

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC DÂN LẬP HẢI PHÒNG**

TỔNG VĂN LUYỆN

**TÍNH TOÁN DÂY MỀM
THEO PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN LÝ CỰC TRỊ GAUSS**

Chuyên ngành: Kỹ thuật Xây dựng Công trình Dân dụng & Công nghiệp

Mã số: 60.58.02.08

LUẬN VĂN THẠC SỸ KỸ THUẬT

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS.TSKH. HÀ HUY CƯỜNG

Hải Phòng, 2017

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các số liệu, kết quả trong luận văn là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Tác giả luận văn

Tống Văn Luyện

LỜI CẢM ƠN

Tác giả luận văn xin trân trọng bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất đối với GS.TSKH Hà Huy Cương vì những ý tưởng khoa học độc đáo, những chỉ bảo sâu sắc về phương pháp nguyên lý cực trị Gauss và những chia sẻ về kiến thức cơ học, toán học uyên bác của Giáo sư. Giáo sư đã tận tình giúp đỡ và cho nhiều chỉ dẫn khoa học có giá trị cũng như thường xuyên động viên, tạo mọi điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu hoàn thành luận văn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các nhà khoa học, các chuyên gia trong và ngoài trường Đại học Dân lập Hải phòng đã tạo điều kiện giúp đỡ, quan tâm góp ý cho bản luận văn được hoàn thiện hơn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn các cán bộ, giáo viên của Khoa xây dựng, Phòng đào tạo Đại học và Sau đại học - trường Đại học Dân lập Hải phòng, và các đồng nghiệp đã tạo điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tác giả trong quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tác giả luận văn

Tống Văn Luyến

MỤC LỤC

LỜI CAM ĐOAN	2
LỜI CẢM ƠN	3
MỞ ĐẦU	1
CHƯƠNG 1: TỔNG QUAN VỀ PHÂN TÍCH KẾT CẤU DÂY DÂY MỀM	3
1.1.Kết cấu dây và mái treo.....	3
1.2. Cấu tạo chung của kết cấu dây và mái treo.....	7
1.3 Các phương pháp tính toán dây đơn và hệ dây	11
1.3.1 Tính dây chịu tải bản thân.....	12
1.3.2. Phương pháp tính dây theo hai trạng thái.	13
1.3.3. Phương pháp tính dây theo một trạng thái.	15
1.3.4. Phương pháp tính dây theo phương pháp lặp Newton-Raphson.	17
1.3.5. Phương pháp tính động lực học hệ dây và mái treo.....	18
1.3.6. Phương pháp tính dây theo sơ đồ dây xích.	19
1.4. Nhận xét	20
CHƯƠNG 2: PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN LÝ CỰC TRỊ GAUSS	22
2.1.Nguyên lý cực trị Gauss.....	22
2.2.Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss	25
2.3.Cơ hệ môi trường liên tục: ứng suất và biến dạng	32
2.4.Cơ học kết cấu.....	39
2.5.1. Phương trình cân bằng tĩnh đối với môi trường đàn hồi, đồng nhất, đẳng hướng.....	43
2.5.2 Phương trình vi phân của mặt võng của tấm chịu uốn.....	46
CHƯƠNG 3: TÍNH TOÁN DÂY MỀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN LÝ CỰC TRỊ GAUSS	49
3.2.1. Định nghĩa dây mềm	57
3.2.2. Phương pháp tính dây mềm	57
3.2.3. Nội dung phương pháp nguyên lý cực trị Gauss để tính dây mềm	58
3.2.4. Ví dụ tính toán dây mềm.....	59
KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ	66
TÀI LIỆU THAM KHẢO	67

MỞ ĐẦU

Kết cấu dây là một kết cấu được áp dụng rộng rãi trong nhiều công trình dân dụng, công nghiệp và giao thông trên thế giới vì những ưu điểm nổi bật của nó: trọng lượng nhẹ, vượt nhịp lớn, thi công lắp ráp nhanh, hình dáng kiến trúc đa dạng và phong phú. Ở nước ta kết cấu dây đã được nhiều tác giả nghiên cứu áp dụng và đã đạt được nhiều thành tựu to lớn trong nhiều công trình thuộc ngành giao thông, xây dựng công nghiệp và dân dụng. Cầu dây và cầu treo đã góp phần quan trọng trong cuộc chiến tranh chống Mỹ cứu nước, đảm bảo giao thông thông suốt ra tiền tuyến, chống chiến tranh phá hoại. Trong thời kỳ mở cửa và hội nhập, đất nước trên con đường công nghiệp hóa và hiện đại hóa kết cấu dây đã và đang đóng góp hiệu quả vào các công trình tải điện và giao thông. Đặc biệt, kết cấu dây đóng vai trò quan trọng và quyết định trong việc đảm bảo giao thông miền núi và đồng bằng sông Cửu Long, mái che các công trình nhịp lớn như sân vận động, nhà triển lãm v.v...

Cho đến nay, bài toán dây đơn đã được nhiều tác giả nghiên cứu song vẫn còn dùng nhiều giả thiết gần đúng. Khi tính toán dây đơn hiện nay thường sử dụng đường cong có dạng hypecbol hoặc parabol. Tuy nhiên do phương trình đường độ võng của dây nhận được đều là từ phương trình cân bằng lực, nên để xác định lực căng cần cho trước mũi tên võng, chiều dài hoặc thành phần hình chiếu theo phương ngang của lực căng dây.

Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss do GS.TSKH. Hà Huy Cương đề xuất là phương pháp cho phép áp dụng nguyên lý cực trị Gauss - vốn được phát biểu cho hệ chất điểm - để giải các bài toán cơ học vật rắn biến dạng nói riêng và bài toán cơ học môi trường liên tục nói chung. Đặc điểm của phương pháp này là bằng một cái nhìn đơn giản luôn cho phép tìm được kết quả chính xác của các bài toán dù đó là bài toán tĩnh hay bài toán động, bài toán tuyến tính hay bài toán phi tuyến.

Đối tượng, phương pháp và phạm vi nghiên cứu của luận văn

Trong luận văn này, tác giả sử dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss nói trên để tính toán dây mềm chịu tác dụng của tải trọng tĩnh.

Mục đích nghiên cứu của luận văn

*“Xác định nội lực và chuyển vị trong dây mềm
dưới tác dụng của tải trọng tĩnh”*

Nội dung nghiên cứu của đề tài:

- Trình bày tổng quan về hệ dây và mái treo
- Trình bày phương pháp nguyên lý cực trị Gauss.
- Sử dụng phương pháp cho bài toán dây mềm.
- Lập trình tính toán một số ví dụ

CHƯƠNG 1

TỔNG QUAN VỀ PHÂN TÍCH KẾT CẤU DÂY DÂY MỀM

1.1 Kết cấu dây và mái treo

Kết cấu dây và mái treo là hệ kết cấu được cấu tạo từ những dây mềm, chỉ chịu kéo, bỏ qua khả năng chịu uốn của dây. Các dạng kết cấu dây bao gồm dây tải điện, dây văng, cầu dây các loại và mái treo. Kết cấu dây còn được dùng liên hợp với các hệ kết cấu cứng khác như: dầm, dàn hoặc tấm tạo nên hệ kết cấu liên hợp như mái treo dầm cứng, cầu dây văng.

Cáp dùng trong kết cấu dây có loại, có cường độ gấp sáu lần nhưng giá thành chế tạo chỉ đắt hơn hai lần thép xây dựng thông thường [39], [82]. Do tận dụng được sức chịu kéo lớn như vậy, nên kết cấu dây có trọng lượng nhẹ, cho phép vượt được nhịp lớn. Hình dạng kiến trúc của kết cấu dây nói chung và mái treo bằng dây nói riêng cũng đa dạng và phong phú [81], [94].

Kết cấu mái treo đầu tiên trên thế giới xuất hiện năm 1896 tại Hội chợ triển lãm Thành phố Nizhny Novgorod (Nga) với các dạng tròn ($D=68\text{m}$), ô van ($D_{\max}=100\text{m}$) và hình chữ nhật ($30\times 70\text{m}$) do kỹ sư xây dựng người Nga V. G. Shukhov thiết kế [86]. Nhưng mãi sau đó, đến năm 1932 mới có công trình tiếp theo được xây dựng ở Mỹ là băng tải nâng hàng ở Allbaney [86]. Từ thời gian, đó nhiều công trình lớn sử dụng kết cấu dây và mái treo ra đời. Cầu treo xuất hiện sớm hơn, cầu treo đầu tiên được xây dựng vượt sông Tess ở Anh năm 1741 có nhịp 21m [7]. Một số công trình cầu treo, mái treo đã trở thành biểu tượng văn hóa, điểm thăm quan du lịch hoặc biểu tượng khoa học kỹ thuật của địa phương và của cả quốc gia. Có thể nêu một số công trình ví dụ như sau:

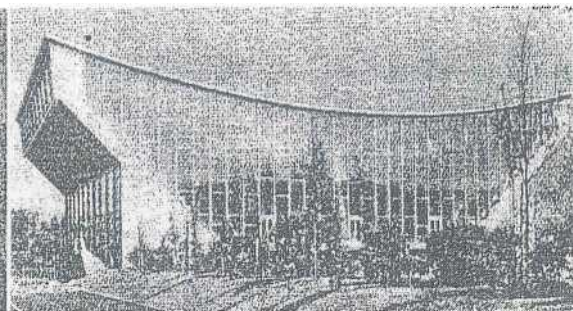
Nhóm các công trình thể thao: Công trình sân vận động Olympic Seun (Hàn Quốc) có mặt bằng tròn với đường kính 393ft (khoảng 120m) [19]; nhà thi đấu tại Dortmund (CHLB Đức) có mặt bằng chữ nhật $80\times 110\text{m}$ [32], công

trình bể bơi thành phố Wuppertal (CHLB Đức) [27] kích thước mái 38x65m; bể bơi tại Bil (Thụy Sĩ) kích thước mái 35x70m[25]; nhà thi đấu tại Zheshuv (Ba Lan) [50] kích thước mái 37,6x39,2m; sân băng Juhenneshof tại Stockholn (Thụy Điển) [95] kích thước mái 83x118m; bể bơi Olympic tại Tokyo (Nhật Bản) [31] kích thước mái 120x214m.

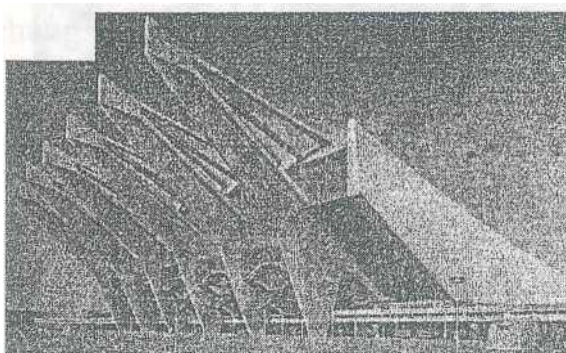
Nhóm các công trình triển lãm: Công trình Toà nhà triển lãm ở Thành phố New-York (Mỹ)[19], có mặt bằng hình elíp, cao 30m, vành biên ngoài bằng bê tông cốt thép, đường kính lớn 110m, đường kính nhỏ 79m; nhà triển lãm của Mỹ tại triển lãm thế giới tại Bruxelles (Bỉ) [24] có mặt bằng tròn đường kính 104m; nhà triển lãm tại Oklahoma-city (Mỹ) [18] kích thước mái 97,5x122m; nhà triển lãm của Pháp tại triển lãm thế giới tại Bruxelles (Bỉ) [21] kích thước máil7x34m; nhà triển lãm ở Bratislave [96]...



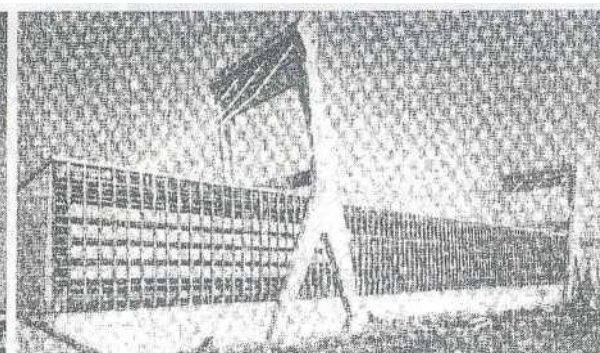
Bể bơi Olympic tại Tokyo (Nhật)



Bể bơi Wuppertal (CHLB Đức)



Toà thị chính Bremen (CHLB Đức)
(Italia)



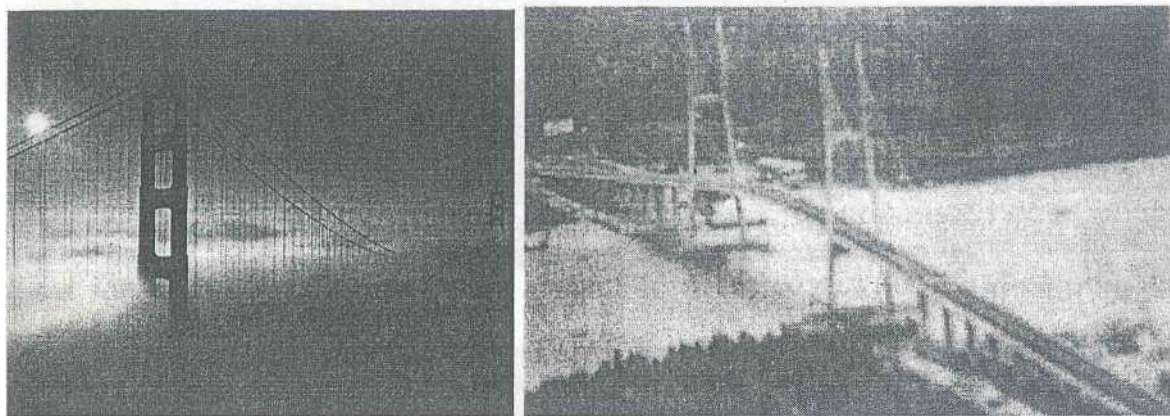
Nhà máy giấy Mantu

Hình 1.1. Một số công trình mái treo đã xây dựng.

Nhóm các công trình sản xuất: Xưởng sản xuất lesjeforce (Thụy điển) [23] kích thước mái 14,25x92,75m; trạm máy nông nghiệp Gross-langherwish (CHLB Đức) [30] mặt bằng tròn đường kính 31,6m; ga-ra ở Kiep (Nga) [60] mặt bằng tròn đường kính 161m: nhà máy giấy thành phố Mantu (Italia) [48] mặt bằng chữ nhật 30x249m

Một số các công trình khác như: rạp chiếu phim ở Khác- cốp (Nga) [21] kích thước 45x56m, toà thị chính Bremen (CHLB Đức) [22] kích thước 80x95m. Một số công trình tiêu biểu được giới thiệu trên hình 1.1.

Trong lĩnh vực cầu dây, nhiều công trình đã trở thành di sản văn hoá, biểu tượng của kiến trúc và đánh dấu sự phát triển của khoa học học kỹ thuật. Người ta thường nhắc đến cầu Golden Gate (Mỹ) xây dựng năm 1937 nhịp dài 1280m, cầu Verrazano (Mỹ) xây dựng năm 1969 nhịp 1298m, cầu Hamber (Anh) xây dựng năm 1976 nhịp 1410m. Đến nay nhiều dự án cầu dây nhịp hàng nghìn mét đã và đang được nghiên cứu xây dựng qua các vịnh, biển: cầu Messine (Italia), cầu Storebelt (Đan mạch), cầu Gibraltar (Âu-Phi)[9]



Hình 1.2 Công trình cầu nổi tiếng thế giới và Việt Nam
Cầu Golden Gate (Mỹ); Cầu Mỹ Thuận - Sông Tiền (Việt Nam)



Hình **Error! No text of specified style in document..1** Cầu Strömsund ở Thụy Điển, 1955



Hình **Error! No text of specified style in document..2** Cầu Vladivostok – Russky, Liên bang Nga, 2012



Hình **Error! No text of specified style in document.**5 Cầu Mỹ Thuận

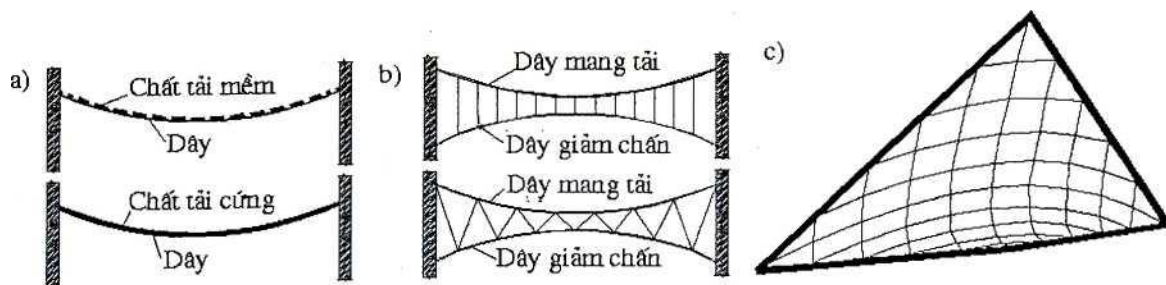
Ở Việt Nam các kết cấu dây treo đã được sử dụng nhiều trong ngành cầu đường. Trong thời kỳ kháng chiến chống Mỹ các nhà khoa học Việt Nam: Bùi Khương [7],[8], Nguyễn Văn Hường [2], Đỗ Quốc Sam [10], Lều Thọ Trình [13],[14],[15], đã có nhiều công trình nghiên cứu, tính toán, thiết kế và xây dựng các công trình cầu cáp vượt sông góp phần hoàn thành nhiệm vụ bảo đảm giao thông của Đảng và Đất nước trong giai đoạn ấy: cầu Vĩnh Tuy (Hà giang), cầu Đuan Vĩ (Hà nam), cầu Đuan Hùng (Vĩnh Phú), cầu Kỳ Lừa (Lạng Sơn, cầu Sơn Cẩm (Thái Nguyên), cầu Lèn (Thanh Hoá), cầu Việt Trì (Phú Thọ), cầu Đuống (Hà Nội) [7]. Ngày nay đất nước đang trên đường hiện đại hoá và công nghiệp hoá, nhiều công trình có quy mô lớn đã và đang được xây dựng: cầu Mỹ Thuận (Sông Tiền - Vĩnh Long) [11] (hình 1.2); cầu sông Hàn (Đà Nẵng); cầu Bính (Hải Phòng); sân vận động Mỹ-Bình (Hà Nội). Nhiều dự án về cầu dây đã và đang được nghiên cứu xây dựng: cầu Sông Hậu, cầu Thủ Thiêm, cầu Phú Mỹ, cầu Bãi Cháy. Trong tương lai với những ưu điểm của kết cấu dây và mái treo nhiều công trình có quy mô lớn chắc chắn sẽ được xây dựng nhiều ở nước ta..

1.2. Cấu tạo chung của kết cấu dây và mái treo

So với các công trình khác, thiết kế kết cấu dây và mái treo có đặc điểm là phải xét đến lực neo dây và tính chất động lực học của hệ kết cấu. Khi chịu tải trọng thay đổi như gió, hệ kết cấu dây và mái treo dễ bị kích động và xảy ra các hiện tượng mất ổn định khí động học, đàn hồi (aeroelastic). Nguyên nhân phá hoại của cầu treo Tacoma Narao vào tháng 11 năm 1940 sau 4 tháng đưa vào sử dụng được xác định là do hiện tượng Hutter một dạng tự dao động kết hợp giữa uốn và xoắn [20]. Người ta cũng ghi được những biên độ dao động lớn cầu dây cáp treo nghiêng của cầu treo xảy ra khi có gió và mưa đạt đến hai lần đường kính của cáp [17]. Cho nên khi thiết kế kết cấu dây nói chung và mái treo nói riêng cần đánh giá tính chất động học của chúng. Để bảo đảm ổn định cho mái treo thường dùng các giải pháp thiết kế sau [46], [19], [27], [56], [57], [58], [60], [62]:

- Chất tải nhân tạo lên dây: tải mềm hoặc tải cứng (hình 1.3a).
- Hệ dây hai lưới (hình 1.3b).
- Lưới dây có độ cong hai chiều khác nhau dạng hypecbolic, hypa (hyperboloid- paraboloid) (hình 1.3c).

Bộ phận đắt tiền và phức tạp nhất của hệ dây và mái treo bằng dây là kết cấu neo dây. Mái treo nhịp lớn hay nhịp nhỏ đều phải có kết cấu neo dây. Do đó về mặt kinh tế mái treo thường được dùng với nhịp lớn hơn 36m [54], [59], [61], [65]



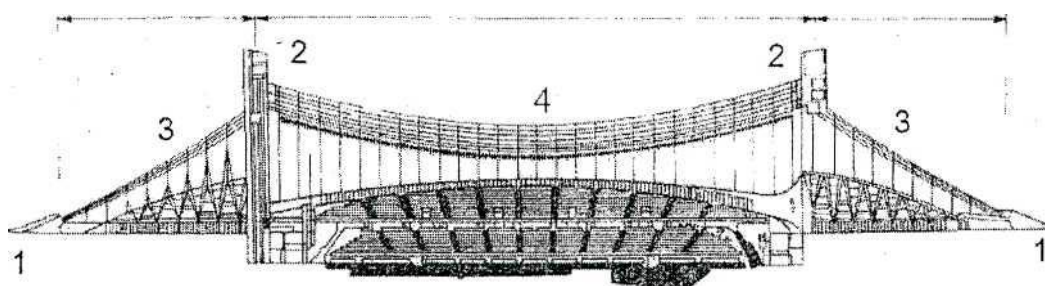
Hình 1.3 Các giải pháp ổn định mái treo

- a - Chất tải nhân tạo, b - Dùm hệ dây hai lớp;
- c - Dùm lưới dây cong hai chiều dạng Hypa.

Kết cấu neo của mái treo được thiết kế bảo đảm các yêu cầu sau: có khả năng chịu lực và chịu mỏi tương đương với dây, có khả năng điều chỉnh thay đổi chiều dài dây trong thi công, có khả năng vi chỉnh kéo căng hoặc thả chùng khi cần thiết trong quá trình khai thác, chống rỉ tốt, có không gian để thi công đơn giản và thuận tiện, dễ kiểm tra sửa chữa trong quá trình khai thác.

Có thể nêu ba giải pháp về kết cấu neo như sau:

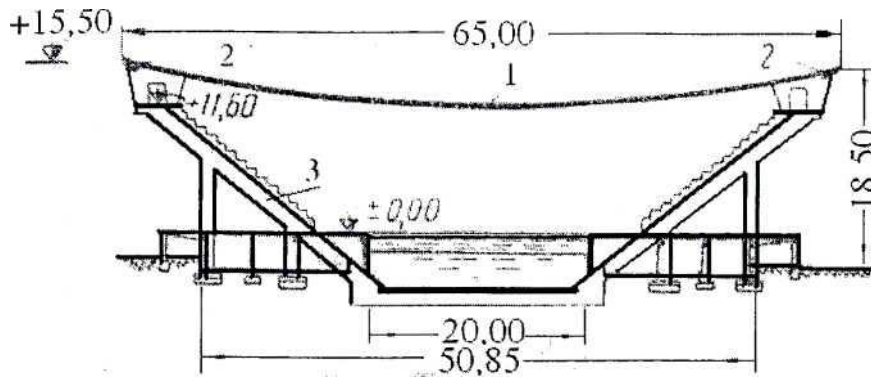
- Neo dây vào móng: Dùm kết cấu bể bơi Olympic ở Tokyo (Nhật Bản) [32] làm ví dụ. Dây cáp chịu lực chính căng qua nhịp 126m vắt qua hai trụ cao và truyền vào trong móng cách trụ 44m (hình 1.4)



Hình 1.4. Sơ đồ và mặt cắt dọc công trình Bể bơi Olympic ở Tokyo

1 - Khối neo (móng neo); 2 - Tháp trụ đỡ dây; 3 - Dây căng

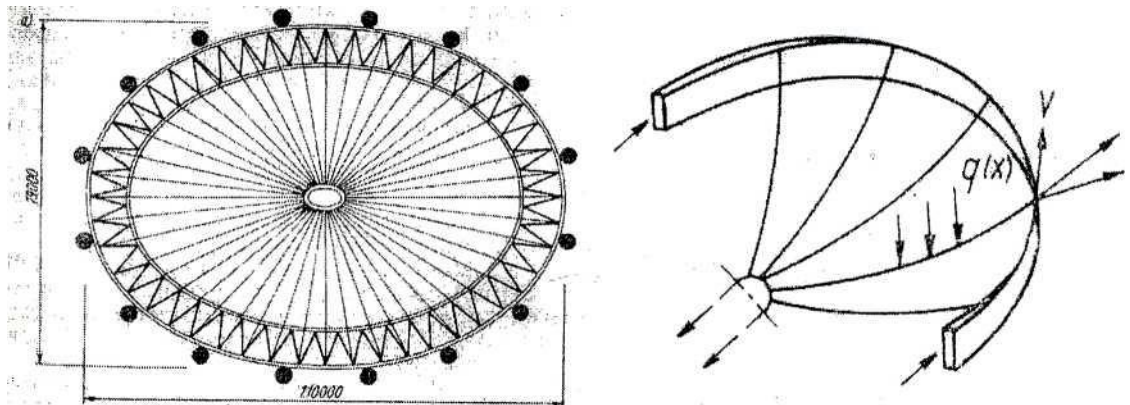
- Chọn dạng hình học và sơ đồ kết cấu công trình sao cho lực neo cũng có tác dụng ổn định của công trình: Lấy công trình bể bơi Wuppertal [27] làm ví dụ (hình 1.5). Lực căng trong dây được truyền qua neo vào dầm biên kích thước 60x360cm đặt trên đỉnh khung khán đài, khung khán đài kết hợp với hệ dầm sàn tiếp nhận tải trọng này và truyền vào móng công trình.



Hình 1.5. *Bể bơi Wuppertal, dùng khung sàn, cột khán đài chịu lực neo.*

1 - Dây căng; 2 - Dầm biên ; 3 - Khung khán đài

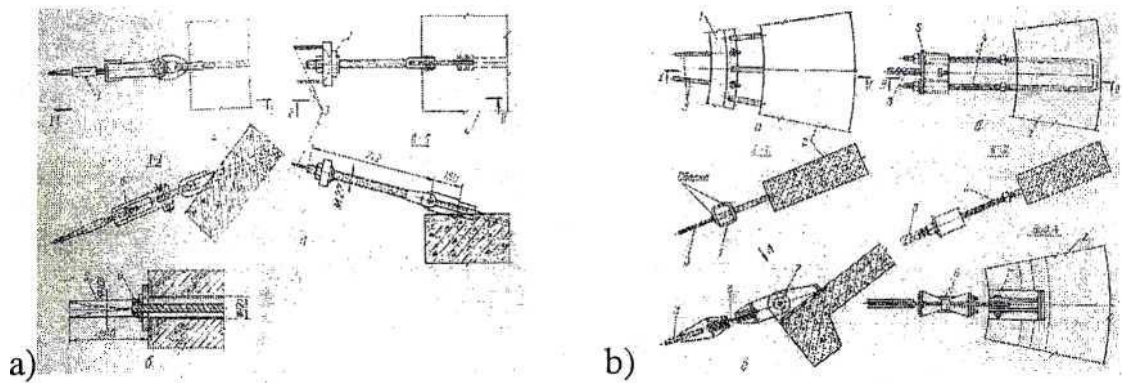
• Dùng các đài neo kín (dầm kín dạng tròn, đa giác phẳng hoặc không gian) chịu tác dụng của lực neo. Ví dụ nhà triển lãm New York [19], lực căng ngang của dây được truyền vào dầm biên dạng elip và triệt tiêu trong hệ dầm này (hình 1.6)



Hình 1.6. *Mặt bằng mái nhà triển lãm New York và sơ đồ triệt tiêu lực ngang*

Neo làm nhiệm vụ liên kết cáp với kết cấu neo và truyền lực căng từ cáp vào kết cấu neo. Bộ phận neo thường được chế tạo trong nhà máy để đảm bảo chất lượng và độ tin cậy [34], [42], [48], [49], [55], [71], [84], [85], [87]

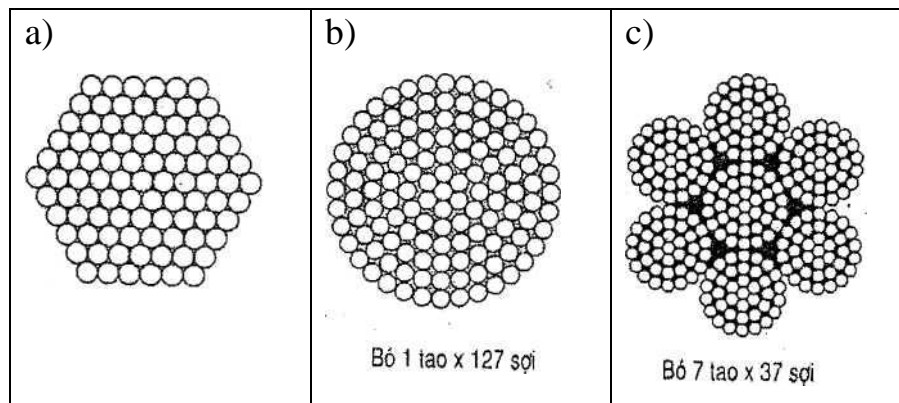
Khối neo là một bộ phận trong kết cấu neo nhằm liên kết neo vào kết cấu neo: Đối với dạng neo vào móng khối neo chính là khối móng; Đối với dạng neo vào biên đỡ thì khối neo là một bộ phận của kết cấu biên (hình 1.7)



Hình 1.7. Một số chi tiết cấu tạo khối neo.

a - Neo vào kết cấu biên thẳng; b - Neo vào kết cấu biên cong

Cáp dùng trong mái treo có các loại cáp kín, cáp hở, cáp một tao cáp nhiều tao, cáp song song (hình 1.8). Có rất nhiều loại cáp dùng trong mái treo và đều được chế tạo từ thép có cường độ cao. Việc chọn cáp cho hệ treo nói chung dựa vào lực kéo đứt, khả năng chịu mỏi cũng như yêu cầu về chế tạo, lắp đặt, thi công và cuối cùng là về kinh tế [33] [36], [39],[84],[89],[91], [93].



Hình 1.8. Mặt cắt một số dạng cáp dùng trong mái treo

a - Cáp nhiều tao; b - Cáp một tao; c - Cáp kín.

Các chỉ tiêu cơ lý của một số loại cáp thường dùng ở Mỹ [16] được trình bày bảng 1.1

Bảng 1.1 Bảng phân loại cáp

Cấp có vỏ bọc	Đường kính (in)	Lực kéo Min, (ksi)	Lực kéo tới hạn Min với 0,7% biến dạng (ksi)	Độ biến dạng khi độ dẫn dài 10 in (%)
A	$\geq 0,041$	220	100	4
B	All	210	150	4
C	All	200	140	4

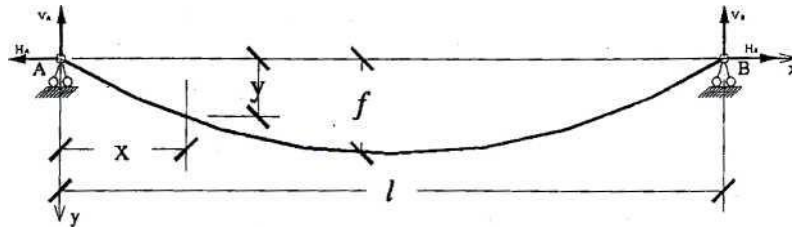
1.3 Các phương pháp tính toán dây đơn và hệ dây

Lý thuyết tính toán dây mềm được nghiên cứu từ lâu: Galilei G. (1564-1642) đã phân tích bài toán dây mềm treo trên hai gối tựa và cho rằng dây cong theo đường parabol [13]. Sau đó Huygens Ch. (1629-1695) đã phân tích lại bài toán này và tìm thấy đường cong theo dạng đường dây xích [13]. Năm 1823, Navier H. (1785-1836) đã thiết lập phương trình của dây xích chịu tải trọng thẳng đứng phân bố bất kỳ, phân tích sự thay đổi dạng hình học của dây và xác định được chuyển vị ở giữa nhịp. Nói chung trong thời kỳ đầu này đều xem dây không dẫn (không có biến dạng đàn hồi) và có chuyển vị nhỏ.

Các phương pháp tính toán dây hiện nay cũng xuất phát từ dạng võng của dây do trọng lượng bản thân gây ra [28],[29],[39],[40],[41],[63],[64],[68][71]..., Các tác giả đơn giản hóa khi tính biến dạng dây (tính đến đạo hàm bậc nhất của độ võng), xét dây làm việc trong miền đàn hồi. Dưới đây trình bày tóm tắt các phương pháp tính dây đơn và hệ kết cấu dây thường dùng hiện nay.

1.3.1 Tính dây chịu tải bản thân

Xét dây đơn được giữ trên hai gối tựa ngang mức (hình 1.8) giả thiết trọng lượng bản thân dây G phân bố đều trên trục nằm ngang, không phải theo chiều dài dây [35], [37], [39], [43], [44]. [45], [51],[83]



Hình 1.9 Dây đơn chịu tải trọng bản thân

Gọi V và H là phản lực đứng và nằm ngang tại gối tựa, y là độ võng của dây. Dây chỉ chịu lực căng T nên lấy mômen đối với điểm bất kỳ nào trên dây đều bằng không, ta có:

$$V = \frac{Gl}{2} \quad (1.1)$$

$$-Hy + Vx - \frac{Gx^2}{2} = 0 \quad (1.2)$$

Từ đó suy ra:

$$y = \frac{Gx(l-x)}{2H} \quad (1.3)$$

Tại giữa nhịp ($x = l/2$) dây có độ võng là f . Thay $x = l/2$ vào ta có mối liên hệ giữa lực căng H và độ võng f :

$$H = \frac{Gl^2}{8f}; \quad f = \frac{Gl^2}{8H} \quad (1.4)$$

Đường cong độ võng của dây được thể hiện bằng phương trình:

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x) \quad (1.5)$$

Lực trong dây được xác định theo điều kiện cân bằng lực tại gối:

$$T = \frac{H}{\cos\alpha} = \frac{Gl^2}{8f \cos\alpha} \quad (1.6)$$

Từ tam giác lượng ta có:

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{1 + (\operatorname{tg}\alpha)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (1.7)$$

Xem dây là thoải và đại lượng trên được tính gần đúng như sau:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{4f(l-2x)}{l^2}\right)^2 \quad (1.8)$$

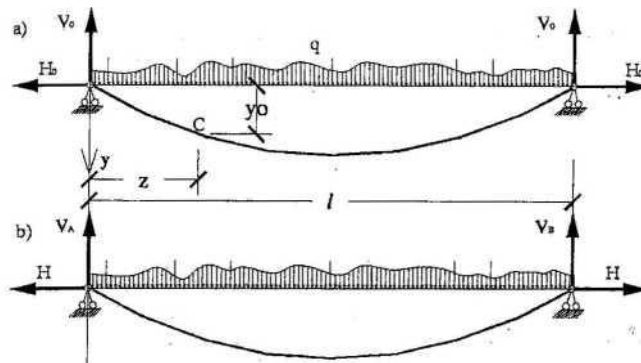
Thay vào biểu thức (1.6) ta nhận được công thức xác định lực căng T trong dây như sau:

$$T = \frac{Gl^2}{8f} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{4f(l-2x)}{l^2}\right)^2 \right] \quad (1.9)$$

Ta nhận thấy lực căng T trong dây lớn nhất tại gó, nhỏ nhất ở giữa nhịp và phụ thuộc vào độ võng lớn nhất(cực đại) tại giữa nhịp f. Như vậy, tính toán nội lực trong dây phải theo sơ đồ biến dạng của dây.

1.3.2. Phương pháp tính dây theo hai trạng thái.

Phương pháp tính dây theo hai trạng thái được người Nga dùng nhiều trong những năm trước đây, đầu tiên là Качурин В.К. [52], [53], [54] sau này Морозов А.П [66], Москалев Н. С [65], Николев С. Н.[69] Cách làm này thay cho việc dùng phản lực đứng tại gối V tác giả dùng lực cắt Q của dầm đơn giản tương ứng (hình 1.10).



Hình 1.10. Dây đơn chịu tải trọng thẳng đứng

Gọi mômen uốn M_0^d , lực cắt Q_0^d là mômen uốn và lực cắt của dầm đơn giản có nhịp bằng nhịp của dây và chịu tải như dây. Gọi H_0 là lực căng ngang trong dây nếu biết y_0 là độ võng của dây tại một điểm bất kỳ (thường là giữa

nhịp $y_0 = f_0$) thì lực căng ngang H_0 được xác định như sau:

$$H_0 = \frac{M^d}{y_0} = \frac{M^d}{f_0} \quad (1.10)$$

Khi đó phương trình độ võng của dây y và góc nghiêng α của dây ứng với tải trọng ban đầu là:

$$y_{(z)} = \frac{M_{(z)}^d}{H_0}; \quad tg\alpha = y'_{(z)} = \frac{1}{H_0} d(M_{(z)}^d) = \frac{Q_0^d}{H_0} \quad (1.11)$$

Chiều dài dây L_0 theo dạng võng của dây tính gần đúng sau:

$$L_0 = l + \frac{1}{2H_0^2} \int_l (Q_0^d)^2 dz = l + \frac{D_0}{2H_0^2} \quad (1.12)$$

Khi dây có thêm tải trọng tác dụng, trong dây có lực căng, chiều dài dây thay đổi làm thay đổi lực căng ngang H tại gố. Ржаницьгн А. Р. đưa ra phương trình bậc ba xác định phản lực căng ngang tại gố như sau:

$$H^3 + \left[\frac{EF}{2l} \frac{D_0}{H_0^2} - H_0 - \frac{D_0}{lH_0} \right] H^2 + \frac{D}{l} H - \frac{EF}{2l} D = 0 \quad (1.13)$$

Để đơn giản tính toán, Качурин В.К. đã bỏ qua các đại lượng rất nhỏ và đưa ra phương trình bậc ba xác định phản lực căng ngang tại gố như sau:

$$H^3 + \left[\frac{EF}{2l} \frac{D_0}{H_0} - H_0 \right] H^2 - \frac{EF}{2l} D = 0 \quad (1.14)$$

Trong đó D và D_0 được xác định như sau:

$$D_0 = \int_l Q_0^d dz; \quad D = \int_l Q^d dz \quad (1.15)$$

Phương trình lực căng (1.14) do Качурин В.К. kiến nghị so với (1.13) do Ржаницьгн А. Р. đưa ra, có sai số nhỏ hơn 6% đối với dây thoải [13], [74].

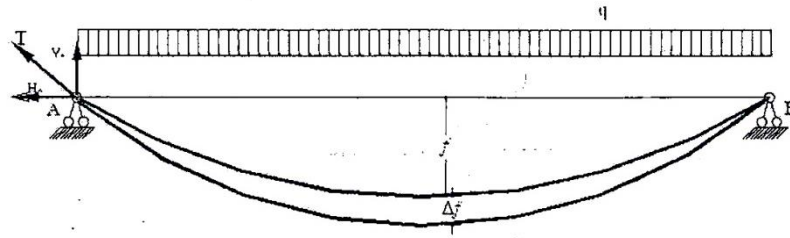
Sau khi tính được lực căng ngang tại gố H theo (1.13) hoặc (1.14) thì tính được độ võng $y_{(z)}$, góc xoay α trong dây:

$$y_{(z)} = \frac{M^d_{(z)}}{H}; \quad tg\alpha = \frac{Q^d}{H} \quad (1.16)$$

Trong phương trình tính lực căng (1.13) hoặc (1.14) có đại lượng H_0 , do H_0 phụ thuộc vào độ võng của dây f nên các đại lượng độ võng, góc xoay trong dây phụ thuộc vào độ võng của dây f . Có thể hiểu rằng, trong (1.13) và (1.14), D_0 xét tải phân bố, D xét tải tập trung và đều thông qua lực cắt Q của dầm đơn giản tương đương. Nhiều báo cáo khoa học về các dạng khác nhau của cách này [72], [75] nhưng đường lối và kết quả đều gần như nhau.

1.3.3. Phương pháp tính dây theo một trạng thái.

Phương pháp tính dây theo một trạng thái được các nhà khoa học phương tây sử dụng nhiều. Paul Lew I. và Thomas z. trong [19] giả thiết rằng khi chịu tải phân bố đều q , đường độ võng của dây có dạng parabol, khi không có tải cũng có dạng dạng cong bán đầu là dạng parabol (hình 1.11). Bởi vì dạng cong bán đầu của dây không ảnh hưởng tới kết quả tính. Từ hai giả thiết đó, các tác giả đã đưa ra các công thức tính sau đây



Hình 1.11. Sơ đồ không tải và có tải

Chiều dài L bán đầu của sợi cáp có thể tính:

$$L = l \left[1 + \frac{8}{3} \left(\frac{f}{l} \right)^2 \right] \quad (1.17)$$

Lực căng T (tại góì) được xác định theo công thức:

$$T = \frac{ql^2}{8f} \sqrt{1 + 16 \left(\frac{f}{l} \right)^2} \quad (1.18)$$

Độ giãn dài của cáp xác định theo công thức:

$$\Delta f = \frac{TL}{EA} \quad (1.19)$$

Độ võng tăng là

$$\Delta f = \frac{\Delta l}{\frac{16}{15}x\left(\frac{f}{l}\right)x\left[5 - 24\left(\frac{f}{l}\right)^2\right]} \quad (1.20)$$

Góc nghiêng α tạo bởi độ võng:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4(f + \Delta f)}{l} \quad (1.21)$$

Phản lực theo phương ngang và phương đứng là:

$$\begin{aligned} H &= T \cdot \cos\alpha \\ V &= T \sin\alpha \end{aligned} \quad (1.22)$$

Tần số dao động riêng ω_n được xác định như tần số dao động ngang của dây đơn có lực căng trước ($n = 1, 2, \dots$):

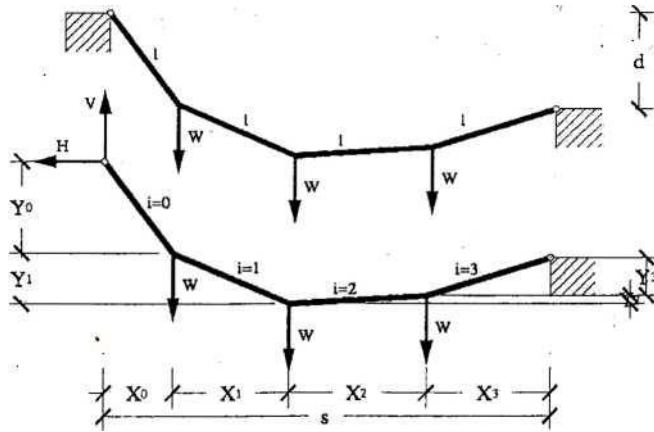
$$\omega_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{Tg}{q}} \text{ hoặc } \omega_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{m}} \quad (1.23)$$

Các công thức nêu trên có đặc điểm là tiện dụng trong thiết kế và thi công. Thí dụ, theo công thức (1.17) tính được chiều dài dây theo độ võng lớn nhất và chiều dài nhịp.

1.3.4. Phương pháp tính dây theo phương pháp lặp Newton-Raphson.

Phân tích chiều dài các đoạn dây sàu khi biến dạng (hình 1.12) và lấy tổng hình chiếu các đoạn dây lên trục nằm ngang (trục x) bằng chiều dài nhịp là s, lên trục đứng (trục y) bằng độ lệch gồi d, Alan Jennings [17] nhận được hai phương trình để xác định phản lực gồi H và V ở gồi tựa bên trái của dây. Nội dung nghiên cứu này được thể hiện bằng một ví dụ cụ thể (hình 1.12).

Gọi l là chiều, dài các đoạn chia (chia đều), W_j là tải trọng tập trung tại các nút. Với giả thiết đoạn dây giữa hai nút được coi là thẳng hai phương trình hình chiếu trên hai trục (hệ phương trình 1.24)



Hình 1.12. Sơ đồ phân tích từng đoạn dây.

Hệ 2 phương trình phi tuyến (1.24) có thể giải bằng phương pháp Newton-Raphson như Alan Jennings đã làm.

1.3.5. Phương pháp tính động lực học hệ dây và mái treo.

Tổng quát và hệ thống hóa những thành tựu trong tính toán động lực học kết cấu dây và một số loại vỏ màng (vỏ phi mômen) được trình bày khá đầy đủ và cụ thể trong [46], [77], [78], [80], [90]. Các tác giả đã xây dựng các phương trình vi phân cân bằng động lực học chung cho các kết cấu vừa nêu trên cơ sở lý thuyết phi tuyến của cơ hệ môi trường liên tục và chỉ ra rằng: Các phương trình cân bằng động lực học của dây đơn hoặc lưới dây có thể nhận được từ phương trình cân bằng động lực học của vỏ phi mômen bằng cách cho ứng suất cắt trong vỏ bằng không. Dựa vào những kết quả nghiên cứu này có thể đánh giá được tính chất làm việc động của kết cấu dây nói chung và mái treo nói riêng.

Đó là điều cần thiết trong thiết kế kết cấu dây và mái treo. Để thấy rõ hơn tính chất của bài toán dưới đây trình bày phương trình cân bằng của dây đơn thoải có chiều dài $2l$ [46, tr 42].

$$H \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{EFq^2}{2lH^2} \left(\frac{x}{l}\right)^\lambda \int_{-l}^l \left(\frac{x}{l}\right)^\lambda W dx = \frac{q}{g} \left(\frac{x}{l}\right)^\lambda \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (1.25)$$

Trong đó: H - lực căng ngang trong dây ở trạng thái cân bằng tĩnh;

W - Độ võng của dây;

EF - Độ cung chịu kéo của dây;

$q(x) = q \left(\frac{x}{l}\right)^\lambda$ - tải tĩnh phân bố và cũng là khối lượng $m(x)$ của dây

$m(x) = \frac{q(x)}{g}$ với g là gia tốc trọng trường;

λ - hằng số bất kỳ, $\lambda = 0$ ta có tải trọng tĩnh phân bố đều và khối lượng cũng phân bố đều.

Phương trình (1.25) nhận được khi xem đường biến dạng dây thoải (tỉ lệ độ võng lớn nhất so với nhịp nhỏ thua 1/10 đối với dây và 1/5 đối với vỏ),

nghĩa là bỏ qua các thành phần phi tuyến của chuyển vị đứng w .

Với một vài biến đổi, các tác giả [46] tìm được lời giải của phương trình vi phân (1.25) dưới dạng hàm Bessel với chỉ số là phân số cộng với một đại lượng khác. Lời giải số cho thấy tần số dao động riêng của dây phụ thuộc vào biên độ dao động. Bài toán xét ảnh hưởng của độ cứng uốn của dây cũng được trình bày trong [46].

1.3.6. Phương pháp tính dây theo sơ đồ dây xích.

Phương pháp tương tự đã trình bày ở trên khó có thể dùng trong trường hợp đường độ võng của dây là đường không gian (dây chịu tải bất kỳ). Vì vậy, trong [79], [83], [88] còn xét trường hợp tính dây xích để xây dựng bài toán tính lưới dây chịu tải thẳng đứng và nằm ngang theo phương pháp ma trận (hình 1.13).

Hệ phương trình đại số (phi tuyến) trong [83] viết dưới dạng sau :

$$[A(u)]N = F, \quad \Delta = [A(u)]^T u, \quad [K]\Delta = N \quad (1.26)$$

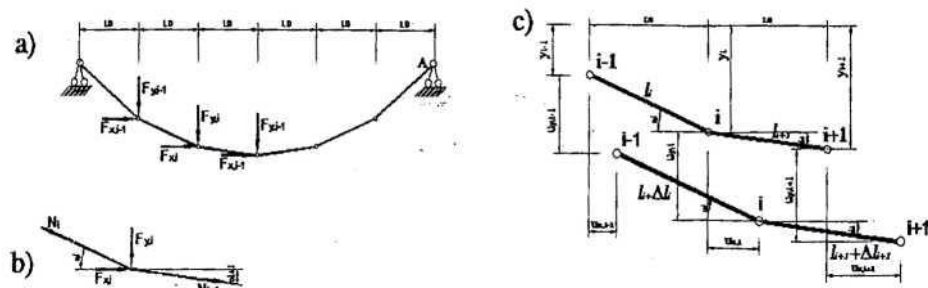
Trong đó: $[A(u)]$ là ma trận của phương trình cân bằng nút phụ thuộc vào chuyển vị u ;

A là vectơ độ dẫn dài của dây;

N là vectơ nội lực;

$[K]$ ma trận độ cứng dây

F là vectơ ngoại lực.



Hình 1.13. Sơ đồ tính dây xích

a - Dạng dây; b - Sơ đồ tải trọng nút; c - Sơ đồ chuyển vị nút và đoạn dây.

Từ (1.26) thấy rằng ẩn của bài toán tính dầy xích vừa là các chuyển vị nút u vừa là các nội lực N , vì sơ đồ hình 1.13 là sơ đồ biến hình. Trong [76] không đưa ra thí dụ tính nên khó có thể bình luận về lời giải này.

GS Bùi Khương [5], trên cơ sở phương pháp ma trận, đã nghiên cứu và đề cập đến hầu hết các bài toán tính tĩnh và động lực học hệ dây và kết cấu dây bao gồm cả trường hợp tải 3 chiều, các bài toán tính toán thiết kế và tính toán thi công. Nét đặc biệt trong phương pháp nghiên cứu của GS Bùi Khương là xét trạng thái làm việc của dây trên cơ sở trạng thái trước của nó. Thí dụ phương trình tính dây đơn cố định ở hai gối nằm ngang mức viết như sau:

$$\frac{1}{EF} H^3 - \frac{1}{EF} (N + \Delta u) H^2 + \frac{H}{2EF} \int_l Q^2 dx - \frac{l}{2} \int_l Q^2 dx = 0 \quad (1.27)$$

Trong (1.26) lực căng N và độ dịch chuyển Δu là các giá trị đã biết ở trạng thái trước. Theo Чирас [83], lực căng tính theo (1.26) trùng với (1.13). Nói chung, các bài toán tĩnh và động lực học của dây và hệ dây trong [83] đều dựa trên giả thiết gần đúng về tính chiều dài dây sau khi biến dạng giống như các phương pháp trình bày trên.

1.4. Nhận xét

Kết cấu dây và mái treo tận dụng được cường độ cao của vật liệu, có trọng lượng nhẹ và vượt được khẩu độ lớn, kiểu dáng kiến trúc phong phú ngày càng được sử dụng rộng rãi trên thế giới và trong nước. Khi tính toán thiết kế và thi công công trình loại này cần xét đến kết cấu neo và tính chất làm việc động lực học của công trình. Đó là đặc điểm chủ yếu của kết cấu dây nói chung và mái treo nói riêng so với các loại kết cấu khác

Các phương pháp tính toán kết cấu dây hiện nay đều dựa trên phương pháp tương tự dầm đối với dây đơn hoặc tương tự vỏ thoải đối với lưới dây.

Hầu hết các phương pháp hiện có đều xét dây cong thoải hoặc lưới dây

thoải, nghĩa là tính gần đúng độ giãn dài của dây và dùng được khi tỉ lệ giữa độ võng lớn nhất f và chiều dài nhịp l là nhỏ.

Khi dây chịu tải không gian thì phải dùng sơ đồ dây xích hoặc dây gấp khúc. Kết quả tính trong trường hợp này còn rất hạn chế và hầu như không có ví dụ trình bày.

Không giống như dao động của dây đàn, tần số dao động riêng của dây có độ võng phụ thuộc vào biên độ dao động. Kết quả này nhận được từ giả thiết xem đường độ võng dây là thoải [46].

CHƯƠNG 2

PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN LÝ CỰC TRỊ GAUSS

Chương này trình bày nguyên lý Gauss, sau đó trình bày phương pháp mới dựa trên nguyên lý cực trị Gauss để xây dựng và giải các bài toán cơ học dưới dạng tổng quát, chủ yếu là của cơ hệ vật rắn biến dạng. Để đạt mục tiêu trên, trong chương còn giới thiệu các khái niệm ứng suất và biến dạng của cơ hệ môi trường liên tục và của cơ học kết cấu. Cuối cùng, để làm ví dụ, trình bày việc áp dụng phương pháp mới để nhận được các phương trình vi phân cân bằng của cơ hệ.

2.1. Nguyên lý cực trị Gauss

Năm 1829 nhà toán học người Đức K.F. Gauss đã đưa ra nguyên lý sau đây đối với cơ hệ chất điểm [1, tr. 171]:

“Chuyển động thực của hệ chất điểm có liên kết tùy ý chịu tác động bất kì ở mỗi thời điểm xảy ra một cách phù hợp nhất có thể với chuyển động của hệ đó khi hoàn toàn tự do, nghĩa là chuyển động thực xảy ra với lượng cưỡng bức tối thiểu nếu như số đo lượng cưỡng bức lấy bằng tổng các tích khối lượng chất điểm với bình phương độ lệch vị trí chất điểm so với vị trí khi chúng hoàn toàn tự do”.

Gọi m_i là khối lượng chất điểm, A_i là vị trí của nó, B_i là vị trí sau thời đoạn vô cùng bé do tác động lực ngoài và do vận tốc ở đầu thời đoạn gây ra, C_i là vị trí có thể (bị ràng buộc bởi liên kết) thì lượng cưỡng bức được viết như sau:

$$Z = \sum_i m_i (\overline{B_i C_i})^2 \rightarrow Min \quad (2.1)$$

Dấu tổng trong (2.1) lấy theo số chất điểm.

Sử dụng nguyên lý vận tốc ảo và nguyên lý D ‘Alembert, xét hệ ở trạng thái cân bằng và cho rằng có lực với độ lớn tỉ lệ với độ dài $\overline{B_i C_i}$ tác dụng

theo chiều từ C_i đến B_i , Gauss đã chứng minh nguyên lý của mình [1, tr. 172].

Để có thể sử dụng nguyên lý Gauss cần biết đại lượng biến phân của nó. Theo [1, tr. 889], Gibbs (năm 1879) và Appell (năm 1899) đi từ các lập luận khác nhau đều nhận được nguyên lý Gauss và chỉ ra rằng đại lượng biến phân của nguyên lý này là gia tốc. Điều này có nghĩa là:

$$\delta r_i = 0; \quad \delta \dot{r}_i = 0; \quad \delta \ddot{r}_i \neq 0 \quad (2.2)$$

ở đây δ là kí hiệu biến phân (lấy vi phân khi cố định thời gian), r_i , \dot{r}_i và \ddot{r}_i lần lượt là vector toạ độ, vector vận tốc và vector gia tốc của điểm i . Chuyển dịch của chất điểm của hệ có liên kết dưới tác dụng của lực F_i sau thời đoạn dt tính theo công thức sau đây:

$$r_i + \dot{r}_i dt + \frac{1}{2} \ddot{r}_i dt^2 \quad (2.3)$$

Vì $\delta r_i = 0$ và $\delta \dot{r}_i = 0$ nên chuyển dịch của chất điểm hoàn toàn tự do (có thể hình dung ở đầu thời đoạn dt liên kết được giải phóng nhưng vẫn giữ lực tác dụng) sau thời đoạn dt là :

$$r_i + \dot{r}_i dt + \frac{1}{2} \frac{F_i}{m_i} dt^2 \quad (2.4)$$

Hiệu của (2.4) và (2.3) cho ta độ lệch vị trí của chất điểm có liên kết so với vị trí của nó khi hoàn toàn tự do.

Có thể xem dt là hằng thì lượng cường bức Z theo (2.1) được viết dưới dạng lực như sau (với độ chính xác bằng thừa số $dt^4/4$) :

$$Z = \sum_i m_i \left(\frac{F_i}{m_i} - \ddot{r}_i \right)^2 \rightarrow Min \quad (2.5)$$

hoặc

$$Z = \sum_i \frac{1}{m_i} (F_i - m_i \ddot{r}_i)^2 \rightarrow Min \quad (2.5a)$$

Khi tính lượng cưỡng bức theo (2.5) cần xem gia tốc là đại lượng biến phân (biến phân kiểu Gauss theo cách nói của Boltzmann). Như vậy, phương pháp tìm cực tiểu của các bài toán cơ học được xây dựng theo nguyên lý (2.5) không thể là bất kỳ mà phải là (khi không có ràng buộc nào khác):

$$\frac{\partial Z}{\partial \ddot{r}_i} = 0 \quad (2.6)$$

Điều kiện (2.6) sẽ cho ta phương trình cân bằng. Thật vậy, áp dụng (2.6) vào (2.5) ta nhận được phương trình cân bằng của hệ (ở đây lực tác dụng bằng lực quán tính). Appell và Boltzmann (năm 1897) còn cho biết nguyên lý Gauss đúng cho hệ liên kết holonom và cả hệ liên kết không holonom [1, tr. 890].

Nguyên lý Gauss (2.1) hoặc (2.5) có dạng của phương pháp bình phương tối thiểu là phương pháp cũng do Gauss đưa ra và được dùng rộng rãi trong toán học hiện đại, trong giải tích cũng như trong lời giải số. Có lẽ vì vậy nguyên lý Gauss thu hút sự chú ý của nhiều nhà khoa học, thí dụ, Hertz (năm 1894) dựa trên ý tưởng lượng cưỡng bức đưa ra nguyên lý đường thẳng nhất (đường có độ cong nhỏ nhất) hoặc Prigogine (năm 1954) và Gyarmati (năm 1965) đã xây dựng được lượng cưỡng bức của các quá trình không hồi phục trong nhiệt động lực học [2].

Các tài liệu giáo khoa về cơ học thường giới thiệu nguyên lý Gauss dưới dạng (2.5) là dạng dùng được để tính toán. Nhưng nguyên lý (2.5) với đại lượng biến phân là gia tốc chỉ là một biểu thị của nguyên lý Gauss (2.1) bởi vì đại lượng biến phân trong cơ học còn có thể là chuyển vị và vận tốc như trình bày sau đây.

2.2. Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss

Trong bài viết của mình Gauss nêu nhận xét rằng *nguyên lý vận tốc ảo biến vấn đề tĩnh học thành vấn đề toán học thuần túy, còn nguyên lý D'Alembert đưa bài toán động lực học về bài toán tĩnh học và mọi nguyên lý của cơ học hoặc nhiều hoặc ít đều có thể trực tiếp rút ra từ hai nguyên lý trên*. Dưới đây trình bày phương pháp dựa trên nguyên lý chuyển vị ảo để nhận được biểu thức (2.1) của nguyên lý Gauss.

Xét hệ chất điểm có liên kết tùy ý ở một thời điểm bất kì nào đó có nghĩa là phải đưa lực quán tính f_i của hệ tại thời điểm đó tác dụng lên hệ. Đối với hệ hoàn toàn tự do lực quán tính f_{0i} của nó bằng với ngoại lực (chỉ số '0' ở chân kí tự chỉ rằng kí tự đó thuộc hệ so sánh, trường hợp này là hệ hoàn toàn tự do có cùng khối lượng và cùng chịu tác dụng lực ngoài giống như hệ có liên kết). Như vậy, các lực tác dụng lên hệ có liên kết gồm các lực $f_i = m_i \ddot{r}_i$ và các lực $f_{0i} = m_i \ddot{r}_{0i}$ (thay cho ngoại lực). Theo nguyên lý chuyển vị ảo đối với liên kết giữ (liên kết dưới dạng đẳng thức) và không giữ (liên kết dưới dạng bất đẳng thức) điều kiện cần và đủ để hệ ở trạng thái cân bằng là [1, tr. 887] :

$$\sum_i (f_i - f_{0i}) \delta r_i \leq 0 \quad (2.7)$$

Biểu thức (2.7) cũng được Fourier (năm 1798) và Ostrogradsky (năm 1838) độc lập đưa ra.

Có thể nhận xét ngay rằng phần trong ngoặc đơn của (2.7) biểu thị lực tác dụng lên hệ nên phải bằng không để hệ ở trạng thái cân bằng.

Trong biểu thức (2.7) cần xem các chuyển vị r_i độc lập đối với lực tác dụng. Cho nên từ (2.7) có thể viết:

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) r_i \rightarrow Min \quad (2.8)$$

Trong (2.8) r_i là các biến độc lập cần tìm để bảo đảm cho Z cực tiểu. Vì chuyển vị r_{0i} của hệ hoàn toàn tự do đã biết nên biểu thức (2.8) tương đương với các biểu thức dưới đây:

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i})(r_i - r_{0i}) \rightarrow \text{Min} \quad (2.8a)$$

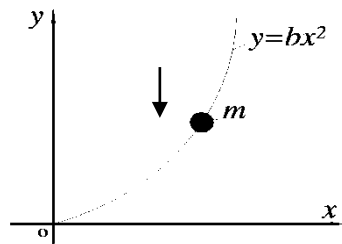
$$\text{hoặc} \quad Z = \sum_i m_i \left[\frac{f_i}{m_i} - \ddot{r}_{0i} \right] (r_i - r_{0i}) \rightarrow \text{Min} \quad (2.8b)$$

Để dàng nhận thấy (2.8b) là tích của khối lượng m_i với bình phương độ lệch vị trí chất điểm và do đó Z xác định theo (2.8) là lượng cưỡng bức của nguyên lý Gauss (với độ chính xác bằng thừa số $dt^2/2$). So với (2.5), lượng cưỡng bức Z xác định theo (2.8) biểu thị đầy đủ và rõ ràng tư tưởng của nguyên lý Gauss thể hiện ở chỗ, thứ nhất, nó cho phép so sánh hệ có liên kết với hệ hoàn toàn tự do, thứ hai, đại lượng không biết (đại lượng biến phân) trong (2.8) là chuyển vị giống như trong (2.1). Cực tiểu của (2.8) cần và phải được tìm từ điều kiện (khi không có các ràng buộc nào khác):

$$\frac{\partial Z}{\partial r_i} = 0 \quad (2.9)$$

Điều kiện (2.9) áp dụng vào (2.8) cho ta phương trình cân bằng của cơ hệ.

Ví dụ 1 Ví dụ này lấy từ [3, tr. 64]. Viết phương trình chuyển động của khối lượng m chạy trên đường cong $y = bx^2$ trong mặt phẳng (xy) , không có lực ma sát, dưới tác dụng của trường gia tốc g (Hình 1.1).



Hình 1.1

Các lực tác dụng lên khối lượng m bao gồm: lực quán tính theo chiều y , lực trọng trường theo chiều âm của y , lực quán tính theo x . Chọn hệ so sánh là hệ có cùng khối lượng m nằm trong trường gia tốc g nhưng hoàn toàn tự do. Lượng cưỡng bức được viết theo (2.8) như sau:

$$Z = (m\ddot{y} + mg)y + (m\ddot{x})x \rightarrow \text{Min} \quad (a)$$

Thế $y = bx^2$ vào (a) ta có

$$Z = (m\ddot{y} + mg)bx^2 + (m\ddot{x})x \rightarrow \text{Min} \quad (\text{b})$$

Xem chuyển vị x là biến độc lập và từ điều kiện $\frac{\partial Z}{\partial x} = 0$ nhận được:

$$2bx\ddot{y} + 2bgx + \ddot{x} = 0 \quad (\text{c})$$

Thay $\ddot{y} = 2bx\ddot{x} + 2b\dot{x}^2$ vào (c) nhận được phương trình chuyển động của khối lượng m

$$(4b^2x^2 + 1)\ddot{x} + 4b^2x\dot{x}^2 + 2bgx = 0 \quad (\text{d})$$

Phương trình (d) là kết quả cần tìm.

Như nhận xét của Gauss nêu trên, có thể nói biểu thức (2.7) đã biến vấn đề tĩnh học (cân bằng lực) thành vấn đề toán học thuần túy. Thật vậy, nếu ta dùng gia tốc là đại lượng biến phân thì tương tự như (2.7) có thể viết

$$\sum_i (f_i - f_{0i}) \delta \ddot{r}_i \leq 0 \quad (2.10)$$

với điều kiện gia tốc \ddot{r}_i là đại lượng độc lập đối với lực tác dụng.

Từ (1.10) có thể viết

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) \ddot{r}_i \rightarrow \text{Min} \quad (2.11)$$

Trong (2.11) cần xem gia tốc \ddot{r}_i là đại lượng biến phân để bảo đảm cho Z cực tiểu. Vì gia tốc \ddot{r}_{0i} của hệ hoàn toàn tự do đã biết nên biểu thức (2.11) tương đương với các biểu thức dưới đây:

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i})(\ddot{r}_i - \ddot{r}_{0i}) \rightarrow \text{Min} \quad (2.11a)$$

hoặc
$$Z = \sum_i m_i \left(\frac{f_i}{m_i} - \ddot{r}_{0i} \right) (\ddot{r}_i - \ddot{r}_{0i}) \rightarrow \text{Min}$$

$$Z = \sum_i m_i (\ddot{r}_i - \ddot{r}_{0i})^2 \rightarrow \text{Min} \quad (2.11b)$$

Ta thấy (2.11b) trùng với (2.5). Các gia tốc \ddot{r}_i phải thỏa mãn các liên kết nếu có và điều kiện cực tiểu của (2.11) là biểu thức (2.6).

Ví dụ 2 . Làm lại ví dụ 1 (Hình 1) theo nguyên lí (2.5) hoặc biểu thức (2.11)

Khối lượng m vừa chuyển động theo x , vừa chuyển động theo y , nhưng do có liên kết $y = bx^2$ nên chỉ có một bậc tự do, thí dụ là x . Các lực tác dụng lên m bao gồm: Lực quán tính theo chiều y , lực trọng trường theo chiều âm của y , lực quán tính theo x . Lượng cưỡng bức Z viết theo (2.5) là:

$$Z = m\left(\frac{mg}{m} + \ddot{y}\right)^2 + m\ddot{x}^2 \rightarrow \text{Min} \quad (\text{a})$$

Lấy đạo hàm ràng buộc $y = bx^2$ theo thời gian hai lần ta có :

$$\ddot{y} = 2bx\ddot{x} + 2b\dot{x}^2 \quad (\text{b})$$

Thay \ddot{y} trong (a) bằng (b), nhận được

$$Z = (g + 2bx\ddot{x} + 2b\dot{x}^2)^2 + \ddot{x}^2 \rightarrow \text{Min} \quad (\text{c})$$

Xem gia tốc \ddot{x} là biến độc lập và từ điều kiện $\partial Z / \partial \ddot{x} = 0$ ta có phương trình chuyển động của khối lượng m như sau :

$$(4b^2x^2 + 1)\ddot{x} + 4b^2x\dot{x}^2 + 2bgx = 0 \quad (\text{d})$$

Phương trình (d) là kết quả cần tìm.

Tương tự, cũng có thể dùng vận tốc \dot{r}_i là đại lượng biến phân, khi đó lượng cưỡng bức Z được viết :

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) \dot{r}_i \rightarrow \text{Min} \quad (2.12)$$

với điều kiện vận tốc \dot{r}_i là biến độc lập và thỏa mãn các liên kết nếu có. Trong trường hợp này điều kiện cực tiểu của nguyên lí(2.12) sẽ là (khi không có ràng buộc nào khác) :

$$\frac{\partial Z}{\partial \dot{r}_i} = 0 \quad (2.13)$$

Làm lại bài toán của ví dụ 1 với đại lượng biến phân là vận tốc (biểu thức 2.12) cũng cho ta kết quả đúng đắn.

Tóm lại, các nguyên lý (2.5) hoặc (2.11) với đại lượng biến phân là gia tốc độc lập đối với lực tác dụng, nguyên lý (2.8) với đại lượng biến phân là chuyển vị độc lập đối với lực tác dụng và nguyên lý (2.12) với đại lượng biến phân là vận tốc độc lập đối với lực tác dụng đã biến phương trình cân bằng lực (vấn đề cơ học) thành các bài toán toán học thuần túy và có thể được phát biểu như sau : *Chuyển động thực của cơ hệ xảy ra khi lượng cưỡng bức Z*

- *xác định theo (2.5) thì được tìm theo gia tốc, điều kiện (2.6)*
- *xác định theo (2.8) thì được tìm theo chuyển vị, điều kiện (2.9)*
- *xác định theo (2.12) thì được tìm theo vận tốc, điều kiện (2.13)*

là cực tiểu.

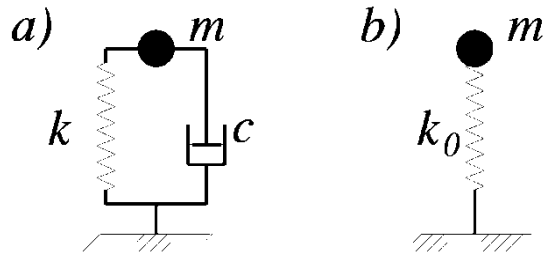
Đương nhiên, các đại lượng biến phân gia tốc, chuyển vị và vận tốc phải thỏa mãn các điều kiện liên kết của hệ.

Để có thể áp dụng cho cả các bài toán tĩnh của môi trường liên tục ta sẽ dùng nguyên lý (2.8) với đại lượng biến phân là chuyển vị và điều kiện cực tiểu là (2.9). Nguyên lý (2.5) không cho phép giải các bài toán tĩnh. Do đó, cách trình bày nguyên lý Gauss dưới dạng này đã hạn chế việc sử dụng nguyên lý trong cơ học.

Có thể mở rộng nguyên lý Gauss bằng cách so sánh hệ cần tính với hệ có liên kết tùy ý chịu tác dụng của lực giống như hệ cần tính mà lời giải của nó đã biết. Khi đó thay cho lực ngoài ta dùng lực liên kết và lực quán tính của hệ so sánh với dấu ngược lại để tác động lên hệ cần tính. Điều này là hiển nhiên bởi vì ngoại lực luôn cân bằng với nội lực. Xét ví dụ minh họa sau

Ví dụ 3 Hệ cần tính là khối lượng m có liên kết lò xo độ cứng k và liên kết nhớt với hệ số nhớt c chịu tác dụng lực $p(t)$ (Hình 2.2). Xét dao động thẳng đứng $u(t)$ của m so với vị trí cân bằng tĩnh của nó. Bài toán có một bậc

dao động tự do. Ta chọn hệ so sánh có khối lượng m_0 và liên kết lò xo độ cứng k_0 cùng chịu lực $p(t)$ (Hình 2.2.b).



Hình 2.2 a) Hệ cần tính; b) Hệ so sánh.

Dao động $u_0(t)$ của hệ so sánh (so với vị trí cân bằng tĩnh của nó) xác định từ phương trình cân bằng sau :

$$m_0 \ddot{u}_0 + k_0 u_0 = p(t) \quad (a)$$

Lực tác dụng lên khối lượng m gồm có: lực quán tính $m\ddot{u}$, lực cản lò xo ku , lực cản nhớt $c\dot{u}$ và lực $p(t)$ được thay bằng nội lực của hệ so sánh. Lượng cưỡng bức theo (2.8) viết được:

$$Z = (m\ddot{u} + c\dot{u} + ku - m_0 \ddot{u}_0 - k_0 u_0)u \rightarrow Min \quad (b)$$

Phần trong dấu ngoặc đơn của (b) biểu thị lực tác dụng và theo nguyên lý chuyển vị (2.8) cần xem chuyển vị u là biến độc lập đối với lực tác dụng thì từ điều kiện $\partial Z / \partial u = 0$ nhận được phương trình cân bằng của hệ cần tính

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = m_0 \ddot{u}_0 + k_0 u_0 \quad (c)$$

hay chú ý tới (a) ta có

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad (d)$$

Nhìn vào (c) và (d) thấy rằng thay cho việc giải phương trình vi phân cân bằng (d) của hệ cần tính ta có thể giải phương trình (c) ứng với từng thời điểm. Vế phải của (c) có thể là nghiệm riêng hoặc nghiệm cơ bản (trường hợp $p(t)$ là xung đơn vị) của (d) hoặc, một cách tổng quát, là thể hiện của $p(t)$ trên hệ bất kì nào khác (lời giải của hệ bất kì khi chịu tác động của $p(t)$). Nhận

xét này rất hữu ích bởi vì nó cho ta một phương pháp nữa để giải các phương trình vi phân phức tạp, đặc biệt là đối với các bài toán có điều kiện biên ở vô hạn hoặc là khi giải bằng số.

Lượng cưỡng bức Z theo (b) có thể viết dưới dạng sau:

$$Z = Z1 + Z2 + Z3 \rightarrow Min \quad (e)$$

$$Z1 = \frac{1}{k}(ku - k_0u_0)^2, \quad Z2 = 2c\dot{u}u, \quad Z3 = 2m(\ddot{u} - \ddot{u}_0)u \quad (f)$$

Ở đây $Z1$ viết dưới dạng bình phương tối thiểu. Vì $Z1$ được viết dưới dạng bình phương tối thiểu nên các đại lượng $Z2$ và $Z3$ phải nhân với hệ số 2. Các biểu thức lượng cưỡng bức (b) và (e), (f) là tương đương.

Những nhận xét rút ra từ ví dụ minh họa nêu trên áp dụng đúng cho bất kì hệ nào khác.

Trình bày trên cho thấy có thể dùng hệ có liên kết bất kì để làm hệ so sánh cho nên có thể mở rộng biểu thức (2.8) như sau :

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) r_i \rightarrow Min \quad (2.14)$$

với f_i là nội lực bao gồm lực quán tính và lực liên kết nếu có của hệ cần tính, f_{0i} là nội lực và lực liên kết đã biết của hệ so sánh bất kỳ chịu tác dụng lực ngoài giống như hệ cần tính.

Chú ý rằng khi sử dụng biểu thức (2.14) cần xem chuyển vị r_i là đại lượng độc lập đối với lực và phải thỏa mãn các điều kiện liên kết nếu có. Bởi vì cực tiểu của lượng cưỡng bức Z phải được tìm theo (2.9) (khi không có các ràng buộc nào khác) nghĩa là phải giải phương trình cân bằng của cơ hệ nên bài toán luôn có nghiệm và nghiệm là duy nhất

Phương pháp của nguyên lý (2.14) cho phép dùng hệ so sánh bất kì. Đại lượng biến phân của (2.14) là chuyển vị, điều kiện cực tiểu của nó là biểu

thức (2.9). Phương pháp này do GS. TSKH Hà Huy Cương đề xuất và được gọi là phương pháp nguyên lý cực trị Gauss.

Biểu thức (2.7) trong các giáo trình cơ học thường mang dấu bằng, nghĩa là chỉ xét trường hợp liên kết giữ và khi đó từ (2.7) sẽ nhận được nguyên lý công ảo. Có thể nói biểu thức (2.7) với dấu nhỏ thua hoặc bằng là sự khác biệt cơ bản giữa nguyên lý cơ học của Gauss với cơ học dựa trên nguyên lý công ảo hiện dùng.

2.3. Cơ hệ môi trường liên tục: ứng suất và biến dạng

Trong mục này trình bày phương pháp nguyên lý Gauss đối với cơ hệ môi trường liên tục. Muốn vậy cần biết khái niệm ứng suất và biến dạng của môi trường liên tục. Để trình bày gọn dưới đây dùng các đại lượng tenxơ với cách hiểu như sau [4 ,tr.196]:

$$a_i a_i = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$a_{kk} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

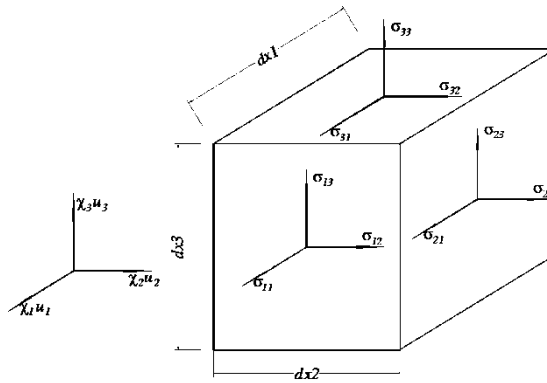
và hệ số Kronecker

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{khi } i = j$$

$$\delta_{ij} = 0 \quad \text{khi } i \neq j$$

với $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$; $k = 1, 2, 3$ đối với không gian 3 chiều.

Có thể nói đối tượng nghiên cứu của cơ hệ môi trường liên tục trong toạ độ vuông góc là phân tố khối chữ nhật (ba chiều, kích thước vô cùng bé) hoặc phân tố chữ nhật (hai chiều, kích thước vô cùng bé) được tách ra từ môi trường (hình 2.3).



Hình 2.3. Trạng thái ứng suất phân tố

Khi đó lý thuyết ứng suất cho thấy ngoài các lực thông thường (lực gây các chuyển vị tịnh tiến trong cơ hệ chất điểm) trên bề mặt phân tố còn có các ứng suất tác dụng. Có 9 ứng suất σ_{ij} tác dụng lên bề mặt phân tố. Thứ nguyên của ứng suất bằng lực chia cho đơn vị diện tích.

Từ điều kiện cân bằng lực và momen sẽ nhận được phương trình cân bằng tĩnh của phân tố

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (2.15)$$

Trong (2.15) σ_{ij} là ứng suất, $\sigma_{ij,j}$ biểu thị đạo hàm của ứng suất theo tọa độ không gian, $\partial\sigma_{ij}/\partial x_j = \sigma_{ij,j}$, b_i là lực khối (lực khối xem như là lực cản). Nếu không có lực momen khối thì từ phương trình cân bằng sẽ có:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.16)$$

Số ứng suất độc lập tác dụng lên bề mặt phân tố chỉ còn 6. Lý thuyết ứng suất cho thấy khi biết trạng thái ứng suất phân tố thì sẽ xác định được trạng thái lực tại điểm đó của môi trường và ngược lại.

Khi chịu tác dụng ngoại lực, phân tố chuyển động và biến hình. Lý thuyết biến dạng cho thấy ngoài các chuyển vị u_i phân tố còn chịu các biến dạng ϵ_{ij} . Nếu xem biến dạng là bé (bình phương hoặc tích hai biến dạng là nhỏ so với chính nó) thì các biến dạng được xác định theo các phương trình sau:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.17)$$

Các ε_{ij} là các đại lượng không thứ nguyên. Tương tự như tenxơ σ_{ij} , tenxơ ε_{ij} đối xứng và có 6 biến dạng độc lập tương ứng với 6 ứng suất.

Từ (2.17) thấy rằng trạng thái chuyển vị xác định duy nhất trạng thái biến dạng, nhưng ngược lại không đúng bởi vì có những chuyển vị không gây biến dạng (chuyển vị của vật rắn tuyệt đối). Ngoài các phương trình nêu trên, để bảo đảm tính liên tục của môi trường còn có các các phương trình về điều kiện không bị gián đoạn.

Tùy theo tính chất cơ học của vật liệu môi trường mà có các liên hệ khác nhau giữa ứng suất và biến dạng. Do có 6 ứng suất và 6 biến dạng nên một cách tổng quát cần biết 36 thông số tính chất vật liệu. Tuy nhiên từ điều kiện biểu thị năng lượng biến dạng phải giống nhau con số 36 rút xuống còn 21. Đối với vật liệu đẳng hướng chỉ còn 2 thông số tính chất vật liệu độc lập được chọn trong số các thông số sau: hai hằng số Lamé μ và λ , môđun Young E , môđun trượt G và hệ số Poisson ν , giữa chúng có các liên hệ sau đây :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.18)$$

Đối với vật liệu đồng nhất, đẳng hướng, tuân theo định luật Húc (Hooke) thì liên hệ giữa ứng suất và biến dạng sẽ là :

$$\sigma_{ij} = 2G \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (2.19)$$

Từ công thức (2.19) thấy rằng ứng suất σ_{ij} không những phụ thuộc vào biến dạng ε_{ij} theo phương của nó mà còn phụ thuộc vào các biến dạng theo các phương khác thông qua hệ số Poisson ν . Hệ số $2G$ để tiện trình bày sau này sẽ được gọi là *độ cứng của biến dạng*.

Những trình bày trên cho thấy đối với cơ hệ môi trường liên tục cần xem các biến dạng ε_{ij} là độc lập đối với nhau và được xác định theo phương trình (2.17), cần xét các phương trình về điều kiện không bị gián đoạn của môi trường và liên hệ giữa ứng suất và biến dạng. Đối với môi trường đàn

hội, đồng nhất, đẳng hướng liên hệ ứng suất - biến dạng lấy theo (2.19) và điều kiện không bị gián đoạn của môi trường tự động thoả mãn khi biểu thị ứng suất qua chuyển vị.

Tóm lại, khác với cơ hệ chất điểm, trong môi trường liên tục ngoài lực khối và lực quán tính là các lực tác dụng gây chuyển vị, còn phải xét thêm các ứng suất σ_{ij} gây ra các biến dạng ϵ_{ij} .

Từ nhận xét vừa nêu, có thể sẽ có ích đối với nhận thức khi đưa ra các nhận định tổng quát về mối tương quan giữa cơ học chất điểm và cơ hệ môi trường liên tục như sau:

- Khái niệm cơ bản của cơ chất điểm là chất điểm, các lực tác dụng lên chất điểm gây ra các chuyển vị, đặc trưng của chất điểm là khối lượng;
- Khái niệm cơ bản của cơ hệ môi trường liên tục là mặt cắt phân tử, các ứng suất gây ra các biến dạng, các đặc trưng của mặt cắt phân tử là các độ cứng biến dạng tương ứng với các ứng suất. Các độ cứng này xác định tùy theo tính chất vật liệu môi trường. Trong cơ hệ môi trường liên tục còn có lực khối và lực quán tính gây chuyển vị giống như trong cơ hệ chất điểm. Do đó, có thể tóm tắt mối tương quan vừa nêu dưới dạng:

Chất điểm \Leftrightarrow *Mặt cắt phân tử*

Lực \Leftrightarrow *Lực*

Các ứng suất

Chuyển vị \Leftrightarrow *Chuyển vị*

Biến dạng

Khối lượng \Leftrightarrow *Khối lượng*

Các độ cứng biến dạng

Kí hiệu \Leftrightarrow chỉ sự tương đương giữa các khái niệm. Với cách hiểu này cũng dễ dàng xây dựng phép hàm lượng cưỡng bức tương tự như (2.14) đối với cơ hệ môi trường liên tục bất kỳ được trình bày sau đây.

Trước tiên, ta dùng hệ so sánh là hệ chất điểm có cùng khối lượng, cùng chịu tác dụng lực ngoài và hoàn toàn tự do. Đối với môi trường liên tục

cần xét thêm ứng suất và biến dạng nên lượng cường bức Z của hệ viết tương tự (2.14) như sau:

$$Z_{\dots} = Z_1 + Z_2 \rightarrow \text{Min}$$

$$Z_1 = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad , \quad Z_2 = \int_V (\rho \ddot{u}_i u_i + b_i u_i - \rho \ddot{u}_{0i} u_i) dV \quad (2.20)$$

Trong (2.20) V là thể tích vật thể, ρ là khối lượng đơn vị. Lực quán tính là lực cản nên trong (2.20) mang dấu cộng. Lượng cường bức Z_1 xét ứng suất của môi trường liên tục cần tính, hệ chất điểm so sánh không có ứng suất. Lượng cường bức Z_2 xét lực khối và lực quán tính của môi trường liên tục, lực quán tính của hệ chất điểm so sánh. Các lực này đều gây chuyển vị u .

Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, trong (2.20) cần xem các biến dạng ε_{ij} là độc lập đối với các ứng suất σ_{ij} và các chuyển vị u_i là độc lập đối với lực tác dụng (ở đây là lực khối và lực quán tính) và độc lập đối với nhau. Điều kiện cực tiểu của (2.20) là

$$\frac{\partial Z_1}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial Z_2}{\partial u_i} = 0 \quad (2.21.a)$$

Nếu biến dạng ε_{ij} biểu thị qua chuyển vị (công thức (2.17)) thì điều kiện cực tiểu của (2.20) được viết như sau:

$$\frac{\partial Z_1}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial u_i} + \frac{\partial Z_2}{\partial u_i} = 0 \quad (2.21.b)$$

Từ điều kiện (2.21.a) nhận được

$$\sigma_{ij,j} + b_i + \rho \ddot{u}_i - \rho \ddot{u}_{0i} = 0 \quad (2.22)$$

Phương trình (2.22) là phương trình vi phân cân bằng của cơ hệ môi trường liên tục dưới dạng ứng suất.

Nếu tại điểm đang xét không có lực ngoài tác dụng thì $\rho \ddot{u}_{0i}$ bị triệt tiêu, phương trình (2.22) là phương trình cân bằng động lực học thường gặp của cơ hệ môi trường liên tục. Trường hợp bài toán tĩnh, $\rho \ddot{u}_i$ cũng bằng không, phương trình (2.22) khi đó trùng với (2.15).

Để dàng nhận được phương trình vi phân cân bằng dưới dạng chuyển vị bằng cách đưa liên hệ ứng suất - biến dạng vào phương trình (2.22) hoặc vào phiếm hàm (2.20). Trong mục (2.5) dưới đây sẽ trở lại vấn đề này.

Cần nêu nhận xét rằng biểu thức (2.20) cho phép so sánh cơ hệ môi trường liên tục với cơ hệ chất điểm hoàn toàn tự do khi hai hệ cùng chịu lực ngoài như nhau. Trong (2.20) không chứa các thông số tính chất vật liệu của môi trường nên nó đúng với môi trường bất kỳ.

Xét các trường hợp khác của phiếm hàm lượng cưỡng bức (2.20):

- Trường hợp không dùng hệ so sánh thì phải đưa lực ngoài p_i vào (2.20). Lực p_i thường tác dụng lên bề mặt Ω của vật nên ta viết

$$Z = \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + \rho \ddot{u}_i u_i - b_i u_i) dv - \int_{\Omega} p_i u_i d\Omega \rightarrow Min \quad (2.23)$$

- Có thể dùng hệ so sánh cũng là cơ hệ môi trường liên tục có liên kết bất kỳ với điều kiện hai hệ cùng chịu lực ngoài giống nhau:

$$Z = \int_V [(\sigma_{ij} - \sigma_{0ij}) \varepsilon_{ij} + (\rho \ddot{u}_i - \rho_0 \ddot{u}_{0i}) u_i - (b_i - b_{0i}) u_i] dv \rightarrow Min \quad (2.24)$$

Giống như đã trình bày ở ví dụ 3, thực chất của phương pháp nguyên lý cực trị Gauss là dùng nội lực của hệ so sánh tác dụng lên hệ cần tìm.

- Đối với bài toán tĩnh, lực quán tính triệt tiêu, khi không xét lực khối, biểu thức (2.24) có dạng:

$$Z = \int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{0ij}) \varepsilon_{ij} dv \rightarrow Min \quad (2.25)$$

- Đối với bài toán tĩnh, không xét lực khối, không dùng hệ so sánh, từ (2.23) ta có:

$$Z = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv - \int_{\Omega} p_i u_i d\Omega \rightarrow Min \quad (2.26)$$

Các chuyển vị u_i và biến dạng ε_{ij} (xác định theo (2.17)) trong các phiếm hàm (2.20, 2.23, 2.24, 2.25) và (2.26) là những đại lượng độc lập đối với lực tác dụng và ứng suất và phải thoả mãn các điều kiện liên kết nếu có. Chuyển động thực của cơ hệ môi trường liên tục xảy ra khi cực tiểu các phiếm hàm

lượng cường bức vừa nêu theo điều kiện (2.21) nếu không có các điều kiện liên kết nào khác.

Đối với môi trường đàn hồi, quan hệ ứng suất – biến dạng xác định theo (2.19), ta có thể viết lượng cường bức dưới dạng bình phương tối thiểu như nhận xét đã nêu ở ví dụ 3:

$$Z = \int_V \frac{1}{2G} (\sigma_{ij} - \sigma_{0ij})^2 dv + 2 \int_V (f_{mi} - f_{0mi}) u_i dv \rightarrow Min \quad (2.27a)$$

hoặc

$$Z = \int_V 2G (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{0ij})^2 dv + 2 \int_V m_i (\ddot{u}_i - \ddot{u}_{0i}) u_i dv \rightarrow Min$$

Tương tự, khi không dùng hệ so sánh thì phải xét lực ngoài, có thể viết lại (2.26) như dưới đây

$$Z = \int_V \frac{1}{2G} (\sigma_{ij})^2 dv + 2 \int_V f_{mi} u_i dv - 2 \int_{\Omega} p_i u_i d\Omega \rightarrow Min \quad (2.27b)$$

hoặc

$$Z = \int_V 2G (\varepsilon_{ij})^2 dv + 2 \int_V (m_i \ddot{u}_i) u_i dv - 2 \int_{\Omega} p_i u_i d\Omega \rightarrow Min$$

Trong (2.27) $f_{mi} = m_i \ddot{u}_i$ và $f_{0mi} = m_{0i} \ddot{u}_{0i}$ là lực quán tính của hệ cần tính và hệ so sánh, liên hệ giữa ứng suất và biến dạng xác định theo biểu thức (2.19). Trong (2.27), cần xem các biến dạng ε_{ij} là các đại lượng biến phân độc lập đối với các ứng suất σ_{ij} , các chuyển vị u_i là độc lập đối với lực tác dụng p và lực quán tính.

Tích phân thứ nhất trong (2.27) liên quan đến ứng suất đàn hồi có trọng số là $2G$, Trở lên trình bày các phiếm hàm lượng cường bức, đối với cơ hệ chất điểm là các biểu thức (2.14), đối với môi trường liên tục là biểu thức (2.20) và các trường hợp khác của nó là các biểu thức (2.23), (2.24), (2.25), (2.26) và (2.27). Trong các phiếm hàm này cần xem các biến dạng ε_{ij} xác định theo (2.17) và các chuyển vị u_i là các đại lượng không biết độc lập đối với ứng suất và lực tác dụng, thỏa mãn các điều kiện liên kết nếu có và các điều kiện không bị gián đoạn (riêng đối với môi trường liên tục). Cực tiểu các phiếm hàm này theo điều kiện (2.21) cho ta chuyển vị thực của cơ hệ cần tính.

Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss là phương pháp mới trong cơ học môi trường liên tục.

2.4. Cơ học kết cấu

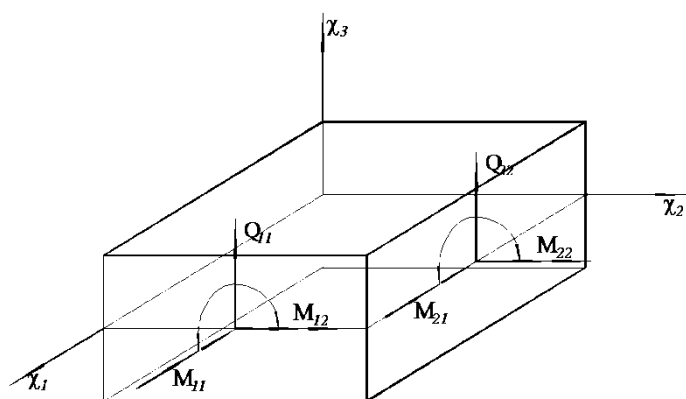
Môn sức bền vật liệu và cơ học kết cấu nghiên cứu trạng thái ứng suất biến dạng của dầm, thanh, tấm, khung, dàn v.v... là những kết cấu có một hoặc hai kích thước nhỏ thua nhiều lần so với các kích thước còn lại. Trong trường hợp này để đơn giản nhưng kết quả tính vẫn bảo đảm độ chính xác đủ dùng trong thực tế (kiểm tra bằng thí nghiệm), có thể dùng mặt cắt kết cấu thay cho mặt cắt phân tố và các ứng suất tác dụng lên mặt cắt được quy về thành các nội lực tác dụng lên mặt trung bình (đường trung bình đối với dầm) như lực dọc N , momen uốn M , lực cắt Q v.v... Muốn vậy cần đưa vào các giả thiết sau đây:

- Khi chịu lực dọc trục, ứng suất pháp được xem là phân bố đều trên tiết diện.
- Khi chịu lực ngang (tác dụng thẳng góc với mặt trung bình) có các giả thiết sau đây:

Mặt trung bình của tấm và trục trung bình của dầm không có nội lực và do đó không bị biến dạng.

Giả thiết tiết diện phẳng: tiết diện sau khi biến dạng vẫn phẳng.

Không xét ứng suất nén giữa các lớp theo chiều cao tiết diện, nghĩa là xem các lớp song song với mặt trung bình (tấm) làm việc ở trạng thái ứng suất phẳng.



Hình 2.4. Nội lực của phân tử tấm

Sử dụng các giả thiết trên, các momen uốn và xoắn và lực cắt tác dụng lên mặt cắt kết cấu xác định theo các biểu thức dưới đây (hình 2.4):

$$M_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} x_3 dx_3, \quad M_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} x_3 dx_3, \quad M_{12} = M_{21} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} x_3 dx_3$$

$$Q_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} dx_3, \quad Q_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23} dx_3 \quad (2.28)$$

ở đây h là chiều cao tiết diện.

Để có thể áp dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss cần biết các ‘biến dạng’ của tiết diện do momen uốn gây ra. Với các giả thiết nêu trên chỉ cần biết chuyển vị thẳng đứng w của trục hoặc mặt trung bình của kết cấu (còn gọi là đường độ võng, đường đàn hồi) thì trong trường hợp uốn thuần túy có thể tính được các chuyển vị theo các phương còn lại và dùng các phương trình (2.17) để xác định các biến dạng. Kết quả cho thấy các biến dạng trong mặt phẳng tấm (hoặc thớ dầm) phân bố tuyến tính theo chiều cao và tỉ lệ với độ cong χ_{ij} của mặt võng ($i=1,2; j=1,2$):

$$\varepsilon_{ij} = x_3 \chi_{ij} ;$$

$$\chi_{11} = -w_{,11}, \quad \chi_{22} = -w_{,22}, \quad \chi_{12} = -w_{,12} . \quad (2.29)$$

Dấu trừ trong công thức xác định độ cong (2.29) là do xem chuyển vị w có chiều dương hướng xuống dưới và dấu nội lực như trên hình 2.4. Như vậy, độ cong χ_{ij} của các lớp song song với mặt trung bình là giống nhau và đó là ‘biến dạng’ do momen M_{ij} gây ra. Biết được biến dạng ε_{ij} xác định theo (2.29) sẽ tính được momen M_{ij} theo (2.28). Liên hệ giữa momen uốn và ‘biến dạng uốn’ của tiết diện như sau:

$$M_{11} = D(\chi_{11} + \nu\chi_{22}), \quad M_{22} = D(\chi_{22} + \nu\chi_{11}), \quad M_{12} = D(1-\nu)\chi_{12} \quad (2.30)$$

ở đây D là độ cứng uốn

$$\text{đối với dầm } D = EJ = \frac{Eh^3}{12}, \quad \text{đối với tấm } D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

và $D(1-\nu)$ được gọi là độ cứng xoắn (độ cứng của biến dạng xoắn).

(ở đây cần chú ý rằng do có liên kết gối tựa nên mặt trung bình có thể bị biến dạng trong mặt phẳng của nó, giả thiết mặt trung bình là mặt trung hoà nêu trên không được thoả mãn. Trong trường hợp này độ võng phải là bé so với chiều cao dầm hoặc chiều dày tấm để có thể bỏ qua ứng suất tác dụng trong mặt trung bình).

Trong trường hợp có lực cắt Q_{ii} thì chúng được xác định từ điều kiện cân bằng phân tố, ta có:

$$Q_{11} = \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2}, \quad Q_{22} = \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_1}$$

$$\text{hay } Q_{11} = D[(\chi_{11})_{,1} + (\chi_{12})_{,2}], \quad Q_{22} = D[(\chi_{12})_{,1} + (\chi_{22})_{,2}] \quad (2.31)$$

Từ công thức (2.28) có thể thấy độ cứng chịu cắt của tiết diện là Gh và biến dạng trượt γ_{11} và γ_{22} tương ứng với lực cắt sẽ bằng góc xoay của đường đàn hồi:

$$\gamma_{11} = w_{,1} = \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad \gamma_{22} = w_{,2} = \frac{\partial w}{\partial x_2} \quad (2.32)$$

Trong lý thuyết kết cấu chịu uốn nêu trên, độ võng của kết cấu chỉ do momen uốn gây ra, không xét biến dạng trượt do lực cắt gây ra.

Đối với các lực N_{ij} tác dụng lên mặt trung bình của tiết diện thì các biến dạng ε_{ij} ($i=1,2;j=1,2$) vẫn xác định theo (2.17). Độ cứng của tiết diện chịu nén kéo sẽ là Eh .

Trong các công thức vừa nêu lấy $i=1,j=1$ đối với bài toán một chiều (thanh, dầm), chiều rộng dầm bằng đơn vị.

Do sử dụng momen uốn của tiết diện nên phải đưa thêm các liên kết về xoay để mô tả các điều kiện biên của nó: liên kết khớp cho phép tiết diện xoay tự do, momen bằng không; liên kết ngàm không cho tiết diện xoay, momen khác không.

Sau khi đã biết ‘các biến dạng’ tương ứng với các nội lực của tiết diện (momen uốn, lực cắt, lực dọc trục v.v..) và độ cứng của chúng thì dễ dàng xây dựng các bài toán cơ học kết cấu theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss.

Ta có thể viết một cách tổng quát lượng cưỡng bức Z của bài toán cơ học kết cấu dưới dạng tương tự như (2.25) (bài toán tĩnh):

$$Z = \int_V [(M_{ij} - M_{0ij})\chi_{ij} + (Q_{ii} - Q_{0ii})\gamma_{ii} + (N_{ij} - N_{0ij})\varepsilon_{ij}] dv \rightarrow Min \quad (2.33a)$$

hoặc dưới dạng bình phương tối thiểu

$$Z = \int_V \frac{1}{Docung} (\text{Nội lực hệ cần tính} - \text{Nội lực hệ so sánh})^2 dv \rightarrow Min \quad (2.33b)$$

và trong trường hợp không dùng hệ so sánh ta có

$$Z = \int_V \frac{1}{Docung} (\text{Nội lực hệ cần tính})^2 dv - 2 \int_{\Omega} p_i w_i d\Omega \rightarrow \quad (2.33c)$$

ở đây V là chiều dài dầm hoặc diện tích tấm, Ω là chiều dài hoặc diện tích phạm vi đặt lực. Trong (2.33) cần xem các độ cong χ_{ij} là các đại lượng

độc lập đối với nội lực momen uốn M_{ij} , các biến dạng trượt γ_{11} và γ_{22} là các đại lượng độc lập đối với lực cắt Q_{11} và Q_{22} , các biến dạng trong mặt trung bình ε_{ij} là các đại lượng độc lập đối với N_{ij} và đều là các đại lượng biến phân của bài toán. Điều đó chỉ ra rằng cực tiểu của lượng cường bức Z , biểu thức (2.33), chỉ có thể tìm từ điều kiện:

$$\frac{\partial Z}{\partial \chi_{ij}} \frac{\partial \chi_{ij}}{\partial W} + \frac{\partial Z}{\partial \gamma_{ii}} \frac{\partial \gamma_{ii}}{\partial W} + \frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial W} + \frac{\partial Z}{\partial W} = 0 \quad (2.34)$$

Bởi vì các biến dạng uốn, biến dạng cắt v.v... là hàm của độ võng và độ võng là hàm của tọa độ nên điều kiện (2.34) được tính bằng phép tính biến phân và sẽ cho ta phương trình cân bằng tĩnh của kết cấu (xem mục 2.5 dưới đây).

Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss với biểu thức lượng cường bức Z viết theo (2.33) và điều kiện cực tiểu (2.34) là phương pháp mới, tổng quát trong cơ học kết cấu.

Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss và các phương trình cân bằng của cơ hệ

Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, nếu như biết được các lực và nội lực của cơ hệ và các chuyển vị và biến dạng do chúng gây ra thì có thể viết được lượng cường bức Z của hệ. Dùng phép tính biến phân với đại lượng biến phân là các chuyển vị độc lập đối với lực tác dụng và biến dạng độc lập với ứng suất sẽ nhận được phương trình vi phân cân bằng của hệ (phương trình Ô-le (Euler) của phiếm hàm Z). Sau đây trình bày các ví dụ sử dụng phương pháp vừa nêu để tìm phương trình cân bằng.

2.5.1. Phương trình cân bằng tĩnh đối với môi trường đàn hồi, đồng nhất, đẳng hướng

Ba phương trình vi phân cân bằng của cơ hệ dưới dạng ứng suất là phương trình (2.22). Thế các ứng suất σ_{ij} xác định theo (2.19) vào (2.22) sẽ

có các phương trình vi phân cân bằng của cơ hệ đàn hồi đồng nhất đẳng hướng dưới dạng chuyển vị. Ở đây trình bày cách tính trực tiếp để nhận được các phương trình đó (trường hợp bài toán tĩnh).

Liên hệ biến dạng - chuyển vị (2.17) và ứng suất - biến dạng (2.19) được viết lại trong hệ tọa độ (x,y,z) dưới dạng thường dùng với u, v và w là các chuyển vị tương ứng theo các chiều (x,y,z) như sau:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} \\ &+ \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \end{aligned}$$

$$\sigma_x = 2G\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right), \quad \sigma_y = 2G\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right), \quad \sigma_z = 2G\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}, \quad \tau_{xz} = G \gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz} \quad (2.34)$$

ở đây $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ - biến dạng thể tích của phân tử.

Ta viết lượng cường bức Z theo (2.25) cho mỗi ứng suất và lực khối b :

$$Z1 = \int_V 2G\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right)\frac{\partial u}{\partial x} dV, \quad Z2 = \int_V 2G\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right)\frac{\partial v}{\partial y} dV,$$

$$Z3 = \int_V 2G\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right)\frac{\partial w}{\partial z} dV, \quad Z4 = \int_V G \gamma_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dV,$$

$$Z5 = \int_V G \gamma_{xz} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) dV, \quad Z6 = \int_V G \gamma_{yz} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) dV$$

$$Z7 = \int_V b_x u dV, \quad Z8 = \int_V b_y v dV, \quad Z9 = \int_V b_z w dV \quad (2.35)$$

Lượng cường bức Z bằng tổng các lượng cường bức thành phần :

$$Z = Z1+Z2+Z3+Z4+Z5+Z6+Z7+Z8+Z9 \quad \rightarrow Min$$

Từ điều kiện cực tiểu (1.21) của phiếm hàm Z viết lại dưới dạng

$$\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial u} + \frac{\partial Z}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial w} + \frac{\partial Z}{\partial w} = 0 \quad (2.36)$$

sẽ nhận được ba phương trình vi phân cân bằng tĩnh. Bởi vì u, v và w là các hàm của tọa độ (x,y,z), không phải là biến độc lập, nên phép tính (2.36) là phép tính biến phân. Phương trình cân bằng thứ nhất với u là hàm chưa biết nhận được với chú ý rằng

- đại lượng biến phân của Z1 (ứng với σ_x) là ε_x hay $\frac{\partial u}{\partial x}$, như vậy

$$\frac{\partial Z1}{\partial \varepsilon_x} = - \frac{\partial}{\partial x} 2G \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu} \theta \right) = - 2G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \theta \right)$$

- đại lượng biến phân của Z4 (ứng với τ_{xy}) là γ_{xy} có thành phần $\frac{\partial u}{\partial y}$,

nên

$$\frac{\partial Z4}{\partial \gamma_{xy}} = - G \frac{\partial}{\partial y} \gamma_{xy} = -G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)$$

- đại lượng biến phân của Z5 (ứng với τ_{xz}) là γ_{xz} có thành phần $\frac{\partial u}{\partial z}$,

nên

$$\frac{\partial Z5}{\partial \gamma_{xz}} = -G \frac{\partial}{\partial z} \gamma_{xz} = -G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} \right)$$

- đại lượng biến phân của Z7 là u, nên

$$\frac{\partial Z7}{\partial u} = b_x$$

Tổng cộng

$$\frac{\partial Z1}{\partial u} + \frac{\partial Z4}{\partial u} + \frac{\partial Z5}{\partial u} + \frac{\partial Z7}{\partial u} = 0$$

sau khi rút gọn sẽ là :

$$G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{G}{1-2\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x}\theta\right) + b_x = 0 \quad (2.37)$$

Phương trình cân bằng thứ hai nhận được với v là hàm chưa biết. Trong (2.35) các đại lượng biến phân của v có ở $Z2, Z4, Z6$ và $Z8$. Phương trình cân bằng thứ ba nhận được với w là hàm chưa biết. Trong (2.35) các đại lượng biến phân của w có ở $Z3, Z5, Z6$ và $Z9$. Bằng cách tính biến phân tương tự sẽ có thêm hai phương trình cân bằng sau:

$$G\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \frac{G}{1-2\nu}\left(\frac{\partial}{\partial y}\theta\right) + b_y = 0 \quad (2.38)$$

$$G\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \frac{G}{1-2\nu}\left(\frac{\partial}{\partial z}\theta\right) + b_z = 0 \quad (2.39)$$

Ba phương trình (2.37), (2.38) và (2.39) là các phương trình vi phân cân bằng của cơ hệ đàn hồi, đồng nhất và đẳng hướng và được gọi là phương trình Navier [4] Dưới dạng tenxơ các phương trình này được viết gọn như sau:

$$G u_{j,kk} + \frac{G}{1-2\nu} u_{k,kj} + b_j = 0 \quad (2.40)$$

2.5.2 Phương trình vi phân của mặt võng của tấm chịu uốn

Xét tấm có chiều dày không đổi. Viết lại các biểu thức (2.30) đối với các nội lực momen uốn và xoắn và (2.31) đối với lực cắt tác dụng lên phân tử tấm trong hệ tọa độ (x,y) ta có :

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ Q_x &= -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right), \quad Q_y = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Biết được các lực tác dụng lên phân tử thì dễ dàng viết được lượng cường bức Z , thí dụ, dưới dạng bình phương tối thiểu theo (2.33.b) (khi không có ngoại lực):

$$Z1 = \int_{\Omega} D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 d\Omega, \quad Z2 = \int_{\Omega} D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 d\Omega,$$

$$Z3 = 2 \int_{\Omega} D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 d\Omega \quad (2.42)$$

ở đây Ω là diện tích tấm. Lượng cường bức Z bằng tổng các lượng cường bức do mỗi thành phần nội lực momen uốn và xoắn gây ra :

$$Z = Z1 + Z2 + Z3 \rightarrow Min \quad (2.43)$$

Chú ý rằng trong (2.43) ta chỉ xét nội lực momen, chưa xét tới lực cắt , phân tử không có lực ngoài tác dụng. Hệ số 2 trong $Z3$ để xét momen xoắn tác dụng bằng nhau lên hai chiều x, y . Các ‘biến dạng’ tương ứng với các nội lực momen xác định theo (2.29) :

$$\chi_{xx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \chi_{yy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \chi_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.44)$$

Các ‘biến dạng’ này cần được xem là độc lập đối với các nội lực momen uốn và xoắn và là các đại lượng biến phân của bài toán. Do đó từ điều kiện cực tiểu (2.36) ta có :

$$\frac{\partial Z1}{\partial \chi_{xx}} \frac{\partial \chi_{xx}}{\partial w} = 2D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 2D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right),$$

$$\frac{\partial Z2}{\partial \chi_{yy}} \frac{\partial \chi_{yy}}{\partial w} = 2D \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 2D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right),$$

$$\frac{\partial Z3}{\partial \chi_{xy}} \frac{\partial \chi_{xy}}{\partial w} = 4D(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 4D(1-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \quad (2.45)$$

Tổng cộng các thành phần của (1.45) nhận được phương trình vi phân độ võng của tấm chịu uốn :

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \quad (2.46)$$

Phương trình (2.46) thường được gọi là phương trình Sophie Germain (năm 1811).

Khi xây dựng lượng cưỡng bức Z (biểu thức 2.43) không xét tới lực cắt bởi vì lý thuyết kết cấu chịu uốn trình bày trên không xét biến dạng của lực cắt. Tuy nhiên, trong phạm vi của lý thuyết này, nếu dùng lực cắt xác định theo (2.31) và biến dạng trượt theo (2.32) thì lượng cưỡng bức Z được viết như sau

$$Z = \int_{\Omega} Q_{xx} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) d\Omega + \int_{\Omega} Q_{yy} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) d\Omega \rightarrow Min \quad (2.47)$$

Xem các góc xoay $\frac{\partial w}{\partial x}$ và $\frac{\partial w}{\partial y}$ là các đại lượng biến phân độc lập đối với lực cắt Q_x và Q_y và bằng phép tính biến phân lại nhận được phương trình vi phân (2.46).

Đối với dầm, lượng cưỡng bức viết theo (2.33.a) sẽ là :

$$Z = - \int_l EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (\chi_{xx}) dl - \int_{l_q} qw dl_q \quad (2.48)$$

Trong (2.48) l là chiều dài dầm, $\chi_{xx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ là biến dạng uốn (độ cong) của dầm, l_q là chiều dài đoạn dầm có lực q tác dụng. Phương trình vi phân đường độ võng của dầm:

$$\frac{\partial Z}{\partial \chi_{xx}} \frac{d\chi_{xx}}{dw} + \frac{\partial Z}{\partial w} = EJ \frac{d^4 w}{dx^4} - q = 0 \quad (2.49)$$

CHƯƠNG 3

TÍNH TOÁN DÂY MỀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN LÝ CỰC TRỊ GAUSS

3.1. Bài toán tính dây đơn hiện nay

Khi tính toán, các giả thiết chính được sử dụng trong phân tích các hệ dây là dây chỉ có khả năng chịu kéo và ứng suất kéo được phân bố đều trên toàn bộ diện tích tiết diện ngang của dây, các dây trong hệ không có khả năng chịu nén và uốn (dây mềm tuyệt đối).

Đối với các dây đơn chịu tải trọng lực, hình dạng của dây tuân theo hình dạng của biểu đồ mô men trong dầm đơn giản chịu tác dụng của tải trọng giống như tải trọng tác dụng lên dây. Độ võng lớn nhất trên dây xuất hiện tại điểm ứng với vị trí có mô men lớn nhất và không có lực cắt trên dầm đơn giản (lý thuyết tương tự dầm) [11], [20], **Error! Reference source not found.**

Do vị trí hình học của dây bị thay đổi khi chất tải trọng, nhất là đối với tải trọng ngang so với phương trục dây nên khi tính toán không thể áp dụng các phương pháp phân tích kết cấu phổ biến dựa trên cơ sở lý thuyết chuyển vị nhỏ, và cũng không thể áp dụng nguyên lý cộng tác dụng cho các hệ kết cấu dây. Ngoài ra, các lực căng trong dây sẽ thay đổi khi dây bị kéo dài dưới tác dụng của tải trọng, hệ quả là các phương trình cân bằng đối với kết cấu dây là các phương trình phi tuyến. Để giải hệ phương trình của kết cấu dây thường phải sử dụng các phương pháp tuyến tính hóa và giải lặp liên tiếp các phương trình tuyến tính hóa để hội tụ về lời giải chính xác.

3.1.1. Dây đơn chịu tác dụng của lực phân bố do trọng lượng bản thân

Bài toán tính dây đơn chịu tải trọng bản thân phân bố đều theo chiều dài dây lần đầu tiên được dẫn dắt bởi James Bernouilli năm 1691; lời giải đầu tiên được công bố bởi David Gregory năm 1697 [25].

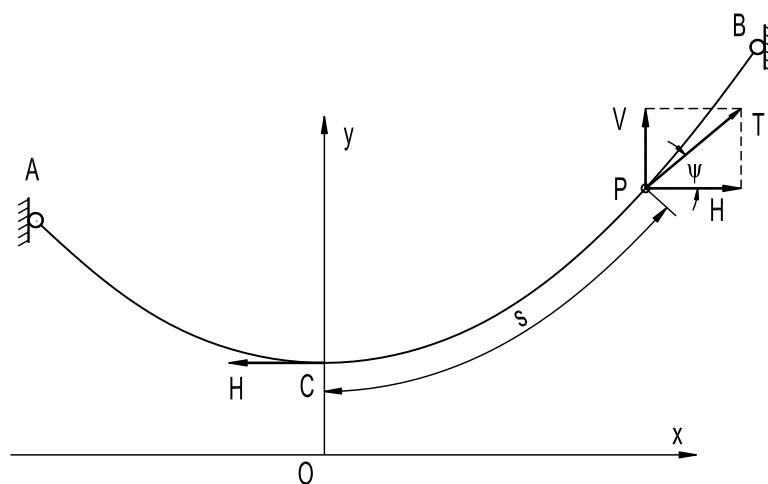
Xét dây đơn treo trên hai gối lệch mức A và B, dây có tiết diện không thay đổi và trọng lượng của dây phân bố đều dọc theo chiều dài của dây, gọi C là điểm thấp nhất trên dây khi dây bị võng (Hình).

Đặt hệ tọa độ xOy có gốc ngay bên dưới điểm thấp nhất trên đường độ võng của dây, gọi g là trọng lượng trên một đơn vị dài của dây và s là chiều dài dây tính từ điểm C đến một điểm P bất kỳ trên dây, T là lực căng trong dây tại điểm P , H là thành phần chiếu lên phương ngang của lực căng trong dây và cũng là lực căng trong dây tại điểm võng nhất C , góc nghiêng giữa tiếp tuyến của dây tại P với phương ngang là ψ , V là thành phần hình chiếu lên phương đứng của lực căng trong dây.

Dây được xem là mềm tuyệt đối. Từ điều kiện cân bằng của đoạn dây CP ta có các phương trình cân bằng lực như sau:

$$T \cos \psi = H \quad (3.1)$$

$$T \sin \psi = g \cdot s \quad (3.2)$$



Hình 3.1. Sơ đồ tính dây đơn treo trên hai góí lệch mức

Đặt $H = g \cdot c$ và chia phương trình (3.2) cho phương trình (3.1) ta có:

$$s = c \tan \psi \quad (3.3)$$

Biểu thức **Error! Reference source not found.** là phương trình của đường cong dây do trọng lượng bản thân (đường catenary), hằng số c được gọi là tham số của đường catenary. Biểu diễn trong hệ tọa độ Đề các thì phương trình **Error! Reference source not found.** có thể viết lại dưới dạng:

$$c \frac{dy}{dx} = s \quad (3.4)$$

Lấy đạo hàm theo x, từ các biểu thức (3.3) và (3.4) ta nhận được:

$$c \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (3.5)$$

Tích phân biểu thức (3.5) ta nhận được:

$$c \cdot \sinh^{-1}(dy/dx) = x + A,$$

với A là hằng số tích phân. Do gốc tọa độ nằm thẳng đứng ngay bên dưới điểm võng nhất trên dây C, nên tại $x=0$ thì $dy/dx=0$, vì vậy $A=0$ và ta có phương trình vi phân đường độ võng của dây là:

$$\frac{dy}{dx} = \sinh \frac{x}{c} \quad (3.6)$$

Tích phân biểu thức (3.6) ta nhận được:

$$y = c \cdot \cosh \frac{x}{c} + B$$

với B là hằng số tích phân. Nếu ta bố trí hệ tọa độ sao cho khoảng cách $\overline{OC} = c$ thì tại $x=0$ ta có $y=c$ và do đó $B=0$. Do vậy phương trình dạng đường độ võng của dây đơn do tác dụng của trọng lượng bản thân phân bố đều trên dây là:

$$y = c \cosh \frac{x}{c} \quad (3.7)$$

Từ (3.3) và (3.6), chiều dài dây tính từ điểm thấp nhất đo dọc theo dây được xác định theo biểu thức:

$$s = c \cdot \sinh \frac{x}{c} \quad (3.8)$$

Để tính lực căng tại một điểm bất kỳ trên dây, bình phương các biểu thức **Error! Reference source not found.** và **Error! Reference source not found.** rồi cộng lại theo từng vế ta được $T^2 = g^2(c^2 + s^2)$, xét đến các biểu thức (3.7) và (3.8), sau khi biến đổi ta có:

$$T = g.y \quad (3.9)$$

Từ các kết quả trên, nhận thấy: Lực căng trong dây có phương tiếp tuyến với đường cong của dây và có thể được phân thành các thành phần theo phương ngang và phương đứng; thành phần nằm ngang $H = g.c$ là không đổi ở mọi điểm dọc theo dây; thành phần thẳng đứng $V = g.s$ và thay đổi theo các điểm trên dây. Lực căng lớn nhất trong dây sẽ xuất hiện ở cùng vị trí mà thành phần lực thẳng đứng đạt giá trị lớn nhất, và thường ở vị trí một trong các gó treo dây, còn lực căng trong dây nhận giá trị nhỏ nhất tại điểm có độ võng lớn nhất.

Từ các biểu thức (3.7)÷(3.9) ta thấy để xác định được lực căng trong dây cũng như độ võng của dây tại một điểm bất kỳ trên dây thì cần phải xác định được tham số c của đường catenary. Việc này chỉ có thể giải đúng dần nếu cho trước chiều dài tổng cộng của dây hoặc độ võng lớn nhất của dây.

3.1.2. Dây đơn chịu tác dụng của lực thẳng đứng phân bố đều theo nhịp

Bài toán dây đơn chịu tác dụng của tải trọng thẳng đứng phân bố đều theo nhịp là bài toán khá phổ biến trong thực tiễn, đặc biệt trong xây dựng cầu treo dây võng. Mặc dù bài toán dây đơn chịu tải trọng bản thân được giải quyết từ đầu thế kỷ XVII, nhưng mãi đến hơn 100 năm sau lời giải đầu tiên của bài toán dây đơn chịu tải trọng thẳng đứng phân bố đều theo nhịp mới được giải và công bố bởi Nicholas Fuss khi thiết kế cầu treo qua sông Neva gần Leningrad (LB Nga) vào năm 1794 [25].

Xét dây đơn treo trên hai gó tựa A và B. Dây chịu tác dụng của tải trọng theo phương trọng lực và phân bố đều theo nhịp với cường độ là g_0 . Đặt hệ tọa độ có gốc tại điểm thấp nhất trên dây (điểm C). Gọi T là lực căng trong dây tại P, H là thành phần chiếu lên phương ngang của lực căng trong dây và cũng là lực căng trong dây tại điểm võng nhất C, góc nghiêng giữa tiếp tuyến của dây tại P với phương ngang là ψ , V là thành phần hình chiếu lên phương đứng của lực căng trong dây.

Dây được xem là mềm tuyệt đối và không bị dẫn dài do trọng lượng bản thân. Từ điều kiện cân bằng của đoạn dây CP ta có các phương trình cân bằng lực như sau:

$$T \cos \psi = H \quad (3.10)$$

$$T \sin \psi = g_0 \cdot x \quad (3.11)$$

Chia biểu thức (3.11) cho biểu thức (3.10) ta có:

$$\tan \psi = \frac{dy}{dx} = \frac{g_0 \cdot x}{H} \quad (3.12)$$

Tích phân biểu thức **Error! Reference source not found.**, khử hằng số tích phân từ điều kiện $y=0$ tại $x=0$ ta được phương trình biểu diễn đường độ võng của dây là đường parabol:

$$y = \frac{g_0}{2H} x^2 \quad (3.13)$$

Lực căng tại một điểm bất kỳ trên dây được xác định từ biểu thức **Error! Reference source not found.**: $T = H(ds/dx) = H\sqrt{1+(dy/dx)^2}$. Từ **Error! Reference source not found.** ta có $dy/dx = g_0 x/H$ nên thay vào ta nhận được biểu thức tính lực căng tại điểm bất kỳ trên dây:

$$T = H\sqrt{1 + \frac{g_0^2 \cdot x^2}{H^2}} \quad (3.14)$$

Trường hợp đặc biệt khi dây treo trên các góì ngang mức, khi đó điểm võng nhất của dây tại giữa nhịp, lực căng trong dây tại vị trí các góì bằng nhau và có thể xác định theo các biểu thức sau:

+ Thành phần ngang của lực căng: $H = \frac{g_0 l^2}{8f} \quad (3.15)$

+ Lực căng trong dây tại góì: $T_{\max} = \frac{g_0 l^2}{8f} \sqrt{1 + \frac{16f^2}{l^2}} \quad (3.16)$

+ Chiều dài của dây giữa hai góì treo:

$$L = l \left(1 + \frac{8 f^2}{3 l^2} - \frac{32 f^4}{5 l^4} + \frac{256 f^6}{7 l^6} + \dots \right) \quad (3.17)$$

Cũng tương tự như với trường hợp dây chịu tải trọng bản thân phân bố đều theo nhịp, ở đây ta cũng nhận thấy các phương trình nhận được mới chỉ cho ta quy luật đường độ võng của dây và sự phân bố của lực căng trong dây mà chưa tính được biến dạng của dây; ngoài ra để tính được lực căng hay đường độ võng của dây vẫn phải cho trước chiều dài dây hoặc mũi tên võng của dây.

Lời giải của bài toán tính độ dẫn dài và chuyển vị của dây đơn dưới tác dụng của tải trọng hay nhiệt độ đã được công bố bởi Rankine năm 1858 và Routh năm 1891[25], dưới tác dụng của tải trọng phân bố đều hay nhiệt độ làm dây bị biến dạng đàn hồi và đường độ võng của dây vẫn giữ nguyên dạng là đường catenary hay đường parabol nhưng độ võng và chiều dài tăng lên. Tuy nhiên trong thực tiễn tính toán thường xấp xỉ bằng đường parabol, khi đó độ dẫn dài (biến dạng đàn hồi) của dây dưới tác dụng của tải trọng phân bố đều:

$$\Delta L = \frac{HI}{AE} \left(1 + \frac{16 f^2}{3 l^2} \right) \quad (3.18)$$

trong đó: A là diện tích tiết diện ngang của dây; E là mô đun đàn hồi của vật liệu dây; H là thành phần chiếu lực căng trong dây theo phương ngang; l là chiều dài nhịp treo dây; f là mũi tên võng của đường độ võng của dây. Biến thiên độ võng của dây tại giữa nhịp được tính gần đúng theo:

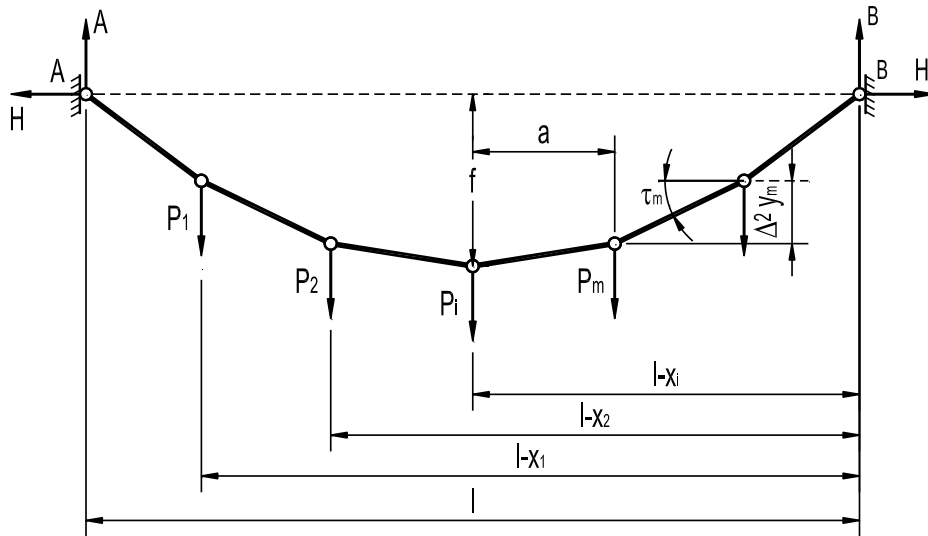
$$\Delta f = \frac{15 l}{16 f} \left(\frac{\Delta L}{5 - 24 f^2 / l^2} \right) \quad (3.19)$$

Biến thiên của độ võng của dây dưới tác dụng của nhiệt độ có thể tính theo biểu thức (3.20) với hệ số giãn nở nhiệt của vật liệu dây là α .

$$\Delta f = \frac{15}{16 f} \frac{l^2 \alpha t}{(5 - 24 f^2 / l^2)} \left(1 + \frac{8 f^2}{3 l^2} \right) \quad (3.20)$$

3.1.3. Dây đơn chịu tác dụng của tải trọng bất kỳ

Bài toán dây đơn chịu tác dụng của tải trọng tập trung đã được nhiều tác giả nghiên cứu như Melan [38], Petropavlovski **Error! Reference source not found.** Dây thường được xấp xỉ bằng những đường gãy khúc liên tục (hình 3.2). Sử dụng lý thuyết đàn hồi để tiến hành phân tích xét cân bằng của dây dưới tác dụng của các lực tập trung. Để xét đến biến dạng dài của dây dưới tác dụng tải trọng vẫn phải sử dụng các lời giải lặp.



Hình 3.2. Sơ đồ tính dây của Melan [38]

V.A. Smirnov (1975) **Error! Reference source not found.** đã trình bày lời giải cho bài toán dây chịu tải bất kỳ (tải tập trung bất kỳ, tải phân bố theo cả phương ngang và phương đứng) có xét đến biến dạng của dây. Lời giải nhận được theo nguyên lý năng lượng bằng cách xấp xỉ dây bằng đường gãy khúc và lực phân bố được quy về các lực tập trung đặt tại các nút. Quan hệ lực căng và biến dạng là đàn hồi theo định luật Hook. Dạng đường cong của dây trước khi biến dạng cũng phải xác định trước.

Ở Việt Nam đã có một số tác giả [11], [20] trình bày bài toán dây và sử dụng lý thuyết dây tương tự dầm **Error! Reference source not found.** trong tính toán hệ treo và cầu treo. Gần đây, năm 2006 tác giả Phạm Văn Trung [21] trong luận án tiến sĩ nghiên cứu về kết cấu dây và mái treo đã áp dụng phương pháp Nguyên lý Cực trị Gauss để xây dựng và giải bài toán dây đơn chịu lực tập trung và lực phân bố theo phương bất kỳ. Dây được xấp xỉ thành

đường gấp khúc, lực phân bố trên dây được quy gần đúng thành các lực tập trung đặt tại các nút của đường gấp khúc. Hệ phương trình của bài toán được xây dựng từ điều kiện cực tiểu của phiếm hàm lượng cưỡng bức viết cho toàn bộ kết cấu dây:

$$Z = \sum_{i=1}^n EA \left(\frac{N_i}{EA} \right)^2 S_{0i} - \sum_{i=1}^{n-1} 2P_{xi} u_i - \sum_{i=1}^{n-1} 2P_{yi} v_i - \sum_{i=1}^{n-1} 2P_{zi} w_i \rightarrow \min \quad (3.21)$$

trong đó: EA là độ cứng chống biến dạng dọc của dây; N_i là lực căng trong đoạn dây thứ i; S_{0i} là chiều dài của đoạn dây thứ i trước khi biến dạng; P_{xi} , P_{yi} , P_{zi} tương ứng là các lực tập trung theo các phương x, y, z tác dụng lên dây tại nút thứ i; u_i , v_i , w_i tương ứng là chuyển vị của dây theo các phương x, y, z tại nút thứ i. Phương pháp này có ưu điểm là không cần phải giả thiết trước dạng đường độ võng của dây.

Nhận xét: Lý thuyết tính dây đơn cổ điển dựa trên cơ sở của lý thuyết đàn hồi, từ điều kiện cân bằng lực của dây đã dẫn ra được phương trình đường độ võng của dây khi chịu tác dụng của lực phân bố đều theo phương trọng trường (phương thẳng đứng) là:

- 1) Đường cong hypecbol khi tải trọng là phân bố đều theo chiều dài dây;
 - 2) Đường cong parabol khi tải trọng là phân bố đều theo chiều dài nhịp.
- Dạng đường cong parabol có thể dùng để tính gần đúng cho dạng đường cong dây xích khi dây thỏa mãn điều kiện dây thoải (tỉ số giữa độ võng và chiều dài nhịp không lớn). Đối với dây đơn chịu tải trọng tập trung, dây thường được xấp xỉ bằng đường gãy khúc và cũng sử dụng lý thuyết đàn hồi để xác định lực căng trong dây.

Bài toán dây chịu lực ngang (phương tác dụng của lực không trùng với trục dây) là bài toán phi tuyến do phải kể đến sự thay đổi hình dạng do chuyển vị của dây khi chịu tải. Tuy nhiên lý thuyết dây hiện nay mới chỉ là lý thuyết gần đúng do chưa cho phép xác định đồng thời cả chuyển vị và nội lực trong dây khi chịu tải mà chỉ cho ta dạng đường độ võng và quy luật phân bố lực căng trong dây; khi tính toán phải biết trước chiều dài dây, hay độ võng lớn nhất của dây hoặc lực căng ngang trong dây. Vì vậy khi ghép vào bài toán

phân tích hệ dây liên hợp như cầu dây văng hay cầu dây võng hoặc hệ mái treo thì thường phải đưa thêm các giả thiết đơn giản hóa để tính toán.

3.2. Tính toán dây đơn theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss

Kết cấu dây mềm được sử dụng phổ biến trong thực tế xây dựng như kết cấu dây treo mái che trong các công trình dân dụng và công nghiệp nhịp lớn, đặc biệt là các kết cấu cầu treo dây võng, cầu treo dây văng nhịp lớn đó là các kết cấu liên hợp giữa dây mềm và dầm hoặc dàn cứng. Vấn đề tính toán dây đơn là cơ sở để xây dựng các loại sơ đồ tính cho các loại kết cấu dây mềm và kết cấu liên hợp nói trên. Hiện nay, khi tính toán dây mềm thường giả thiết đường độ võng của dây là một dạng đường cong đã biết, thường là các đường Parabol bậc 2. Ngoài ra có thể kể đến phương pháp gần đúng của V. K. Katsuryn để tính dây được trình bày trong các giáo trình và các tài liệu tính kết cấu dây ở Việt Nam. Trong luận án của mình khi tính dây TS Phạm Văn Trung đã sử dụng phương pháp Nguyên lý cực trị Gauss do GS. TSKH. Hà Huy Cương đề xuất để tính toán dây mềm dưới dạng bình phương tối thiểu.

Trong luận văn này tác giả trình bày phương pháp tính dây mềm cũng bằng phương pháp Nguyên lý cực trị Gauss nhưng dưới dạng biến phân chuyển vị. Bài toán được trình bày trên hai ví dụ cụ thể.

3.2.1. Định nghĩa dây mềm

Dây mềm là loại dây đơn chỉ có khả năng chịu kéo, khả năng chịu nén và chịu uốn gần như bằng không nên khi tính toán thường bỏ qua ảnh hưởng của lực nén và moomen uốn. Tập hợp nhiều dây đơn tạo thành kết cấu dây, như dây tải điện, dây cáp, dây văng, cầu dây các loại và mái treo.

3.2.2. Phương pháp tính dây mềm

Trong chương một đã giới thiệu chi tiết các phương pháp tính dây đơn thường dùng hiện nay bao gồm: Tính dây chịu tải trọng bản thân; Phương pháp tính dây đơn theo hai trạng thái; Phương pháp tính dây đơn theo một

trạng thái; Tính dây đơn theo phương pháp lặp Newton – Raphson; Phương pháp tính động lực học hệ dây và mái treo; Phương pháp tính dây theo sơ đồ dây xích.

3.2.3. Nội dung phương pháp nguyên lý cực trị Gauss để tính dây mềm

Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss được xây dựng trên cơ sở nguyên lý chuyển vị ảo nên chỉ yêu cầu thỏa mãn các điều kiện liên kết về chuyển vị và biến dạng (xem biến dạng là một dạng chuyển vị do ứng suất gây ra), nghĩa là chỉ yêu cầu thỏa mãn điều kiện biên về động học (kinetic), không yêu cầu thỏa mãn các điều kiện biên về tĩnh học (về lực, static). Biến dạng được xác định duy nhất qua chuyển vị cho nên khi chuyển vị là ẩn thì cũng không cần quan tâm tới điều kiện biên động học về biến dạng. Như vậy, chỉ cần xét điều kiện biên động học đối với chuyển vị là đủ.

Hệ so sánh trong phương pháp nguyên lý cực trị Gauss là hệ có liên kết bất kỳ, chịu tác dụng lực ngoài giống như hệ cần tính. Dùng hệ so sánh ở đây có nghĩa là giải phóng các liên kết của hệ so sánh để biến nó thành hệ tự do hoàn toàn và đưa nội lực và các lực liên kết của hệ so sánh tác dụng lên hệ cần tính. Lực liên kết là lực do ngoại lực tác dụng lên liên kết, có dấu ngược lại với phản lực liên kết.

Có hai đường lối giải bài toán tìm cực tiểu phiếm hàm lượng cưỡng bức của phương pháp nguyên lý cực trị Gauss: giải các phương trình vi phân cân bằng (phương trình Euler) nhận được từ phiếm hàm hoặc giải trực tiếp trên phiếm hàm. Bậc đạo hàm của phương trình vi phân cao gấp hai lần bậc đạo hàm của các thành phần tương ứng trong phiếm hàm cho nên cách giải trực tiếp trên phiếm hàm có ưu điểm hơn ở chỗ số ẩn sẽ ít hơn và đặc biệt là nó

cho phép áp dụng một cách trực tiếp các phương pháp, các thuật toán của toán học tối ưu (hay rộng hơn, của vận trù học) để giải các bài toán cơ học. Điều này làm cho phương pháp giải các bài toán cơ học kết cấu càng trở nên phong phú hơn.

Có thể nhận biết những đặc điểm trên của phương pháp nguyên lý cực trị Gauss qua ví dụ tính toán dây mềm trình bày dưới đây.

3.2.4. Ví dụ tính toán dây mềm

Trong tính toán chịu lực, dây được xem là mềm khi bỏ qua khả năng chịu uốn, chỉ xét khả năng chịu kéo của nó. Giả thiết dây làm bằng vật liệu đàn hồi, quan hệ ứng suất – biến dạng của dây là tuyến tính. Xét bài toán tính dây căng trên hai gối cố định đồng mức có nhịp l , chiều dài dây $L=l$, chịu một hoặc nhiều tải tập trung P hướng xuống dưới (hình 3.3). Khi dây bị biến dạng, hướng của các lực vẫn thẳng đứng, vị trí của chúng trên dây không thay đổi (các lực không bị trượt trên dây). Xét trường hợp chiều dài dây lớn hơn chiều dài nhịp ($L > l$), cũng là nội dung được trình bày trong mục này.

Do chỉ xét nội lực kéo trong dây và các lực được đặt rời rạc trên dây nên các đoạn nối giữa hai điểm đặt lực sau khi biến dạng vẫn là các đoạn thẳng (hình 1). Nội lực N_i trong đoạn thứ (i) là không đổi. Xây dựng bài toán tính dây theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss như sau:

Chiều dài l_1 của đoạn dây 1 trước khi biến dạng lấy bằng khoảng cách từ gối tựa bên trái A đến lực tập trung P, chiều dài l_2 của đoạn dây 2 trước khi biến dạng lấy bằng khoảng cách từ lực tập trung P đến gối tựa bên phải B và tổng của chúng bằng với chiều dài dây L. L có thể khác chiều dài nhịp.

Chiều dài S_i của các đoạn dây sau khi biến dạng tính theo tọa độ các nút như sau:

$$S_1 = \sqrt{(l_1 - u)^2 + v^2}; \quad S_2 = \sqrt{(l_2 + u)^2 + v^2} \quad (3.22)$$

Biến dạng dài tỉ đối tương ứng của các đoạn dây như sau:

$$\varepsilon_1 = \frac{S_1 - l_1}{l_1}; \quad \varepsilon_2 = \frac{S_2 - l_2}{l_2}; \quad (3.23)$$

Lực dọc N_i ứng với các đoạn dây được tính như sau:

$$N_1 = EA\varepsilon_1; \quad N_2 = EA\varepsilon_2; \quad (3.24)$$

Lượng cưỡng bức được viết như sau:

$$Z = \int_{l_1} N_1 \varepsilon_1 dx + \int_{l_2} N_2 \varepsilon_2 dx - Pv \rightarrow \text{Min} \quad (3.25)$$

$$Z = l_1 N_1 \varepsilon_1 + l_2 N_2 \varepsilon_2 - Pv \rightarrow \text{Min} \quad (3.26)$$

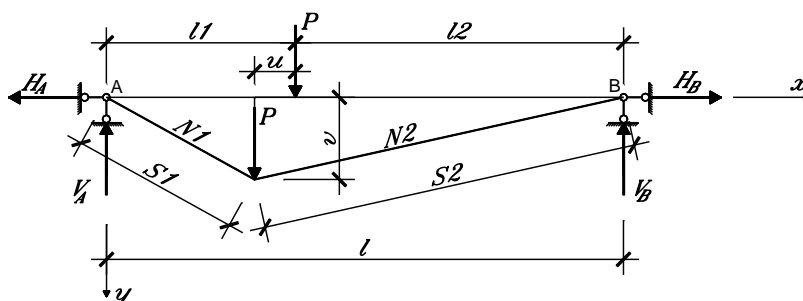
ở đây v là chuyển vị đứng tại vị trí đặt lực và cũng là ẩn của bài toán.

$$\delta Z = l_1 N_1 \delta \varepsilon_1 + l_2 N_2 \delta \varepsilon_2 - P \delta v = 0 \quad (3.27)$$

Tìm cực tiểu Z (biểu thức 3.27) theo ẩn là các chuyển vị nút u và v sẽ nhận được hệ 2 phương trình đại số phi tuyến để xác định chúng.

Ví dụ 1. Tính dây đơn chịu lực tập trung

Tính dây đơn căng trên hai gối cố định đồng mức chịu lực tập trung P . Chiều dài dây bằng chiều dài nhịp, $L = l$, chiều dài các đoạn dây trước khi biến dạng bằng l_1 và $l - l_1$ (hình 3.3). EA là độ cứng chịu kéo của dây. Nội lực trong các đoạn dây N_1, N_2 và chuyển vị ngang u chuyển vị đứng v của điểm đặt lực là ba ẩn của bài toán.



Hình 3.3. Dây dài bằng nhịp chịu tải trọng tập trung

Chiều dài các đoạn dây sau khi biến dạng bằng

$$S_1 = \sqrt{(l_1 - u)^2 + v^2}; \quad S_2 = \sqrt{(l_2 + u)^2 + v^2} \quad (a)$$

Lượng cường bức của bài toán viết như sau

$$Z = l_1 N_1 \varepsilon_1 + l_2 N_2 \varepsilon_2 - Pv \rightarrow Min \quad (b)$$

Từ điều kiện cực tiểu của (d) ta nhận được hệ hai phương trình

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= l_1 N_1 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial u} + l_2 N_2 \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial u} - 0 = 0 \\ h_2 &= l_1 N_1 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial v} + l_2 N_2 \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial v} - P = 0 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

để xác định hai ẩn u và v (không viết các phương trình ở đây). Đó là hệ phương trình đại số phi tuyến. Có rất nhiều phương pháp và thuật toán giải hệ phương trình đại số phi tuyến mà thường là phương pháp số, giải lặp và được lập trình trong các phần mềm về toán, thí dụ, trong phần mềm MatLab, Maple v.v...

Dưới đây trình bày kết quả tính theo MatLab đối với dây có chiều dài 100m.

a) Lực $P=10$ Tấn đặt tại điểm giữa nhịp, $l_1 = 50m$, $L = l = 100m$, $E=2 \times 10^7$ Tấn/m², $A=0.004m^2$,

Lực dọc (Tấn)		Phản lực (Tấn)	
N_1	N_2	V_A	V_B
100.0625	100.0625	5	5

Lực xô (Tấn)		Chuyển vị (m)	
H_A	H_B	u	v
99.9375	99.9375	0	2.5016

b) Lực $P= 10$ Tấn đặt tại $1/4$ nhịp, $l_1 = 25m$

Do chiều dài hai đoạn dây khác nhau và nội lực trong chúng cũng sẽ khác nhau nên điểm đặt lực P ngoài dịch chuyển thẳng đứng v còn có dịch chuyển ngang u (so với vị trí ban đầu), kết quả như sau:

Lực dọc (Tấn)		Phản lực (Tấn)	
N_1	N_2	V_A	V_B
91.0455	90.7698	7.5057	2.4943

Lực xô (Tấn)		Chuyển vị (m)	
H_A	H_B	u	v
90.7356	90.7356	0.0567	2.0633

Kiểm tra điều kiện cân bằng tại điểm đặt lực

$$\sum x = N_1 \frac{(l_1 - u)}{S1} - N_2 \frac{(l_2 + u)}{S2} = 1.3429e - 011$$

$$\sum y = N_1 \frac{v}{S1} + N_2 \frac{v}{S2} - P = -5.7199e - 013$$

Kiểm tra điều kiện cân bằng của toàn hệ

$$\sum x = H_A - H_B = 1.3429e - 011$$

$$\sum y = V_A + V_B - P = -5.7199e - 013$$

$$\sum M_A = V_B L - P(l_1 - u) = -4.1950e - 011$$

Như vậy, điều kiện cân bằng tại điểm đặt lực và toàn hệ đều bảo đảm.

c) Lực P đặt tại điểm giữa dây, $L_1 = L_2 = 50m$; (xem P cố định, EA giảm)

$$EA = 1000P \quad N_1 = N_2 = 5.0125P \quad v = 5.0125(m)$$

$$EA = 100P \quad N_1 = N_2 = 2.3478P \quad v = 10.8981(m)$$

$$EA = 10P \quad N_1 = N_2 = 1.1362P \quad v = 24.5028(m)$$

$$EA = P \quad N_1 = N_2 = 0.63256P \quad v = 64.5221(m)$$

d) **Lực P đặt tại điểm 1/4 dây, $L_1 = 25m$; (xem P cố định, EA giảm)**

$$EA = 1000P; N_1 = 4.5809P; N_2 = 4.5255P \quad u = 0.2264(m); v = 4.1243(m)$$

$$EA = 100P; N_1 = 2.1922P; N_2 = 2.0701P \quad u = 1.0379(m); v = 8.8613(m)$$

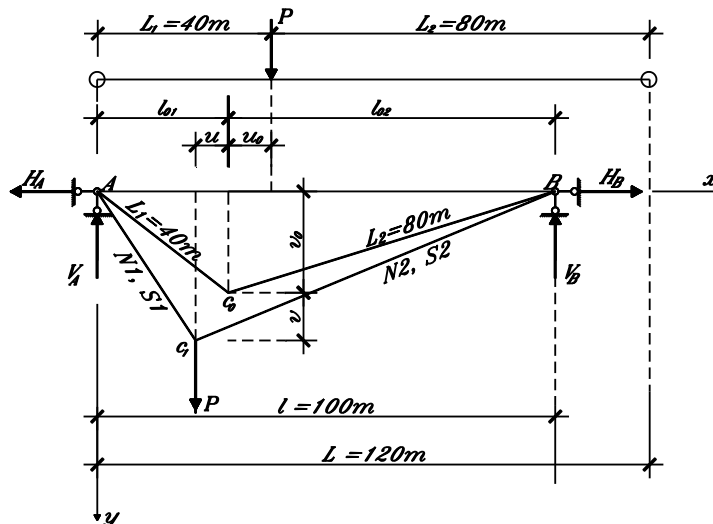
$$EA = 10P; N_1 = 1.1735P; N_2 = 0.8879P \quad u = 4.4396(m); v = 18.9094(m)$$

$$EA = P; N_1 = 0.9004P; N_2 = 0.2980P \quad u = 11.0957(m); v = 45.4296(m)$$

Ví dụ 2. Tính dây đơn chịu lực tập trung, chiều dài dây lớn hơn chiều dài nhịp

Tính dây đơn căng trên hai gối cố định đồng mức chịu lực tập trung P. Chiều dài dây $L = 120m$; chiều dài nhịp $l = 100m$, chiều dài các đoạn dây trước khi biến dạng bằng l_{01} và $l - l_{01}$; v_0 là chuyển vị đứng ban đầu của dây trước khi đặt lực (hình 3.4). EA là độ cứng chịu kéo của dây. Nội lực trong các đoạn dây N_1, N_2 và chuyển vị ngang u chuyển vị đứng v của điểm đặt lực là bốn ẩn của bài toán.

Xét trường hợp chiều dài dây lớn hơn chiều dài nhịp, Hình 3.4.



Hình 3.4. Dây dài hơn nhịp chịu tải trọng tập trung

a) Lực $P = 10$ Tấn đặt tại điểm giữa nhịp, chiều dài dây $L = 120m$, chiều dài nhịp $l = 100m$; $E = 2 \times 10^7$ Tấn/ m^2 , $A = 0.004m^2$,

Xác định chuyển vị thẳng đứng ban đầu v_0 tại điểm đặt lực P (chuyển vị trước khi đặt lực) theo phương trình sau:

$$\begin{aligned} \sqrt{l_1^2 - v_0^2} + \sqrt{l_2^2 - v_0^2} - l &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{40^2 - v_0^2} + \sqrt{80^2 - v_0^2} - 100 &= 0 \rightarrow v_0 = 30.397m \end{aligned}$$

Xác định khoảng cách nằm ngang từ điểm đặt lực đến gối trái và gối phải nhíp theo công thức sau:

$$l_{01} = \sqrt{l_1^2 - v_0^2}; \quad l_{02} = l - l_{01}$$

Chiều dài các đoạn dây sau khi biến dạng bằng

$$S_1 = \sqrt{(v + v_0)^2 + (l_{01} - u)^2}; \quad S_2 = \sqrt{(v + v_0)^2 + (l_{02} + u)^2} \quad (a)$$

Biến dạng dài tỉ đối ứng với từng đoạn thanh bằng

$$\varepsilon_1 = \frac{S_1 - l_1}{l_1}; \quad \varepsilon_2 = \frac{S_2 - l_2}{l_2} \quad (b)$$

Lực dọc ứng với từng đoạn thanh bằng

$$N_1 = EA\varepsilon_1; \quad N_2 = EA\varepsilon_2 \quad (c)$$

Lượng cường bức của bài toán viết như sau

$$Z = l_1 N_1 \varepsilon_1 + l_2 N_2 \varepsilon_2 - Pv \rightarrow \text{Min} \quad (d)$$

Từ điều kiện cực tiểu của (d) ta nhận được hệ hai phương trình

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= l_1 N_1 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial u} + l_2 N_2 \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial u} - 0 = 0 \\ h_2 &= l_1 N_1 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial v} + l_2 N_2 \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial v} - P = 0 \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

Tương tự ví dụ 1, ta dùng phần mềm Matlab để giải hệ phương trình phi tuyến tròn để xác định 2 ẩn chuyển vị u và v .

e) Lực P đặt tại điểm giữa dây, $L_1 = L_2 = 60m$; (xem P cố định, EA giảm)

$$EA = 1000P \quad N_1 = N_2 = 0.9026P \quad v = 9.79e-2(m)$$

$$EA = 100P \quad N_1 = N_2 = 0.8870P \quad v = 9.534e-1(m)$$

$$EA = 10P \quad N_1 = N_2 = 0.78739P \quad v = 7.9342(m)$$

$$EA = P \quad N_1 = N_2 = 0.58745P \quad v = 47.9017(m)$$

f) Lực P đặt tại điểm 1/4 dây, $L_1 = 30m$; (xem P cố định, EA giảm)

$$EA = 1000P ; N_1 = 0.9718P ; N_2 = 0.47323P \quad u = 0.0296(m) ; v = 0.0485(m)$$

$$EA = 100P ; N_1 = 0.9677P ; N_2 = 0.45912P \quad u = 0.2852(m) ; v = 0.4746(m)$$

$$EA = 10P ; N_1 = 0.9677P ; N_2 = 0.45912P \quad u = 2.0998(m) ; v = 4.0705(m)$$

$$EA = P ; N_1 = 0.9156P ; N_2 = 0.1837P \quad u = 4.2338(m) ; v = 30.1008(m)$$

Từ những kết quả trên tính được các phản lực đứng và nằm ngang tại các gối tựa cố định và kiểm tra điều kiện cân bằng lực tại điểm đặt lực. Trong trình bày trên không xét hiện tượng diện tích tiết diện dây bị giảm khi dây bị kéo dài .

Từ kết quả thấy rằng tăng 20% chiều dài dây so với nhịp đã làm cho nội lực trong dây giảm hơn năm lần và làm giảm độ võng của dây nhiều lần tùy thuộc vào độ cứng chịu kéo của dây. Độ võng và nội lực trong dây rất nhạy cảm với sự thay đổi độ dài dây.

Với phương pháp trình bày trên có thể tính dây mềm trong các trường hợp khác nhau: lực tác dụng lên dây có phương bất kì, đường độ võng của dây là đường cong không gian, kết cấu lưới dây, dao động tự do của dây v.v...Điều đó nói rằng phương pháp trình bày là phương pháp mới, nhất quán về tính dây và kết cấu dây mềm mà hiện nay không có lí thuyết tương tự.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Từ các kết quả nghiên cứu đã được trình bày trong các chương của luận văn, tác giả rút ra những kết luận và kiến nghị sau:

KẾT LUẬN:

- Áp dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, tác giả đã xây dựng được lý thuyết tính dây đơn. Lý thuyết này là tổng quát và chính xác, cho phép xác định được đồng thời nội lực và chuyển vị trong dây dưới các tác động khác nhau mà không cần cho trước mũi tên võng hoặc chiều dài, hoặc thành phần ngang của lực căng trong dây.

- Trên cơ sở lý thuyết đề xuất, tác giả đã xây dựng được thuật toán và chương trình tính dây đơn chịu tải trọng tập trung tại các vị trí khác nhau trên dây, trong hai trường hợp dây dài bằng nhịp và dây dài hơn nhịp.

- Dùng phần mềm Matlab lập trình cho các bài toán nêu trên

KIẾN NGHỊ

- Sử dụng phương pháp và chương trình của tác giả đề xuất để phân tích tĩnh học bài toán phẳng của cầu dây văng.

- Tiếp tục phát triển phương pháp nguyên lý cực trị Gauss để xây dựng và giải bài toán tĩnh của cầu dây văng theo sơ đồ không gian.

- Áp dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss vào nghiên cứu các bài toán động lực học, ổn định và ổn định khí động học của cầu dây văng và kết cấu mái treo dây mềm.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

TIẾNG VIỆT

- [1] N.I.Bêdukhốp (1978), người dịch Phan Ngọc Châu, *Cơ sở lý thuyết đàn hồi, lý thuyết dẻo, lý thuyết từ biến*, Nxb Đại học và trung học chuyên nghiệp, Hà Nội.
- [2] Đào Huy Bích (2000), *Lý thuyết đàn hồi*, Nxb Đại học quốc gia Hà Nội.
- [3] Bộ Giao thông vận tải (2007), *Tiêu chuẩn thiết kế cầu 22TCN-272-05*, Nxb Giao thông vận tải, Hà Nội.
- [4] Hà Huy Cương (2005), “Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss”, *Tạp chí Khoa học và kỹ thuật*, (Số 4).
- [5] Nguyễn Văn Đạo (2001), *Cơ học giải tích*, Nxb Đại học quốc gia Hà Nội.
- [6] Đoàn Văn Duẩn (2010), *Nghiên cứu ổn định công trình có xét biến dạng trượt*, Luận án tiến sỹ kỹ thuật, Trường Đại học Kiến trúc Hà Nội, Hà Nội.
- [7] Đoàn Văn Duẩn (2012), *Phương pháp mới tính toán dầm mềm*, Tạp chí kết cấu và công nghệ xây dựng, Số 9/II-2012.
- [8] L.E.Engôn (1974), người dịch Hoàng Tấn Hưng, *Phép tính biến phân*, Nxb Khoa học và kỹ thuật.
- [9] Hội Khoa học kỹ thuật cầu đường Việt Nam (2004), Hội thảo khoa học phát triển cầu dây văng và hãm tại Việt Nam,
- [10] Trần Thị Kim Huế (2005), *Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss đối với bài toán cơ học kết cấu*, Luận văn thạc sỹ kỹ thuật, Trường Đại học Kiến trúc Hà Nội, Hà Nội.
- [11] Bùi Khương (2003), *Lý thuyết tính toán các hệ treo và cầu treo*, Nxb Giao thông vận tải, Hà Nội.
- [12] Đinh Quốc Kim (2008), *Thiết kế và xây dựng cầu dây văng đường bộ*, Nxb Giao thông vận tải, Hà Nội.
- [13] Nguyễn Thị Thùy Liên, Nguyễn Phương Thành (2009), “Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss đối với bài toán dao động công trình”, *Tạp chí xây dựng*, (số 3).
- [14] Lê Đình Tâm, Phạm Duy Hòa (2001), *Cầu dây văng*, Nxb Khoa học và kỹ thuật, Hà Nội.
- [15] Nguyễn Xuân Tân, Nguyễn Bá Minh (2007), *Lý thuyết tối ưu không trơn*, Nxb Đại học quốc gia Hà Nội, Hà Nội.

- [16] Phùng Bá Thắng (2013), “*Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss tính hệ dây liên hợp*”, Luận án tiến sỹ kỹ thuật, Trường Học viện kỹ thuật Quân sự, Hà Nội.
- [17] Vũ Thanh Thủy (2009), “Xây dựng bài toán dầm khi xét đầy đủ hai thành phần nội lực mômen uốn M và lực cắt Q”, *Tạp chí Xây dựng*, (Số 4).
- [18] Vũ Thanh Thủy (2010), Nghiên cứu nội lực và chuyển vị của hệ thanh chịu uốn khi xét tới ảnh hưởng của biến dạng trượt, Luận án tiến sỹ kỹ thuật, Trường Đại học Kiến trúc Hà Nội, Hà Nội.
- [19] Bùi Minh Trí (2001), *Quy hoạch toán học*, NXB Khoa học và kỹ thuật, Hà Nội.
- [20] Lều Thọ Trình (2003), *Cách tính hệ treo theo sơ đồ biến dạng*, Nxb Xây dựng, Hà Nội.
- [21] Phạm Văn Trung (2006), *Phương pháp mới tính hệ kết cấu dây và mái treo*, Luận án tiến sỹ kỹ thuật, Trường Đại học Kiến trúc Hà Nội, Hà Nội.
- [22] Nguyễn Việt Trung (2004), *Thiết kế cầu treo dây võng*, Nxb Xây dựng, Hà Nội.
- [23] Quy phạm tạm thời thiết kế cầu dây văng JTJ 027096, nước Cộng hòa Nhân dân Trung Hoa (bản dịch tiếng Việt).
- [24] Liên doanh tư vấn JBSI (Viện cầu và kết cấu Nhật Bản), PCI (Công ty tư vấn quốc tế Thái Bình Dương, TEDI, công ty tư vấn thiết kế Hyder(2003), *Hồ sơ thiết kế kỹ thuật cầu Bãi Cháy*.

TIẾNG ANH

- [25] Sir. Alfred Pugsley (1957), *The theory of suspension bridges*, Edward Arnold Ltd, London.
- [26] BrunoD & Leonardi A (1997), “Natural periods of long-span cable-stayed bridges”, *Journal of Bridge Engineering*, 2(3).
- [27] Brian R. Hunt, Ronald L. Lipsman, Jonathan M. Rosenberg (2006), *A Guide to MATLAB®*, Cambridge University Press, New York.
- [28] D. P. Billington and A. Nazmy (1990), *History and Aesthetics of Cable-Stayed Bridges*, Journal of Structural Engineering, vol. 117, no. 10, American Society of Civil Engineers.
- [29] M.S. Cheung, D.T. Lau and W.C. Li (2000), “Recent developments on computer bridge analysis and design”, *Progress in Structural Engineering Mater*, John Wiley & Sons, Ltd.

- [30] Casas JR (1998), *Dynamic modeling of bridges: observations from field testing*, Transportation Research Record 1476 (Vol 27).
- [31] Cluley NC & Shepherd R (1996), “Analysis of concrete cable-stayed bridges for creep, shrinkage and relaxation effects”, *Computers and Structures*, 58(2).
- [32] Computers & Structures Inc (1995), *Sap2000/Bridge*, Berkeley, California, USA.
- [33] Farrar CR & Duffey TA (1998), “Bridge modal properties using simplified finite element analysis”, *Journal of Bridge Engineering*, 3(1).
- [34] Freyssinet (1998), *Stayed Cables*.
- [35] Gentile C, Martinez Y & Cabrera F (1997), “Dynamic investigation of a repaired cable-stayed bridge”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 26.
- [36] Harik IE, Allen DL, Street RL, Guo M, Graves RC, Harison J & Garwry MJ (1997), “Free and ambient vibration of Brent-Spence bridge”, *Journal of Structural Engineering*, 123(9).
- [37] Jones NP, Jain A & Pan K (1997), *Effect of stay-cable vibration on buffeting response*, Building to Last, Proceedings of the 15th Structures Congress, Portland, OR, 1997, Part 1 (of 2). New York, NY: ASCE.
- [38] Josef Melan (1888), *Theory of arches and suspension bridge*, Kessinger Publishing's Legacy Reprint Series.
- [39] Klaus-Jurgen Bathe (1996), *Finite Element Procedures, Part One*, Prentice-Hall International, Inc.
- [40] Lew Zetlin, I. Paul Lew (1990), “Suspension Roofs, Section 25”, *Structural Engineering Handbook*, third Edition.
- [41] Manabu ITO, Yasuharu Nakamura (1982), *Cable-Stayed Bridge Aerodynamics*, IABSE Periodica.
- [42] Nazmy AS (1997), “Stability and load-carrying capacity of three-dimensional longspan steel arch bridges”, *Computers and Structures*, 65(6).
- [43] Negroao JHO & Simoes LMC (1997), “*Optimization of cable-stayed bridges with three-dimensional modelling*”, *Computers and Structures*.
- [44] René Walther, Bernard Houriet, Walmar Isler, Pierre Moïa (1988), *Cable stayed bridges*, Thomas Telford Ltd, London.

- [45] Schemmann AG & Smith HA (1998), "Vibration control of cable-stayed bridges part 1: modelling issues", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 27.
- [46] Stephen P. Timoshenko, James M. Gere (1961), *Theory of elastic stability*, McGraw-Hill Book Company, Inc, New York-Toronto-London.
- [47] Stephen P. Timoshenko and J.N. Goodier (1951), *Theory of elasticity*, McGraw-Hill Book Company Inc.
- [48] Takagi R, Nakamura T & Nakagawa K (1996), "A new design techniques for pre-stressed loads of a cable-stayed bridge", *Computers and Structures*, 58(3).
- [49] Utrilla MA & Samartin A (1997), "Optimization design of the prestress in continuous bridge decks", *Computers and Structures*, 64(1-4).
- [50] Walter Podolny Jr and John B. Scalzi (1986), *Construction and Design of Cable-Stayed Bridges*, United States of America.
- [51] Walter Podolny Jr and David Goodyear, P.E (2004), "Chapter 15: Cable-Suspended Bridges", *Structural Steel Designer's Handbook*, Fourth-Edition, McGraw-Hill Companies Ltd.
- [52] Wang PH & Yang CG (1996), "Parametric studies on cable-stayed bridges", *Computers and Structures*, 60(2).
- [53] Wang TL, Huang D & Shahawy M (1996), "Dynamic behavior of continuous and cantilever thin-walled box girder bridges", *Journal of Bridge Engineering*, 1(2).
- [54] Analytical Methods. Retrieved february 16, 2009, from Bridge Engineering Handbook.
- [55] Xu YL, Ko JM & Zhang WS (1997), "Vibration studies of Tsing Ma long suspension bridge", *Journal of Bridge Engineering*, 2(4).
- [56] Xu YL, Ko JM & Yu Z (1997), "Modal analysis of tower-cable system of Tsing Ma long suspension bridge", *Engineering Structures*, 19(10).
- [57] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor (2000), *The Finite Element Method. Fifth Edition, Volume 1, 2, 3*, International Edition.