}_0 + k_0u_0 = p(t) \quad (a)$$

Lực tác dụng lên khối lượng  $m$  gồm có: lực quán tính  $m\ddot{u}$ , lực cản lò xo  $ku$ , lực cản nhớt  $c\dot{u}$  và lực  $p(t)$  được thay bằng nội lực của hệ so sánh. Lượng cường bức theo (2.8) viết được:

$$Z = (m\ddot{u} + c\dot{u} + ku - m_0\ddot{u}_0 - k_0u_0)u \rightarrow \text{Min} \quad (b)$$

Phần trong dấu ngoặc đơn của (b) biểu thị lực tác dụng và theo nguyên lý chuyển vị (2.8) cần xem chuyển vị  $u$  là biến độc lập đối với lực tác dụng thì từ điều kiện  $\partial Z / \partial u = 0$  nhận được phương trình cân bằng của hệ cần tính

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = m_0\ddot{u}_0 + k_0u_0 \quad (c)$$

hay chú ý tới (a) ta có

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad (d)$$

Nhìn vào (c) và (d) thấy rằng thay cho việc giải phương trình vi phân cân bằng (d) của hệ cần tính ta có thể giải phương trình (c) ứng với từng thời điểm. Vế phải của (c) có thể là nghiệm riêng hoặc nghiệm cơ bản (trường hợp  $p(t)$  là xung đơn vị) của (d) hoặc, một cách tổng quát, là thể hiện của  $p(t)$  trên hệ bất kì nào khác (lời giải của hệ bất kì khi chịu tác động của  $p(t)$ ). Nhận xét này rất hữu ích bởi vì nó cho ta một phương pháp nữa để giải các phương trình vi

phân phức tạp, đặc biệt là đối với các bài toán có điều kiện biên ở vô hạn hoặc là khi giải bằng số.

Lượng cưỡng bức  $Z$  theo (b) có thể viết dưới dạng sau:

$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 \rightarrow \text{Min (e)}$$

$$Z_1 = \frac{1}{k}(ku - k_0u_0)^2, \quad Z_2 = 2c_i u, \quad Z_3 = 2m(\ddot{u} - \ddot{u}_0)u \text{ (f)}$$

Ở đây  $Z_1$  viết dưới dạng bình phương tối thiểu. Vì  $Z_1$  được viết dưới dạng bình phương tối thiểu nên các đại lượng  $Z_2$  và  $Z_3$  phải nhân với hệ số 2. Các biểu thức lượng cưỡng bức (b) và (e), (f) là tương đương.

Những nhận xét rút ra từ ví dụ minh họa nêu trên áp dụng đúng cho bất kì hệ nào khác.

Trình bày trên cho thấy có thể dùng hệ có liên kết bất kì để làm hệ so sánh cho nên có thể mở rộng biểu thức (2.8) như sau :

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) r_i \rightarrow \text{Min (2.14)}$$

với  $f_i$  là nội lực bao gồm lực quán tính và lực liên kết nếu có của hệ cần tính,  $f_{0i}$  là nội lực và lực liên kết đã biết của hệ so sánh bất kỳ chịu tác dụng lực ngoài giống như hệ cần tính.

Chú ý rằng khi sử dụng biểu thức (2.14) cần xem chuyên vị  $r_i$  là đại lượng độc lập đối với lực và phải thỏa mãn các điều kiện liên kết nếu có. Bởi vì cực tiểu của lượng cưỡng bức  $Z$  phải được tìm theo (2.9) (khi không có các ràng buộc nào khác) nghĩa là phải giải phương trình cân bằng của cơ hệ nên bài toán luôn có nghiệm và nghiệm là duy nhất

*Phương pháp của nguyên lý (2.14) cho phép dùng hệ so sánh bất kì. Đại lượng biến phân của (2.14) là chuyên vị, điều kiện cực tiểu của nó là biểu thức (2.9). Phương pháp này do GS. TSKH Hà Huy Cương đề xuất và được gọi là phương pháp nguyên lý cực trị Gauss.*

Biểu thức (2.7) trong các giáo trình cơ học thường mang dấu bằng, nghĩa là chỉ xét trường hợp liên kết giữ và khi đó từ (2.7) sẽ nhận được nguyên lý công ảo. Có thể nói biểu thức (2.7) với dấu nhỏ thua hoặc bằng là sự khác biệt cơ bản giữa nguyên lý cơ học của Gauss với cơ học dựa trên nguyên lý công ảo hiện dùng.

### 2.3. Cơ hệ môi trường liên tục: ứng suất và biến dạng

Trong mục này trình bày phương pháp nguyên lý Gauss đối với cơ hệ môi trường liên tục. Muốn vậy cần biết khái niệm ứng suất và biến dạng của môi trường liên tục. Để trình bày gọn dưới đây dùng các đại lượng tenxơ với cách hiểu như sau [4 ,tr.196]:

$$a_i a_i = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$a_{kk} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

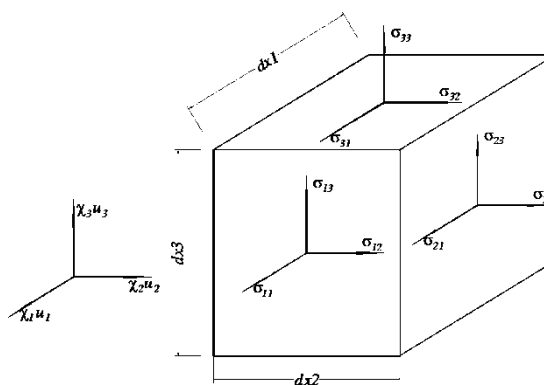
và hệ số Kronecker

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{khi } i = j$$

$$\delta_{ij} = 0 \quad \text{khi } i \neq j$$

với  $i = 1,2,3$  ;  $j = 1,2,3$  ;  $k = 1,2,3$  đối với không gian 3 chiều.

Có thể nói đối tượng nghiên cứu của cơ hệ môi trường liên tục trong tọa độ vuông góc là phân tử khối chữ nhật (ba chiều, kích thước vô cùng bé ) hoặc phân tử chữ nhật (hai chiều, kích thước vô cùng bé ) được tách ra từ môi trường (hình 2.3 ).



Hình 2.3. Trạng thái ứng suất phân tử



Khi đó lí thuyết ứng suất cho thấy ngoài các lực thông thường (lực gây các chuyển vị tịnh tiến trong cơ hệ chất điểm) trên bề mặt phân tố còn có các ứng suất tác dụng. Có 9 ứng suất  $\sigma_{ij}$  tác dụng lên bề mặt phân tố. Thứ nguyên của ứng suất bằng lực chia cho đơn vị diện tích.

Từ điều kiện cân bằng lực và momen sẽ nhận được phương trình cân bằng tĩnh của phân tố

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (2.15)$$

Trong (2.15)  $\sigma_{ij}$  là ứng suất,  $\sigma_{ij,j}$  biểu thị đạo hàm của ứng suất theo tọa độ không gian,  $\partial\sigma_{ij}/\partial x_j = \sigma_{ij,j}$ ,  $b_i$  là lực khối (lực khối xem như là lực cản).

Nếu không có lực momen khối thì từ phương trình cân bằng sẽ có:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.16)$$

Số ứng suất độc lập tác dụng lên bề mặt phân tố chỉ còn 6. Lí thuyết ứng suất cho thấy khi biết trạng thái ứng suất phân tố thì sẽ xác định được trạng thái lực tại điểm đó của môi trường và ngược lại.

Khi chịu tác dụng ngoại lực, phân tố chuyển động và biến hình. Lý thuyết biến dạng cho thấy ngoài các chuyển vị  $u_i$  phân tố còn chịu các biến dạng  $\varepsilon_{ij}$ . Nếu xem biến dạng là bé (bình phương hoặc tích hai biến dạng là nhỏ so với chính nó) thì các biến dạng được xác định theo các phương trình sau:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.17)$$

Các  $\varepsilon_{ij}$  là các đại lượng không thứ nguyên. Tương tự như tenxơ  $\sigma_{ij}$ , tenxơ  $\varepsilon_{ij}$  đối xứng và có 6 biến dạng độc lập tương ứng với 6 ứng suất.

Từ (2.17) thấy rằng trạng thái chuyển vị xác định duy nhất trạng thái biến dạng, nhưng ngược lại không đúng bởi vì có những chuyển vị không gây biến dạng (chuyển vị của vật rắn tuyệt đối). Ngoài các phương trình nêu trên, để bảo đảm tính liên tục của môi trường còn có các phương trình về điều kiện không bị gián đoạn.

Tùy theo tính chất cơ học của vật liệu môi trường mà có các liên hệ khác nhau giữa ứng suất và biến dạng. Do có 6 ứng suất và 6 biến dạng nên một cách tổng quát cần biết 36 thông số tính chất vật liệu. Tuy nhiên từ điều kiện biểu thị năng lượng biến dạng phải giống nhau con số 36 rút xuống còn 21. Đối với vật liệu đẳng hướng chỉ còn 2 thông số tính chất vật liệu độc lập được chọn trong số các thông số sau: hai hằng số Lamé  $\mu$  và  $\lambda$ , mô đun Young  $E$ , mô đun trượt  $G$  và hệ số Poisson  $\nu$ , giữa chúng có các liên hệ sau đây :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.18)$$

Đối với vật liệu đồng nhất, đẳng hướng, tuân theo định luật Húc (Hooke) thì liên hệ giữa ứng suất và biến dạng sẽ là :

$$\sigma_{ij} = 2G \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (2.19)$$

Từ công thức (2.19) thấy rằng ứng suất  $\sigma_{ij}$  không những phụ thuộc vào biến dạng  $\varepsilon_{ij}$  theo phương của nó mà còn phụ thuộc vào các biến dạng theo các phương khác thông qua hệ số Poisson  $\nu$ . Hệ số  $2G$  để tiện trình bày sau này sẽ được gọi là *độ cứng của biến dạng*.

Những trình bày trên cho thấy đối với cơ hệ môi trường liên tục cần xem các biến dạng  $\varepsilon_{ij}$  là độc lập đối với nhau và được xác định theo phương trình (2.17), cần xét các phương trình về điều kiện không bị gián đoạn của môi trường và liên hệ giữa ứng suất và biến dạng. Đối với môi trường đàn hồi, đồng nhất, đẳng hướng liên hệ ứng suất - biến dạng lấy theo (2.19) và điều kiện không bị gián đoạn của môi trường tự động thoả mãn khi biểu thị ứng suất qua chuyển vị.

Tóm lại, khác với cơ hệ chất điểm, trong môi trường liên tục ngoài lực khối và lực quán tính là các lực tác dụng gây chuyển vị, còn phải xét thêm các ứng suất  $\sigma_{ij}$  gây ra các biến dạng  $\varepsilon_{ij}$ .

Từ nhận xét vừa nêu, có thể sẽ có ích đối với nhận thức khi đưa ra các nhận định tổng quát về mối tương quan giữa cơ học chất điểm và cơ hệ môi trường liên tục như sau:

- Khái niệm cơ bản của cơ học chất điểm là chất điểm, các lực tác dụng lên chất điểm gây ra các chuyển vị, đặc trưng của chất điểm là khối lượng;
- Khái niệm cơ bản của cơ hệ môi trường liên tục là mặt cắt phân tố, các ứng suất gây ra các biến dạng, các đặc trưng của mặt cắt phân tố là các độ cứng biến dạng tương ứng với các ứng suất. Các độ cứng này xác định tùy theo tính chất vật liệu môi trường. Trong cơ hệ môi trường liên tục còn có lực khối và lực quán tính gây chuyển vị giống như trong cơ học chất điểm. Do đó, có thể tóm tắt mối tương quan vừa nêu dưới dạng:

<i>Chất điểm</i>	$\Leftrightarrow$	<i>Mặt cắt phân tố</i>		
		<i>Lực</i>	$\Leftrightarrow$	<i>Lực</i>
				<i>Các ứng suất</i>
		<i>Chuyển vị</i>	$\Leftrightarrow$	<i>Chuyển vị</i>
				<i>Biến dạng</i>
		<i>Khối lượng</i>	$\Leftrightarrow$	<i>Khối lượng</i>
				<i>Các độ cứng biến dạng</i>

Kí hiệu  $\Leftrightarrow$  chỉ sự tương đương giữa các khái niệm. Với cách hiểu này cũng dễ dàng xây dựng phiếm hàm lượng cưỡng bức tương tự như (2.14) đối với cơ hệ môi trường liên tục bất kỳ được trình bày sau đây.

Trước tiên, ta dùng hệ so sánh là hệ chất điểm có cùng khối lượng, cùng chịu tác dụng lực ngoài và hoàn toàn tự do. Đối với môi trường liên tục cần xét thêm ứng suất và biến dạng nên lượng cưỡng bức  $Z$  của hệ viết tương tự (2.14) như sau:

$$Z_{\dots} = \dots Z_1 + Z_2 \rightarrow \text{Min}$$

$$Z_1 = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad , \quad Z_2 = \int_V (\rho \ddot{u}_i u_i + b_i u_i - \rho \ddot{u}_{0i} u_i) dF \quad (2.20)$$

Trong (2.20)  $V$  là thể tích vật thể,  $\rho$  là khối lượng đơn vị. Lực quán tính là lực cản nên trong (2.20) mang dấu cộng. Lượng cường bức  $Z1$  xét ứng suất của môi trường liên tục cần tính, hệ chất điểm so sánh không có ứng suất. Lượng cường bức  $Z2$  xét lực khối và lực quán tính của môi trường liên tục, lực quán tính của hệ chất điểm so sánh. Các lực này đều gây chuyển vị  $u$ .

Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, trong (2.20) cần xem các biến dạng  $\varepsilon_{ij}$  là độc lập đối với các ứng suất  $\sigma_{ij}$  và các chuyển vị  $u_i$  là độc lập đối với lực tác dụng (ở đây là lực khối và lực quán tính) và độc lập đối với nhau. Điều kiện cực tiểu của (2.20) là

$$\frac{\partial Z1}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial Z2}{\partial u_i} = 0 \quad (2.21.a)$$

Nếu biến dạng  $\varepsilon_{ij}$  biểu thị qua chuyển vị (công thức (2.17)) thì điều kiện cực tiểu của (2.20) được viết như sau:

$$\frac{\partial Z1}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial u_i} + \frac{\partial Z2}{\partial u_i} = 0 \quad (2.21.b)$$

Từ điều kiện (2.21.a) nhận được

$$\sigma_{ij,j} + b_i + \rho \ddot{u}_i - \rho \ddot{u}_{0i} = 0 \quad (2.22)$$

Phương trình (2.22) là phương trình vi phân cân bằng của cơ hệ môi trường liên tục dưới dạng ứng suất.

Nếu tại điểm đang xét không có lực ngoài tác dụng thì  $\rho \ddot{u}_{0i}$  bị triệt tiêu, phương trình (2.22) là phương trình cân bằng động lực học thường gặp của cơ hệ môi trường liên tục. Trường hợp bài toán tĩnh,  $\rho \ddot{u}_i$  cũng bằng không, phương trình (2.22) khi đó trùng với (2.15).

Dễ dàng nhận được phương trình vi phân cân bằng dưới dạng chuyển vị bằng cách đưa liên hệ ứng suất - biến dạng vào phương trình (2.22) hoặc vào phiếm hàm (2.20). Trong mục (2.5) dưới đây sẽ trở lại vấn đề này.

Cần nêu nhận xét rằng biểu thức (2.20) cho phép so sánh cơ hệ môi trường liên tục với cơ hệ chất điểm hoàn toàn tự do khi hai hệ cùng chịu lực

ngoài như nhau. Trong (2.20) không chứa các thông số tính chất vật liệu của môi trường nên nó đúng với môi trường bất kỳ.

Xét các trường hợp khác của phiếm hàm lượng cưỡng bức (2.20):

- Trường hợp không dùng hệ so sánh thì phải đưa lực ngoài  $p_i$  vào (2.20). Lực  $p_i$  thường tác dụng lên bề mặt  $\Omega$  của vật nên ta viết

$$Z = \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + \rho \ddot{u}_i u_i - b_i u_i) dv - \int_{\Omega} p_i u_i d\Omega \rightarrow Min \quad (2.23)$$

- Có thể dùng hệ so sánh cũng là cơ hệ môi trường liên tục có liên kết bất kỳ với điều kiện hai hệ cùng chịu lực ngoài giống nhau:

$$Z = \int_V [(\sigma_{ij} - \sigma_{0ij}) \varepsilon_{ij} + (\rho \ddot{u}_i - \rho_0 \ddot{u}_{0i}) u_i - (b_i - b_{0i}) u_i] dv \rightarrow Min \quad (2.24)$$

Giống như đã trình bày ở ví dụ 3, thực chất của phương pháp nguyên lý cực trị Gauss là dùng nội lực của hệ so sánh tác dụng lên hệ cần tìm.

- Đối với bài toán tĩnh, lực quán tính triệt tiêu, khi không xét lực khối, biểu thức (2.24) có dạng:

$$Z = \int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{0ij}) \varepsilon_{ij} dv \rightarrow Min \quad (2.25)$$

- Đối với bài toán tĩnh, không xét lực khối, không dùng hệ so sánh, từ (2.23) ta có:

$$Z = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv - \int_{\Omega} p_i u_i d\Omega \rightarrow Min \quad (2.26)$$

Các chuyển vị  $u_i$  và biến dạng  $\varepsilon_{ij}$  (xác định theo (2.17)) trong các phiếm hàm (2.20, 2.23, 2.24, 2.25) và (2.26) là những đại lượng độc lập đối với lực tác dụng và ứng suất và phải thoả mãn các điều kiện liên kết nếu có. Chuyển động thực của cơ hệ môi trường liên tục xảy ra khi cực tiểu các phiếm hàm lượng cưỡng bức vừa nêu theo điều kiện (2.21) nếu không có các điều kiện liên kết nào khác.

Đối với môi trường đàn hồi, quan hệ ứng suất – biến dạng xác định theo (2.19), ta có thể viết lượng cưỡng bức dưới dạng bình phương tối thiểu như nhận xét đã nêu ở ví dụ 3:

$$Z = \int_V \frac{1}{2G} (\sigma_{ij} - \sigma_{0ij})^2 dv + 2 \int_V (f_{mi} - f_{0mi}) u_i dv \rightarrow Min \quad (2.27a)$$

hoặc

$$Z = \int_V 2G(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{0ij})^2 dv + 2 \int_V m_i (\ddot{u}_i - \ddot{u}_{0i}) u_i dv \rightarrow Min$$

Tương tự, khi không dùng hệ so sánh thì phải xét lực ngoài, có thể viết lại (2.26) như dưới đây

$$Z = \int_V \frac{1}{2G} (\sigma_{ij})^2 dv + 2 \int_V f_{mi} u_i dv - 2 \int_{\Omega} p_i u_i d\Omega \rightarrow Min \quad (2.27b)$$

hoặc

$$Z = \int_V 2G(\varepsilon_{ij})^2 dv + 2 \int_V (m_i \ddot{u}_i) u_i dv - 2 \int_{\Omega} p_i u_i d\Omega \rightarrow Min$$

Trong (2.27)  $f_{mi} = m_i \ddot{u}_i$  và  $f_{0mi} = m_{0i} \ddot{u}_{0i}$  là lực quán tính của hệ cần tính và hệ so sánh, liên hệ giữa ứng suất và biến dạng xác định theo biểu thức (2.19). Trong (2.27), cần xem các biến dạng  $\varepsilon_{ij}$  là các đại lượng biến phân độc lập đối với các ứng suất  $\sigma_{ij}$ , các chuyển vị  $u_i$  là độc lập đối với lực tác dụng  $p$  và lực quán tính.

Tích phân thứ nhất trong (2.27) liên quan đến ứng suất đàn hồi có trọng số là  $2G$ , Trở lên trình bày các phiếm hàm lượng cưỡng bức, đối với cơ hệ chất điểm là các biểu thức (2.14), đối với môi trường liên tục là biểu thức (2.20) và các trường hợp khác của nó là các biểu thức (2.23), (2.24), (2.25), (2.26) và (2.27). Trong các phiếm hàm này cần xem các biến dạng  $\varepsilon_{ij}$  xác định theo (2.17) và các chuyển vị  $u_i$  là các đại lượng không biết độc lập đối với ứng suất và lực tác dụng, thỏa mãn các điều kiện liên kết nếu có và các điều kiện không bị gián đoạn (riêng đối với môi trường liên tục). Cực tiểu các phiếm hàm này theo điều kiện (2.21) cho ta chuyển vị thực của cơ hệ cần tính.

Phương pháp nguyên lí cực trị Gauss là phương pháp mới trong cơ học môi trường liên tục.

## 2.4. Cơ học kết cấu

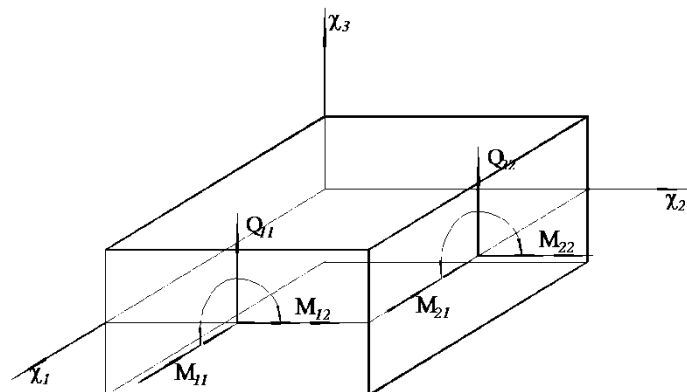
Môn sức bền vật liệu và cơ học kết cấu nghiên cứu trạng thái ứng suất biến dạng của dầm, thanh, tấm, khung, dàn v.v... là những kết cấu có một hoặc hai kích thước nhỏ thua nhiều lần so với các kích thước còn lại. Trong trường hợp này để đơn giản nhưng kết quả tính vẫn bảo đảm độ chính xác đủ dùng trong thực tế (kiểm tra bằng thí nghiệm), có thể dùng mặt cắt kết cấu thay cho mặt cắt phân tố và các ứng suất tác dụng lên mặt cắt được quy về thành các nội lực tác dụng lên mặt trung bình (đường trung bình đối với dầm) như lực dọc  $N$ , momen uốn  $M$ , lực cắt  $Q$  v.v... Muốn vậy cần đưa vào các giả thiết sau đây:

- Khi chịu lực dọc trục, ứng suất pháp được xem là phân bố đều trên tiết diện.
- Khi chịu lực ngang (tác dụng thẳng góc với mặt trung bình) có các giả thiết sau đây:

Mặt trung bình của tấm và trục trung bình của dầm không có nội lực và do đó không bị biến dạng.

Giả thiết tiết diện phẳng: tiết diện sau khi biến dạng vẫn phẳng.

Không xét ứng suất nén giữa các lớp theo chiều cao tiết diện, nghĩa là xem các lớp song song với mặt trung bình (tấm) làm việc ở trạng thái ứng suất phẳng.



Hình 2.4. Nội lực của phân tố tấm

Sử dụng các giả thiết trên, các momen uốn và xoắn và lực cắt tác dụng lên mặt cắt kết cấu xác định theo các biểu thức dưới đây (hình 2.4):

$$M_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} x_3 dx_3, \quad M_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} x_3 dx_3, \quad M_{12} = M_{21} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} x_3 dx_3$$

$$Q_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} dx_3, \quad Q_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23} dx_3 \quad (2.28)$$

ở đây  $h$  là chiều cao tiết diện.

Để có thể áp dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss cần biết các ‘biến dạng’ của tiết diện do momen uốn gây ra. Với các giả thiết nêu trên chỉ cần biết chuyển vị thẳng đứng  $w$  của trục hoặc mặt trung bình của kết cấu (còn gọi là đường độ võng, đường đàn hồi) thì trong trường hợp uốn thuần túy có thể tính được các chuyển vị theo các phương còn lại và dùng các phương trình (2.17) để xác định các biến dạng. Kết quả cho thấy các biến dạng trong mặt phẳng tấm (hoặc thớ dầm) phân bố tuyến tính theo chiều cao và tỉ lệ với độ cong  $\chi_{ij}$  của mặt võng ( $i=1,2; j=1,2$ ):

$$\varepsilon_{ij} = x_3 \chi_{ij} ;$$

$$\chi_{11} = -w_{,11}, \quad \chi_{22} = -w_{,22}, \quad \chi_{12} = -w_{,12}. \quad (2.29)$$

Dấu trừ trong công thức xác định độ cong (2.29) là do xem chuyển vị  $w$  có chiều dương hướng xuống dưới và dấu nội lực như trên hình 2.4. Như vậy, độ cong  $\chi_{ij}$  của các lớp song song với mặt trung bình là giống nhau và đó là ‘biến dạng’ do momen  $M_{ij}$  gây ra. Biết được biến dạng  $\varepsilon_{ij}$  xác định theo (2.29) sẽ tính được momen  $M_{ij}$  theo (2.28). Liên hệ giữa momen uốn và ‘biến dạng uốn’ của tiết diện như sau:

$$M_{11} = D(\chi_{11} + \nu\chi_{22}), \quad M_{22} = D(\chi_{22} + \nu\chi_{11}), \quad M_{12} = D(1-\nu)\chi_{12} \quad (2.30)$$

ở đây  $D$  là độ cứng uốn



$$\text{đối với dầm } D = EJ = \frac{Eh^3}{12}, \quad \text{đối với tấm } D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

và  $D(1 - \nu)$  được gọi là độ cứng xoắn (độ cứng của biến dạng xoắn).

(ở đây cần chú ý rằng do có liên kết gối tựa nên mặt trung bình có thể bị biến dạng trong mặt phẳng của nó, giả thiết mặt trung bình là mặt trung hoà nêu trên không được thoả mãn. Trong trường hợp này độ võng phải là bé so với chiều cao dầm hoặc chiều dày tấm để có thể bỏ qua ứng suất tác dụng trong mặt trung bình).

Trong trường hợp có lực cắt  $Q_{ii}$  thì chúng được xác định từ điều kiện cân bằng phân tố, ta có:

$$Q_{11} = \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2}, \quad Q_{22} = \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_1}$$

$$\text{hay } Q_{11} = D [(\chi_{11})_{,1} + (\chi_{12})_{,2}], \quad Q_{22} = D [(\chi_{12})_{,1} + (\chi_{22})_{,2}] \quad (2.31)$$

Từ công thức (2.28) có thể thấy độ cứng chịu cắt của tiết diện là  $Gh$  và biến dạng trượt  $\gamma_{11}$  và  $\gamma_{22}$  tương ứng với lực cắt sẽ bằng góc xoay của đường đàn hồi:

$$\gamma_{11} = w_{,1} = \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad \gamma_{22} = w_{,2} = \frac{\partial w}{\partial x_2} \quad (2.32)$$

Trong lý thuyết kết cấu chịu uốn nêu trên, độ võng của kết cấu chỉ do mo-men uốn gây ra, không xét biến dạng trượt do lực cắt gây ra.

Đối với các lực  $N_{ij}$  tác dụng lên mặt trung bình của tiết diện thì các biến dạng  $\varepsilon_{ij}$  ( $i=1,2; j=1,2$ ) vẫn xác định theo (2.17). Độ cứng của tiết diện chịu nén kéo sẽ là  $Eh$ .

Trong các công thức vừa nêu lấy  $i=1, j=1$  đối với bài toán một chiều (thanh, dầm), chiều rộng dầm bằng đơn vị.

Do sử dụng momen uốn của tiết diện nên phải đưa thêm các liên kết về xoay để mô tả các điều kiện biên của nó: liên kết khớp cho phép tiết diện xoay tự do, momen bằng không; liên kết ngàm không cho tiết diện xoay, momen khác không.

Sau khi đã biết ‘các biến dạng’ tương ứng với các nội lực của tiết diện (momen uốn, lực cắt, lực dọc trục v.v..) và độ cứng của chúng thì dễ dàng xây dựng các bài toán cơ học kết cấu theo phương pháp nguyên lí cực trị Gauss.

Ta có thể viết một cách tổng quát lượng cưỡng bức  $Z$  của bài toán cơ học kết cấu dưới dạng tương tự như (2.25) (bài toán tĩnh):

$$Z = \int_V [(M_{ij} - M_{0ij})\chi_{ij} + (Q_{ii} - Q_{0ii})\gamma_{ii} + (N_{ij} - N_{0ij})\varepsilon_{ij}] dv \rightarrow Min \quad (2.33a)$$

hoặc dưới dạng bình phương tối thiểu

$$Z = \int_V \frac{1}{Docung} (\text{Nội lực hệ cần tính} - \text{Nội lực hệ so sánh})^2 dv \rightarrow Min \quad (2.33b)$$

và trong trường hợp không dùng hệ so sánh ta có

$$Z = \int_V \frac{1}{Docung} (\text{Nội lực hệ cần tính})^2 dv - 2 \int_{\Omega} p_i w_i d\Omega \rightarrow Min \quad (2.33c)$$

ở đây  $V$  là chiều dài dầm hoặc diện tích tâm,  $\Omega$  là chiều dài hoặc diện tích phạm vi đặt lực. Trong (2.33) cần xem các độ cong  $\chi_{ij}$  là các đại lượng độc lập đối với nội lực momen uốn  $M_{ij}$ , các biến dạng trượt  $\gamma_{11}$  và  $\gamma_{22}$  là các đại lượng độc lập đối với lực cắt  $Q_{11}$  và  $Q_{22}$ , các biến dạng trong mặt trung bình  $\varepsilon_{ij}$  là các đại lượng độc lập đối với  $N_{ij}$  và đều là các đại lượng biến phân của bài toán. Điều đó chỉ ra rằng cực tiểu của lượng cưỡng bức  $Z$ , biểu thức (2.33), chỉ có thể tìm từ điều kiện:

$$\frac{\partial Z}{\partial \chi_{ij}} \frac{\partial \chi_{ij}}{\partial W} + \frac{\partial Z}{\partial \gamma_{ii}} \frac{\partial \gamma_{ii}}{\partial W} + \frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial W} + \frac{\partial Z}{\partial W} = 0 \quad (2.34)$$

Bởi vì các biến dạng uốn, biến dạng cắt v.v... là hàm của độ võng và độ võng là hàm của tọa độ nên điều kiện (2.34) được tính bằng phép tính biến phân và sẽ cho ta phương trình cân bằng tĩnh của kết cấu (xem mục 2.5 dưới đây).

Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss với biểu thức lượng cường bức  $Z$  viết theo (2.33) và điều kiện cực tiểu (2.34) là phương pháp mới, tổng quát trong cơ học kết cấu.

## **2.5. Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss và các phương trình cân bằng của cơ hệ**

Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, nếu như biết được các lực và nội lực của cơ hệ và các chuyển vị và biến dạng do chúng gây ra thì có thể viết được lượng cường bức  $Z$  của hệ. Dùng phép tính biến phân với đại lượng biến phân là các chuyển vị độc lập đối với lực tác dụng và biến dạng độc lập với ứng suất sẽ nhận được phương trình vi phân cân bằng của hệ (phương trình Ô-le (Euler) của phiếm hàm  $Z$ ). Sau đây trình bày các ví dụ sử dụng phương pháp vừa nêu để tìm phương trình cân bằng.

### **2.5.1. Phương trình cân bằng tĩnh đối với môi trường đàn hồi, đồng nhất, đẳng hướng**

Ba phương trình vi phân cân bằng của cơ hệ dưới dạng ứng suất là phương trình (2.22). Thế các ứng suất  $\sigma_{ij}$  xác định theo (2.19) vào (2.22) sẽ có các phương trình vi phân cân bằng của cơ hệ đàn hồi đồng nhất đẳng hướng dưới dạng chuyển vị. Ở đây trình bày cách tính trực tiếp để nhận được các phương trình đó (trường hợp bài toán tĩnh).

Liên hệ biến dạng - chuyển vị (2.17) và ứng suất - biến dạng (2.19) được viết lại trong hệ tọa độ  $(x,y,z)$  dưới dạng thường dùng với  $u, v$  và  $w$  là các chuyển vị tương ứng theo các chiều  $(x,y,z)$  như sau:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\sigma_x = 2G\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right), \quad \sigma_y = 2G\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right), \quad \sigma_z = 2G\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}, \quad \tau_{xz} = G \gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz} \quad (2.34)$$

ở đây  $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$  - biến dạng thể tích của phân tử.

Ta viết lượng cường bức Z theo (2.25) cho mỗi ứng suất và lực khối b:

$$\begin{aligned} Z1 &= \int_V 2G\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right)\frac{\partial u}{\partial x} dV, & Z2 &= \int_V 2G\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right)\frac{\partial v}{\partial y} dV, \\ Z3 &= \int_V 2G\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right)\frac{\partial w}{\partial z} dV, & Z4 &= \int_V G \gamma_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dV, \\ Z5 &= \int_V G \gamma_{xz} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) dV, & Z6 &= \int_V G \gamma_{yz} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) dV \\ Z7 &= \int_V b_x u dV, & Z8 &= \int_V b_y v dV, & Z9 &= \int_V b_z w dV \end{aligned} \quad (2.35)$$

Lượng cường bức Z bằng tổng các lượng cường bức thành phần :

$$Z = Z1+Z2+Z3+Z4+Z5+Z6+Z7+Z8+Z9 \quad \rightarrow Min$$

Từ điều kiện cực tiểu (1.21) của phiếm hàm Z viết lại dưới dạng

$$\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial u} + \frac{\partial Z}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial w} + \frac{\partial Z}{\partial w} = 0 \quad (2.36)$$

sẽ nhận được ba phương trình vi phân cân bằng tĩnh. Bởi vì u, v và w là các hàm của tọa độ (x,y,z), không phải là biến độc lập, nên phép tính (2.36) là phép tính biến phân. Phương trình cân bằng thứ nhất với u là hàm chưa biết nhận được với chú ý rằng

- đại lượng biến phân của Z1 (ứng với  $\sigma_x$ ) là  $\varepsilon_x$  hay  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , như vậy

$$\frac{\partial Z1}{\partial \varepsilon_x} = - \frac{\partial}{\partial x} 2G \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu} \theta \right) = - 2G \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \theta \right)$$

- đại lượng biến phân của Z4 (ứng với  $\tau_{xy}$ ) là  $\gamma_{xy}$  có thành phần  $\frac{\partial u}{\partial y}$ , nên

$$\frac{\partial Z4}{\partial \gamma_{xy}} = - G \frac{\partial}{\partial y} \gamma_{xy} = -G \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)$$

- đại lượng biến phân của Z5 (ứng với  $\tau_{xz}$ ) là  $\gamma_{xz}$  có thành phần  $\frac{\partial u}{\partial z}$ , nên

$$\frac{\partial Z5}{\partial \gamma_{xz}} = -G \frac{\partial}{\partial z} \gamma_{xz} = -G \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} \right)$$

- đại lượng biến phân của Z7 là u, nên

$$\frac{\partial Z7}{\partial u} = \mathbf{b}_x$$

Tổng cộng

$$\frac{\partial Z1}{\partial u} + \frac{\partial Z4}{\partial u} + \frac{\partial Z5}{\partial u} + \frac{\partial Z7}{\partial u} = 0$$

sau khi rút gọn sẽ là :

$$G \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{G}{1-2\nu} \left( \frac{\partial}{\partial x} \theta \right) + \mathbf{b}_x = 0 \quad (2.37)$$

Phương trình cân bằng thứ hai nhận được với v là hàm chưa biết. Trong (2.35) các đại lượng biến phân của v có ở Z2, Z4, Z6 và Z8. Phương trình cân bằng thứ ba nhận được với w là hàm chưa biết. Trong (2.35) các đại lượng biến phân của w có ở Z3, Z5, Z6 và Z9. Bằng cách tính biến phân tương tự sẽ có thêm hai phương trình cân bằng sau:

$$G \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{G}{1-2\nu} \left( \frac{\partial}{\partial y} \theta \right) + \mathbf{b}_y = 0 \quad (2.38)$$

$$G\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \frac{G}{1-2\nu}\left(\frac{\partial}{\partial z}\theta\right) + b_z = 0 \quad (2.39)$$

Ba phương trình (2.37), (2.38) và (2.39) là các phương trình vi phân cân bằng của cơ hệ đàn hồi, đồng nhất và đẳng hướng và được gọi là phương trình Navier [4] Dưới dạng tenxơ các phương trình này được viết gọn như sau:

$$G u_{j,kk} + \frac{G}{1-2\nu} u_{k,kj} + b_j = 0 \quad (2.40)$$

### 2.5.2. Phương trình vi phân của mặt võng của tấm chịu uốn

Xét tấm có chiều dày không đổi Viết lại các biểu thức (2.30) đối với các nội lực momen uốn và xoắn và (2.31) đối với lực cắt tác dụng lên phân tố tấm trong hệ tọa độ (x,y) ta có :

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$Q_x = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right), \quad Q_y = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \quad (2.41)$$

Biết được các lực tác dụng lên phân tố thì dễ dàng viết được lượng cường bức Z, thí dụ, dưới dạng bình phương tối thiểu theo (2.33.b) (khi không có ngoại lực):

$$Z1 = \int_{\Omega} D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 d\Omega, \quad Z2 = \int_{\Omega} D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 d\Omega,$$

$$Z3 = 2 \int_{\Omega} D(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 d\Omega \quad (2.42)$$

ở đây  $\Omega$  là diện tích tấm. Lượng cường bức Z bằng tổng các lượng cường bức do mỗi thành phần nội lực momen uốn và xoắn gây ra :

$$Z = Z1 + Z2 + Z3 \rightarrow Min \quad (2.43)$$

Chú ý rằng trong (2.43) ta chỉ xét nội lực momen, chưa xét tới lực cắt, phân tử không có lực ngoài tác dụng. Hệ số 2 trong Z3 để xét momen xoắn tác dụng bằng nhau lên hai chiều x,y. Các ‘biến dạng’ tương ứng với các nội lực momen xác định theo (2.29) :

$$\chi_{xx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \chi_{yy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \chi_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.44)$$

Các ‘biến dạng’ này cần được xem là độc lập đối với các nội lực momen uốn và xoắn và là các đại lượng biến phân của bài toán. Do đó từ điều kiện cực tiểu (2.36) ta có :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z1}{\partial \chi_{xx}} \frac{\partial \chi_{xx}}{\partial w} &= 2D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 2D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right), \\ \frac{\partial Z2}{\partial \chi_{yy}} \frac{\partial \chi_{yy}}{\partial w} &= 2D \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 2D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right), \\ \frac{\partial Z3}{\partial \chi_{xy}} \frac{\partial \chi_{xy}}{\partial w} &= 4D(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 4D(1-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \quad (2.45) \end{aligned}$$

Tổng cộng các thành phần của (1.45) nhận được phương trình vi phân độ võng của tấm chịu uốn :

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \quad (2.46)$$

Phương trình (2.46) thường được gọi là phương trình Sophie Germain (năm 1811).

Khi xây dựng lượng cường bức Z (biểu thức 2.43) không xét tới lực cắt bởi vì lý thuyết kết cấu chịu uốn trình bày trên không xét biến dạng của lực cắt. Tuy nhiên, trong phạm vi của lý thuyết này, nếu dùng lực cắt xác định theo (2.31) và biến dạng trượt theo (2.32) thì lượng cường bức Z được viết như sau

$$Z = \int_{\Omega} Q_{xx} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) d\Omega + \int_{\Omega} Q_{yy} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) d\Omega \rightarrow Min \quad (2.47)$$

Xem các góc xoay  $\frac{\partial w}{\partial x}$  và  $\frac{\partial w}{\partial y}$  là các đại lượng biến phân độc lập đối với lực cắt  $Q_x$  và  $Q_y$  và bằng phép tính biến phân lại nhận được phương trình vi phân (2.46).

Đối với dầm, lượng cưỡng bức viết theo (2.33.a) sẽ là :

$$Z = -\int_l EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (\chi_{xx}) dl - \int_{l_q} qw dl_q \quad (2.48)$$

Trong (2.48)  $l$  là chiều dài dầm,  $\chi_{xx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  là biến dạng uốn (độ cong) của dầm,  $l_q$  là chiều dài đoạn dầm có lực  $q$  tác dụng. Phương trình vi phân đường độ võng của dầm:

$$\frac{\partial Z}{\partial \chi_{xx}} \frac{d\chi_{xx}}{dw} + \frac{\partial Z}{\partial w} = EJ \frac{d^4 w}{dx^4} - q = 0 \quad (2.49)$$



## CHƯƠNG 2

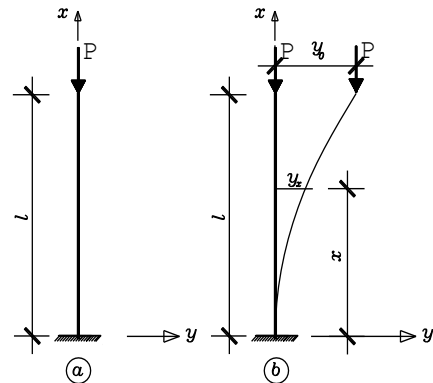
### TÍNH TOÁN ỔN ĐỊNH UỐN DỌC CỦA THANH BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Trong chương trình bày bài toán ổn định của thanh chịu uốn dọc. Đồng thời trình bày nội dung cơ bản của phương pháp phần tử hữu hạn và áp dụng nó để xác định lực tới hạn của thanh với các điều kiện biên khác nhau.

#### 3.1. Bài toán ổn định của thanh chịu nén

Phương pháp chung để đánh giá sự mất ổn định của cơ hệ là đưa hệ ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu của nó và kiểm tra xem nó có tồn tại trạng thái cân bằng mới không. Nếu như tìm được trạng thái cân bằng mới khác với trạng thái cân bằng ban đầu thì có thể xem hệ là mất ổn định và lực giữ cho hệ ở trạng thái cân bằng mới này gọi là lực tới hạn, trường hợp ngược lại hệ là ổn định.

Để đơn giản trình bày mà không mất đi tính tổng quát của phương pháp, ta xét thanh chịu nén một đầu ngàm một đầu tự do, chịu lực như (hình 3.1a). Thanh có trạng thái cân bằng ban đầu là trạng thái chịu nén thẳng đứng. Ở trạng thái cân bằng này thanh bị co ngắn lại một đoạn là  $\Delta = Pl/EF$ ,  $EF$  là độ cứng kéo nén của thanh,  $E$  là mô đun đàn hồi của vật liệu,  $l$  là chiều dài ban đầu của thanh,  $P$  là lực tác dụng.



**Hình 3.1.** Thanh ngàm – Tự do

Để xét trạng thái cân bằng này của thanh có ổn định hay không ta cho một điểm bất kỳ trên thanh lệch ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu một đoạn  $y_0$  nào đó. Khi đó thanh sẽ bị chuyển vị theo đường đàn hồi  $y(x)$  và lực  $P$  ngoài tác dụng nén còn gây ra mômen uốn  $M_p = P(y-y_0)$ . Bây giờ trong thanh có

nội lực mômen uốn  $M$  và lực cắt  $Q$  khác với trạng thái ban đầu chỉ chịu nén (hình 3.1b) và momen ngoại lực  $M_p$ . Độ co ngắn  $\Delta$  của thanh thường là nhỏ so với chiều dài thanh cho nên để đơn giản ta xem chiều dài thanh sau biến dạng vẫn bằng  $l$ .

Lượng cưỡng bức theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss của bài toán này được viết như sau:

$$Z = \int_l (M - M_p) \chi dx \rightarrow \min (3.3)$$

Biến dạng uốn  $\chi = -\frac{d^2 y}{dx^2}$ ,  $M = EJ\chi$  (3.4)

Chú ý: momen nội lực và momen ngoại lực luôn khác dấu nhau. Trong (3.3),  $\chi$  đại lượng biến phân, do đó điều kiện cần và đủ để thanh ở trạng thái cân bằng là

$$\delta Z = \int_l (M - M_p) \delta \chi dx = 0 (3.5)$$

Hay 
$$\delta Z = \int_l (M - M_p) \delta \left( -\frac{d^2 y}{dx^2} \right) dx = 0 (3.5a)$$

Sử dụng phép tính biến phân đối với phương trình (3.5a) nhận được hai phương trình cân bằng sau

$$-\frac{d^2 (M - M_p)}{dx^2} = 0 (3.6a)$$

$$\left( -\frac{d(M - M_p)}{dx} \right) = 0 (3.6b)$$

Thay  $M$  xác định theo (3.4) vào hai phương trình (3.6) ta có

$$EJ \left( \frac{d^4 y}{dx^4} \right) + P \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 (3.7a)$$

$$EJ \left( \frac{d^3 y}{dx^3} \right) + P \frac{dy}{dx} = 0 (3.7b)$$

Hai phương trình (3.7) là hai phương trình vi phân cân bằng của thanh chịu uốn dọc bởi lực P đặt ở đầu thanh. Đó là hai phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất (không có vế phải) mà phương pháp giải chúng cùng với các điều kiện biên ở hai đầu thanh đã được trình bày ở chương 1.

Dưới đây trình bày phương pháp chuyển vị cưỡng bức giải hệ phương trình (3.7).

### 3.2. Phương pháp chuyển vị cưỡng bức

Phương pháp chuyển vị cưỡng bức nhằm đưa phương trình ổn định uốn dọc của thanh (3.7) là phương trình cân bằng giữa nội lực và ngoại lực về phương trình có vế phải bằng cách cho một điểm nào đó trong thanh, ví dụ điểm  $x=x_1$ , một chuyển vị  $y_0$ :

$$g = y_{x=x_1} - y_0 = 0 \quad (3.8)$$

Đưa bài toán tìm cực trị của (3.3) với điều kiện ràng buộc (3.8) về bài toán cực trị không ràng buộc bằng cách xây dựng phiếm hàm mở rộng Lagrange F như sau:

$$F = Z + \lambda g \rightarrow \min$$

$$F = \int_l (M - M_p) \chi dx + \lambda (y_{x=x_1} - y_0) \rightarrow \min \quad (3.9)$$

Trong đó  $\lambda$  là thừa số Lagrange và cũng là ẩn của bài toán. Từ điều kiện

$$\delta F = \int_l (M - M_p) \delta \chi dx + \delta(\lambda g) = 0$$

nhận được hai phương trình sau:

$$EJ \left( \frac{d^4 y}{dx^4} \right) + P \frac{d^2 y}{dx^2} = \begin{cases} -\lambda & \text{khi } x = x_1 \\ 0 & \text{khi } x \neq x_1 \end{cases} \quad (3.10a)$$

$$EJ \left( \frac{d^3 y}{dx^3} \right) + P \frac{dy}{dx} = 0 \quad (3.10b)$$

cùng với phương trình (3.8). Phương trình (3.10a) là phương trình có vế phải. Để nó trở thành phương trình uốn dọc (3.7a) của thanh thì

$$\lambda=0 \quad (3.11)$$

Về mặt toán học, phương trình (3.11) là phương trình đa thức xác định các trị riêng của hệ (3.7) bởi vì nghiệm của nó cũng là nghiệm của (3.7). Về cơ học,  $\lambda$  có thứ nguyên là lực. Đó là lực giữ để cho thanh có chuyển vị  $y_0$  tại điểm  $x=x_1$ . Lực giữ phải bằng không, suy ra phương trình (3.11). Trị riêng của (3.7) phụ thuộc vào thặng số  $P$ , suy ra  $\lambda$  cũng là hàm của  $P$ . Cho nên giải phương trình (3.11) theo  $P$ , sẽ nhận được các lực tới hạn của thanh bị uốn dọc.

### 3.3. Phương pháp phần tử hữu hạn

Phương pháp phần tử hữu hạn là một phương pháp số đặc biệt có hiệu quả để tìm dạng gần đúng của một hàm chưa biết trong miền xác định  $V$  của nó. Tuy nhiên phương pháp phần tử hữu hạn không tìm dạng xấp xỉ của hàm cần tìm trên toàn miền  $V$  mà chỉ trong từng miền con  $V_e$  (phần tử) thuộc miền xác định  $V$ . Do đó phương pháp này rất thích hợp với hàng loạt bài toán vật lý và kỹ thuật trong đó hàm cần tìm được xác định trên các miền phức tạp gồm nhiều vùng nhỏ có đặc tính hình học, vật lý khác nhau, chịu những điều kiện biên khác nhau. Phương pháp ra đời từ trực quan phân tích kết cấu, rồi được phát biểu một cách chặt chẽ và tổng quát như một phương pháp biến phân hay phương pháp dư có trọng nhưng được xấp xỉ trên mỗi phần tử.

Trong phương pháp phần tử hữu hạn chia kết cấu công trình thành một số hữu hạn các phần tử. Các phần tử này được nối với nhau tại các điểm định trước thường tại đỉnh phần tử (thậm trí tại các điểm trên biên phần tử) gọi là nút. Như vậy việc tính toán kết cấu công trình được đưa về tính toán trên các phần tử của kết cấu sau đó kết nối các phần tử này lại với nhau ta được lời giải của một kết cấu công trình hoàn chỉnh. Tương tự như phương pháp sai phân hữu hạn cũng chia công trình thành các đoạn nhỏ (phần tử) và các trạng thái chuyển vị (trường chuyển vị) v.v... được xác định tại các điểm nút sai phân. Sự khác biệt của hai phương pháp là Phương pháp sai phân hữu hạn sau khi tìm được các chuyển vị tại các nút của sai phân còn các điểm nằm giữa hai nút được xác định bằng nội suy tuyến tính, còn phương pháp phần tử hữu

hạn sau khi xác định được chuyển vị tại các nút của phần tử thì các điểm bên trong được xác định bằng hàm nội suy (hàm dạng).

Với bài toán cơ học vật rắn biến dạng, tùy theo ý nghĩa vật lí của hàm nội suy có thể phân tích bài toán theo 3 loại mô hình sau:

- Mô hình chuyển vị: Xem chuyển vị là đại lượng cần tìm và hàm nội suy biểu diễn gần đúng dạng phân bố của chuyển vị trong phần tử.

- Mô hình cân bằng: Hàm nội suy biểu diễn gần đúng dạng phân bố của ứng suất hay nội lực trong phần tử.

- Mô hình hỗn hợp: Coi các đại lượng chuyển vị và ứng suất là 2 yếu tố độc lập riêng biệt. Các hàm nội suy biểu diễn gần đúng dạng phân bố của cả chuyển vị lẫn ứng suất trong phần tử.

Hiện nay, khi áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn để giải các bài toán cơ học thường sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn theo mô hình chuyển vị. Sau đây luận văn trình bày nội dung phương pháp phần tử hữu hạn theo mô hình chuyển vị.

### **3.3.1 Nội dung phương pháp phần tử hữu hạn theo mô hình chuyển vị**

Trong phương pháp phần tử hữu hạn - mô hình chuyển vị, thành phần chuyển vị được xem là đại lượng cần tìm. Chuyển vị được lấy xấp xỉ trong dạng một hàm đơn giản gọi là hàm nội suy (hay còn gọi là hàm chuyển vị). Trình tự phân tích bài toán theo phương pháp phần tử hữu hạn - mô hình chuyển vị có nội dung sau:

#### **3.3.1.1. Rời rạc hoá kết cấu:**

Trong phương pháp PTHH, người ta rời rạc hoá bằng cách chọn kết cấu liên tục thành một số hữu hạn các miền con có kích thước càng nhỏ càng tốt nhưng phải hữu hạn. Các miền hoặc kết cấu con được gọi là PTHH, chúng có thể có dạng hình học và kích thước khác nhau, tính chất vật liệu được giả thiết không thay đổi trong mỗi phần tử nhưng có thể thay đổi từ phần tử này sang phần tử khác.

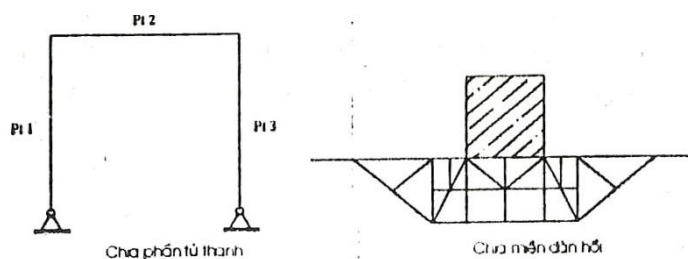
Kích thước hình học và số lượng các phần tử không những phụ thuộc vào kích hình học và tính chất chịu lực của kết cấu mà còn phụ thuộc vào độ chính xác của bài toán.

Với hệ thanh dùng các phương trình thanh, kết cấu tám sử dụng phương trình tám tam giác, chữ nhật, với vật thể khối dùng các phương trình hình chóp, hình hộp...

Khi rời rạc hoá kết cấu liên tục các PTHH được giả thiết nối với nhau tại một số điểm quy định gọi là các nút, toàn bộ tập hợp các phương trình rời rạc lưới PTHH. Lưới càng mau, nghĩa là số lượng phương trình càng lớn hay kích thước phương trình càng nhỏ thì mức độ chính xác của kết cấu càng tăng.

Khi rời rạc cần chú ý tại những nơi chuyển vị biến thiên nhanh thì chọn các phương trình có kích thước nhỏ, càng ra xa kích thước của phương trình có thể tăng lên để giảm số lượng phương trình hay số ẩn của bài toán mà vẫn đảm bảo độ chính xác. Miền được phân chia phải chọn sao cho tại biên các chuyển vị coi như đã tắt. Khi chia thành các phần tử thì các kích thước trong mỗi một phần tử không chênh lệch quá lớn làm giảm độ chính xác của bài toán. Để xác định được kích thước phù hợp cho phương trình với mỗi bài toán cần quy định kích thước ban đầu, sau đó lấy kích thước nhỏ đi hai lần, nếu kết quả của bài toán đạt độ chính xác như cũ thì kích thước của phương trình giả định coi như chấp nhận được.

Nhưng đối với hệ thanh thì khi chia nhỏ một thanh (phương nối hai nút) độ chính xác không tăng. Cho nên với hệ thanh kích thước của phương trình lấy với kích thước lớn nhất có thể tức là phương trình nối hai nút của kết cấu.



Hình 3.2.

### 3.3.1.2. Hàm chuyển vị:

Việc chọn trước các hàm chuyển vị tại một thời điểm bất kỳ trong PTHH nhằm xác định sự liên hệ giữa chuyển vị nút với chuyển vị của mọi điểm trong phạm vi của PTHH.

Gọi trường chuyển vị là vectơ các hàm chuyển vị tại điểm bất kỳ có tọa độ  $(x, y, z)$  của PTHH không gian và tọa độ  $(x, y)$  của PTHH phẳng.

$$U_x(x, y, z); U_y(x, y, z); U_z(x, y, z)$$

$$\text{và } U_x(x, y); U_y(x, y)$$

Các hàm chuyển vị thường được chọn dưới dạng hàm đa thức. Bậc của hàm và số thành phần phụ thuộc vào hình dạng, bậc của loại PTHH tương ứng.

Ví dụ trong bài toán phẳng của ứng suất hay biến dạng, đối với loại phần tử tuyến tính, hàm chuyển vị là đa thức bậc nhất và số thành phần bằng số nút quy định của phương trình. Đối với PTHH bậc hai, hàm chuyển vị là đa thức bậc hai, số thành phần chứa trong mỗi hàm bằng mỗi nút của phần tử. Dưới đây là một số hàm chuyển vị được dùng trong lý thuyết đàn hồi.

#### 1. PTHH tuyến tính:

a. PTHH tam giác:

$$U_x(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot y + \alpha_4 \cdot x^2 + \alpha_5 \cdot xy + \alpha_6 \cdot y^2$$

$$U_y(x, y) = \alpha_4 + \alpha_5 \cdot x + \alpha_6 \cdot y$$

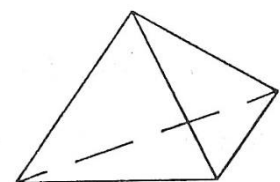
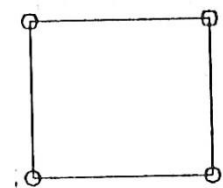
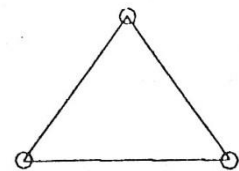
b. PTHH chữ nhật:

$$U_x(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot y + \alpha_4 \cdot xy$$

$$U_y(x, y) = \alpha_5 + \alpha_6 \cdot x + \alpha_7 \cdot y + \alpha_8 \cdot xy$$

c. PTHH hình chóp:

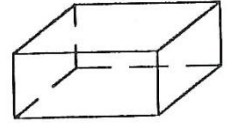
$$U_x(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot y + \alpha_4 \cdot z$$



$$U_y(x, y, z) = \alpha_5 + \alpha_6 \cdot x + \alpha_7 \cdot y + \alpha_8 \cdot z$$

$$U_z(x, y, z) = \alpha_9 + \alpha_{10} \cdot x + \alpha_{11} \cdot y + \alpha_{12} \cdot z$$

d. PTHH hình hộp:



$$U_x(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot y + \alpha_4 \cdot z + \alpha_5 \cdot xy + \alpha_6 \cdot yz + \alpha_7 \cdot zx + \alpha_8 \cdot xyz$$

$$U_y(x, y, z) = \alpha_9 + \alpha_{10} \cdot x + \alpha_{11} \cdot y + \alpha_{12} \cdot z + \alpha_{13} \cdot xy + \alpha_{14} \cdot yz + \alpha_{15} \cdot zx + \alpha_{16} \cdot xyz$$

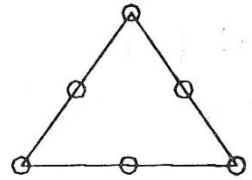
$$U_z(x, y, z) = \alpha_{17} + \alpha_{18} \cdot x + \alpha_{19} \cdot y + \alpha_{20} \cdot z + \alpha_{21} \cdot xy + \alpha_{22} \cdot yz + \alpha_{23} \cdot zx + \alpha_{24} \cdot xyz$$

## 2. PTHH bậc hai

a. PTHH tam giác:

$$U_x(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot y + \alpha_4 \cdot x^2 + \alpha_5 \cdot xy + \alpha_6 \cdot y^2$$

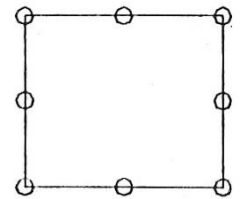
$$U_y(x, y) = \alpha_7 + \alpha_8 \cdot x + \alpha_9 \cdot y + \alpha_{10} \cdot x^2 + \alpha_{11} \cdot xy + \alpha_{12} \cdot y^2$$



b. PTHH chữ nhật:

$$U_x(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot y + \alpha_4 \cdot x^2 + \alpha_5 \cdot xy + \alpha_6 \cdot y^2 + \alpha_7 \cdot x^2 y + \alpha_8 \cdot xy^2$$

$$U_y(x, y) = \alpha_9 + \alpha_{10} \cdot x + \alpha_{11} \cdot y + \alpha_{12} \cdot x^2 + \alpha_{13} \cdot xy + \alpha_{14} \cdot y^2 + \alpha_{15} \cdot x^2 y + \alpha_{16} \cdot xy^2$$



### 3.3.1.3. Phương trình cơ bản của phương pháp phần tử hữu hạn

Để thiết lập phương trình cơ bản của phương pháp PTHH có thể sử dụng các nguyên lý khác nhau, tuy nhiên thông thường người ta sử dụng nguyên lý công khả dĩ.

Theo nguyên lý công khả dĩ ta có công thức:

$$\int_V \{\sigma\}^T \cdot \{\delta \varepsilon\} dv = \int_V \{g\}^T \cdot \{\delta u\} dv + \int_S \{p\}^T \cdot \{\delta \varepsilon\} ds \quad (3.12)$$

Phương trình trên biểu thị điều kiện cân bằng của hệ đàn hồi tuyến tính.

Nếu chuyển trí của cả hai về theo phương pháp thông thường ta có:



$$\int_V \{\delta \varepsilon\}^T \cdot \{\delta\} dv = \int_V \{\delta u\}^T \cdot \{g\} dv + \int_S \{\delta u\}^T \cdot \{p\} ds \quad (3.13)$$

Theo định luật Hooke:  $\{\delta\} = [D]\{\varepsilon\}$ . thay vào vế phải nhận được:

$$\int_V \{\delta \varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dv = \int_V \{\delta u\}^T \{g\} dv + \int_S \{\delta u\}^T \cdot \{p\} ds \quad (3.14)$$

Trong phương trình trên còn thiếu điều kiện liên tục, điều kiện này được đưa vào bằng một trường chuyển vị xấp xỉ (hàm chuyển vị) thỏa mãn các điều kiện tương thích.

Ta chọn một hàm chuyển vị phù hợp với loại và bậc của một phần tử mẫu (PTHH):

- Với bài toán không gian:

$$\{U(x, y, z)\} = [P(x, y, z)]\{\alpha\} \quad (3.15)$$

- Với bài toán phẳng:

$$\{U(x, y)\} = [P(x, y)]\{\alpha\} \quad (3.16)$$

Trong đó:

$\{U$  - vectơ chuyển vị của một điểm

$[P]$  - ma trận các biến của trường chuyển vị.

$\{\alpha\}$  - ma trận hệ số của hàm chuyển vị

Ví dụ với phần tử tam giác:

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\rightarrow \{u\} = [P]\{\alpha\}$$

Nếu tính chuyển vị của các nút trong một phần tử ta có:

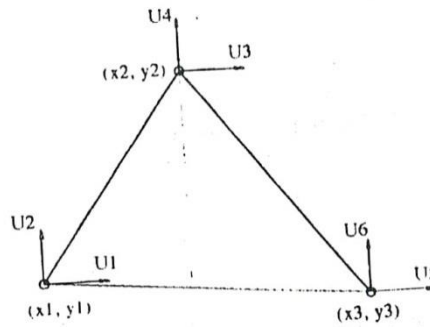
$$\{u\}_e = [A]_e \cdot \{\alpha\} \quad (3.18)$$

$\{u\}_e$  - vectơ chuyển vị của các nút của phần tử.

$[A]_e$  - ma trận được xác định theo  $[P]$  và tọa độ của các nút.

$\{\alpha\}$  - ma trận hệ số.

Ví dụ với phần tử tam giác:



$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\rightarrow \{u\}_e = [A]_e \cdot \{\alpha\} \quad (3.20)$$

Trong công thức trên giá trị của  $[A]_e$  hoàn toàn xác định. Nếu biết được  $\{u\}_e$  ta sẽ xác định được  $\{\alpha\}$ , ta có:

$$\{\alpha\} = [A]_e^{-1} \cdot \{u\}_e \quad (3.21)$$

Khi đó chuyển vị tại một điểm bất kỳ được xác định theo chuẩn vị của các nút của phần tử:

$$\{u\} = [P][A]_e^{-1} \cdot \{u\}_e \quad (3.22)$$

Mặt khác ta có quan hệ giữa chuyển vị và biến dạng:

$$\{\varepsilon\} = [\nabla] \{u\} \quad (3.23)$$

$[\nabla]$  - ma trận toán tử vi phân;

$\{\varepsilon\}$  - vector biến dạng

Thay giá trị của  $\{u\}$  ta có công thức biến dạng:

$$\{\varepsilon\} = [\nabla][p][A]_e^{-1} \cdot \{u\}_e \quad (3.24)$$

Đặt:

$$[N] = [p][A]_e^{-1} \quad (3.25)$$

$$[B] = [\nabla][N] \quad (3.26)$$

Trong đó:

$[N]$  - ma trận hàm dạng

$[B]$  - ma trận biến đổi của hàm dạng

Như vậy biến dạng có thể biến đổi lại như sau:

$$\{\varepsilon\} = [\nabla][N]\{u\}_e \text{ hoặc } \{\varepsilon\} = [B]\{u\}_e, \text{ đồng thời}$$

$$\{u\} = [N]\{u\}_e$$

Nếu cho các nút một chuyển vị khả dĩ khi đó ta có biến dạng khả dĩ.

$$\{\delta\varepsilon\} = [B]\{\delta u\}_e$$

$$\{\delta u\} = [N]\{\delta u\}_e \quad (3.27)$$

Thực hiện phép chuyển trí phương trình trên ta có:

$$\{\delta\varepsilon\}^T = \{\delta u\}_e^T \cdot [B]^T$$

$$\{\delta u\}^T = \{\delta u\}_e^T \cdot [N]^T \quad (3.28)$$

Thay  $\{\delta\varepsilon\}^T$  vào phương trình cân bằng của nguyên lý công khả dĩ ta được

$$\int_V \{\delta u\}_e^T \cdot [B]^T \cdot [D][B]\{u\}_e \, dv = \int_V \{\delta u\}_e^T [N]^T \{g\} \, dv + \int_S \{\delta u\}_e^T [N]\{p\} \, ds \quad (3.29)$$

Ta dùng chuyển vị tương thích được chọn (Hạng CV) không những thoả mãn điều kiện bên trong và cả trên biên PTHH. Trong công thức trên đại

lượng  $\{\delta u\}_e$  không phụ thuộc vào phép tích phân nên có thể đưa ra ngoài dấu tích phân:

$$\{\delta u\}_e^T \int_v [B]^T [D][B] \{u\}_e dv = \{\delta u\}_e^T \int_v [N]^T \{g\} dv + \{\delta u\}_e^T \int_s [N]^T \{p\} ds$$

Do chuyển vị khả dĩ khác 0 nên:

$$\int_v [B]^T [D][B] \{u\}_e dv = \int_v [N]^T \{g\} dv + \int_s [N]^T \{p\} ds \quad (3.30)$$

Nếu ký hiệu:

$$\begin{aligned} [K]_e &= \int_v [B]^T [D][B] dv \\ \{F\}_e &= \int_v [N]^T \{g\} dv + \int_s [N]^T \{p\} ds \end{aligned} \quad (3.31)$$

Ta có:

$$[K]_e \{u\}_e = \{F\}_e \quad (3.32)$$

Đây là phương trình cơ bản của PTHH, trong đó:

$[K]_e$  - ma trận độ cứng của PTHH (ma trận đối xứng);

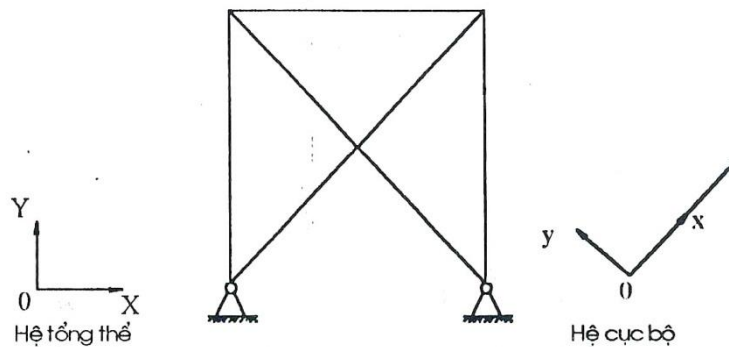
$\{u\}_e$  - vectơ chuyển vị nút;

$\{F\}_e$  - vectơ lực nút của phần tử, gọi là lực nút tương đương của PTHH

Ấn của phương trình trên là chuyển vị của các nút. Còn đại lượng  $[K]_e$  và  $\{F\}_e$  đều xác định được dựa vào đặc trưng hình học, vật liệu của phần tử và tải trọng tác động vào nó. Tuy nhiên phương trình trên mới chỉ là phương trình cân bằng của một phần tử, trong khi đó một kết cấu bao gồm nhiều phần tử tạo nên. Dựa vào phương trình cân bằng của một phần tử, thực hiện ghép nối để tạo nên phương trình cân bằng của hệ kết cấu, từ đó xác định được chuyển vị của các nút, trước khi ghép nối đôi khi cần chuyển hệ trục tọa độ (từ hệ tọa độ cục bộ sang hệ tọa độ tổng thể).

### 3.3.1.4. Chuyển hệ trục tọa độ

Để thuận tiện cho việc nhập số liệu tải trọng và xem nội lực, trên mỗi một phần tử có một hệ tọa độ riêng gọi là hệ tọa độ cục bộ. Trong khi đó tọa độ của các nút và chuyển vị được tính theo hệ tọa độ chung, gọi là hệ tọa độ tổng thể.



Khi ghép nối ma trận độ cứng và vector lực, và chuyển vị cần chuyển cả đại lượng này từ hệ tọa độ cục bộ về tổng thể, từ phương trình của hệ tọa độ cục bộ:

$$[K]_e \cdot \{u\}_e = \{F\}_e$$

Ta có:

$$[T][k]_e [T]^{-1} [T]\{u\}_e = [T]\{F\}_e$$

Trong đó  $[T]$  là ma trận chuyển trục tọa độ: 
$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

Đặt:

$$[K]_e' = [T][K]_e [T]^{-1} = [T][K]_e [T]^T \text{ do } [T]^T = [T]^{-1} \text{ (ma trận trực giao)}$$

$$\{F\}_e' = [T]\{F\}_e$$

$$\{u\}_e' = [T]\{u\}_e$$

Trong đó:

$[K]_e'$  - ma trận độ cứng của phương trình tử trong hệ tọa độ tổng thể.

$\{F\}'_e$  - vectơ lực nút trong hệ tọa độ tổng thể.

$\{u\}'_e$  - vectơ chuyển vị nút trong hệ tọa độ tổng thể.

Khi xác định được các chuyển vị nút của hệ trong tọa độ tổng thể thì chuyển vị của các nút của phương trình trong hệ tọa độ cục bộ là:

$$\{u\}'_e = [T]^{-1} \cdot \{u\}'_e \text{ hoặc } \{u\}'_e = [T]^T \cdot \{u\}'_e$$

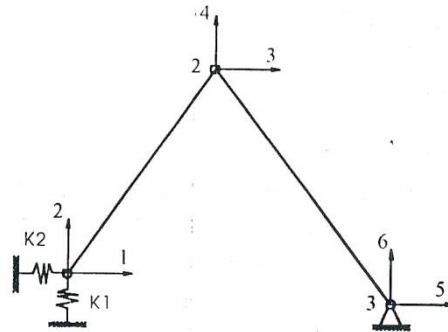
Phương trình cân bằng của phần tử trong hệ tọa độ tổng thể:

$$[K]'_e \cdot \{u\}'_e = \{F\}'_e \quad (3.33)$$

### 3.3.1.5. Ghép nối ma trận độ cứng và vectơ tải trọng nút của toàn hệ

Dựa vào đặc trưng hình học và cơ học của phần tử ta xác định được  $[K]'_e$  và  $\{F\}'_e$  theo sơ đồ liên kết của các phần tử thành lập bảng liên kết sau đó xác định ma trận độ cứng và vectơ tải trọng của hệ, các bước thực hiện như sau:

#### a. Đánh chỉ số nút và chuyển vị



Hệ có ba nút, 2 phần tử giàn và 6 chuyển vị. Như vậy, ma trận độ cứng của 1 phần tử có kích thước  $4 \times 4$ .

Bảng liên kết phần tử

Phần tử	Nút đầu		Nút cuối	
	u (1)	v (2)	u (3)	v (4)
1	1	2	3	4
2	3	4	5	6

**b. Ma trận độ cứng**

Sau khi đã chuyển về hệ tọa độ tổng thể ta có ma trận độ cứng của các phương trình tương đương với các chuyển vị:

$$[K]_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} * \\ * \\ * \\ * \end{matrix} & \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Do hệ có 6 chuyển vị nên ma trận độ cứng của hệ  $[K]_s$  có kích thước 6\*6 tương ứng với các chuyển vị:

$$[K]_s = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{matrix} & \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Các giá trị được xác định bằng cách cộng dồn từ  $[K]_1$  và  $[K]_2$ . Duyệt từng giá trị của  $[K]_1$  chuyển vào  $[K]_s$  theo đúng chỉ số, tiếp tục với  $[K]_2$  nhưng cộng thêm.

**c. Vector lực của toàn hệ**

Từ số chuyển vị của hệ ta có vector lực tương ứng.

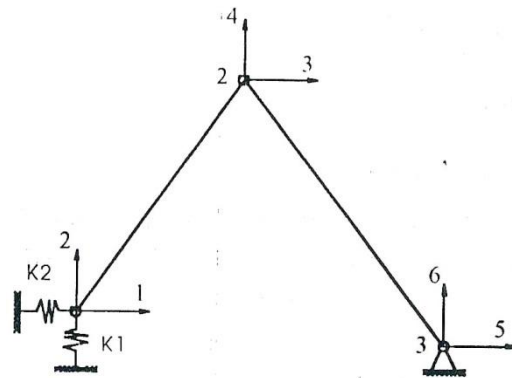
$$\{F\}'_1 = \begin{matrix} \begin{matrix} * \\ * \\ * \\ * \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix}, \{F\}'_2 = \begin{matrix} \begin{matrix} * \\ * \\ * \\ * \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{matrix}; \{F\}'_s = \begin{matrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Từ các vectơ lực của mỗi phần tử đã được xác định, ta duyệt từng giá trị của  $\{F\}_1$  đưa vào vị trí của  $\{F\}_s$  sao cho có cùng chỉ số. Tiếp tục làm như vậy với  $\{F\}_2$  nhưng phải cộng thêm vào. Cuối cùng ta có hệ phương trình của hệ kết cấu:

$$[K]_s \{u\}_s = \{F\}_s \quad (3.34)$$

#### d. Trường hợp gối đàn hồi tại nút

Với một số loại kết cấu tại gối có các liên kết đàn hồi, với mỗi liên kết ta có một lò xo với độ cứng cho trước, khi đó độ cứng của lò xo sẽ được cộng thêm vào ma trận độ cứng của hệ tại vị trí trên đường chéo chính với số chỉ tương ứng



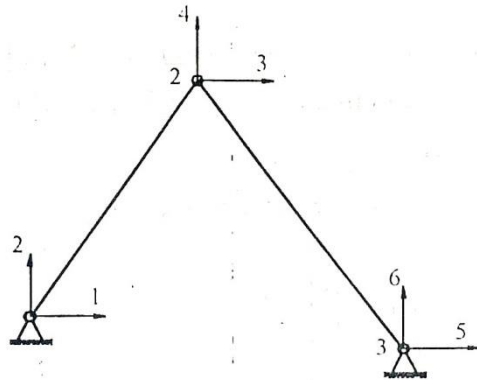
Ví dụ:  $k_1$  thêm vào  $k_{11}$ ,  $k_2$  thêm vào  $k_{22}$ .

#### 3.3.1.6. Xử lý điều kiện biên

Muốn tìm chuyển vị của các nút ta cần giải hệ phương trình:  $[K]_s \cdot \{u\}_s = \{F\}_s$  tuy nhiên ma trận độ cứng của hệ được thành lập khi chưa tính đến các liên kết của kết cấu với môi trường, do đó  $\det[K]_s = 0$  hay nói cách khác hệ suy biến. Để giải hệ phương trình này cần đưa các điều kiện biên vào. Đó là chuyển vị bị chặn (chuyển vị = 0) tại các chuyển vị này sẽ có phản lực.

Ví dụ:  $u_1 = u_2 = u_5 = u_6 = 0$





Cách đưa các điều kiện biên vào như sau: với một chuyển vị nào đó  $u_i = 0$  ta xoá cột  $i$  và dòng  $i$  của ma trận  $[K]_s$  và  $\{F\}_s$ . Làm như vậy với tất cả các chuyển vị ta nhận được một hệ phương trình mới không suy biến và giải được bằng các phương pháp: khử Gauss, Choleski, lặp:  $[K]_s \{u\}'_s = \{F\}'_s$  ví dụ

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \left[ \begin{array}{cccccc}
 * & * & * & * & * & * \\
 * & * & * & * & * & * \\
 * & * & * & * & * & * \\
 * & * & * & * & * & * \\
 * & * & * & * & * & * \\
 * & * & * & * & * & *
 \end{array} \right] & \begin{array}{c} (0) \\ 0 \\ * \\ * \\ 0 \\ (0) \end{array} & \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{array} \right\} \\ \doteq \\ \left\{ \begin{array}{c} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{array} \right\}
 \end{array} \\
 & [K]_s & \{u\}'_s & \{F\}'_s
 \end{array}
 \end{array}$$

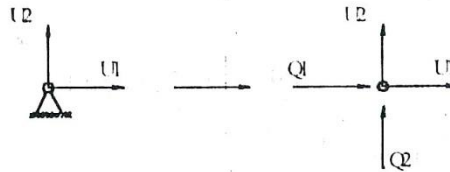
Sau khi xoá ta có hệ phương trình:

$$\begin{bmatrix} k_{33} & k_{34} \\ k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

Giải phương trình tìm  $u_3, u_4$

**3.3.1.7. Tìm phản lực tại các gối**

Phản lực tại các gối xuất hiện khi chuyển vị tại đó bị chặn ( $u_i = 0$ ). Nếu ta bỏ phần chặn và thay vào đó bằng phản lực (theo đúng phương của chuyển vị) theo mô hình sau:



Trong đó  $Q_1, Q_2$  là phản lực, để tìm phản lực  $Q_1$  tương ứng với  $u_i = 0$  ta lấy dòng của hệ phương trình.

$$[K]_s \cdot \{u\}_s = \{F\}_s$$

Ví dụ  $u_5$  khi đó ta có:

$$\begin{array}{c}
 \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}
 \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ * \\ * \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{bmatrix}
 +
 \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{bmatrix}
 \\
 [K]_s \quad \{u\}_s \quad \{F\}_s \quad \{Q\}_s
 \end{array}$$

$$\rightarrow Q_5 = u_3 k_{53} + u_4 k_{54} - F_5 \tag{3.36}$$

Trong đó  $u_3$  và  $u_4$  tìm được từ việc giải hệ  $[K]_s \cdot \{u\}_s = \{F\}_s$  tương tự như vậy đối với  $Q_1, Q_2, Q_6$ . Chiều dương của lực  $Q_i$  là chiều trùng với chiều dương của hệ tọa độ tổng thể.

**3.3.1.8. Trường hợp biết trước một số chuyển vị**

Giả sử cho trước một số chuyển vị  $\{u\}_i = \{a\}_i$  khi đó cách khử  $u_i$  được thực hiện như sau: thay  $u_i$  vào các dòng tại vị trí  $i$  chuyển tích các  $k_{ii}u_i$  sang bên phải và xoá dòng  $i$  ta có hệ phương trình mới.

Ví dụ cho  $u_2 = a_2$

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} * & k_{12} & * & * & * & * \\ * & k_{22} & * & * & * & * \\ * & k_{32} & * & * & * & * \\ * & k_{42} & * & * & * & * \\ * & k_{52} & * & * & * & * \\ * & k_{62} & * & * & * & * \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{bmatrix} \\ & [K]_s & \{u\}_s & \{F\}_s & & \text{xoá dòng } i = 2.
 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \begin{matrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{matrix} & \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{bmatrix} & - a_2 & \begin{matrix} k_{12} \\ k_{32} \\ k_{42} \\ k_{52} \\ k_{62} \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \\ & [K]_s & \{u\}'_s & \{F\}'_s & & & &
 \end{matrix}$$

Giải hệ này tìm được các  $\{u\}'_s$

Phản lực tại các chuyển vị cho trước xác định như sau:

Thay các chuyển vị tìm được vào dòng i, ta có:

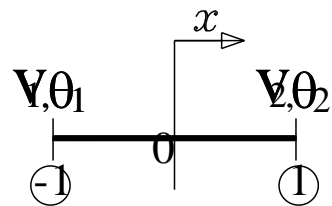
$$k_{21}u_1 + k_{22}u_2 + k_{23}u_3 + k_{24}u_4 + k_{25}u_5 + k_{26}u_6 = F_2 + Q_2 \tag{3.37}$$

$$\Rightarrow Q_2 - k_{21}u_1 + k_{22}u_2 + k_{23}u_3 + k_{24}u_4 + k_{25}u_5 + k_{26}u_6 - F_2$$

Tương tự như vậy với trường hợp các chuyển vị cho trước khác.

### 3.3.2. Cách xây dựng ma trận độ cứng của phần tử chịu uốn

Xét phần tử dầm có hai nút, mỗi nút có hai bậc tự do là chuyển vị và góc xoay và dầm có diện tích mặt cắt ngang là A; mô men quán tính của mặt cắt ngang là I; mô đun đàn hồi của vật liệu E (hình 3.3)



Hình 3.3. Phần tử hai nút

Để tính toán được tổng quát, chiều dài phần tử lấy bằng hai đơn vị, gốc tọa độ nằm ở giữa phần tử. Như vậy, nếu biết được các bậc tự do tại các nút phần tử là  $v_1, \theta_1, v_2, \theta_2$  thì chuyển vị tại điểm bất kỳ trong phần tử tại tọa độ  $x$  được xác định như sau:

$$v = N_1 \cdot v_1 + N_2 \cdot \theta_1 + N_3 \cdot v_2 + N_4 \cdot \theta_2 \quad (3.38)$$

Trong đó :  $N_1, N_2, N_3, N_4$  : là các hàm dạng và được xác định như sau:

$$N_1 = \frac{1}{4}(2 - 3x + x^3); \quad N_2 = \frac{1}{4}(1 - x - x^2 + x^3);$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(2 + 3x - x^3); \quad N_4 = \frac{1}{4}(-1 - x + x^2 + x^3).$$

Theo công thức trên ta thấy:

$$v|_{x=-1} = v_1; \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=-1} = \theta_1; \quad v|_{x=1} = v_2; \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=1} = \theta_2. \quad (3.39)$$

Như vậy, mỗi phần tử có 4 bậc tự do  $X = \{v_1, \theta_1, v_2, \theta_2\}$  cần xác định. Nếu biết được  $X$  thì ta có biết được chuyển vị trong phần tử cũng như biến dạng uốn và mô men theo công thức sau:

$$\chi = -\frac{d^2v}{dx^2} = -\left[ \frac{d^2N_1}{dx^2} \quad \frac{d^2N_2}{dx^2} \quad \frac{d^2N_3}{dx^2} \quad \frac{d^2N_4}{dx^2} \right] \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\}^T; \quad (3.40a)$$

$$M = EI \cdot \chi = -EI \left[ \frac{d^2N_1}{dx^2} \quad \frac{d^2N_2}{dx^2} \quad \frac{d^2N_3}{dx^2} \quad \frac{d^2N_4}{dx^2} \right] \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\}^T \quad (2.41a)$$

Công thức trên là tính toán cho phần tử có chiều dài bằng 2, nếu phần tử có chiều dài là  $\Delta x$  thì biến dạng uốn và mô men được tính như sau:

$$\chi = -\frac{d^2v}{dx^2} \left( \frac{2}{\Delta x} \right)^2 = -\left( \frac{2}{\Delta x} \right)^2 \left[ \frac{d^2N_1}{dx^2} \quad \frac{d^2N_2}{dx^2} \quad \frac{d^2N_3}{dx^2} \quad \frac{d^2N_4}{dx^2} \right] \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\}^T \quad (3.40b)$$

$$M = EI \cdot \chi = -EI \left( \frac{2}{\Delta x} \right)^2 \left[ \frac{d^2N_1}{dx^2} \quad \frac{d^2N_2}{dx^2} \quad \frac{d^2N_3}{dx^2} \quad \frac{d^2N_4}{dx^2} \right] \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\}^T \quad (3.41b)$$

Xét phần tử có các tải trọng tập trung  $F = \{P_1, P_2, M_1, M_2\}^T$  tác dụng tại các nút của phần tử. Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, lượng ràng buộc đối với bài toán tĩnh viết cho phần tử như sau:

$$Z = \frac{\Delta x}{2} \int_{-1}^1 M[\chi] dx - \sum_{i=1}^4 F_i X_i \rightarrow \min \quad (3.42)$$

Điều kiện dừng của (3.42) được viết lại như sau:

$$\delta Z = \frac{\Delta x}{2} \int_{-1}^1 M\delta[\chi] dx - \sum_{i=1}^4 F_i \delta X_i = 0 \quad (3.43)$$

hay:

$$\left(\frac{2}{\Delta x}\right)^3 EJ \cdot \begin{bmatrix} \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_4}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} dx \\ \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_4}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} dx \\ \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_4}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} dx \\ \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_4}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_4}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_4}{dx^2} dx & \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_4}{dx^2} \frac{d^2 N_4}{dx^2} dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

$$[K]\{X\} = \{F\} \quad (3.45)$$

trong đó:  $[K]$ : ma trận độ cứng của phần tử;  $\{F\}$ : véc tơ tải trọng tác dụng nút;  $\{X\}$ : véc tơ chuyển vị nút của phần tử.

Tính tích phân các hệ số trong  $[K]$  ta có thể tính bằng phương pháp chính xác (bằng hàm  $\text{int}(fx, a, b)$  có sẵn trong matlab) hoặc tính bằng phương pháp tích phân số của Gauss và kết quả độ cứng của phần tử chịu uốn ngang phẳng như sau:

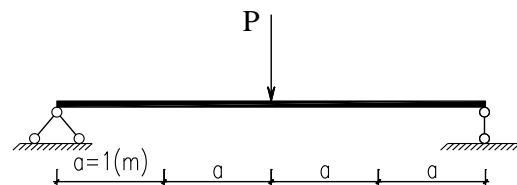
$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{\Delta x^3} & \frac{6EI}{\Delta x^2} & -\frac{12EI}{\Delta x^3} & \frac{6EI}{\Delta x^2} \\ \frac{6EI}{\Delta x^2} & \frac{4EI}{\Delta x} & -\frac{6EI}{\Delta x^2} & \frac{2EI}{\Delta x} \\ -\frac{12EI}{\Delta x^3} & -\frac{6EI}{\Delta x^2} & \frac{12EI}{\Delta x^3} & -\frac{6EI}{\Delta x^2} \\ \frac{6EI}{\Delta x^2} & \frac{2EI}{\Delta x} & -\frac{6EI}{\Delta x^2} & \frac{4EI}{\Delta x} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Biết được ma trận độ cứng phần tử thì ta dễ dàng xây dựng được ma trận độ cứng của toàn thanh. Nếu thanh chỉ có một phần tử thì ma trận của phần tử cũng chính là ma trận độ cứng của thanh. Trong phần tử nếu bậc tự do nào không có thì trong ma trận độ cứng của phần tử đó ta bỏ đi hàng và cột tương ứng với bậc tự do đó.

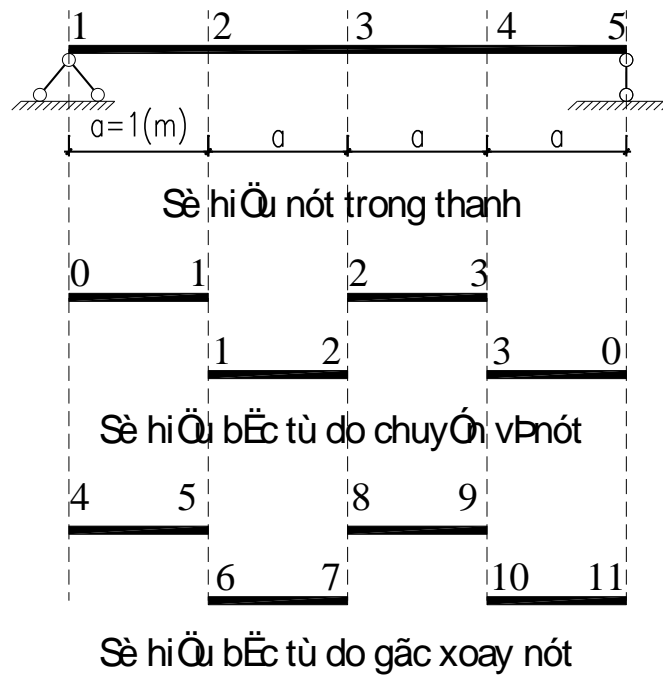
### 3.3.3. Cách xây dựng ma trận độ cứng tổng thể của kết cấu

Để trình bày cách xây dựng ma trận độ cứng tổng thể của kết cấu trong phương pháp phần tử hữu hạn, luận văn xin được trình bày thông qua ví dụ giải bài toán dầm chịu uốn dưới tác dụng của tải trọng tĩnh củ thể sau (còn các bài toán khác thì cách xây dựng ma trận độ cứng tổng thể cũng làm tương tự):

**Ví dụ 3.1:** Tính toán kết cấu dầm chịu lực như (hình 3.4). Biết dầm có độ cứng  $EI = 10^8$  (kN.cm<sup>2</sup>) không đổi và  $P = 10$  (kN). Xác định chuyển vị tại giữa dầm.



Hình 3.4. Hình ví dụ 3.1



**Hình 3.5.** Rời rạc hóa thanh thành các phần tử

Chia thanh ra thành  $n_{pt}$  phần tử. Các nút của phần tử phải trùng với vị trí đặt lực tập trung, chiều dài các phần tử có thể khác nhau. Mỗi phần tử có 4 bậc tự do, như vậy nếu  $n_{pt}$  phần tử rời rạc thì tổng cộng có  $4n_{pt}$  bậc tự do. Nhưng vì cần đảm bảo liên tục giữa các chuyển vị là chuyển vị của nút cuối phần tử thứ  $e$  bằng chuyển vị của nút đầu phần tử thứ  $(e+1)$  nên số bậc tự do của thanh sẽ nhỏ hơn  $4n_{pt}$ . Khi giải ta chỉ cần đảm bảo điều kiện liên tục của chuyển vị còn điều kiện liên tục về góc xoay được xét bằng cách đưa vào các điều kiện ràng buộc. Ví dụ dầm trong (ví dụ 3.1) ta chia thành 4 phần tử (hình 3.5)

Như vậy, tổng cộng số ẩn là  $11$  ẩn  $< 4 \times 4 = 16$  ẩn. Gọi ma trận  $n_w$  là ma trận chuyển vị có kích thước  $n_w(n_{pt}, 2)$  là ma trận có  $n_{pt}$  hàng và 2 cột chứa các ẩn số là chuyển vị tại nút của các phần tử (hình 2.8)

$$n_w(1,:) = [0 \ 1]; n_w(2,:) = [1 \ 2]; n_w(3,:) = [2 \ 3]; n_w(4,:) = [3 \ 0]$$

$$n_w = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Gọi ma trận  $n_\theta$  là ma trận chuyển vị có kích thước  $n_\theta(n_{pt}, 2)$  là ma trận có  $n_{pt}$  hàng và 2 cột chứa các ẩn số là góc xoay tại nút của các phần tử (hình 3.5).

$$n_\theta(1,:) = [4 \ 5]; n_\theta(2,:) = [6 \ 7]; n_\theta(3,:) = [8 \ 9]; n_\theta(4,:) = [10 \ 11]$$

$$n_w = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 & 10 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \end{bmatrix}^T$$

Sau khi biết ẩn số thực của các thanh ta có thể xây dựng độ cứng tổng thể của thanh (có rất nhiều cách ghép nối phần tử khác nhau, tùy vào trình độ lập trình của mỗi người nên tác giả không trình bày chi tiết cách ghép nối các phần tử lại để được ma trận độ cứng của toàn thanh và có thể xem trong code mô đun chương trình của tác giả)

Nếu bài toán có  $n_{cv}$  ẩn số chuyển vị và  $n_{gx}$  ẩn số góc xoay thì ma trận độ cứng của thanh là  $K$  có kích thước  $(n \times n)$ ,  $K(n, n)$  với  $n = (n_{cv} + n_{gx})$ . Như ở ví dụ 3.1,  $n = 11$ . Bây giờ xét điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử.

Điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử được viết như sau:

$$\left( \frac{dy_i}{dx} \Big|_{nut2} \right) - \left( \frac{dy_{i+1}}{dx} \Big|_{nut1} \right) = 0 \quad (2.47)$$

hay: 
$$\delta\lambda_1 \left[ \left( \frac{dy_1}{dx} \Big|_{nut2} \right) - \left( \frac{dy_2}{dx} \Big|_{nut1} \right) \right] = 0 \quad (2.48a)$$

$$\delta\lambda_2 \left[ \left( \frac{dy_2}{dx} \Big|_{nut2} \right) - \left( \frac{dy_3}{dx} \Big|_{nut1} \right) \right] = 0 \quad (2.48b)$$

$$\delta\lambda_3 \left[ \left( \frac{dy_3}{dx} \Big|_{nut2} \right) - \left( \frac{dy_4}{dx} \Big|_{nut1} \right) \right] = 0 \quad (2.48c)$$

Trong đó  $\lambda_i$  cũng là ẩn số của bài toán (có  $k$  ẩn số), do đó tổng số ẩn số của bài toán lúc là  $(n+k)$  do đó ma trận độ cứng của phần tử lúc này cũng phải thêm  $k$  dòng và  $k$  cột như vậy kích thước của ma trận độ cứng là



$K(n+k, n+k)$ . Gọi  $k_1$  là góc xoay tại nút 2 của phần tử trước,  $k_2$  là góc xoay tại nút 1 của phần tử sau thì ta có các hệ số trong ma trận độ cứng  $K$ :

$$k(n+i, k_1) = \frac{2}{\Delta x}; k(n+i, k_2) = -\frac{2}{\Delta x} \quad (i=1 \div k) \quad (2.49a)$$

$$k(k_1, n+i) = \frac{2}{\Delta x}; k(k_2, n+i) = -\frac{2}{\Delta x} \quad (i=1 \div k) \quad (2.49b)$$

Nếu có hai phần tử thì có một điều kiện về góc xoay, có  $n_{pt}$  phần tử thì có  $(2n_{pt} - 1)$  điều kiện liên tục về góc xoay giữa các phần tử. Như vậy cuối cùng ta sẽ thiết lập được phương trình:

$$[K]\{X\} = \{F\}$$

trong đó:  $\{F\} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$   $\left. \begin{array}{l} \text{so - hang} = n \\ \text{so - hang} = k \end{array} \right\}$ ;  $\{X\} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix}$  là ẩn số của bài toán

Trong ví dụ 3.1 khi chia thành ra thành 4 phần tử. Kết quả ma trận độ cứng của thanh:

$$[K] = 10^5 \begin{bmatrix} 2.4 & -1.2 & 0 & -1.2 & -1.2 & 1.2 & 1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.2 & 2.4 & -1.2 & 0 & 0 & -1.2 & -1.2 & 1.2 & 1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.2 & 2.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.2 & -1.2 & 1.2 & 1.2 & 0 & 0 & 0 \\ -1.2 & 0 & 0 & 1.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.2 & 0 & 0 & 0.8 & 1.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.10^{-5} & 0 & 0 \\ 1.2 & -1.2 & 0 & 0 & 0 & 1.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.10^{-5} & 0 & 0 \\ 1.2 & -1.2 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 1.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.10^{-5} & 0 \\ 0 & 1.2 & -1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & -2.10^{-5} & 0 \\ 0 & 1.2 & -1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 1.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.10^{-5} \\ 0 & 0 & 1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.6 & 0.8 & 0 & 0 & -2.10^{-5} \\ 0 & 0 & 1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 1.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.10^{-5} & -2.10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.10^{-5} & -2.10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.10^{-5} & -2.10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kết quả chuyển vị, góc xoay tại các nút:

$$\begin{bmatrix} w_2; w_3; w_4; \\ \varphi_1; \varphi_2; \varphi_3; \varphi_4; \varphi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.09166667(\text{cm}); 0.13333333(\text{cm}); 0.09166667(\text{cm}); \\ 0.05(\text{rad}); 0.0375(\text{rad}); 0; -0.0375(\text{rad}); -0.05(\text{rad}) \end{bmatrix}$$

Ta thấy kết quả trên so với kết quả giải chính xác theo phương pháp giải tích rất đúng ví dụ như chuyển vị tại nút 3 tính theo phương pháp giải tích:

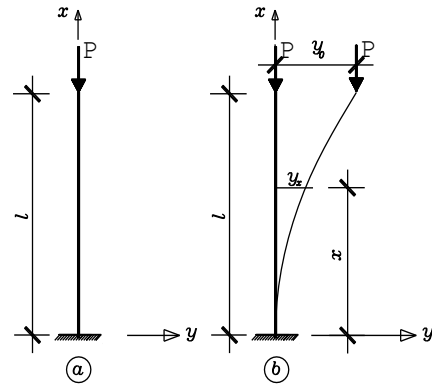
$$w_3 = \frac{Pl^3}{48EI} = 0,13333333(\text{cm})$$

**3.3.4. Tính ổn định của các thanh chịu nén có các điều kiện biên khác nhau.**

*Ví dụ. 3.1: Thanh đầu ngàm – đầu tự do*

Xác định lực tới hạn theo phương pháp chuyển vị cưỡng bức cho thanh đầu ngàm và đầu tự do chịu lực nén dọc trục P (hình 3.6).

Chia thanh ra làm  $n_{pt}$  phần tử (hình 3.7), nội lực mô men uốn do lực P gây ra trong các phần tử của thanh là:



**Hình 3.6.** Thanh ngàm - Tự do

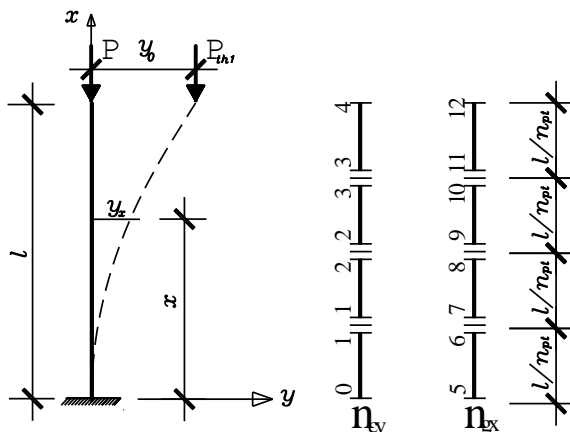
$$M_{iP} = P \cdot w_{xi} \quad (i = 1 \div n_{pt}) \tag{3.50}$$

Mô men uốn  $M_{iP}$  gây ra biến dạng uốn  $\chi_{iP}$  do đó trong thành phần lượng ràng buộc của bài toán ta phải viết thêm thành phần này, như vậy lượng ràng buộc cho bài toán ổn định có thể viết như sau:

$$Z = \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{n_{pt}} \int_{-1}^1 (M^{(i)} - M_p^{(i)}) [\chi_i] dx - \sum_{k=1}^{sonut} F_k X_k \rightarrow \min \tag{3.51a}$$

hay

$$\delta Z = \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{n_{pt}} \int_{-1}^1 (M^{(i)} - M_p^{(i)}) \delta \chi_i dx - \sum_{k=1}^{sonut} F_k \delta X_k \rightarrow \min \tag{3.51b}$$



**Hình 3.6.** Thanh đầu ngàm-đầu tự do

Gọi  $n_{cv}$  là số thông số chuyển vị tại các nút của thanh có chuyển vị;  $n_{gx}$  là số thông số góc xoay tại các nút của thanh có góc xoay. Dựa vào điều kiện này ta sẽ xây dựng được ma trận độ cứng của thanh có bậc:  $n \times n$  ( $n = n_{cv} + n_{gx}$ ) (sau khi bỏ đi những hàng và cột tương ứng có chuyển vị hoặc góc xoay bằng không).

Ngoài ra, cần đảm bảo điều kiện liên tục của chuyển vị còn điều kiện liên tục về góc xoay được xét thêm bằng cách đưa vào các điều kiện ràng buộc.

$$\left( \frac{dy_i}{dx} \Big|_{\text{nút } 2\text{-cua-pt-thu-}i} \right) - \left( \frac{dy_{i+1}}{dx} \Big|_{\text{nút } 1\text{-cua-pt-thu-}i+1} \right) = 0 \quad (3.52)$$

Như vậy ma trận độ cứng của của thanh được mở rộng thêm  $(n_{pt} - 1)$  hàng và  $(n_{pt} - 1)$  cột.

Theo phương pháp chuyển vị cưỡng bức tại một vị trí (nút) nào đó của thanh, ta cho lệch khỏi vị trí cân bằng một chuyển vị  $y_0$ . Chẳng hạn tại nút thứ  $k$  ta cho một chuyển vị cưỡng bức  $y_0$  ta có:

$$w|_{x_k} - y_0 = 0 \quad (3.53)$$

Như vậy ma trận độ cứng của phần tử lại được mở rộng thêm 1 hàng, một cột và lúc này ma trận độ cứng có bậc  $(n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}) \times (n_{cv} + n_{gx} + n_{pt})$  với hệ số trong ma trận độ cứng:

$$k(n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}, k) = 1 \quad (3.54a)$$

$$k(k, n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}) = 1 \quad (3.54b)$$

Ma trận tải trọng tác dụng lúc này có bậc:  $(n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}) \times 1$  với giá trị hệ số  $F(n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}) = y_0$  còn các hệ số còn lại bằng không.

Giải phương trình  $[K]\{X\} = \{F\}$  ta sẽ tìm được các ẩn số là các chuyển vị tại các nút của phần tử và các thừa số Lagrange. Tiếp theo, ta cho thừa số

Lagrange tương ứng với chuyển vị cưỡng bức bằng không ta sẽ tìm được giá trị lực P tương ứng là các giá trị tới hạn của lực nén lên thanh.

Trong phần này, luận văn giải bài toán thanh đầu ngàm - đầu tự do với số phân tử chia bằng 6. Thừa số Lagrange tương ứng với chuyển vị cưỡng bức là:

$$\begin{aligned} \lambda = & -15.492 \cdot y_0 / l^4 \cdot (0,10816e293 \cdot l^{48} \cdot p^{12} - 0,88171e296 \cdot l^{42} \cdot ei \cdot p^{11} + \\ & + 0,29803e300 \cdot l^{36} \cdot ei^2 \cdot p^{10} - 0,54518e303 \cdot l^{30} \cdot ei^3 \cdot p^9 + \\ & + 0,59238e306 \cdot l^{24} \cdot ei^4 \cdot p^8 - 0,39605e309 \cdot l^{18} \cdot ei^5 \cdot p^7 + \\ & + 0,16376e312 \cdot l^{12} \cdot ei^6 \cdot p^6 - 0,41155e314 \cdot l^6 \cdot ei^7 \cdot p^5 + \\ & + 0,60364e316 \cdot l^0 \cdot ei^8 \cdot p^4 - 0,47991e318 \cdot l^{-6} \cdot ei^9 \cdot p^3 + \\ & + 0,18079e320 \cdot l^{-12} \cdot ei^{10} \cdot p^2 - 0,24429e321 \cdot l^{-18} \cdot ei^{11} \cdot p + \\ & + 0,49967e321 \cdot l^{-24} \cdot ei^{12}) / (-0,16427e294 \cdot p^{11} \cdot l^{44} + \\ & + 0,13354e298 \cdot p^{10} \cdot l^{40} \cdot ei \cdot l^2 - 0,44982e301 \cdot p^9 \cdot l^{36} \cdot ei^2 \cdot l^4 + \\ & + 0,81919e304 \cdot p^8 \cdot l^{32} \cdot ei^3 \cdot l^6 - 0,88490e307 \cdot p^7 \cdot l^{28} \cdot ei^4 \cdot l^8 + \\ & + 0,58700e310 \cdot p^6 \cdot l^{24} \cdot ei^5 \cdot l^{10} - 0,24011e313 \cdot p^5 \cdot l^{20} \cdot ei^6 \cdot l^{12} + \\ & + 0,59428e315 \cdot p^4 \cdot l^{16} \cdot ei^7 \cdot l^{14} - 0,85200e317 \cdot p^3 \cdot l^{12} \cdot ei^8 \cdot l^{16} + \\ & + 0,65281e319 \cdot p^2 \cdot l^8 \cdot ei^9 \cdot l^{18} - 0,22936e321 \cdot p \cdot l^4 \cdot ei^{10} \cdot l^{20} + \\ & + 0,25803e322 \cdot ei^{11} \cdot l^{22}) / l^4 \end{aligned}$$

Giải phương trình  $\lambda = 0$  theo ẩn số P với số bậc là 12 ta sẽ tìm được 12 giá trị lực tới hạn  $P_{th}$  (mặc dù ở đây hàm chuyển vị chỉ là đa thức bậc 3), ở đây đưa ra 3 lực tới hạn đầu tiên lần lượt là:

$$P_{th} = 2,467EI_{min} / l^2;$$

$$P_{th} = 22,220EI_{min} / l^2;$$

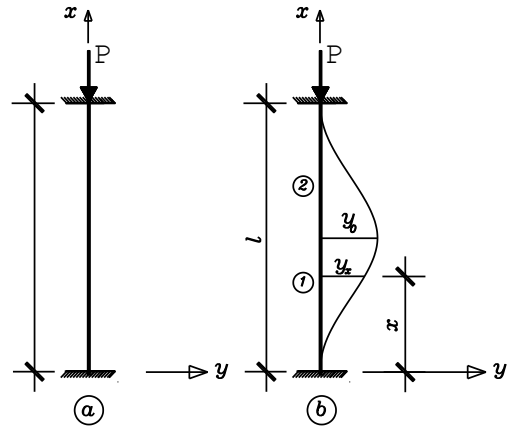
$$P_{th} = 61,920EI_{min} / l^2$$

Ta thấy các kết quả trên rất đúng với kết quả phân tích theo giải tích.

**Ví dụ. 3.2: Thanh hai đầu ngàm**

Xác định lực tới hạn theo phương pháp chuyển vị cưỡng bức cho thanh đầu ngàm và đầu ngàm chịu lực nén dọc trục P (hình 3.8).

Chia thanh ra làm  $n_{pt}$  phần tử (hình 3.9), nội lực mô men uốn do lực P gây ra trong các phần tử của thanh là:



**Hình 3.8.** Thanh hai đầu ngàm

$$M_{iP} = P \cdot w_{xi} \quad (i = 1 \div n_{pt}) \quad (3.55)$$

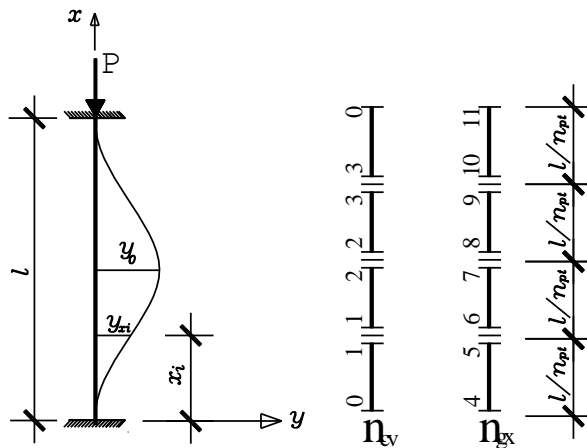
Mô men uốn  $M_{iP}$  gây ra biến dạng uốn  $\chi_{iP}$  do đó trong thành phần lượng ràng buộc của bài toán ta phải viết thêm thành phần này, như vậy lượng ràng buộc cho bài toán ổn định có thể viết như sau:

$$Z = \frac{\Delta X}{2} \sum_{i=1}^{n_{pt}} \int_{-1}^1 (M^{(i)} - M_P^{(i)}) [\chi_i] dx - \sum_{k=1}^{sonut} F_k X_k \rightarrow \min \quad (3.56a)$$

hay

$$\delta Z = \frac{\Delta X}{2} \sum_{i=1}^{n_{pt}} \int_{-1}^1 (M^{(i)} - M_P^{(i)}) \delta \chi_i dx - \sum_{k=1}^{sonut} F_k \delta X_k \rightarrow \min \quad (3.56b)$$

Gọi  $n_{cv}$  là số thông số chuyển vị tại các nút của thanh có chuyển vị;  $n_{gx}$  là số thông số góc xoay tại các nút của thanh có góc xoay. Dựa vào điều kiện này ta sẽ xây dựng được ma trận độ cứng của thanh có bậc:  $n \times n$  ( $n = n_{cv} + n_{gx}$ ) (sau khi bỏ đi những hàng và cột tương ứng có chuyển vị hoặc góc xoay bằng không).



**Hình 3.9.** Thanh hai đầu ngàm

Ngoài ra, cần đảm bảo điều kiện liên tục của chuyển vị còn điều kiện liên tục về góc xoay được xét thêm bằng cách đưa vào các điều kiện ràng buộc.

$$\left( \frac{dy_i}{dx} \Big|_{\text{nút } 2\text{-cua-pt-thu-}i} \right) - \left( \frac{dy_{i+1}}{dx} \Big|_{\text{nút } 1\text{-cua-pt-thu-}i+1} \right) = 0 \quad (3.57)$$

Như vậy ma trận độ cứng của của thanh được mở rộng thêm  $(n_{pt} - 1)$  hàng và  $(n_{pt} - 1)$  cột.

Theo phương pháp chuyển vị cưỡng bức tại một vị trí (nút) nào đó của thanh, ta cho lệch khỏi vị trí cân bằng một chuyển vị  $y_0$ . Chẳng hạn tại nút thứ  $k$  ta cho một chuyển vị cưỡng bức  $y_0$  ta có:

$$w|_{x_k} - y_0 = 0 \quad (3.58)$$

Như vậy ma trận độ cứng của phần tử lại được mở rộng thêm 1 hàng, một cột và lúc này ma trận độ cứng có bậc  $(n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}) \times (n_{cv} + n_{gx} + n_{pt})$  với hệ số trong ma trận độ cứng:

$$k(n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}, k) = 1 \quad (3.59a)$$

$$k(k, n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}) = 1 \quad (3.59b)$$

Ma trận tải trọng tác dụng lúc này có bậc:  $(n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}) \times 1$  với giá trị hệ số  $F(n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}) = y_0$  còn các hệ số còn lại bằng không.

Giải phương trình  $[K]\{X\} = \{F\}$  ta sẽ tìm được các ẩn số là các chuyển vị tại các nút của phần tử và các thừa số Lagrange. Tiếp theo, ta cho thừa số Lagrange tương ứng với chuyển vị cưỡng bức bằng không ta sẽ tìm được giá trị lực P tương ứng là các giá trị tới hạn của lực nén lên thanh.

Trong phần này, luận văn giải bài toán thanh đầu ngàm - đầu ngàm với số phần tử chia bằng 6. Thừa số Lagrange tương ứng với chuyển vị cưỡng bức là:

$$\begin{aligned} \lambda = & -0,15129e-1 * y_0 / l * (0,10523e262 * l^{40} * p^{10} - 0,73557e265 * l^{36} * p^9 * e_i + \\ & + 0,21006e269 * l^{32} * p^8 * e_i^2 - 0,31919e272 * l^{28} * p^7 * e_i^3 + \\ & + 0,28248e275 * l^{24} * p^6 * e_i^4 - 0,15025e278 * l^{20} * p^5 * e_i^5 + \\ & + 0,48013e280 * l^{16} * p^4 * e_i^6 - 0,89733e282 * l^{12} * p^3 * e_i^7 + \\ & + 0,92233e284 * l^8 * p^2 * e_i^8 - 0,46014e286 * l^4 * p * e_i^9 * l^4 + \\ & + 0,82825e287 * l^0 * e_i^{10}) / (-0,19122e259 * p^9 * l^{36} + \\ & + 0,12874e263 * p^8 * l^{32} * e_i^2 - 0,34937e266 * p^7 * l^{28} * e_i^2 * l^4 + \\ & + 0,49505e269 * p^6 * l^{24} * e_i^3 * l^6 - 0,39773e272 * p^5 * l^{20} * e_i^4 * l^8 + \\ & + 0,18479e275 * p^4 * l^{16} * e_i^5 * l^{10} - 0,48752e277 * p^3 * l^{12} * e_i^6 * l^{12} + \\ & + 0,69081e279 * p^2 * l^8 * e_i^7 * l^{14} - 0,46627e281 * p * l^4 * e_i^8 * l^{16} + \\ & + 0,11190e283 * e_i^9 * l^{18}) / l^4 \end{aligned}$$

Giải phương trình  $\lambda = 0$  theo ẩn số P với số bậc là 10 ta sẽ tìm được 10 giá trị lực tới hạn  $P_{th}$  (mặc dù ở đây hàm chuyển vị chỉ là đa thức bậc 3), ở đây đưa ra 3 lực tới hạn đầu tiên lần lượt là:

$$P_{th} = 39,540EI_{min} / l^2;$$

$$P_{th} = 81,267EI_{min} / l^2;$$

$$P_{th} = 161,340EI_{min} / l^2$$

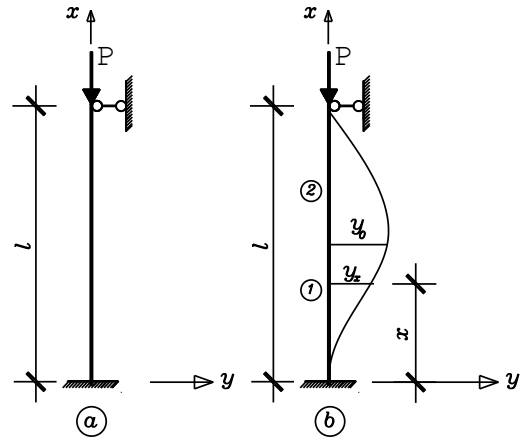
Ta thấy các kết quả trên rất đúng với kết quả phân tích theo giải tích.



**Ví dụ. 3.3: Thanh đầu ngàm – đầu khớp**

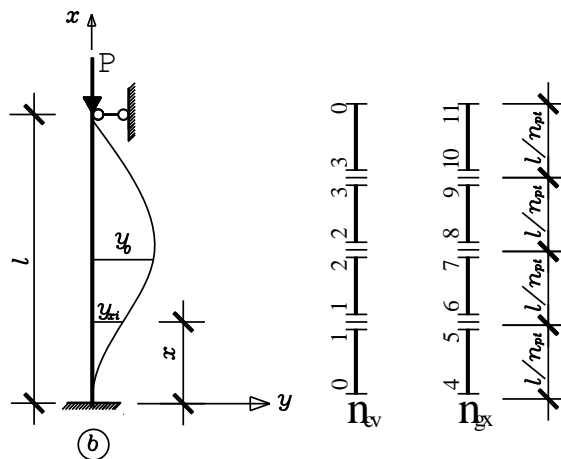
Xác định lực tới hạn theo phương pháp chuyển vị cưỡng bức cho thanh đầu khớp và đầu ngàm chịu lực nén dọc trục P (hình 3.10).

Chia thanh ra làm  $n_{pt}$  phần tử (hình 3.8), nội lực mô men uốn do lực P gây ra trong các phần tử của thanh là:



**Hình 3.10. Thanh hai đầu ngàm**

$$M_{iP} = P \cdot w_{xi} \quad (i = 1 \div n_{pt}) \quad (3.60)$$



**Hình 3.11. Thanh đầu ngàm – đầu khớp**

Mô men uốn  $M_{iP}$  gây ra biến dạng uốn  $\chi_{iP}$  do đó trong thành phần lượng ràng buộc của bài toán ta phải viết thêm thành phần này, như vậy lượng ràng buộc cho bài toán ổn định có thể viết như sau:

$$Z = \frac{\Delta X}{2} \sum_{i=1}^{n_{pt}} \int_{-1}^1 (M^{(i)} - M_P^{(i)}) [\chi_i] dx - \sum_{k=1}^{sonut} F_k X_k \rightarrow \min \quad (3.61a)$$

hay

$$\delta Z = \frac{\Delta X}{2} \sum_{i=1}^{n_{pt}} \int_{-1}^1 (M^{(i)} - M_P^{(i)}) \delta \chi_i dx - \sum_{k=1}^{sonut} F_k \delta X_k \rightarrow \min \quad (3.61b)$$

Gọi  $n_{cv}$  là số thông số chuyển vị tại các nút của thanh có chuyển vị;  $n_{gx}$  là số thông số góc xoay tại các nút của thanh có góc xoay. Dựa vào điều kiện này ta sẽ xây dựng được ma trận độ cứng của thanh có bậc:  $n \times n$  ( $n = n_{cv} + n_{gx}$ ) (sau khi bỏ đi những hàng và cột tương ứng có chuyển vị hoặc góc xoay bằng không).

Ngoài ra, cần đảm bảo điều kiện liên tục của chuyển vị còn điều kiện liên tục về góc xoay được xét thêm bằng cách đưa vào các điều kiện ràng buộc.

$$\left( \frac{dy_i}{dx} \Big|_{\text{nút } 2\text{-cua-pt-thu-}i} \right) - \left( \frac{dy_{i+1}}{dx} \Big|_{\text{nút } 1\text{-cua-pt-thu-}i+1} \right) = 0 \quad (3.62)$$

Như vậy ma trận độ cứng của của thanh được mở rộng thêm ( $n_{pt} - 1$ ) hàng và ( $n_{pt} - 1$ ) cột.

Theo phương pháp chuyển vị cưỡng bức tại một vị trí (nút) nào đó của thanh, ta cho lệch khỏi vị trí cân bằng một chuyển vị  $y_0$ . Chẳng hạn tại nút thứ  $k$  ta cho một chuyển vị cưỡng bức  $y_0$  ta có:

$$w|_{x_k} - y_0 = 0 \quad (3.63)$$

Như vậy ma trận độ cứng của phần tử lại được mở rộng thêm 1 hàng, một cột và lúc này ma trận độ cứng có bậc  $(n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}) \times (n_{cv} + n_{gx} + n_{pt})$  với hệ số trong ma trận độ cứng:

$$k(n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}, k) = 1 \quad (3.64a)$$

$$k(k, n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}) = 1 \quad (3.64b)$$

Ma trận tải trọng tác dụng lúc này có bậc:  $(n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}) \times 1$  với giá trị hệ số  $F(n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}) = y_0$  còn các hệ số còn lại bằng không.

Giải phương trình  $[K]\{X\} = \{F\}$  ta sẽ tìm được các ẩn số là các chuyển vị tại các nút của phần tử và các thừa số Lagrange. Tiếp theo, ta cho thừa số

Lagrange tương ứng với chuyển vị cưỡng bức bằng không ta sẽ tìm được giá trị lực P tương ứng là các giá trị tới hạn của lực nén lên thanh.

Trong phần này, luận văn giải bài toán thanh đầu khớp – đầu ngàm với số phần tử chia bằng 6. Thừa số Lagrange tương ứng với chuyển vị cưỡng bức là:

$$\begin{aligned} \lambda = & -0,24206 \cdot y_0 / (-0,16427e294 \cdot l^{44} \cdot p^{11} + 0,13354e298 \cdot l^2 \cdot l^{40} \cdot p^{10} \cdot e_i + \\ & - 0,44982e301 \cdot l^4 \cdot l^{36} \cdot e_i^2 \cdot p^9 + 0,81919e304 \cdot l^6 \cdot l^{32} \cdot e_i^3 \cdot p^8 + \\ & - 0,88490e307 \cdot l^8 \cdot l^{28} \cdot e_i^4 \cdot p^7 + 0,58700e310 \cdot l^{10} \cdot l^{24} \cdot e_i^5 \cdot p^6 + \\ & - 0,24011e313 \cdot l^{12} \cdot l^{20} \cdot e_i^6 \cdot p^5 + 0,59428e315 \cdot l^{14} \cdot l^{16} \cdot e_i^7 \cdot p^4 + \\ & - 0,85200e317 \cdot l^{16} \cdot l^{12} \cdot e_i^8 \cdot p^3 + 0,65281e319 \cdot l^{18} \cdot l^8 \cdot e_i^9 \cdot p^2 + \\ & - 0,22936e321 \cdot l^{20} \cdot e_i^{10} \cdot p \cdot l^4 + 0,25803e322 \cdot l^{22} \cdot e_i^{11}) / \\ & (0,47948e292 \cdot p^{10} \cdot l^{40} - 0,37765e296 \cdot p^9 \cdot l^{36} \cdot e_i \cdot l^2 + \\ & + 0,12193e300 \cdot e_i^2 \cdot p^8 \cdot l^{32} \cdot l^4 - 0,20970e303 \cdot e_i^3 \cdot p^7 \cdot l^{28} \cdot l^6 + \\ & + 0,20944e306 \cdot e_i^4 \cdot p^6 \cdot l^{24} \cdot l^8 - 0,12464e309 \cdot e_i^5 \cdot p^5 \cdot l^{20} \cdot l^{10} + \\ & + 0,43784e311 \cdot e_i^6 \cdot p^4 \cdot l^{16} \cdot l^{12} - 0,87219e313 \cdot e_i^7 \cdot p^3 \cdot l^{12} \cdot l^{14} + \\ & + 0,91144e315 \cdot e_i^8 \cdot p^2 \cdot l^8 \cdot l^{16} - 0,42997e317 \cdot e_i^9 \cdot p \cdot l^4 \cdot l^{18} + \\ & + 0,64147e318 \cdot e_i^{10} \cdot l^{20}) / l^4 \end{aligned}$$

Giải phương trình  $\lambda = 0$  theo ẩn số P với số bậc là 11 ta sẽ tìm được 11 giá trị lực tới hạn  $P_{th}$  (mặc dù ở đây hàm chuyển vị chỉ là đa thức bậc 3), ở đây đưa ra 3 lực tới hạn đầu tiên lần lượt là:

$$P_{th} = 20,199EI_{min} / l^2;$$

$$P_{th} = 59,886EI_{min} / l^2;$$

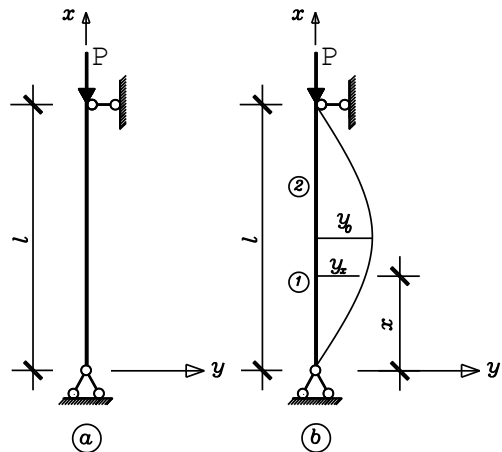
$$P_{th} = 120,490EI_{min} / l^2$$

Ta thấy các kết quả trên rất đúng với kết quả phân tích theo giải tích.

**Ví dụ. 3.5: Thanh hai đầu khớp**

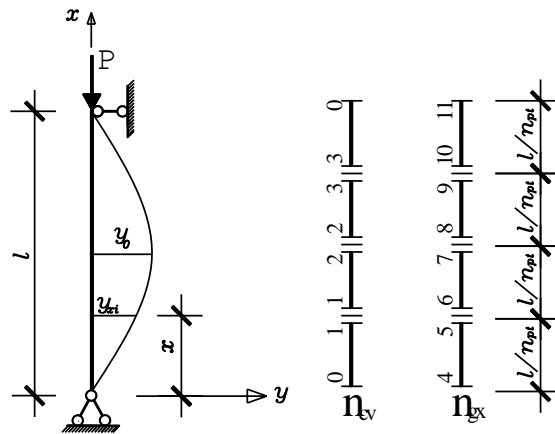
Xác định lực tới hạn theo phương pháp chuyển vị cưỡng bức cho thanh đầu khớp di động và đầu khớp cố định chịu lực nén dọc trục P (hình 3.12).

Chia thanh ra làm  $n_{pt}$  phần tử (hình 3.13), nội lực mô men uốn do lực P gây ra trong các phần tử của thanh là:



Hình 3.12. Thanh hai đầu khớp

$$M_{ip} = P \cdot w_{xi} \quad (i = 1 \div n_{pt}) \quad (3.65)$$



Hình 3.13. Thanh hai đầu khớp

Mô men uốn  $M_{ip}$  gây ra biến dạng uốn  $\chi_{ip}$  do đó trong thành phần lượng ràng buộc của bài toán ta phải viết thêm thành phần này, như vậy lượng ràng buộc cho bài toán ổn định có thể viết như sau:

$$Z = \frac{\Delta X}{2} \sum_{i=1}^{n_{pt}} \int_{-1}^1 (M^{(i)} - M_P^{(i)}) [\chi_i] dx - \sum_{k=1}^{sonut} F_k X_k \rightarrow \min \quad (3.66a)$$

hay

$$\delta Z = \frac{\Delta X}{2} \sum_{i=1}^{n_{pt}} \int_{-1}^1 (M^{(i)} - M_P^{(i)}) \delta \chi_i dx - \sum_{k=1}^{sonut} F_k \delta X_k \rightarrow \min \quad (3.66b)$$

Gọi  $n_{cv}$  là số thông số chuyển vị tại các nút của thanh có chuyển vị;  $n_{gx}$  là số thông số góc xoay tại các nút của thanh có góc xoay. Dựa vào điều kiện này ta sẽ xây dựng được ma trận độ cứng của thanh có bậc:  $n \times n$

$(n = n_{cv} + n_{gx})$  (sau khi bỏ đi những hàng và cột tương ứng có chuyển vị hoặc góc xoay bằng không).

Ngoài ra, cần đảm bảo điều kiện liên tục của chuyển vị còn điều kiện liên tục về góc xoay được xét thêm bằng cách đưa vào các điều kiện ràng buộc.

$$\left( \frac{dy_i}{dx} \Big|_{\text{nút } 2\text{-cua-pt-thu-}i} \right) - \left( \frac{dy_{i+1}}{dx} \Big|_{\text{nút } 1\text{-cua-pt-thu-}i+1} \right) = 0 \quad (3.67)$$

Như vậy ma trận độ cứng của của thanh được mở rộng thêm  $(n_{pt} - 1)$  hàng và  $(n_{pt} - 1)$  cột.

Theo phương pháp chuyển vị cưỡng bức tại một vị trí (nút) nào đó của thanh, ta cho lệch khỏi vị trí cân bằng một chuyển vị  $y_0$ . Chẳng hạn tại nút thứ  $k$  ta cho một chuyển vị cưỡng bức  $y_0$  ta có:

$$w|_{x_k} - y_0 = 0 \quad (3.68)$$

Như vậy ma trận độ cứng của phần tử lại được mở rộng thêm 1 hàng, một cột và lúc này ma trận độ cứng có bậc  $(n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}) \times (n_{cv} + n_{gx} + n_{pt})$  với hệ số trong ma trận độ cứng:

$$k(n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}, k) = 1 \quad (3.69a)$$

$$k(k, n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}) = 1 \quad (3.69b)$$

Ma trận tải trọng tác dụng lúc này có bậc:  $(n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}) \times 1$  với giá trị hệ số  $F(n_{cv} + n_{gx} + n_{pt}) = y_0$  còn các hệ số còn lại bằng không.

Giải phương trình  $[K]\{X\} = \{F\}$  ta sẽ tìm được các ẩn số là các chuyển vị tại các nút của phần tử và các thừa số Lagrange. Tiếp theo, ta cho thừa số Lagrange tương ứng với chuyển vị cưỡng bức bằng không ta sẽ tìm được giá trị lực  $P$  tương ứng là các giá trị tới hạn của lực nén lên thanh.

Trong phần này, luận văn giải bài toán thanh đầu khớp cố định – khớp di động với số phần tử chia bằng 6. Thừa số Lagrange tương ứng với chuyển vị cưỡng bức là:

$$\begin{aligned} \lambda = & -0,72618 \cdot y_0 / l * (0,13512e246 \cdot l^{40} \cdot p^{10} - 0,90202e249 \cdot l^{36} \cdot l^2 \cdot ei \cdot p^9 + \\ & + 0,24127e253 \cdot l^{32} \cdot l^4 \cdot ei^2 \cdot p^8 - 0,33364e256 \cdot l^{28} \cdot l^6 \cdot ei^3 \cdot p^7 + \\ & + 0,25742e259 \cdot l^{24} \cdot l^8 \cdot ei^4 \cdot p^6 - 0,11211e262 \cdot l^{20} \cdot l^{10} \cdot ei^5 \cdot p^5 + \\ & + 0,26904e264 \cdot l^{16} \cdot l^{12} \cdot ei^6 \cdot p^4 - 0,34036e266 \cdot l^{12} \cdot l^{14} \cdot ei^7 \cdot p^3 + \\ & + 0,20866e268 \cdot l^8 \cdot l^{16} \cdot ei^8 \cdot p^2 - 0,52032e269 \cdot l^{18} \cdot ei^9 \cdot p \cdot l^4 + \\ & + 0,34057e270 \cdot l^{20} \cdot ei^{10}) / (-0,12692e245 \cdot p^9 \cdot l^{36} + \\ & + 0,83579e248 \cdot p^8 \cdot l^{32} \cdot ei \cdot l^2 - 0,21962e252 \cdot p^7 \cdot l^{28} \cdot ei^2 \cdot l^4 + \\ & + 0,29655e255 \cdot p^6 \cdot l^{24} \cdot ei^3 \cdot l^6 - 0,22128e258 \cdot p^5 \cdot l^{20} \cdot ei^4 \cdot l^8 + \\ & + 0,91654e260 \cdot p^4 \cdot l^{16} \cdot ei^5 \cdot l^{10} - 0,20281e263 \cdot p^3 \cdot l^{12} \cdot ei^6 \cdot l^{12} + \\ & + 0,22390e265 \cdot ei^7 \cdot p^2 \cdot l^8 \cdot l^{14} - 0,10749e267 \cdot ei^8 \cdot p \cdot l^4 \cdot l^{16} + \\ & + 0,15903e268 \cdot ei^9 \cdot l^{18}) / l^4 \end{aligned}$$

Giải phương trình  $\lambda = 0$  theo ẩn số  $P$  với số bậc là 10 ta sẽ tìm được 10 giá trị lực tới hạn  $P_{th}$  (mặc dù ở đây hàm chuyển vị chỉ là đa thức bậc 3), ở đây đưa ra 3 lực tới hạn đầu tiên lần lượt là:

$$P_{th} = 9,8698EI_{min} / l^2;$$

$$P_{th} = 39,480EI_{min} / l^2;$$

$$P_{th} = 88,950EI_{min} / l^2.$$

Ta thấy các kết quả trên rất đúng với kết quả phân tích theo giải tích.

## KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

### Kết luận:

-Đã sử dụng được phương pháp nguyên lý cực trị Gauss và phương pháp chuyển vị cưỡng bức để xây dựng bài toán ổn định uốn dọc của thanh thẳng đàn hồi chịu tác dụng của tải trọng tĩnh.

- Phương pháp chuyển vị cưỡng bức cho bài toán ổn định đàn hồi của thanh và hệ thanh chịu uốn dọc có xét đến biến dạng trượt. Bằng phép tính biến phân đưa phương trình vi phân không có vế phải về phương trình vi phân có vế phải bằng cách cho một điểm tựa cố định trong thanh, ví dụ điểm  $x=x_1$ , một chuyển vị  $y_0$ :

$$\left. \begin{aligned} EJ \left( \frac{d^4 y}{dx^4} \right) + P \frac{d^2 y}{dx^2} &= \begin{cases} -\lambda & \text{khi } x = x_1 \\ 0 & \text{khi } x \neq x_1 \end{cases} \\ EJ \left( \frac{d^3 y}{dx^3} \right) + Q &= 0 \end{aligned} \right\}$$

từ đó chứng minh được rằng phương trình  $\lambda=0$  (phương trình vế phải) là phương trình xác định trị riêng. Đối với bài toán ổn định tĩnh thì các trị riêng tìm được là các lực tới hạn  $P_{th}$ . Dùng phương pháp chuyển vị cưỡng bức để giải bài toán ổn định của thanh cho ta ngay phương trình đa thức xác định lực tới hạn của thanh mà không phải thông qua các phép biến đổi phức tạp để đưa ma trận về ma trận đường chéo.

- Dùng phương pháp phân tử hữu hạn để xác định lực tới hạn của các thanh chịu nén có các điều kiện biên khác nhau. Kết quả nhận được hoàn toàn trùng khớp với kết quả nhận được bằng các phương pháp khác (Dùng phần mềm Matlab 7.0 hỗ trợ tính toán).

### Kiến nghị:

Có thể sử dụng phương pháp phân tử hữu hạn trong giảng dạy, học tập và nghiên cứu khi phân tích ổn định cho kết cấu.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

### Tiếng Việt

- [1] Hà Huy Cương (2005), *Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss*, Tạp chí Khoa học và kỹ thuật, IV/ Tr. 112 ÷118.
- [2] Đoàn Văn Duẩn (2011), *Nghiên cứu ổn định đàn hồi của kết cấu hệ thanh có xét đến biến dạng trượt*, Luận án Tiến sĩ kỹ thuật, Đại học Kiến trúc Hà Nội.
- [3] Hà Huy Cương (2005), *Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss*, Tạp chí Khoa học và kỹ thuật, IV/ Tr. 112 ÷118.
- [4] Nguyễn Văn Liên, Nguyễn Phương Thành, Đinh Trọng Bằng (2003), *Giáo trình Sức bền vật liệu*, Nhà xuất bản xây dựng, tái bản lần thứ 3, 330 trang.
- [5] Nguyễn Phương Thành (2002), *Nghiên cứu trạng thái ứng suất – biến dạng tấm nhiều lớp chịu tải trọng động có xét lực ma sát ở các mặt tiếp xúc*, Luận án tiến sĩ kỹ thuật.
- [6] Vương Ngọc Lưu (2002), *Nghiên cứu trạng thái ứng suất – biến dạng của tấm sàn Sandwich chịu tải trọng tĩnh và động*, Luận án tiến sĩ kỹ thuật.
- [7] Trần Hữu Hà (2006), *Nghiên cứu bài toán tương tác giữa cọc và nền dưới tác dụng của tải trọng*, Luận án tiến sĩ kỹ thuật.
- [8] Phạm Văn Trung (2006), *Phương pháp mới Tính toán hệ dây và mái treo*, Luận án Tiến sĩ kỹ thuật.
- [9] Vũ Hoàng Hiệp (2007), *Nghiên cứu trạng thái ứng suất - biến dạng của dầm nhiều lớp chịu tải tĩnh và động*, Luận án tiến sĩ kỹ thuật, Hà nội.
- [10] Nguyễn Văn Đạo (2001), *Cơ học giải tích*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà nội, 337 trang.



- [11] Nguyễn Văn Đạo, Trần Kim Chi, Nguyễn Dũng (2005), *Nhập môn Động lực học phi tuyến và chuyển động hỗn độn*. Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà nội.
- [12] Lêu Thọ Trình, Đỗ Văn Bình(2006), *Giáo trình ổn định công trình*, Nhà xuất bản Khoa học kỹ thuật.
- [13] Vũ Hoàng Hiệp (2008), *Tính kết cấu có xét biến dạng trượt*, Tạp chí xây dựng số 7.
- [14] Đoàn Văn Duân, Nguyễn Phương Thành (2007), *Phương pháp mới tính toán ổn định của thanh*, Tạp chí Xây dựng số 12 (Tr41-Tr44).
- [15] Đoàn Văn Duân (2008), *Phương pháp mới tính toán ổn định của khung*, Tạp chí Xây dựng số 01 (Tr35-Tr37).
- [16] Đoàn Văn Duân (2008), *Nghiên cứu ổn định uốn dọc của thanh có xét biến dạng trượt*, Tạp chí Xây dựng số 12 (Tr33-Tr37).
- [17] Đoàn Văn Duân (2009), *Phương pháp nghiên cứu ổn định tổng thể của dàn*, Tạp chí Xây dựng số 03 (Tr86-Tr89).
- [18] Đoàn Văn Duân (2007), *Phương pháp nguyên lý Cực trị Gauss đối với các bài toán ổn định công trình*, Luận văn thạc sỹ kỹ thuật.
- [19] Phạm Văn Đạt (2015), *Phân tích kết cấu dàn chịu tải trọng tĩnh theo sơ đồ biến dạng*, Luận án Tiến sĩ kỹ thuật, Học viện Kỹ thuật Quân sự.
- [20] Trần Thị Kim Huệ (2005), *Phương pháp nguyên lý Cực trị Gauss đối với các bài toán cơ học kết cấu*, Luận văn thạc sỹ kỹ thuật.
- [21] Nguyễn Thị Liên (2006), *Phương pháp nguyên lý Cực trị Gauss đối với các bài toán động lực học công trình*, Luận văn thạc sỹ kỹ thuật.
- [22] Vũ Thanh Thủy (2009), *Xây dựng bài toán dầm khi xét đầy đủ hai thành phần nội lực momen và lực cắt*. Tạp chí Xây dựng số 4.
- [23] Vũ Thanh Thủy (2009), *Dao động tự do của dầm khi xét ảnh hưởng của lực cắt*. Tạp chí Xây dựng, số 7.

- [24] Timoshenko C.P, Voinóski- Krige X, (1971), *Tám và Vó*. Người dịch, Phạm Hồng Giang, Vũ Thành Hải, Đoàn Hữu Quang, Nxb Khoa học và kỹ thuật, Hà Nội.
- [25] Klaus – Jurgen Bathe (1996), *Finite Element procedures*. Part one, Prentice – Hall International, Inc, 484 trang.
- [26] Klaus – Jurgen Bathe (1996), *Finite Element procedures*. Part two, Prentice – Hall International, Inc, 553 trang.
- [27] Ray W.Clough, Joseph Penzien(1993), *Dynamics of Structures* (Tái bản lần thứ 2), McGraw-Hill Book Company, Inc, 738 trang.
- [28] O.C. Zienkiewicz-R.L. Taylor (1991), *The finite element method* (four edition) Volume 2, McGraw-Hill Book Company, Inc, 807 trang.
- [29] G.Korn-T.Korn (1961), *Mathematical Handbook for sientists and Engineers*, McGraw-Hill, New york (Bản dịch tiếng Nga, I.Bramovich chủ biên, Nhà xuất bản Nauka-Moscow, 1964).
- [30] Stephen P.Timoshenko-J. Goodier (1970), *Theory of elasticity*, McGraw-Hill, New york (Bản dịch tiếng Nga, G. Shapiro chủ biên, Nhà xuất bản Nauka-Moscow, 1979), 560 trang.