

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC DÂN LẬP HẢI PHÒNG**

-----

**NGUYỄN QUANG KHÁNH**

**NGHIÊN CỨU ỔN ĐỊNH NGOÀI GIỚI HẠN ĐÀN HỒI  
CỦA BẢN CHỮ NHẬT**

Chuyên ngành: **Kỹ thuật Xây dựng Công trình Dân dụng & Công nghiệp**

Mã số: **60.58.02.08**

**LUẬN VĂN THẠC SỸ KỸ THUẬT  
NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC**

**GS.TS. NGUYỄN. TRẦN HỮU NGHỊ**

*Hải Phòng, 2015*

# MỤC LỤC

Lời cam đoan.....	1
Lời cảm ơn.....	2
<b>MỞ ĐẦU.....</b>	<b>3</b>
1. Lý do chọn đề tài.....	3
2. Mục đích nghiên cứu của đề tài.....	4
3. Phạm vi nghiên cứu của đề tài.....	4
4. Phương pháp nghiên cứu của đề tài.....	4
5. Cấu trúc của luận văn.....	4
<b>CHƯƠNG 1: KHÁI NIỆM VÀ NHỮNG PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN.....</b>	<b>7</b>
1.1. Khái niệm về sự mất ổn định ngoài giới hạn đàn hồi.....	7
1.2. Các phương trình cơ bản [2].....	8
1.2.1. Đặc điểm của biến dạng dẻo.....	8
1.2.2. Những lý thuyết dẻo đơn giản.....	9
<b>KẾT LUẬN CHƯƠNG 1.....</b>	<b>13</b>
<b>CHƯƠNG 2 GIẢI BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH CỦA BẢN NGOÀI GIỚI HẠN ĐÀN HỒI BẰNG PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍCH.....</b>	<b>14</b>
2.1. Cách đặt bài toán về ổn định của bản ngoài giới hạn đàn hồi theo các lý thuyết dẻo (2).....	14
2.2. Giải bài toán ổn định theo lý thuyết chảy dẻo.....	15
2.2.1. Phương pháp trực tiếp.....	15
2.2.2. Các ví dụ tính toán.....	17
2.3. Giải bài toán ổn định theo lý thuyết biến dạng đàn dẻo.....	21
2.3.1. Thiết lập chính xác bài toán về ổn định của bản ngoài giới hạn đàn hồi trên cơ sở lý thuyết biến dạng.....	22
2.3.2. Giải gần đúng bài toán về ổn định của bản.....	27
2.3.3. Các ví dụ tính toán.....	29
2.4. Giải bài toán ổn định của bản chữ nhật ngoài giới hạn đàn hồi theo mô đun tiếp tuyến.....	31
<b>KẾT LUẬN CHƯƠNG 2.....</b>	<b>33</b>
<b>CHƯƠNG 3: GIẢI BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH CỦA BẢN NGOÀI GIỚI HẠN ĐÀN HỒI BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN.....</b>	<b>34</b>

3.1 Cách giải bài toán ổn định bản đàn hồi theo phương pháp phần tử hữu hạn [3].....	34
3.1.1 Khái niệm chung và phương trình cơ bản .....	34
3.1.2. Thiết lập ma trận độ cứng của một phần tử bản chữ nhật bất kỳ và cho cả bản .....	34
3.2. Cách dùng nghiệm của bài toán đàn hồi để giải bài toán ổn định của bản ngoài giới hạn đàn hồi .....	54
3.3 Thuật toán chương trình .....	56
3.4. Một số ví dụ tính toán.....	56
3.4.1. Bản chữ nhật tựa đơn bị nén đều theo một phương (Hình 3.2).....	56
3.4.2. Bản chữ nhật tựa đơn bị nén đều theo 2 một phương (Hình 3.3).....	56
3.4.3. Bản chữ nhật hai cạnh tựa đơn bị nén vuông góc, hai cạnh kia có điều kiện biên bất kỳ.....	57
3.4.4. Bản chữ nhật bốn cạnh ngàm bị nén đều hai phương (Hình 3.7).....	59
3.4.5. Bản chữ nhật tựa đơn dưới tác dụng của ứng suất trượt (Hình 3.8).....	59
<b>KẾT LUẬN CHƯƠNG III .....</b>	<b>60</b>
<b>KẾT LUẬN CHUNG.....</b>	<b>61</b>
<b>CÁC TÀI LIỆU THAM KHẢO .....</b>	<b>62</b>

# MỞ ĐẦU

## 1. Lý do chọn đề tài:

Trong thực tế, phần lớn các công trình xây dựng đều chịu tác dụng của tải trọng động (đặc biệt là đối với các công trình quân sự). Việc tính toán và thiết kế các công trình nói chung (nhất là các công trình cao tầng, công trình có khẩu độ lớn, công trình đặc biệt). Trong những công trình đó người ta thường dùng các thanh, tấm - vỏ chịu nén và có chiều dài lớn do đó điều kiện ổn định trong miền đàn hồi có tầm quan trọng đặc biệt, đòi hỏi phải nghiên cứu đầy đủ cả về mặt lý thuyết và thực nghiệm. Các công trình này không những phải đảm bảo điều kiện bền, cứng, ổn định mà không kém phần quan trọng là phải phân tích phản ứng của công trình khi chịu các nguyên nhân tác dụng động (gió bão, động đất...). Ví dụ như các công trình biển thường xuyên chịu tác động của sóng và gió, các tải trọng đó gây nên trong kết cấu các ứng suất thay đổi theo thời gian. Việc nghiên cứu động lực học công trình chính là nghiên cứu phản ứng của công trình khi chịu tải trọng động.

Kết cấu tấm được sử dụng khá rộng rãi trong công trình xây dựng. Nghiên cứu ổn định làm đàn hồi của tấm đã trở nên quen thuộc [1], [3]. Trong nhiều kết cấu công trình hiện tượng mất ổn định thường xảy ra ngoài giới hạn đàn hồi, những tính chất không đàn hồi (dẻo từ biến ... ) đã ảnh hưởng đáng kể đến ổn định cân bằng của kết cấu. Bài toán về ổn định của tấm ngoài giới hạn đàn hồi đã được nhiều tác giả đề cập đến với những lời giải được coi là chính xác phù hợp với giả thiết ban đầu, song phần lớn chưa có kết quả số và tải tác dụng cũng như điều kiện biên chỉ dưới dạng đơn giản quen thuộc. Những kết quả trên chủ yếu chỉ mang tính lý thuyết nhằm trang bị các phương pháp luận phục vụ giải bài toán về ổn định của lý thuyết dẻo.

Để phần nào khắc phục được những hạn chế nêu trên, trong luận văn học viên cũng sẽ lập lại các đường lối giải bài toán lý thuyết dẻo theo giải tích với những lời giải có kết quả số cụ thể, để phần nào có thể ứng dụng được trong tính toán cũng như minh chứng cho kết quả theo pháp số khi cần thiết.

Một hạn chế thường gặp trong khi chỉ dùng các phép giải tích là khó có thể dùng được ngay trong ứng dụng tính toán kết cấu thực. Lúc này cần thiết phải có phương pháp số, mà thông dụng nhất là phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH). Vì vậy, trong luận văn học viên sẽ dùng cách quy đổi mô đun tiếp tuyến theo Timoshenko kết hợp với cách giải bài toán tám theo nghiệm đàn hồi để xét bài toán ổn định của tấm chữ nhật ngoài giới hạn đàn hồi với các điều kiện biên khác nhau.

## **2. Mục đích nghiên cứu của đề tài:**

- Tìm hiểu, nghiên cứu về sự mất ổn định ngoài giới hạn đàn hồi.
- Dùng phương pháp giải tích và phương pháp phần tử hữu hạn để giải bài toán ổn định công trình.

## **3. Phạm vi nghiên cứu của đề tài:**

Trong luận văn này, tác giả giới hạn việc nghiên cứu phân tích và sử dụng phương pháp giải tích và phương pháp phần tử hữu hạn để giải bài toán ổn định của tấm chữ nhật ngoài giới hạn đàn hồi với các điều kiện biên khác nhau.

## **4. Phương pháp nghiên cứu của đề tài:**

- Nghiên cứu về mặt lý thuyết.
- Phân tích và so sánh các phương pháp giải bài toán.
- Sử dụng những kiến thức lý thuyết và phần mềm tin học để tính toán các ví dụ.

## **5. Cấu trúc của luận văn:**

Luận văn gồm 3 chương được trình bày theo cấu trúc như sau:

Chương 1: Khái niệm và những phương trình cơ bản

1.1. Khái niệm về sự mất ổn định ngoài giới hạn đàn hồi

1.2. Các phương trình cơ bản

Chương 2: Giải bài toán ổn định của bản ngoài giới hạn đàn hồi bằng phương pháp giải tích

2.1. Cách đặt bài toán về ổn định của bản ngoài giới hạn đàn hồi theo lý thuyết dẻo

- 2.2. Giải bài toán ổn định theo lý thuyết chảy dẻo
- 2.3. Giải bài toán ổn định theo lý thuyết biến dạng đàn dẻo
- 2.4. Giải bài toán ổn định của tấm chữ nhật ngoài giới hạn đàn hồi theo mô đun tiếp tuyến

Chương 3: Giải bài toán ổn định của bản ngoài giới hạn đàn hồi bằng phương pháp phân tử hữu hạn.

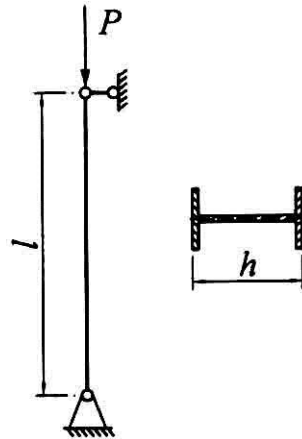
- 3.1. Cách giải bài toán ổn định bản đàn hồi theo phương pháp phân tử hữu hạn.
- 3.2. Cách dùng nghiệm của bài toán đàn hồi để giải bài toán ổn định ngoài giới hạn đàn hồi bằng phương pháp phân tử hữu hạn.
- 3.3. Một số ví dụ tính toán.

# CHƯƠNG 1

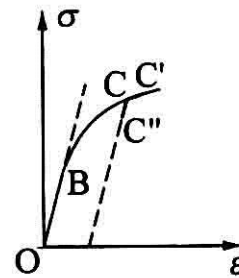
## KHÁI NIỆM VÀ NHỮNG PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

### 1.1. Khái niệm về sự mất ổn định ngoài giới hạn đàn hồi.

Để tìm hiểu về khái niệm mất ổn định ngoài giới hạn đàn hồi, ta xét ví dụ [1] một thanh hai đầu khớp, tiết diện chữ I chịu nén đúng tâm (hình 1.1).



Hình 1.1.



Hình 1.2.

Dựa trên lý thuyết của E. Engesser - V. Karman, cho đến trạng thái tới hạn, ta coi thanh vẫn thẳng và tính lực  $P_{th}$  như một lực cần thiết để giữ cho thanh hơi bị cong đi so với dạng cân bằng. Hiện tượng uốn này làm cho ứng suất nén toàn phần tăng thêm chút ít ở phía bên lõm và giảm bớt chút ít ở phía bên lồi của thanh. Nếu đường cong OBC (hình 1.2) là đồ thị thí nghiệm nén vật liệu của thanh và điểm C tương ứng với điều kiện tới hạn thì mối liên hệ ứng suất - biến dạng ở phía bên lõm của thanh, lúc này hơi bị cong đi, được đặc trưng bởi độ dốc của tiếp tuyến  $CC'$  và ta gọi là mô đun tiếp tiếp  $E_t$ .

Ở phía bên lồi là nơi ứng suất nén giảm bớt, mối liên hệ ứng suất - biến dạng được xác định bởi độ dốc của đường thẳng  $CC''$  tức là mô đun đàn hồi ban đầu  $E$  của vật liệu. Nếu giả thiết rằng mặt cắt ngang phẳng thì ta tính được lực tới hạn qua mô đun quy đổi  $E_{qd}$

$$(P_t)_{th} = \frac{\pi^2 E_{qd} I}{l^2}$$

$$\text{Với } E_{qd} = \frac{2EE_t}{E + E_t}$$

Trong phần trên, ta còn giả thiết rằng lực nén đúng tâm ( $P_{qd}$ ) là tác động trước đã, rồi nó vẫn tiếp tục được giữ nguyên trong khi thanh hơi bị cong đi. Nếu làm thí nghiệm trên các thanh thật thì thấy chuyển vị ngang tăng lên cùng một lúc với lực dọc. Gặp trường hợp này, trong giai đoạn đầu bị uốn, sự giảm ứng suất ở bên lồi của thanh có thể được bù lại bởi phần tăng ứng suất nén trực tiếp do lực dọc tăng lên không ngừng xảy ra mà không hề có sự thuyên giảm nào về ứng suất ở các thớ phía bên lồi, mối liên hệ ứng suất - biến dạng trong toàn thanh đều được đặc trưng bởi mô đun tiếp tuyến  $E_n$  và khi đó lực tới hạn.

$$(P_t)_{th} = \frac{\pi^2 E_t I}{l^2} \quad (1.2)$$

Đối với các thanh liên kết khác ở hai đầu chúng ta cũng nhận được công thức tương tự.

Như vậy, trong bài toán ổn định của thanh ngoài giới hạn đàn hồi, ta vẫn sử dụng được công thức Euler, công thức được thiết lập khi vật liệu tuân theo định luật Hooke cho những vật liệu không đàn hồi, chỉ cần thay thế mô đun đàn hồi  $E$  bởi mô đun tính đối  $E_{qd}$  hoặc  $E_r$ .

Trong bài toán tẩm, hiện tượng mất ổn định khi vật liệu làm việc ngoài giới hạn đàn hồi cũng xảy ra tương tự. Tuy nhiên, việc xác định lực tới hạn có phần khác một chút khi giải bằng các phương pháp giải tích (không chỉ thuần túy thay thế mô đun đàn hồi  $E$  bởi mô đun tính đối  $E_{qd}$  hoặc  $E_r$ , như trên), ngoại trừ chúng ta có thể dùng trong các phương pháp gần đúng (phương pháp PTHH chẳng hạn). Để giải quyết thấu đáo bài toán này, trước tiên chúng ta cần sơ lược qua một số các phương trình cơ bản và lý thuyết cơ sở.

## 1.2 Các phương trình cơ bản [2].

### 1.2.1. Đặc điểm của biến dạng dẻo.

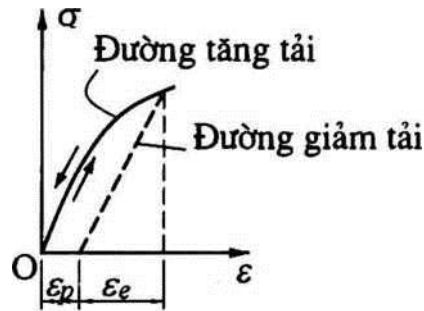
Là quá trình không thuận nghịch, quan hệ giữa ứng suất và biến dạng là quan hệ không tuyến tính (phi tuyến vật lý). Trên hình vẽ là sơ đồ chung (tổng quát) của mối quan hệ này đối với TTUS đơn nhận được từ thí nghiệm (hình 1.3). Ở đây, đường tăng tải và đường giảm tải không trùng nhau, đường giảm tải là



đường bậc nhất. Khi ứng suất trở về không thì biến dạng vẫn còn một lượng khác không, gọi là biến dạng dư hay biến dạng dẻo.

Biến dạng toàn phần.

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon^p \quad (1.3)$$



Hình 1.3

### 1.2.2. Những lý thuyết dẻo đơn giản.

Prager chỉ ra rằng mọi lý thuyết dẻo cơ bản đều xây dựng trên cơ sở hệ thức tuyến tính giữa các tenxơ. Các hệ thức này chứa vi phân, tích phân của tenxơ lệch ứng suất và biến dạng.

$$L(S_{ij}) = L'(ij) \quad (1.4)$$

Trong đó L, L' là toán tử tuyến tính của các tenxơ lệch phụ thuộc vào một tham số  $\lambda$  nào đấy.

$$\begin{aligned} L(S_{ij}) &= AS_{ij} + B \frac{dS_{ij}}{d\lambda} + \int_0^\lambda CS_{ij} s \lambda + \\ L'(s_{ij}) &= A'e_{ij} + B' \frac{de_{ij}}{d\lambda} + \int_0^\lambda C'e_{ij} d\lambda + \dots \end{aligned} \quad (1.5)$$

A, B, C... là các hàm số của bất biến  $J_2, J_3$  còn A', B', C' là hàm của các bất biến  $\varepsilon_2', \varepsilon_3'$ .

Nhờ các giả thiết riêng về các hệ số A, B, C và A', B', C' ta nhận được hệ thức của lý thuyết dẻo. Ở đây, ta chỉ khảo sát hai nhóm lý thuyết được sử dụng trong tính toán sau này.

### 1.2.2.1. Lý thuyết chảy dẻo.

Ứng suất tại một trạng thái nào đây phụ thuộc vào cả quá trình biến dạng nên liên hệ giữa ứng suất và biến dạng nói chung không có dạng hữu hạn, mà có dạng vi phân. Lý thuyết chảy dẻo thiết lập hệ giữa gia số biến dạng và ứng suất, dựa trên các giả thuyết cơ bản sau đây:

- Vật liệu đẳng hướng ban đầu.
- Sự thay đổi thể tích tương đối tỷ lệ với áp suất trung bình.

$$\sigma = 3Ke$$

Hay

$$d\sigma = 3Kde \quad (1.6)$$

- Gia số biến dạng toàn phần bằng tổng của gia số biến dạng đàn hồi và gia số.

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} \left( d\sigma_{ij} = \frac{3\nu}{1+\nu} d\sigma \delta_{ij} \right)$$

Hay

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} d\delta_{ij} \quad (1.7)$$

- Tenxơ lệch ứng suất trùng với tenxơ lệch gia số biến dạng dẻo, tức là trạng thái ứng suất xác định gia số tức thời biến dạng dẻo.

$$de_{ij}^e = d\lambda S_{ij} \quad (1.8)$$

Từ các giả thiết trên ta có được:

$$B' de_{ij} = AS_{ij} + BdS_{ij}$$

Trong đó:

$$B'=1, B=1/2G, A=d\lambda$$

$d\lambda$  là hàm số các bất biến ứng suất và biến dạng, tùy thuộc vào từng loại vật liệu và từng quá trình biến dạng. Từ đó ta có:

$$de_{ij} = d\lambda S_{ij} + \frac{1}{2G} dS_{ij}$$

hay:

$$d\varepsilon_{ij} = d\lambda(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) + \frac{1}{2G} - \frac{3\nu}{1+\nu} d\sigma \delta_{ij} \quad (1.9)$$

Hệ phương trình này chưa đầy đủ, ta bổ sung biến thức công của lực lượng trong

$$\begin{aligned}\delta W &= K\theta\delta\theta + S_{ij}\delta e_{ij} = \delta W_e + \delta W_p \\ &= K\theta\delta\theta + \frac{1}{2G}T\delta T + 2d\lambda T^2\end{aligned}\quad (1.10)$$

Khi đó:

$$\delta W_e = K\theta\delta\theta + \frac{1}{2G}T\delta T \text{ là công thức biến dạng đàn hồi.}$$

$$\delta W_p = 2T^2 d\lambda = \frac{2}{3}\sigma_u^2 d\lambda \text{ là công thức biến dạng dẻo}$$

Với vật liệu tái bền đẳng hướng Prager - Reuss, thoả mãn điều kiện

$$dW_p = \psi'(T)dT$$

Với:

$$d\lambda = \frac{\psi'(T)}{2T^2} dT$$

Và ký hiệu:

$$F(T) = \frac{\psi'(T)}{2T^2}$$

Nên hệ thức của lý thuyết chảy dẻo có dạng:

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left( d\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{1+\nu} d\sigma_{ij} \right) + F(T)dT(\sigma_{ij} - \alpha\delta_{ij}) \quad (1.11)$$

Trong đó: T là cường độ ứng suất tiếp.

#### 1.2.2.2. Lý thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ.

Nếu tại thời điểm đang xét cường độ ứng suất  $\sigma_u$  có giá trị lớn hơn tất cả các giá trị trước nó, thì ta gọi quá trình biến dạng tại thời điểm đó là "Chủ động", tương ứng với quá trình đặt tải. Trong trường hợp ngược lại có quá trình biến dạng là "bị động", tương ứng với quá trình cất tải.

Lý thuyết biến dạng đàn hồi Ilyushin xây dựng trên những cơ bản sau đây:

- Vật thể đẳng hướng hoặc tựa đẳng hướng ban đầu.
- Biến dạng khối là đàn hồi.

$$\sigma = K\theta = 3Ke$$

- Tenxơ chỉ ứng suất và tenxơ chỉ hướng biến dạng là trùng nhau:

$$\overline{\sigma_{ij}} = \overline{e_{ij}}$$

$$\sigma_{xx} - \sigma = \frac{2\sigma_u}{3e_u}(\varepsilon_{xx} - e) \quad \tau_{xy} = \frac{2\sigma_u}{3e_u}\varepsilon_{xy'}$$

Hay là:

$$\sigma_{yy} - \sigma = \frac{2\sigma_u}{3e_u}(\varepsilon_{yy} - e) \quad \tau_{yz} = \frac{2\sigma_u}{3e_u}\varepsilon_{yz'} \quad (1.13)$$

$$\sigma_{zz} - \sigma = \frac{2\sigma_u}{3e_u}(\varepsilon_{zz} - e) \quad \tau_{zx} = \frac{2\sigma_u}{3e_u}\varepsilon_{zx'}$$

- Cường độ ứng suất  $\sigma_u$  là hàm của cường độ biến dạng  $e_u$

$$\begin{aligned} \sigma_u &= \Phi(e_u) \\ \sigma_u &= 3Ge_u[1 - \omega(e_u)] \end{aligned} \quad (1.14)$$

Hay là:

$$\omega = \frac{(3Ge_u - \sigma_u)}{3Ge_u}$$

(1.12), (1.13) và (1.14) là hệ đầy đủ biểu diễn liên hệ giữa các thành phần ứng suất và biến dạng  $\sigma_u$  và  $e_u$ .

## KẾT LUẬN CHƯƠNG 1

Chương 1 đã nêu khái niệm ổn định ngoài giới hạn đàn hồi thông qua ví dụ của một thanh chịu nén đúng tâm nhằm mục đích dễ dàng tiếp cận bài toán về ổn định của tấm ngoài giới hạn đàn hồi. Ở đây cũng đưa ra một số phương trình cơ bản, một số đặc điểm và những lý thuyết thường dùng của lý thuyết dẻo nhằm phục vụ để giải bài toán về ổn định trong các chương 2 và 3.

## CHƯƠNG 2

### GIẢI BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH CỦA BẢN NGOÀI GIỚI HẠN ĐÀN HỒI BẰNG PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍCH

#### 2.1. Cách đặt bài toán về ổn định của bản ngoài giới hạn đàn hồi theo các lý thuyết dẻo (2).

Giả sử dưới tác dụng của lực ngoài bản ở vị trí cân bằng. Bản biến dạng đàn dẻo trong mặt phẳng  $(x, y)$  của nó. Trạng thái cân bằng hoàn toàn xác định theo phương pháp tính toán bản ngoài giới hạn đàn hồi, có nghĩa là chúng ta biết ứng suất  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$  và biến dạng  $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}$ . Các đại lượng này thoả mãn những hệ thức cơ bản của lý thuyết dẻo (lý thuyết chảy hoặc lý thuyết biến dạng đàn dẻo tùy thuộc vào việc ta chọn lý thuyết nào làm cơ sở tính toán).

Hiện tượng ổn định được thể hiện như sau: *Với giá trị nào đấy của lực ngoài, đồng thời với trạng thái cân bằng xuất phát sẽ tồn tại những trạng thái cân bằng khác.*

Khi bản bị võng, tức là bản bắt đầu có biến dạng uốn, biến dạng nhận thêm gia số vô cùng nhỏ  $\delta\varepsilon_{xx}, \delta\varepsilon_{yy}, \delta\varepsilon_{xy}$ . Theo lý thuyết uốn bản của Kirchoff gia số biến dạng là hàm tuyến tính của khoảng cách  $z$  với mặt giữa.

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon_{xx} &= e_1 - z\xi_1 \\ \delta\varepsilon_{yy} &= e_2 - z\xi_2 \\ \delta\varepsilon_{xy} &= e_{12} - z\xi_{12}\end{aligned}$$

Trong đó  $e_1, e_2, e_{12}$ , là số biến dạng vô cùng nhỏ của mặt giữa:

$$e_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, e_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, e_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

$\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , là biến thiên vô cùng nhỏ của độ cong và độ xoắn mặt giữa.

$$\xi_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \xi_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \xi_{12} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Hàm  $u, v, w$ , là hàm của tọa độ  $x; y; w$  là tọa độ võng của bản khi uốn.

Tương ứng với gia số biến dạng là gia số ứng suất  $\delta\sigma_{xx}, \delta\sigma_{yy}, \delta\sigma_{xy}$ ; các đại lượng này xác định qua số biến nhờ hệ thức của lý thuyết dẻo.

Bây giờ ta có thể tính dễ dàng số của lực dẫn:

$$\delta N_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \delta \sigma_{yy} dz, \quad \delta N_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \delta \sigma_{yy} dz, \quad \delta N_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \delta \tau_{xy} dz,$$

Và gia số của momen:

$$\delta M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \delta \sigma_{yy} dz, \quad \delta M_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \delta \sigma_{yy} dz, \quad \delta M_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \delta \tau_{xy} dz,$$

Các đại lượng trên thoả mãn phương trình cân bằng:

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta N_1}{\partial x} + \frac{\partial \delta N_{12}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \delta N_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \delta N_2}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\text{và: } \frac{\partial^2 e_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \delta M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \delta M_2}{\partial y^2} + N_1 \xi_1 + N_2 \xi_2 + 2N_{12} \xi_{12} = 0 \quad (2.2)$$

Điều kiện tương thích trong trường hợp này có dạng:

$$\frac{\partial^2 e_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_2}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x \partial y} \quad (2.3)$$

Để giải quyết bài toán cần biết điều kiện biên:

Kết hợp với tất cả các hệ thức trình bày trên cần có hệ thức giữa ứng suất và biến dạng tùy thuộc vào từng lý thuyết dẻo. Vì vậy chúng ta cần xét cụ thể hơn cách đặt bài toán theo từng lý thuyết dẻo.

## 2.2. Giải bài toán ổn định theo lý thuyết chảy dẻo.

### 2.2.1. Phương pháp trực tiếp.

Để cho đơn giản, ta giả thiết rằng trước khi bản bị vòng trong bản tồn tại trạng thái ứng nén thuần nhất theo hai hướng trục giao:

$$\sigma_{xx} = -p, \quad \sigma_{yy} = -q, \quad \tau_{xy} = 0$$

Theo lý thuyết chảy cho vật liệu tái bền Prager, gia số ứng suất (khi bản bị vòng) liên hệ với gia số biến dạng dưới dạng:

$$\begin{cases} \delta \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\delta \sigma_{xx} - \nu \delta \sigma_{yy}) - \frac{1}{3} F(T) \delta T (2p - q) \\ \delta \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\delta \sigma_{yy} - \nu \delta \sigma_{xx}) - \frac{1}{3} F(T) \delta T (2q - p) \\ \delta \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2G} \delta \tau_{xy} \end{cases} \quad (2.4)$$

Trong đó:

$$T^2 = \frac{1}{3}(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy}) = \frac{1}{3}(p^2 - pq + q^2),$$

$$\delta T = -\frac{1}{6T}[(2p-q)\delta\sigma_{xx} + (2q-p)\delta\sigma_{yy}]$$

$$F(T) = \frac{\psi'(T)}{2T^2} = \frac{1}{2T} \frac{dW_p(T)}{dT}$$

Với  $W_p(T)$  là công biến dạng dẻo, nó là hàm đặc trưng cho từng vật liệu và không phụ thuộc vào dạng của trạng thái ứng suất. Vì vậy có thể xác định hàm từ đường biến dạng trong trường hợp dẫn đơn giản. Giả sử đường biến dạng trong trường hợp dẫn đơn giản biểu thị bằng phương trình  $\sigma_1 = \Phi(\epsilon_1)$  khi đó công biến dạng dẻo:

$$dW_p = \sigma_1 d\sigma_1 = \sigma_1 \frac{1}{d\sigma_1} [\Phi^{-1}(\sigma_1)] d\sigma_1 - \frac{1}{E} \sigma_1 d\sigma_1$$

Suy ra: 
$$\frac{1}{\sigma_1} \frac{dW_p}{d\sigma_1} - \frac{1}{3T} \frac{dW_p}{dT} = \frac{1}{E_t} - \frac{1}{E}$$

Ở đây  $E_t = \frac{1}{\frac{d}{d\sigma_1} [\Phi^{-1}(\sigma_1)]}$  là môđun tiếp tuyến. Nhờ biểu thức này ta xác định

F(T)

Từ (2.4) và các biểu thức trên, ta được:

$$\begin{cases} E\delta\epsilon_{xx} = A_{xx}\delta\sigma_{xx} + A_{xy}\delta\sigma_{yy} \\ E\delta\epsilon_{yy} = A_{xy}\delta\sigma_{xx} + A_{yy}\delta\sigma_{yy} \\ 2G\delta\epsilon_{xy} = \delta\tau_{xy} \end{cases} \quad (2.5)$$

Trong đó:

$$\begin{cases} A_{xx} = 1 - \alpha(2p - p^2) \\ A_{xy} = -\nu - \alpha(2p - q)(2q - p) \\ A_{yy} = 1 - \alpha(2q - p^2) \end{cases} \quad (2.6)$$

Với: 
$$\alpha = -\frac{1}{12T^2} \left( \frac{E}{E_t} - 1 \right)$$

Nếu vật liệu đàn hồi thì  $\alpha = 0$ , vật liệu dẻo lý tưởng  $\alpha \rightarrow -\infty$ . Bây giờ giải ngược lại hệ thức (2.5)



$$\begin{cases} \delta\sigma_{xx} = \frac{E}{B} (A_{yy}\delta\varepsilon_{xx} - A_{xy}\delta\varepsilon_{yy}) \\ \delta\sigma_{yy} = \frac{E}{B} (-A_{xy}\delta\varepsilon_{xx} + A_{xx}\delta\varepsilon_{yy}) \\ \delta\tau_{xy} = 2G\delta\varepsilon_{xy} \end{cases} \quad (2.7)$$

Trong đó:  $B = (1-\nu^2)B_1, B_1 = 1 + \frac{5-4\nu}{1-\nu^2} \alpha \left( p^2 - \frac{8-10\nu}{5-4\nu} pq + q^2 \right)$ .

Chúng ta đã giả thiết rằng bản bị võng trong điều kiện lực nén tăng và không có miền chất tải, vì vậy hệ thức (2.7) đúng trong toàn bộ bản.

Nhờ các hệ thức (2.7) tính các gia số mômen:

$$\begin{cases} \delta M_1 = -\frac{D}{B_1} (A_{yy}\xi_1 - A_{xy}\xi_2) \\ \delta M_2 = -\frac{D}{B_1} (A_{xy}\xi_1 - A_{xx}\xi_2) \\ \delta M_{12} = -D(1-\nu)\xi_{12} \end{cases}$$

Ngoài ra:

$$N_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz = -ph \quad N_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} dz = -qh \quad N_{12} = 0$$

Trong đó:  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  là độ cứng của bản đàn hồi,  $h$  là độ dày không đổi của bản.

Khi đó phương trình uốn bản (2.2) có dạng:

$$A_{yy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(B_1 - \nu B_1 - A_{xy}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{xx} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{hB_1}{D} \left( p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + q \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2.8)$$

Kết hợp với điều kiện biên chúng ta có đủ phương trình để xác định độ võng.

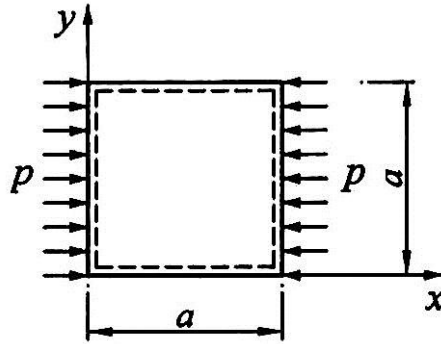
Do đó việc xác định tải tới hạn dẫn tìm giá trị riêng của bài toán.

### 2.2.2. Các ví dụ tính toán.

1) Ổn định của dải chữ nhật hai cạnh tựa đơn bị nén.

Giả sử bản vuông có cạnh  $a$  và độ dày  $h$  tựa đơn tại các biên, bản bị nén đều theo phương trục  $x$  bởi lực  $p$  (hình 2.1).

Khi đó:  $\sigma_{xx} = -p = -\sigma_u, \sigma_{yy} = -q = 0, \tau_{xy} = 0$



Hình 2.1

Trong trường hợp này phương trình uốn bản có dạng:

$$A_{yy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(B_1 - \nu B_1 - A_{xy}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{xx} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{hB_1}{D} \left( p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + q \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0$$

Điều kiện biên dạng có:

$$w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{Tại } x = 0, x = a$$

$$w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{Tại } y = 0, y = b$$

Tìm nghiệm phương trình uốn bản thoả mãn các điều kiện biên dưới dạng:

$$w = a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.9)$$

Trong đó:  $a_{mn}$  là hằng số tùy ý;  $m, n$  là số nguyên. Thế (2.9) vào phương trình uốn bản ta được:

$$a_{mn} \left\{ \pi^4 \left[ A_{yy} \left( \frac{m}{a} \right)^4 + 2(B_1 - \nu B_1 - A_{xy}) \left( \frac{mn}{ab} \right)^2 + A_{xx} \left( \frac{n}{b} \right)^4 \right] - B_1 \frac{hp}{D} \pi^2 \left( \frac{m}{a} \right)^2 \right\} = 0$$

Vì  $a_{mn}$  khác 0 nên:

$$p = \frac{\pi^2 D}{B_1 h} \left[ A_{yy} \left( \frac{m}{a} \right)^2 + 2(B_1 - \nu B_1 - A_{xy}) \left( \frac{n}{b} \right)^2 + A_{xx} \left( \frac{n}{b} \right)^4 \left( \frac{a}{m} \right)^2 \right]$$

Dưới đây là đoạn chương trình Maple tìm lực tới hạn:

```

> restart;
> w:=amn*sin(m*pi*x/a)*sin(n*pi*y/b);
> T2:=(p^2-p*q+q^2)/3;
> alpha:=- (E/Et-1)/(12*T2);
> B1:=1+(5-4*v)*alpha*(p^2-(8-10*v)*p*q/(5-4*v)+q^2)/(1-v^2);
> B:=(1-v^2)*B1;
> Axx:=1-alpha*(2*p-q)^2;
> Axy:=-v-alpha*(2*p-q)*(2*q-p);
> Ayy:=1-alpha*(2*q-p)^2;
> PTuonban:=Ayy*diff(w,x$4)+2*(B1-v*B1-Axy)*diff(w,x$2,y$2)+Axx*diff(w,y$4)+h*B1*(p*diff(w,x$2)+q*diff(w,y$2))/D=0;
> equa:=simplify(subs(q=0,D=E*h^3/12/(1-v^2),PTuonban));
> equal:=simplify(subs(a=i*h,b=i*h,E=2.0*10^5,Et=1.85*10^5,v=0.5,n=1,m=1,pi=3.14,equa));
> pth1:=solve(equal,p);
> pth:=simplify(subs(i=60,pth1));

```

Ta thấy lực tới hạn nhỏ nhất khi  $n=1, m=1$  (bảng 2.1).

Bảng 2.1

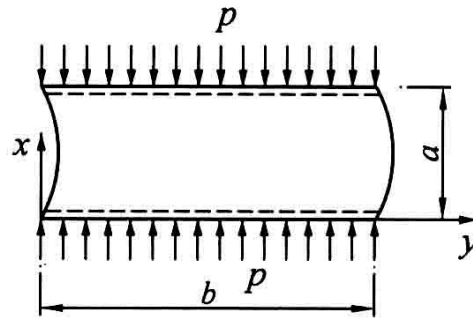
$i = a/h$	$\mu$	$E(\text{MN/m}^2)$	$E_t(\text{MN/m}^2)$	$P_{th}(\text{MN/m}^2)$
60	0.5	$2.0 \times 10^5$	$1.85 \times 10^5$	230.89

2) Ổn định của dải chữ nhật bị nén.

Xét bài toán của bản chữ nhật bị nén theo hướng  $X$  bởi ứng suất  $\sigma_{xx}$  không đổi. Bản tựa đơn tại các cạnh  $x = 0, x = a$ . Vì bản khá dài ( $b > a$ ), nên có thể xem dạng mất ổn định chính là dạng hình trụ (hình 2.2), tức  $w = w(x)$ .

Theo điều kiện đặt lực, ta có:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\sigma = -p & \sigma_{yy} &= \tau_{xy} = 0 \\ \sigma_{xx} &= -1; & \sigma_{yy} &= \tau_{xy} = 0 \end{aligned}$$



Hình 2.2

Khi đó phương trình uốn bản có dạng:

$$A_{yy} \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{pB_1 h}{D} \frac{d^2 w}{dx^2} = 0,$$

Với điều kiện biên:

$$w = 0, \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad \text{tại } x = 0, x = a,$$

Lực tới hạn có giá trị:

$$P_{th} = P_0 \frac{A_{yy}}{B_1}$$

Trong đó:  $P_0 = \frac{\pi^2 D}{a^2 h}$  là lực tới hạn của bản đàn hồi bị nén

Và hệ số

$$\frac{A_{yy}}{B_1} = \frac{1 + \frac{1}{4\sqrt{3}} \left( \frac{E}{E_t} - 1 \right)}{1 + \frac{5-4\nu}{1-\nu^2} \frac{1}{4\sqrt{3}} \left( \frac{E}{E_t} \right)}$$

Kết quả tính cho một số trường hợp được trình bày ở bảng 2.2

Bảng 2.2

$i = a/h$	$\mu$	$E(\text{MN/m}^2)$	$E_t(\text{MN/m}^2)$	$p_{th}(\text{MN/m}^2)$
31	0.5	$2.0 \times 10^5$	$1.83 \times 10^5$	225.02
32	0.5	$2.0 \times 10^5$	$1.93 \times 10^5$	216.26

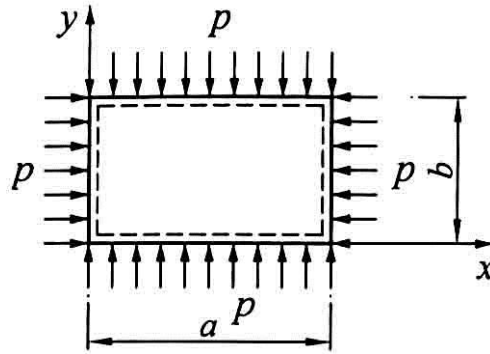
3) Ổn định của bản chữ nhật bốn cạnh tựa đơn bị nén đều theo hai phương vuông góc nhau.

Giả sử bản chữ nhật có cạnh  $a$  và  $b$ , độ dày  $h$ , bản bị nén đều theo hai phương bởi cùng một lực  $p$ .

Khi đó  $\sigma_{xx} = -p$ ,  $\sigma_{yy} = -p$ ,  $\tau_{xy} = 0$ .

Bản có 4 cạnh tựa đơn (hình 2.3), ta chọn dạng nghiệm độ võng lúc mất ổn định theo (2.9):

$$\omega = a_{\min} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$



Hình 2.3

Kết quả được tính toán trên Maple cho một số trường hợp được trình bày ở

Bảng 2.2

	$i = b/h$	$\mu$	$EMN/m^2$	$E_t (MN/m^2)$	$p_{th}(MN/m^2)$
$a=b$	44	0.5	$2.0 \times 10^5$	$1.85 \times 10^5$	106.68
$a = 2b$	70	0.5	$2.0 \times 10^5$	$1.85 \times 10^5$	108.95

### 2.3. Giải bài toán ổn định theo lý thuyết biến dạng đàn dẻo.

Giả thiết rằng vật liệu không nén được  $\mu = 0,5$ , tại mọi mặt phẳng song song với mặt giữa đều có trạng thái ứng suất phẳng. Khi đó cường độ ứng suất và biến dạng:

$$\sigma_u = \sqrt{\sigma_{xx}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}^2 + 3\tau_{xy}^2},$$

$$e_u = \frac{2}{3} \sqrt{\varepsilon_{xx}^2 - \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{xy}^2}$$

liên hệ với nhau bằng hệ thức:  $\sigma_u = \Phi(e_u) = 3G_{e_u} [1 - \omega(e_u)]_u$

Theo lý thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ của Ilyushin trong miền biến dạng chủ động, tức là đặt tải, ta có hệ thức:

$$S_x = \sigma_{xx} - \frac{1}{2} \sigma_{yy} = \frac{\sigma_u}{e_u} \varepsilon_{xx},$$

$$S_y = \sigma_{yy} - \frac{1}{2} \sigma_{xx} = \frac{\sigma_u}{e_u} \varepsilon_{yy},$$

$$S_{xy} = \tau_{xy} = \frac{2\sigma_u}{3e_u} \varepsilon_{xy}$$

Trong miền biến dạng bị động, tức là cắt tải, các hệ thức này có dạng:

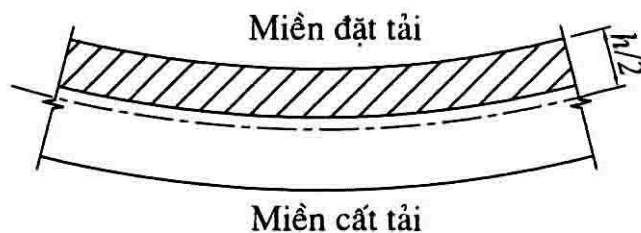
$$S_x = \sigma_{xx} - \frac{1}{2} \sigma_{yy} = E \varepsilon_{xx},$$

$$S_y = \sigma_{yy} - \frac{1}{2} \sigma_{xx} = E \varepsilon_{yy},$$

$$S_{xy} = \tau_{xy} = \frac{2}{3} E \varepsilon_{xy}$$

### 2.3.1. Thiết lập chính xác bài toán về ổn định của bản ngoài giới hạn đàn hồi trên cơ sở lý thuyết biến dạng.

Giả sử dưới tác dụng của lực ngoài bản ở trạng thái cân bằng giữ nguyên dạng phẳng ban đầu, tương ứng với trạng thái ứng suất đã biết, trong đó  $\sigma_u \geq \sigma_{s,u}$ . Nếu tiếp tục thay đổi lực ngoài, bản có thể bị võng. Để nghiên cứu ổn định của bản ngoài giới hạn đàn hồi chúng ta giả thiết rằng bằng cách nào đấy bản hơi bị võng, mà lực ngoài và điều kiện biên không thay đổi (hình 2.4). Cần xác định giữa  $\sigma_u$  và kích thước của bản liên hệ như thế nào đây để bản hơi bị võng có thể ở trạng thái cân bằng. Gọi giá trị nhỏ nhất của những ứng suất này là ứng suất tới hạn.



Hình 2.4

Chuyển tiếp từ trạng thái phẳng sang trạng thái hơi võng gây ra nén tiếp miền

này, đồng thời dẫn miền kia của bản. Tại những phần tử bản bị nén tiếp ta có quá trình đặt tải, cường độ  $\sigma_u$ ,  $e_u$  tăng. Tại những phần tử bị dẫn xảy ra cắt tải cường độ  $\sigma_u$ ,  $e_u$  giảm. Độ dày của bản chia làm hai miền: tại một miền xảy ra đặt tải theo quy luật (2.10), tại miền kia cắt tải theo quy luật (2.11). Theo điều kiện vừa nêu trên gia số ứng suất, biến dạng và cường độ phải triệt tiêu trên biên phân chia hai miền. Trong miền đặt tải ta có:

$$\delta S_x = \delta \sigma_{xx} - \frac{1}{2} \delta \sigma_{yy} = \frac{\sigma_u}{e_u} \delta \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{xx} \frac{d}{de_u} \left( \frac{\sigma_u}{e_u} \right) \delta e_u,$$

$$\delta S_y = \delta \sigma_{yy} - \frac{1}{2} \delta \sigma_{xx} = \frac{\sigma_u}{e_u} \delta \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy} \frac{d}{de_u} \left( \frac{\sigma_u}{e_u} \right) \delta e_u,$$

$$\delta S_{xy} = \delta \tau_{xy} = \frac{2\sigma_u}{3e_u} \delta \varepsilon_{xy} + \frac{2}{3} \varepsilon_{xy} \frac{d}{de_u} \left( \frac{\sigma_u}{e_u} \right) \delta e_u,$$

cần kết hợp thêm điều kiện  $\sigma_u = \Phi(e_u)$ , trong đó:

$$\frac{d}{de_u} \left( \frac{\sigma_u}{e_u} \right) = -\frac{1}{e_u} \left( \frac{\sigma_u}{e_u} - \frac{d\sigma_u}{de_u} \right) \leq 0.$$

Trong miền cắt tải:

$$\delta S_x = \delta \sigma_{xx} - \frac{1}{2} \delta \sigma_{yy} = E \delta \varepsilon_{xx}$$

$$\delta S_y = \delta \sigma_{yy} - \frac{1}{2} \delta \sigma_{xx} = E \delta \varepsilon_{yy}, \quad (2.13)$$

$$\delta S_{xy} = \delta \tau_{xy} = \frac{2}{3} E \delta \varepsilon_{xy}.$$

Gia số công lực trên một đơn vị thể tích có dạng:

$$\delta W = \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + 2\tau_{xy} \delta \varepsilon_{xy} = \sigma_u \delta e_u + \sigma \delta \theta = \sigma_u \delta e_u,$$

(vì vật liệu không nén được  $\theta = 0$ )

Đặt  $\delta W = 0$  ta được phương trình mặt phân chia miền biến dạng đàn hồi và miền biến dạng dẻo:

$$\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + 2\tau_{xy} \delta \varepsilon_{xy} = 0 \quad (2.14)$$

Bây giờ đưa vào các đại lượng không thứ nguyên:

$$\sigma_{xx}^* = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_u}, \quad \sigma_{yy}^* = \frac{\sigma_{yy}}{\sigma_u}, \quad \tau_{xy}^* = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_u}, \quad S_y^* = \frac{S_x}{\sigma_u},$$

$$\xi_1^* = \frac{h}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \quad \xi_2^* = \frac{h}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}, \quad \xi_{12}^* = \frac{h}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}, \quad z^* = \frac{2}{h} z$$

Đặt các biểu thức của  $\delta \varepsilon_{xx}, \delta \varepsilon_{yy}, \delta \varepsilon_{xy}$  vào (2.14), chú ý ở đây  $z = z_0$  (tọa độ mặt phân chia) và các biểu thức không thứ nguyên cho ta:

$$\varepsilon = z_0^* \xi^*$$

Trong đó:

$$\varepsilon = \sigma_{xx}^* e_1 + \sigma_{yy}^* e_2 + 2\tau_{xy}^* e_{12},$$

$$\xi = \sigma_{xx}^* \zeta_1 + \sigma_{yy}^* \zeta_2 + 2\tau_{xy}^* \zeta_{12},$$

$$\xi^* = \frac{1}{2} \xi h$$

Tiếp đến đặt các gia số biến dạng vào (2.12), (2.13) và viết các phương trình nhận được qua các đại lượng không thứ nguyên:

Với  $z > z_0$ :

$$\delta S_x = \left( \frac{\sigma_u}{e_u} - \frac{d\sigma_u}{de_u} \right) S_x^* \zeta^* (z^* - z_0^*) - \frac{\sigma_u}{e_u} (e_1 - \xi_1^* z^*),$$

$$\delta S_y = \left( \frac{\sigma_u}{e_u} - \frac{d\sigma_u}{de_u} \right) S_y^* \zeta^* (z^* - z_0^*) - \frac{\sigma_u}{e_u} (e_2 - \xi_2^* z^*),$$

$$\delta S_{xy} = \left( \frac{\sigma_u}{e_u} - \frac{d\sigma_u}{de_u} \right) S_{xy}^* \zeta^* (z^* - z_0^*) - \frac{\sigma_u}{e_u} (e_{12} - \xi_{12}^* z^*),$$

Với  $z < z_0$ :

$$\delta S_x = E(e_1 - \xi_1^* z^*),$$

$$\delta S_y = E(e_2 - \xi_2^* z^*),$$

$$\delta S_{xy} = \frac{2}{3} E(e_{12} - \xi_{12}^* z^*),$$

Bây giờ tính các biểu thức của gia số lực dẫn và mômen theo ba trạng thái:

a) *Trạng thái đàn hồi*: theo (2.16) có thể viết:

$$\frac{1}{Eh} \left( \delta N_1 - \frac{1}{2\delta N_2} \right) = e_1,$$



$$\frac{1}{Eh} \left( \delta N_2 - \frac{1}{2} \delta N_1 \right) = e_2,$$

$$\frac{1}{Eh} \delta N_{12} = \frac{2}{3} e_{12},$$

$$\frac{4}{3D} \left( \delta M_1 - \frac{1}{2} \delta M_2 \right) = -\xi_1,$$

$$\frac{4}{3D} \left( \delta M_2 - \frac{1}{2} \delta M_1 \right) = -\xi_{12},$$

b) *Trạng thái tồn tại hai miền:* miền  $z < z_0$  biến dạng đàn hồi, miền  $z > z_0$  biến dạng dẻo. Tích phân các biểu thức gia số lực và mômen được tách làm hai: tích phân thứ nhất lấy từ  $-h/2$  đến  $z_0$  với hệ thức (2.16), tích phân thứ hai lấy từ  $z_0$  đến  $2$  với hệ thức (2.15) ta nhận được:

$$\frac{4}{EH} \left( \delta N_1 - \frac{1}{2} \delta N_2 \right) = 2(2 - \varpi + \varpi z_0^*) e_1 + \varpi(1 - z_0^{*2}) \xi_1^* + (\lambda - \varpi) S_0^* (1 - z_0^*)^2 \xi^*,$$

$$\frac{4}{Eh} \left( \delta N_2 - \frac{1}{2} \delta N_1 \right) = 2(2 - \varpi + \varpi z_0^*) e_2 + \varpi(1 - z_0^{*2}) \xi_2^* + (\lambda - \varpi) S_y^* (1 - z_0^*)^2 \xi^*, \quad (2.17)$$

$$\frac{12}{Eh} \delta N_{12} = 4(2 - \varpi + \varpi z_0^*) e_{12} + 2\varpi(1 - z_0^{*2}) \xi_{12}^* + 3(\lambda - \varpi) S_{xy}^* (1 - z_0^*)^2 \xi^*,$$

trong đó:

$$\varpi = \varpi(e_u) = 1 - \frac{1}{E} - \frac{\sigma_u}{e_u}, \lambda = 1 - \frac{1}{E} \frac{d\sigma_u}{de_u}$$

Tương tự, ta nhận được các biểu thức của mômen:

$$\frac{16}{3D} \left( \delta M_1 - \frac{1}{2} \delta M_2 \right) = -2(2 - \varpi + \varpi z_0^{*3}) \xi_1^* + (\lambda - \varpi)(1 - z_0^*)^2 (2 + z_0^*) S_x^* \xi - \frac{6\varpi}{h} (1 - z_0^{*2}) e_1$$

$$\frac{16}{3D} \left( \delta M_2 - \frac{1}{2} \delta M_1 \right) = -2(2 - \varpi + \varpi z_0^{*3}) \xi_2^* + (\lambda - \varpi)(1 - z_0^*)^2 (2 + z_0^*) S_x^* \xi - \frac{6\varpi}{h} (1 - z_0^{*2}) e_2,$$

$$\frac{16}{D} \delta M_{12} = -4(2 - \varpi + \varpi z_0^3) \xi_{12}^* + 3(\lambda - \varpi)(1 - z_0^*)^2 (2 + z_0^*) S_{xy}^* \xi - \frac{12\varpi}{h} (1 - z_0^{*2}) e_{12},$$

(2.18)

c) *Trạng thái đặt cái hoàn toàn* (toàn miền biến dạng dẻo), theo công thức (2.15) có thể viết:

$$\begin{aligned}\frac{1}{Eh}\left(\delta N_1 - \frac{1}{2}\delta N_2\right) &= (1-\omega)e_1 - (\lambda-\omega)S_x^*\varepsilon, \\ \frac{1}{Eh}\left(\delta N_2 - \frac{1}{2}\delta N_1\right) &= (1-\omega)e_2 - (\lambda-\omega)S_y^*\varepsilon, \\ \frac{1}{Eh}\delta N_{12} &= \frac{2}{3}(1-\omega)e_{12} - (\lambda-\omega)S_{xy}^*\varepsilon, \\ \frac{4}{3D}\left(\delta M_1 - \frac{1}{2}\delta M_2\right) &= -(1-\omega)\xi_1 + (\lambda-\omega)S_x^*\xi, \\ \frac{4}{3D}\left(\delta M_2 - \frac{1}{2}\delta M_1\right) &= -(1-\omega)\xi_2 + (\lambda-\omega)S_y^*\xi, \\ \frac{4}{3D}\delta M_{12} &= -\frac{2}{3}(1-\omega)\xi_{12} + (\lambda-\omega)S_{xy}^*\xi.\end{aligned}$$

Nếu trước khi mất ổn định biến dạng dẻo nhỏ hơn biến dạng đàn hồi, thì trong các hệ thức trên có thể bỏ qua đại lượng nhỏ bậc  $\omega$  so với 1, các hệ thức (2.16), (2.17) có dạng:

$$\begin{aligned}\frac{1}{Eh}\left(\delta N_1 - \frac{1}{2}\delta N_2\right) &= e_1 + \frac{\lambda h}{2}S_x^*\xi\zeta^2, \\ \frac{1}{Eh}\left(\delta N_2 - \frac{1}{2}\delta N_1\right) &= e_2 + \frac{\lambda h}{2}S_y^*\xi\zeta^2, \\ \frac{1}{Eh}\delta N_{12} &= \frac{2}{3}e_2 + \frac{\lambda h}{2}S_{xy}^*\xi\zeta^2, \\ \frac{4}{3D}\left(\delta M_1 - \frac{1}{2}\delta M_2\right) &= -\xi_1 + \lambda S_x^*\zeta^2(3-2\zeta)\xi, \\ \frac{4}{3D}\left(\delta M_2 - \frac{1}{2}\delta M_1\right) &= -\xi_2 + \lambda S_y^*\zeta^2(3-2\zeta)\xi, \\ \frac{4}{3D}\delta M_{12} &= -\frac{2}{3}\xi_{12} + S_{xy}^*\zeta^2(3-2\zeta)\xi.\end{aligned}\tag{2.19}$$

$$\tag{2.20}$$

trong đó ký hiệu:

$$\zeta = \frac{1-z_0^*}{2} = \frac{h_p}{h},$$

$h_p$  là độ dày của miền biến dạng dẻo.

Lực dẫn tại mặt phẳng giữa trước khi mất ổn định xác định nhờ công thức:

$$N_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} dz = h \sigma_u \sigma_{xx}^*,$$

$$N_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} dz = h \sigma_u \sigma_{yy}^*,$$

$$N_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz = h \sigma_u \tau_{xy}^*.$$

Tập hợp các phương trình (2.1), (2.2), (2.3) và các hệ thức (2.17), (2.18) kết hợp với các điều kiện biên cho ta đầy đủ các phương trình để giải bài toán ổn định. Bài toán đưa về bốn phương trình vi phân với hàm chưa biết:

$$\delta N_1, \delta N_2, \delta N_{12} \text{ và } w.$$

### 2.3.2. Giải gần đúng bài toán về ổn định của bản.

Ilyushin kiến nghị phương pháp giải gần đúng dựa trên giả thiết của gia số lực dẫn  $\delta N_1, \delta N_2, \delta N_{12}$  bằng không tại mọi điểm. Giả thiết này có cơ sở vì những lẽ sau đây:

- Giá trị lực tới hạn xác định với giả thiết này gần với nghiệm chính xác.
- Kết quả phù hợp với thực nghiệm.
- Thoả mãn điều kiện của bài toán là gia số lực ngoài bằng không.
- Đối với biến dạng đàn hồi của bản nó thoả mãn một cách chính xác.

Theo giả thiết này, từ (2.19) suy ra;

$$\ell_1 + \frac{\lambda}{h} S_x^* \xi \left( \frac{1-2z_0}{2} \right)^2 = 0,$$

$$\ell_2 + \frac{\lambda}{h} S_y^* \xi \left( \frac{1-2z_0}{2} \right)^2 = 0,$$

$$\frac{2}{3} \ell_{12} + \frac{\lambda}{h} S_{xy}^* \xi \left( \frac{1-2z_0}{2} \right)^2 = 0.$$

Nhân các phương trình với  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, 3\tau_{xy}$  tương ứng rồi cộng lại ta được:

$$\varepsilon = -\frac{\lambda}{h} \xi \left( \frac{1-2z_0}{2} \right)^2.$$

Thế giá trị  $\varepsilon = z_0^* \xi^*$  vào đây và giải theo  $z_0$ :

$$z_0 = \frac{2}{\lambda} (1 - \sqrt{1-\lambda}) - 1; \quad \xi = \frac{1 - \sqrt{1-\lambda}}{\lambda}.$$

Từ đây ta đi đến kết luận mặt phân chia song song với mặt giữa, vị trí của nó xác định bởi tính chất của vật liệu  $\lambda = 1 - \frac{1}{E} \frac{d\sigma_u}{d\ell_u}$ . Nếu trước khi mất ổn định

trạng thái ứng suất của bản thuần nhất, thì đại lượng  $\zeta$  là hằng số, vì  $\frac{d\sigma_u}{d\ell_u}$  có

giá trị như nhau tại mọi điểm của bản.

Làm một cách tổng quát hơn, cho  $\delta N_1 = \delta N_2 = \delta N_{12} = 0$ ,

Trong hệ thức (2.17) ta tìm được liên hệ giữa  $\xi_n$  và  $e_n$ . Dem các giá trị này

vào phương trình (2.18), kết quả cuối cùng sẽ là:

$$\begin{aligned}\frac{\delta M_1}{D} &= -(1-\psi) \left( \xi_1 + \frac{1}{2} \xi_2 \right) + \frac{3}{4} (1-\psi-k) \sigma_{xx}^* \xi \\ \frac{\delta M_2}{D} &= -(1-\psi) \left( \xi_1 + \frac{1}{2} \xi_2 \right) + \frac{3}{4} (1-\psi-k) \sigma_{yy}^* \xi \\ \frac{\delta M_2}{D} &= -\frac{1}{2} (1-\psi) \xi_{12} + \frac{3}{4} (1-\psi-k) \tau_{xy} \xi\end{aligned}\quad (2.12)$$

Trong đó:

$$k = \frac{4 \frac{d\sigma_u}{de_u}}{\left( \sqrt{E} + \sqrt{\frac{d\sigma_u}{de_u}} \right)^2} = \frac{4E_t}{\left( \sqrt{E} + \sqrt{E_t} \right)^2}$$

$$\psi = \omega \left( 1 - \frac{1}{2} \sqrt{k} \right) \left[ \left( 1 - \frac{1}{2} \sqrt{k} \right)^2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{k}{1 - \left( 1 - \frac{1}{2} \sqrt{k} \right) \omega} \right]$$

Nếu trước khi mất ổn định trạng thái ứng suất của bản không thuần nhất, thì các đại lượng  $\omega, \psi, k$  và ứng suất phụ thuộc vào tọa độ  $x, y$ . Khi đó nhờ (2.21) đưa phương trình (2.2) về phương trình bậc bốn có hệ số thay đổi.

Nếu trạng thái ứng suất thuần nhất, tức là  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$  là hằng số, thì ta nhận được phương trình có hệ số hằng số:

$$\begin{aligned} & (1 - P\sigma_{xx}^{*2}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \left[ 1 - P(\sigma_{xx}^* \sigma_{yy}^* + 2\tau_{xy}^{*2}) \right] \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & + \left( 1 - P\sigma_{yy}^{*2} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2P\tau_{xy}^* \left[ 1 - P \left( \sigma_{xx}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + \sigma_{yy}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} \right) \right] \\ & - \frac{\Omega^2 \sigma_u}{El^2 (1 - \psi)} \left( \sigma_{xx}^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tau_{xy}^* \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sigma_{yy}^* \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

Trong đó: 
$$P = \frac{3(1 - \psi - k)}{4(1 - \psi)}$$

Phương trình ổn định của bản ngoài giới hạn đàn hồi (2.22) do Ilyushin tìm ra điều kiện đầu tiên, kết hợp với điều kiện bên ngoài cho phép chúng ta xác định lực tới hạn.

### 2.3.3. Các ví dụ tính toán.

1) Ổn định của bản vuông tựa đơn bị nén đều theo một phương (hình 2.1).

Trong trường hợp này.

$$\sigma_{xx} = -\sigma_u \qquad \sigma_{xx}^* = -1 \qquad \sigma_{yy}^* = \tau_{xy}^* = 0$$

Có thể làm tương tự như trên để tìm tải tới hạn.

Dưới đây là đoạn chương trình Maple tìm lực tới hạn cụ thể.

```
> restart;
> w:=amn*sin(m*pi*x/a)*sin(n*pi*y/b);
> PTuonban:=(1-P1*sigma(xo)^2)*diff(w,x$4)+2*(1-
P1*(sigma(xo)*sigma(yo)+2*t(xyo)^2))*diff(w,x$2,y$2)
+(1-P1*sigma(yo)^2)*diff(w,y$4)-
2*P*t(xyo)*(sigma(xo)*diff(w,x$3,y$1)+sigma(yo)*diff(
w,x$1,y$3))-
Omega^2*sigma(u)*(sigma(xo)*diff(w,x$2)+2*t(xyo)*dif
f(w,x,y)+sigma(yo)*diff(w,y$2))/E/l^2/(1-Xi)=0;
> pt:=simplify(subs(sigma(xo)=-
1,sigma(yo)=0,t(xyo)=0,sigma(u)=p,PTuonban));
> p:=solve(pt,p);
> k:=4*Et/(E^(1/2)+Et^(1/2))^2;
> Xi:=omega*(1-k^(1/2)/2)*((1-k^(1/2)/2)^2+3*k/4/(1-
(1-k^(1/2)/2)*omega));
> P1:=3*(1-Xi-k)/4/(1-Xi);
> Omega:=(l^2*12*(1-v^2)/h^2)^(1/2);
> pt1:=p;
```

>pth1:=simplify (subs (a=i\*h, b=i\*h, pi=3.14, n=1, m=1, E=2.0\*10^5 ,  
Et=1.85\*10^5 , v=0 . 05 , omega=0,05 , omega=0,05 , pt1) ) ; > pth:=simplify  
( subs ( i=60 , pth1) ) ;

Ta thấy lực tới hạn nhỏ nhất khi n=1, m=1. Kết quả được trình bày ở bảng 2.4

Bảng 2.4

$i=a/h$	$\mu$	$E(\text{MN}/\text{m}^2)$	$E_t(\text{MN}/\text{m}^2)$	$p_{th}(\text{MN}/\text{m}^2)$
60	0,5	$2.0 \times 10^5$	$1.85 \times 10^5$	236.85

2) Ổn định của dải chữ nhật bị nén (hình 2.2).

Phương trình (2.22) đưa về dạng:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + y^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = 0,$$

Trong đó: 
$$y = \frac{2\Omega}{a} \sqrt{\frac{\sigma_u}{E(1-\psi + 3k)}}$$

Tương tự như trên, ta tìm được độ uốn tới hạn:

$$\Omega_{th} = \frac{1}{2} y_{th} a \sqrt{\frac{E(1-\psi + 3k)}{\sigma_u}}$$

Với bản lựa đơn,  $y_{th} = \frac{\pi}{a}$ ,  $\rightarrow \Omega_{th} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{E(1-\psi + 3k)}{\sigma_u}}$

Dùng chương trình Maple tương tự như trên, ta được kết quả tính cho một số trường hợp được trình bày ở

Bảng 2.5

$i = a/h$	$\mu$	$E(\text{MN}/\text{m}^2)$	$E_t(\text{MN}/\text{m}^2)$	$p_{th}(\text{MN}/\text{m}^2)$
31	0.5	$2.0 \times 10^5$	$1.83 \times 10^5$	225.26
32	0.5	$2.0 \times 10^5$	$1.93 \times 10^5$	215.98

3) Ổn định của bản chữ nhật bốn cạnh tựa đơn bị nén đều theo hai phương vuông góc nhau (hình 2.3).

Tương tự như trên, bài toán được lập trình trên Maple và kết quả thể hiện trên

Bảng 2.6

	$i=a/h$	$\mu$	$E(MN/m^2)$	$E_t(MN/m^2)$	$p_{th}(MN/m^2)$
$a = b$	44	0.5	$2.0 \times 10^5$	$1.83 \times 10^5$	109.54
$a = 2b$	70	0.5	$2.0 \times 10^5$	$1.83 \times 10^5$	115.11

#### 2.4. Giải bài toán ổn định của bản chữ nhật ngoài giới hạn đàn hồi theo mô đun tiếp tuyến.

Nhằm mục đích kiểm chứng lại kết quả của phương pháp số ở phần sau, trước tiên nêu một ví dụ mà nghiệm giải tích đàn hồi đã có [1].

Xét một bản vuông cạnh  $a$ , bề dày  $h$  có tất cả các cạnh đều tựa đơn chịu nén đều theo phương song song với một cạnh của bản với giá trị là  $p$  (hình 2.1). Với điều kiện biên và dạng hàm độ võng lúc bản bị mất ổn định theo (2.9), ứng suất tới hạn trong giai đoạn đàn hồi là:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 E}{3(1-\nu^2) i^2} \quad (a)$$

Trong đó:  $i = b/h$

Thực nghiệm cho biết rằng khi ứng suất nén đạt tới giới hạn chảy của vật liệu, bản sẽ bị mất ổn định với bất kỳ giá trị nào của  $i$ , thể hiện qua đường nằm ngang  $BC$  (hình 2.5). Nếu vật liệu có giới hạn chảy rõ rệt và tuân theo định luật Hooke cho đến khi đạt giới hạn chảy thì đường nằm ngang  $BC$  cùng với đường cong  $BA$  sẽ xác định trị số tới hạn của ứng suất nén ứng với  $i$  bất kỳ (ngoài đàn hồi). Đối với vật liệu như thép xây dựng, thường có biến dạng dư khi ứng suất còn thấp hơn giới hạn chảy, như vậy ta phải có một đường cong chuyển tiếp nối đường cong trong giai đoạn hoàn toàn đàn hồi với đường nằm ngang biểu thị biến dạng chảy. Muốn vẽ đường cong này, ta giả sử rằng hiện tượng nén bản theo một phương quá giới hạn tỷ lệ sẽ gây ảnh hưởng đến tính chất cơ học của vật liệu theo mọi phương đều như nhau. Vậy bản đẳng hướng và ta có thể dùng mô đun tiếp tuyến của vật liệu. Khi đó, ứng suất tới hạn khi bản làm việc ngoài đàn hồi có thể được tính.

$$P_{th} = \frac{\pi^2 E_t}{3(1-\nu^2)l^2} \quad (b)$$

Với  $E_t$  – mô đun tiếp tuyến. Đối với thép xây dựng, có giới hạn chảy  $\sigma_{ch}$  rõ ràng,  $E_t$  được xác định theo công thức sau [1]:

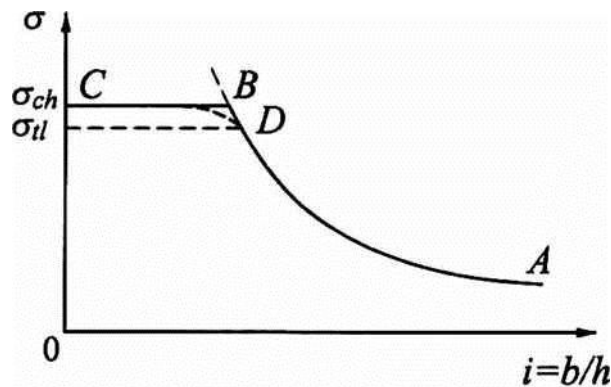
$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E_t = E \frac{\sigma_{ch} - \sigma}{\sigma_{ch} - c\sigma} \quad (2.23)$$

Trong đó :  $E = 2.0 \times 10^5 \text{ MN/m}^2$

$$\sigma_{ch} = 240 \text{ MN/m}^2$$

$c = 0.99$  (biến dạng bé)

Cách xác định  $E_t$  :  $E_t$  được tính lặp. Lúc đầu chọn  $E_{t1} < E$  và tính ứng suất tới hạn  $\sigma_{th1}$  theo (b). Thay  $\sigma = \sigma_{th1}$  vào (2.23) và tính lại  $E_{t2}$ , so sánh  $E_{t2}$  với  $E_{t1}$ . Cứ tiếp tục như vậy đến khi nào  $E_t$  được chọn phù hợp, khi đó tính được ứng suất tới hạn và tải trọng tới hạn.



Hình 2.5

Kết quả tính toán bằng số được trình bày trong bảng 2.7

Bảng 2.7

$i = b/h$	$\mu$	$E(\text{MN/m}^2)$	$E_t(\text{MN/m}^2)$	$p_{th}(\text{MN/m}^2)$
60	0.5	2.0E+05	1.80E+05	219.10

Các dạng bài toán khác nhau cũng được tiến hành như trên tương tự bài toán đàn hồi đã có trong tài liệu [1].

Như vậy với bản chỉ quan tâm đến vùng tăng tải thì dùng phương pháp giải tích của nghiệm đàn hồi theo mô đun tiếp tuyến đơn giản hơn. Tuy vậy, với sự phát triển của công nghệ thông tin, phương pháp phần tử hữu hạn được ứng dụng rộng rãi hơn trong ứng dụng tính toán cho kết cấu thực.



## KẾT LUẬN CHƯƠNG 2

Trong chương 2, bài toán ổn định của tấm ngoài giới hạn đàn hồi được giải theo phương pháp giải tích qua hai hướng:

- Cách 1: Giải theo các lý thuyết dẻo thuần túy (lý thuyết biến dạng đàn dẻo, lý thuyết chảy dẻo).
- Cách 2: Giải theo cách tương tự bài toán đàn hồi khi dùng mô đun tiếp tuyến. Kết quả cho thấy là phù hợp.

Vậy có thể dùng cách thứ 2 để giải bài toán thực tế với việc ứng dụng các phương pháp số hiện đại, cụ thể sẽ được trình bày ở chương 3.

## CHƯƠNG 3

### GIẢI BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH CỦA BẢN NGOÀI GIỚI HẠN ĐÀN HỒI BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

#### 3.1 Cách giải bài toán ổn định bản đàn hồi theo phương pháp phần tử hữu hạn [3].

##### 3.1.1 Khái niệm chung và phương trình cơ bản.

Bài toán ổn định của bản đàn hồi sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn rất hiệu quả, cho phép giải bài toán phức tạp về mặt hình học cũng như về tải trọng. Để tiện áp dụng sau này trong việc giải bài toán ổn định của bản ngoài giới hạn đàn hồi, ta xét bài toán chỉ có tải trọng dọc tác dụng trong mặt phẳng trung bình của bản, không có tải trọng ngang tác dụng.

Dưới tác động của tải trọng này, trong bản phát sinh trạng thái ứng suất  $\sigma_x; \sigma_y; \sigma_{xy}$ , tương ứng với vec tơ chuyển vị  $\{\delta_1; \delta_2; \dots; \delta_n\}$ . Nếu tải trọng tăng tỷ lệ với hệ số  $\lambda$ , tồn tại trạng thái ổn định ban đầu của bản:

$$d\{\psi\}_s = \{[K_0]_s + \lambda[K_\sigma]_s\}d\{\delta\} \cong 0 \quad (3.1)$$

Trong đó:

$\{\psi\}_s$ : Tổng hợp của ngoại lực và nội lực.

$[K_0]_s$ : Ma trận độ cứng của bản ứng với chuyển vị nhỏ.

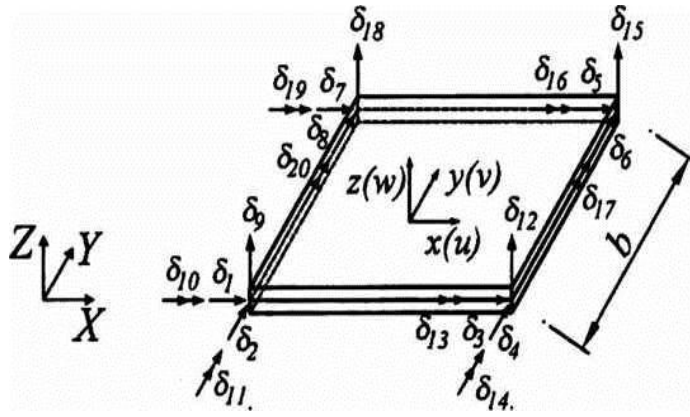
$[K_\sigma]_s$ : Ma trận độ cứng hình học của bản.

Giải bài toán trị riêng (3.1) xác định được  $\lambda_{\min}$ , gọi là thông số ổn định.

##### 3.1.2. Thiết lập ma trận độ cứng của một phần tử bản chữ nhật bất kỳ và cho cả bản.

###### 3.1.2.1. Thiết lập ma trận độ cứng của một phần tử bản chữ nhật bất kỳ.

Xét một bản chữ nhật vật liệu đàn hồi đẳng hướng có các hằng số đàn hồi  $E, \nu$ , chiều dày  $h$ , kích thước hai phương là  $a, b$ . Tại mỗi nút có 3 chuyển vị thẳng theo phương  $x, y, z$  là  $\delta_x, \delta_y, \delta_z$  và hai chuyển vị xoay quanh trục  $x$  và  $y$  là  $\delta_{xz}, \delta_{yz}$ . Vậy toàn bộ phần tử sẽ có 20 chuyển vị được quy ước  $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{20}\}^T$  như hình vẽ (3.1).



Hình 3.1

a) Chọn hàm chuyển vị.

Chọn hàm Hermit loại I đặc trưng cho chuyển vị trong bài toán trạng thái ứng suất phẳng và được ký hiệu là  $H_i$  ( $i = 1, \dots, 8$ ).

$$\begin{aligned}
 H_1 &= (1 - \xi)(1 - \eta) \\
 H_2 &= (1 - \xi)\eta \\
 H_3 &= \xi(1 - \eta) \\
 H_4 &= \xi\eta \\
 H_5 &= \xi\eta \\
 H_6 &= \xi\eta \\
 H_7 &= (1 - \xi)\eta \\
 H_8 &= (1 - \xi)\eta
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Khi đó hàm dạng của phần tử trong bài toán trạng thái ứng suất phẳng.

$$[N_e^p] = \begin{bmatrix} H_1 & 0 & H_3 & 0 & H_5 & 0 & H_7 & 0 \\ 0 & H_2 & 0 & H_4 & 0 & H_6 & 0 & H_8 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Chọn hàm Hermit loại II đặc trưng cho chuyển vị trong bài toán tấm uốn và được ký hiệu là  $H_i$  ( $i = 9, \dots, 20$ )

$$H_9 = 1 - 3\xi^2 - \xi\eta - 3\eta^2 + 2\xi^3 + 3\xi^2\eta + 3\xi\eta^2 + 2\eta^3 - 2\xi^3\eta - 2\xi\eta^3$$

$$H_{10} = b(\eta - \xi\eta + 2\eta^2 + 2\xi\eta^2 + \eta^3 - \xi\eta^3)$$

$$H_{11} = a(-\xi + \xi\eta + 2\xi^2 - 2\xi^2\eta - \xi^3 + \xi^3\eta)$$

$$H_{12} = 3\eta^2 + \xi\eta - 2\eta^3 - 3\xi\eta^2 + 3\xi^2\eta + 2\xi\eta^3 + 2\xi^3\eta$$

$$H_{13} = b(-\eta^2 + \eta^3 + \xi\eta^2 - \xi^3\eta)$$

$$H_{14} = a(-\xi\eta + 2\xi^2\eta - \xi^3\eta)$$

$$H_{15} = -\xi\eta - 3\xi^2\eta + 3\xi\eta^2 - 2\xi^3\eta - 3\xi\eta^3$$

$$H_{16} = b(-\xi\eta^2 + \xi\eta^3)$$

$$\begin{aligned}
H_{17} &= a(\xi^2\eta - \xi^3\eta) \\
H_{18} &= 3\xi^2 + \xi\eta - 2\xi^3 - 3\xi\eta^2 + 2\xi^3\eta + 2\xi\eta^3 - 3\xi^2\eta \\
H_{19} &= b(\xi\eta - 2\xi\eta^2 + \xi\eta^3) \\
H_{20} &= a(\xi^2 - \xi^3 - \xi^2\eta + \xi^3\eta)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Trong đó  $\xi = x/a; \eta = y/b$ . Đặt  $b = ma$

Khi đó hàm dạng của phần tử trong bài toán tầm uôn.

$$[N_e^u] = [H_9 \ H_{10} \ H_{11} \ H_{12} \ H_{13} \ H_{14} \ H_{15} \ H_{16} \ H_{17} \ H_{18} \ H_{19} \ H_{20}] \tag{3.5}$$

b) Xác định ma trận [B].

[B] là ma trận hàm các tọa độ nút đặc trưng cho quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị ở trạng thái biến dạng nhỏ

$$[B] = \begin{bmatrix} [B_p] & 0 \\ 0 & [B_u] \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

$[B_p]$  là ma trận hàm các tọa độ nút trong bài toán trạng thái ứng suất phẳng

$$[B_p] = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial H_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial H_5}{\partial x} & 0 & \frac{\partial H_7}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial H_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial H_4}{\partial y} & 0 & \frac{\partial H_6}{\partial y} & 0 & \frac{\partial H_8}{\partial y} \\ \frac{\partial H_1}{\partial y} & \frac{\partial H_2}{\partial x} & \frac{\partial H_3}{\partial y} & \frac{\partial H_4}{\partial x} & \frac{\partial H_5}{\partial y} & \frac{\partial H_6}{\partial x} & \frac{\partial H_7}{\partial y} & \frac{\partial H_8}{\partial x} \end{bmatrix}$$

```

>Bp:=matrix(3,8,[diff(H1,x),0,diff(H3,x),0,diff(H
5,x),0,diff(H7,x),0,0,diff(H2,y),0,diff(H4,y),0,diff
(H6,y),0,diff(H8,y),diff(H1,y),diff(H2,x),diff(H3,y)
,diff(H4,x),diff(H5,y),diff(H6,x),diff(H7,y),diff(H8
,x) ]);

```

Đoạn chương trình Maple xác định ma trận  $[B_p]$ :

$$B_p := \begin{bmatrix} -\frac{1-y}{ma} & \mathbf{0} & -\frac{1-y}{ma} & \mathbf{0} & -\frac{y}{a^2m} & \mathbf{0} & -\frac{y}{a^2m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\frac{1-x}{ma} & \mathbf{0} & -\frac{x}{a^2m} & \mathbf{0} & \frac{x}{a^2m} & \mathbf{0} & \frac{1-x}{ma} \\ -\frac{1-x}{ma} & -\frac{1-y}{ma} & -\frac{x}{a^2m} & \frac{1-y}{ma} & \frac{x}{a^2m} & \frac{y}{a^2m} & \frac{1-x}{ma} & -\frac{y}{a^2m} \end{bmatrix}$$

$[B_u]$  là ma trận hàm các tọa độ nút trong bài toán tấm uốn

$$[B_u] = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 H_9}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 H_{10}}{\partial x^2} & \dots & -\frac{\partial^2 H_{20}}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 H_9}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 H_{10}}{\partial y^2} & \dots & -\frac{\partial^2 H_{20}}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 H_9}{\partial x \partial y} & 2\frac{\partial^2 H_{10}}{\partial x \partial y} & \dots & 2\frac{\partial^2 H_{20}}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$B_u :=$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{6}{a^2} - \frac{12x}{a^3} + \frac{12xy}{a^4m} - \frac{6y}{a^3m}, 0, -a \left( \frac{4}{a^2} - \frac{4y}{a^3m} - \frac{6x}{a^3} + \frac{6xy}{a^4m} \right), \frac{6y}{a^3m} - \frac{12xy}{a^4m}, 0, \right. \\ & -a \left( \frac{4y}{a^3m} - \frac{6xy}{a^4m} \right), -\frac{6y}{a^3m} + \frac{12xy}{a^4m}, 0, -a \left( \frac{2y}{a^3m} - \frac{6xy}{a^4m} \right), \\ & \left. -\frac{6}{a^2} + \frac{12x}{a^3} + \frac{6y}{a^3m} - \frac{12xy}{a^4m}, 0, -a \left( \frac{2}{a^2} - \frac{6x}{a^3} - \frac{2y}{a^3m} + \frac{6xy}{a^4m} \right) \right] \\ & \left[ \frac{6}{m^2a^2} - \frac{12y}{m^3a^3} - \frac{6x}{a^3m^2} + \frac{12xy}{a^4m^3}, -ma \left( -\frac{4}{m^2a^2} + \frac{4x}{a^3m^2} + \frac{6y}{m^3a^3} - \frac{6xy}{a^4m^3} \right), 0, \right. \\ & -\frac{6}{m^2a^2} + \frac{6x}{a^3m^2} + \frac{12y}{m^3a^3} - \frac{12xy}{a^4m^3}, -ma \left( -\frac{2}{m^2a^2} + \frac{6y}{m^3a^3} + \frac{2x}{a^3m^2} - \frac{6xy}{a^4m^3} \right), 0, \\ & -\frac{6x}{a^3m^2} + \frac{12xy}{a^4m^3}, -ma \left( -\frac{2x}{a^3m^2} + \frac{6xy}{a^4m^3} \right), 0, +\frac{6x}{a^3m^2} - \frac{12xy}{a^4m^3}, \\ & \left. -ma \left( -\frac{4x}{a^3m^2} + \frac{6xy}{a^4m^3} \right), 0 \right] \\ & \left[ -\frac{2}{a^2m} + \frac{12x}{a^3m} + \frac{12y}{a^3m^2} - \frac{12x^2}{a^4m} - \frac{12y^2}{a^4m^3}, 2ma \left( -\frac{1}{a^2m} + \frac{4y}{a^3m^2} - \frac{3y^2}{a^4m^3} \right), \right. \\ & \left. 2a \left( \frac{1}{a^2m} - \frac{4x}{a^3m} + \frac{3x^2}{a^4m} \right), \frac{2}{a^2m} - \frac{12y}{a^3m^2} - \frac{12x}{a^3m} + \frac{12y^2}{a^4m^3} + \frac{12x^2}{a^4m}, \right. \end{aligned}$$



Trong đó:

$$Kp1\_1 := \frac{hE(-2m^2 - 1 + \nu)}{6m(-1 + \nu^2)}$$

$$Kp2\_1 := -\frac{Eh}{8(-1 + \nu)}$$

$$Kp2\_2 := \frac{hE(-m^2 + m^2\nu - 1 + \nu)}{12m(-1 + \nu^2)}$$

$$Kp3\_1 := \frac{hE(4m^2 - 1 + \nu)}{12m(-1 + \nu^2)}$$

$$Kp3\_2 := \frac{hE(3\nu - 1)}{8(-1 + \nu^2)}$$

$$Kp3\_3 := \frac{hE(-2m^2 - 1 + \nu)}{6m(-1 + \nu^2)}$$

$$Kp4\_1 := -\frac{hE(3\nu - 1)}{8(-1 + \nu^2)}$$

$$Kp4\_2 := \frac{hE(-m^2 + m^2\nu + 1)}{6m(-1 + \nu^2)}$$

$$Kp4\_3 := -\frac{Eh}{8(-1 + \nu)}$$

$$Kp4\_4 := \frac{hE(-m^2 + m^2\nu - 2)}{6m(-1 + \nu^2)}$$

$$Kp5\_1 := \frac{hE(-2m^2 - 1 + \nu)}{12m(-1 + \nu^2)}$$

$$Kp5\_2 := -\frac{Eh}{8(-1 + \nu)}$$

$$Kp5\_3 := -\frac{hE(-m^2 - 1 + \nu)}{6m(-1 + \nu^2)}$$

$$Kp5\_4 := \frac{hE(3\nu - 1)}{8(-1 + \nu^2)}$$

$$Kp5\_5 := \frac{hE(-2m^2 - 1 + \nu)}{12m(-1 + \nu^2)}$$

$$Kp6\_1 := \frac{Eh}{8(-1 + \nu)}$$

$$\text{Kp6\_2} := \frac{hE(-m^2 + m^2v - 2)}{12m(-1 + v^2)}$$

$$\text{Kp6\_3} := -\frac{hE(3v - 1)}{8(-1 + v^2)}$$

$$\text{Kp6\_4} := \frac{hE(-m^2 + m^2v + 4)}{12m(-1 + v^2)}$$

$$\text{Kp6\_5} := -\frac{Eh}{8(-1 + v)}$$

$$\text{Kp6\_6} := \frac{hE(-m^2 + m^2v - 2)}{6m(-1 + v^2)}$$

$$\text{Kp7\_1} := -\frac{hE(-m^2 - 1 + v)}{6m(-1 + v^2)}$$

$$\text{Kp7\_2} := -\frac{hE(3v - 1)}{8(-1 + v^2)}$$

$$\text{Kp7\_3} := -\frac{hE(-2m^2 - 1 + v)}{12m(-1 + v^2)}$$

$$\text{Kp7\_4} := -\frac{Eh}{8(-1 + v)}$$

$$\text{Kp7\_5} := \frac{hE(4m^2 - 1 + v)}{12m(-1 + v^2)}$$

$$\text{Kp7\_6} := \frac{hE(3v - 1)}{8(-1 + v^2)}$$

$$\text{Kp7\_7} := \frac{hE(-2m^2 - 1 + v)}{6m(-1 + v^2)}$$

$$\text{Kp8\_1} := \frac{hE(3v - 1)}{8(-1 + v^2)}$$

$$\text{Kp8\_2} := \frac{hE(-m^2 + m^2v + 4)}{12m(-1 + v^2)}$$

$$\text{Kp8\_3} := -\frac{Eh}{8(-1 + v^2)}$$

$$\text{Kp8\_4} := \frac{hE(-m^2 + m^2v - 2)}{12m(-1 + v^2)}$$

$$\text{Kp8\_5} := -\frac{hE(3v - 1)}{8(-1 + v^2)}$$



$$Kp8\_6 := -\frac{hE(-m^2 + m^2v - 1)}{6m(-1 + v^2)}$$

$$Kp8\_7 := -\frac{Eh}{8(-1 + v^2)}$$

$$Kp8\_8 := \frac{hE(-m^2 + m^2v - 2)}{6m(-1 + v^2)}$$

[Ku] e là ma trận độ cứng của tấm trong bài toàn tấm uốn, có kích thước 12x12

$$[Ku] e = \int_v [B_u]^T [D_u] [B_u] dV \quad (3.13)$$

Thực hiện phép tích phân trên Maple, ta được

$$[Ku]e = \quad \text{ĐX}$$

$$\begin{bmatrix} Kul\_1 \\ Kul2\_1Kul2\_2 \\ Kul3\_1Kul3\_2Kul3\_2 \\ Kul4\_1Kul4\_2Kul4\_3Kul4\_4 \\ Kul5\_1Kul5\_2Kul5\_3Kul5\_4Kul5\_5 \\ Kul6\_1Kul6\_2Kul6\_3Kul6\_4Kul6\_5Kul6\_6 \\ Kul7\_1Kul7\_2Kul7\_3Kul7\_4Kul7\_5Kul7\_6Kul7\_7 \\ Kul8\_1Kul8\_2Kul8\_3Kul8\_4Kul8\_5Kul8\_6Kul8\_7Kul8\_8 \\ Kul9\_1Kul9\_2Kul9\_3Kul9\_4Kul9\_5Kul9\_6Kul9\_7Kul9\_8Kul9\_9 \\ Kul10\_1Kul10\_2Kul10\_3Kul10\_4Kul10\_5Kul10\_6Kul10\_7Kul10\_8Kul10\_9Kul10\_10 \\ Kul11\_1Kul11\_2Kul11\_3Kul11\_4Kul11\_5Kul11\_6Kul11\_7Kul11\_8Kul11\_9Kul11\_10Kul11\_11 \\ Kul12\_1Kul12\_2Kul12\_3Kul12\_4Kul12\_5Kul12\_6Kul12\_7Kul12\_8Kul12\_9Kul12\_10Kul12\_11Kul12\_12 \end{bmatrix}$$

Trong đó:

$$Ku1\_1 := \frac{h^4 E(-7m^2 + 2m^2v - 10m^4 - 10)}{30a^2 m^3 (-1 + v^2)}$$

$$Ku2\_1 := -\frac{h^4 E(m^2 + 4m^2v + 10)}{60am^2 (-1 + v^2)}$$

$$Ku2\_2 := \frac{h^4 E(-m^2 + m^2v - 5)}{45m(-1 + v^2)}$$

$$Ku3\_1 := \frac{h^4 E(10m^2 + 4v + 1)}{60am(-1 + v^2)}$$

$$Ku3\_2 := \frac{h^4 Ev}{12(-1 + v^2)}$$

$$Ku3\_3 := \frac{h^4 E(-5m^2 - 1 + v)}{45am(-1 + v^2)}$$

$$Ku4\_1 := -\frac{h^4 E(-7m^2 + 2m^2v + 5m^4 - 10)}{30a^2m^3(-1 + v^2)}$$

$$Ku4\_2 := -\frac{h^4 E(-m^2 + m^2v - 10)}{60am^2(-1 + v^2)}$$

$$Ku4\_3 := -\frac{h^4 E(-5m^2 + 4v + 1)}{60am(-1 + v^2)}$$

$$Ku4\_4 := \frac{h^4 E(-7m^2 + 2m^2v - 10m^4 - 10)}{30a^2m^3(-1 + v^2)}$$

$$Ku5\_1 := \frac{h^4 E(-m^2 + m^2v - 10)}{60am^2(-1 + v^2)}$$

$$Ku5\_2 := -\frac{h^4 E(-m^2 + m^2v - 10)}{180m(-1 + v^2)}$$

$$Ku5\_3 := 0$$

$$Ku5\_4 := \frac{h^4 E(m^2 + 4m^2v + 10)}{60am^2(-1 + v^2)}$$

$$Ku5\_5 := \frac{h^4 E(-m^2 + m^2v - 5)}{45m(-1 + v^2)}$$

$$Ku6\_1 := -\frac{h^4 E(-5m^2 + 4v + 1)}{60m(-1 + v^2)}$$

$$Ku6\_2 := 0$$

$$Ku6\_3 := -\frac{h^4 E(5m^2 - 2 + 4v)}{90m(-1 + v^2)}$$

$$Ku6\_4 := \frac{h^4 E(10m^2 + 4v + 1)}{60am(-1 + v^2)}$$

$$Ku6\_5 := -\frac{h^4 Ev}{12(-1 + v^2)}$$

$$Ku6\_6 := \frac{h^4 E(-5m^2 - 1 + v)}{45am(-1 + v^2)}$$

$$Ku7\_1 := \frac{h^4 E(-7m^2 + 2m^2v + 5m^4 + 5)}{30a^2m^3(-1 + v^2)}$$

$$Ku7\_2 := \frac{h^4 E(m^2 + m^2 v + 5)}{60 a m^2 (-1 + v^2)}$$

$$Ku7\_3 := -\frac{h^4 E(10 m^2 - 1 + v)}{60 a m (-1 + v^2)}$$

$$Ku7\_4 := -\frac{h^4 E(-7 m^2 + 2 m^2 v - 10 m^4 + 5)}{30 a^2 m^3 (-1 + v^2)}$$

$$Ku7\_5 := -\frac{h^4 E(m^2 + 4 m^2 v - 5)}{60 a m^2 (-1 + v^2)}$$

$$Ku7\_6 := \frac{h^4 E(10 m^2 - 1 + v)}{60 a m (-1 + v^2)}$$

$$Ku7\_7 := \frac{h^4 E(-7 m^2 + 2 m^2 v - 10 m^4 - 10)}{30 a^2 m^3 (-1 + v^2)}$$

$$Ku8\_1 := -\frac{h^4 E(m^2 + m^2 v + 5)}{60 a m^2 (-1 + v^2)}$$

$$Ku8\_2 := \frac{h^4 E(-m^2 + m^2 v - 5)}{180 a m (-1 + v^2)}$$

$$Ku8\_3 := 0$$

$$Ku8\_4 := -\frac{h^4 E(m^2 + 4 m^2 v - 5)}{60 a m^2 (-1 + v^2)}$$

$$Ku8\_5 := -\frac{h^4 E(-2 m^2 + 2 m^2 v + 5)}{90 a m (-1 + v^2)}$$

$$Ku8\_6 := 0$$

$$Ku8\_7 := \frac{h^4 E(m^2 + 4 m^2 v - 5)}{60 a m^2 (-1 + v^2)}$$

$$Ku8\_8 := \frac{h^4 E(-m^2 + m^2 v - 5)}{45 a m (-1 + v^2)}$$

$$Ku9\_1 := \frac{h^4 E(-m^2 + m^2 v + v)}{60 a m (-1 + v^2)}$$

$$Ku9\_2 := 0$$

$$Ku9\_3 := \frac{h^4 E(-5 m^2 - 1 + v)}{180 a m (-1 + v^2)}$$

$$Ku9\_4 := \frac{h^4 E(-10 m^2 - 1 + v)}{60 a m (-1 + v^2)}$$

$$Ku9\_5:=0$$

$$Ku9\_6:=-\frac{h^4 E(10m^2 - 1 + v)}{180am(-1 + v^2)}$$

$$Ku9\_7:=-\frac{h^4 E(10m^2 + 4v + 1)}{60am(-1 + v^2)}$$

$$Ku9\_8:=\frac{h^4 Ev}{12(-1 + v^2)}$$

$$Ku9\_9:=\frac{h^4 E(-5m^2 - 1 + v)}{45m(-1 + v^2)}$$

$$Ku10\_1:=-\frac{h^4 E(-7m^2 + 2m^2v - 10m^4 + 5)}{30a^2m^3(-1 + v^2)}$$

$$Ku10\_2:=\frac{h^4 E(m^2 + 4m^2v - 5)}{60am^2(-1 + v^2)}$$

$$Ku10\_3:=\frac{h^4 E(10m^2 - 1 + v)}{60am(-1 + v^2)}$$

$$Ku10\_4:=\frac{h^4 E(-7m^2 + 2m^2v + 5m^4 + 5)}{30a^2m^3(-1 + v^2)}$$

$$Ku10\_5:=-\frac{h^4 E(-m^2 + m^2v + 5)}{60a^2m^3(-1 + v^2)}$$

$$Ku10\_7:=-\frac{h^4 E(-7m^2 + 2m^2v + 5m^4 - 10)}{30a^2m^3(-1 + v^2)}$$

$$Ku10\_8:=\frac{h^4 E(-m^2 + m^2v - 10)}{60am^2(-1 + v^2)}$$

$$Ku10\_9:=-\frac{h^4 E(-5m^2 + 4v + 1)}{60am(-1 + v^2)}$$

$$Ku10\_10:=\frac{h^4 E(-7m^2 + 2m^2v - 10m^4 - 10)}{30a^2m^3(-1 + v^2)}$$

$$Ku11\_1:=\frac{h^4 E(-m^2 + 4m^2v - 5)}{60am^2(-1 + v^2)}$$

$$Ku11\_2:=-\frac{h^4 E(-2m^2 + 2m^2v + 5)}{90m(-1 + v^2)}$$

$$Ku11-3:=0$$

$$Ku11_4 := \frac{h^4 E(-m^2 + m^2 v + 5)}{60am^2(-1 + v^2)}$$

$$Ku11_5 := -\frac{h^4 E(-m^2 + m^2 v - 5)}{180m(-1 + v^2)}$$

$$Ku11_6 := 0$$

$$Ku11_7 := \frac{h^4 E(-m^2 + m^2 v - 10)}{60am^2(-1 + v^2)}$$

$$Ku11_8 := -\frac{h^4 E(-m^2 + m^2 v + 10)}{180m(-1 + v^2)}$$

$$Ku11_9 := 0$$

$$Ku11_{10} := -\frac{h^4 E(m^2 + 4m^2 v + 10)}{60am^2(-1 + v^2)}$$

$$Ku12_1 := -\frac{h^4 E(-10m^2 - 1 + v)}{60m(-1 + v^2)}$$

$$Ku12_2 := 0$$

$$Ku12_3 := -\frac{h^4 E(-10m^2 - 1 + v)}{180m(-1 + v^2)}$$

$$Ku12_4 := \frac{h^4 E(5m^2 - 1 + v)}{60am(-1 + v^2)}$$

$$Ku12_5 := 0$$

$$Ku12_6 := \frac{h^4 E(-5m^2 - 1 + v)}{180m(-1 + v^2)}$$

$$Ku12_7 := \frac{h^4 E(-5m^2 + 4v + 1)}{60am(-1 + v^2)}$$

$$Ku12_8 := 0$$

$$Ku12_9 := -\frac{h^4 E(5m^2 - 2 + 2v)}{90m(-1 + v^2)}$$

$$Ku12_{10} := -\frac{h^4 E(10m^2 + 4v + 1)}{60am(-1 + v^2)}$$

$$Ku12_{11} := -\frac{h^4 E v}{12(-1 + v^2)}$$

$$Ku12_{12} := \frac{h^4 E(-5m^2 - 1 + v)}{45m(-1 + v^2)}$$

e) Xác định ma trận độ cứng hình học  $[K_\sigma]_e$ .

$$[K_\sigma]_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [K_\sigma^u] \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\text{Với } [K_\sigma]_e = \int_v [G_u]^T \begin{bmatrix} T_x & T_{xy} \\ T_{xy} & T_x \end{bmatrix} [G] d\{V\} \quad (3.15)$$

$$\text{Trong đó: } [G] = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_9}{\partial x} & \frac{\partial H_{10}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial H_{20}}{\partial x} \\ \frac{\partial H_9}{\partial y} & \frac{\partial H_{10}}{\partial y} & \dots & \frac{\partial H_{20}}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Giả thiết lưới phần tử được chia đủ nhỏ để trong phạm vi phần tử thì  $T_x$ ,  $T_y$ ,  $T_{xy}$  là không đổi và bằng  $\sigma_{(i)tb}h$ . Thực hiện phép tích phân, ta được.

$$[K_\sigma]_e =$$

ĐX

$$\begin{bmatrix} Ks1\_1 \\ Ks12\_1Ks12\_2 \\ Ks13\_1Ks13\_2Ks13\_2 \\ Ks14\_1Ks14\_2Ks14\_3Ks14\_4 \\ Ks15\_1Ks15\_2Ks15\_3Ks15\_4Ks15\_5 \\ Ks16\_1Ks16\_2Ks16\_3Ks16\_4Ks16\_5Ks16\_6 \\ Ks17\_1Ks17\_2Ks17\_3Ks17\_4Ks17\_5Ks17\_6Ks17\_7 \\ Ks18\_1Ks18\_2Ks18\_3Ks18\_4Ks18\_5Ks18\_6Ks18\_7Ks18\_8 \\ Ks19\_1Ks19\_2Ks19\_3Ks19\_4Ks19\_5Ks19\_6Ks19\_7Ks19\_8Ks19\_9 \\ Ks110\_1Ks110\_2Ks110\_3Ks110\_4Ks110\_5Ks110\_6Ks110\_7Ks110\_8Ks110\_9Ks110\_10 \\ Ks111\_1Ks111\_2Ks111\_3Ks111\_4Ks111\_5Ks111\_6Ks111\_7Ks111\_8Ks111\_9Ks111\_10Ks111\_11 \\ Ks112\_1Ks112\_2Ks112\_3Ks112\_4Ks112\_5Ks112\_6Ks112\_7Ks112\_8Ks112\_9Ks112\_10Ks112\_11Ks112\_12 \end{bmatrix}$$

Trong đó:

$$Ks1\_1 := \frac{h(92Ty + 92Txm^2 + 105Txym)}{210m}$$

$$Ks2\_1 := \frac{ha(11Txm^2 + 7Ty)}{210}$$

$$Ks2\_2 := \frac{ha^2m(3Txm^2 + 14Ty)}{315}$$

$$Ks3\_1 := \frac{ha(7Txm^2 + 11Ty)}{210m}$$

$$Ks3\_2 := -\frac{hTxya^2a}{72}$$

$$Ks3\_3 := \frac{ha^2(14Txm^2 + 3Ty)}{315m}$$

$$Ks4\_1 := \frac{h(17Txm^2 - 46Ty)}{105m}$$

$$Ks4\_2 := \frac{ha(13Txm^2 - 14Ty)}{420}$$

$$Ks4\_3 := -\frac{ha(42Txym + 7Txm^2 - 22Ty)}{420m}$$

$$Ks4\_4 := \frac{h(92Txm^2 - 105Txym + 92Ty)}{210m}$$

$$Ks5\_1 := -\frac{ha(13Txm^2 - 14Ty)}{420}$$

$$Ks5\_2 := -\frac{ha^2m(9Txm^2 + 14Ty)}{1260}$$

$$Ks5\_3 := -\frac{hTxya^2a}{72}$$

$$Ks5\_4 := -\frac{ha(11Txm^2 + 7Ty)}{210}$$

$$Ks5\_5 := \frac{ha^2m(3Txm^2 + 14Ty)}{315}$$

$$Ks6\_1 := -\frac{ha(-42Txym + 7Txm^2 - 22Ty)}{420m}$$

$$Ks6\_2 := \frac{hTxya^2a}{72}$$

$$Ks6\_3 := \frac{ha^2(7Txm^2 - 3Ty)}{315m}$$

$$Ks6\_4 := -\frac{ha(7Txm^2 + 11Ty)}{210m}$$

$$Ks6\_5 := -\frac{hTxya^2a}{72}$$

$$Ks6\_6 := \frac{ha^2(14Txm^2 + 3Ty)}{315m}$$

$$Ks7\_1 := -\frac{h(34Txm^2 + 34Ty + 105Txym)}{210m}$$

$$Ks7\_2 := -\frac{ha(13Txm^2 + 42Txy + 7Ty)}{420}$$

$$Ks7\_3 := \frac{ha(42Txy + 7Txm^2 + 13Ty)}{420m}$$

$$Ks7\_4 := -\frac{h(7Txm^2 - 17Ty)}{105m}$$

$$Ks7\_5 := -\frac{ha(-42Txy + 7Txm^2 - 22Ty)}{420m}$$

$$Ks7\_6 := \frac{ha(14Txm^2 - 13Ty)}{420m}$$

$$Ks7\_7 := \frac{h(92Ty + 92Txm^2 + 105Txy)}{210m}$$

$$Ks8\_1 := \frac{ha(13Txm^2 + 42Txy + 7Ty)}{420m}$$

$$Ks8\_2 := \frac{ha^2m(9Txm^2 - 7Ty + 21Txy)}{1260}$$

$$Ks8\_3 := -\frac{hTxya^2m}{72}$$

$$Ks8\_5 := -\frac{ha^2m(3Txm^2 - 7Ty)}{315}$$

$$Ks8\_6 := \frac{hTxya^2m}{72}$$

$$Ks8\_7 := -\frac{ha(11Txm^2 + 14Ty)}{315}$$

$$Ks8\_8 := \frac{ha^2m(3Txm^2 + 14Ty)}{315}$$

$$Ks9\_1 := -\frac{ha(42Txy + 7Txm^2 + 13Ty)}{420m}$$

$$Ks9\_2 := -\frac{hTxya^2m}{72}$$

$$Ks9\_3 := -\frac{ha^2(7Txm^2 - 9Ty - 21Txy)}{1260m}$$

$$Ks9\_4 := -\frac{ha(14Txm^2 - 13Ty)}{420m}$$



$$Ks9\_5 := \frac{hTxya^2m}{72}$$

$$Ks9\_6 := -\frac{ha^2(14Txm^2 + 9Ty)}{1260}$$

$$Ks9\_7 := \frac{ha(7Txm^2 + 11Ty)}{210m}$$

$$Ks9\_8 := -\frac{hTxya^2m}{72}$$

$$Ks9\_9 := \frac{ha^2(14Txm^2 + 3Ty)}{315m}$$

$$Ks10\_1 := -\frac{h(46Txm^2 - 17Ty)}{105m}$$

$$Ks10\_2 := -\frac{ha(22Txm^2 - 7Ty - 42Txym)}{420}$$

$$Ks10\_3 := \frac{ha(14Txm^2 - 13Ty)}{420m}$$

$$Ks10\_4 := -\frac{h(34Txm^2 + 34Ty - 105Txym)}{210m}$$

$$Ks10\_5 := \frac{ha(13Txm^2 + 7Ty - 42Txym)}{420}$$

$$Ks10\_6 := \frac{ha(-42Txym + 7Txm^2 + 13Ty)}{420m}$$

$$Ks10\_7 := \frac{h(17Txm^2 - 46Ty)}{105m}$$

$$Ks10\_8 := -\frac{ha(13Txm^2 - 14Ty)}{420}$$

$$Ks10\_9 := \frac{ha(42Txym + 7Txm^2 - 22Ty)}{420m}$$

$$Ks10\_10 := \frac{h(92Txm^2 - 105Txym + 92Ty)}{210m}$$

$$Ks11\_1 := -\frac{ha(22Txm^2 - 7Ty + 42Txym)}{420}$$

$$Ks11\_2 := -\frac{ha^2(3Txm^2 - 7Ty)}{315}$$

$$Ks11\_3 := \frac{hTxya^2m}{72}$$

$$Ks11\_4 := -\frac{ha(13Txm^2 + 7Ty - 42Txym)}{420}$$

$$Ks11\_5 := -\frac{ha^2m(9Txm^2 - 7Ty - 21Txym)}{1260}$$

$$Ks11\_6 := \frac{hTxya^2m}{72}$$

$$Ks11\_7 := \frac{ha(13Txm^2 - 14Ty)}{420}$$

$$Ks11\_8 := -\frac{ha^2m(9Txm^2 + 14Ty)}{1260}$$

$$Ks11\_9 := \frac{hTxya^2m}{72}$$

$$Ks11\_10 := \frac{ha(11Txm^2 + 7Ty)}{210}$$

$$Ks11\_11 := \frac{ha^2m(3Txm^2 + 14Ty)}{315}$$

$$Ks12\_1 := -\frac{ha(14Txm^2 - 13Ty)}{420m}$$

$$Ks12\_2 := \frac{hTxya^2m}{72}$$

$$Ks12\_3 := \frac{ha^2(14Txm^2 + 9Ty)}{1260m}$$

$$Ks12\_4 := -\frac{ha(-42Txym + 7Txm^2 + 13Ty)}{420m}$$

$$Ks12\_5 := -\frac{hTxya^2m}{72}$$

$$Ks12\_7 := -\frac{ha^2(7Txm^2 - 9Ty + 21Txym)}{1260m}$$

$$Ks12\_7 := \frac{ha(-42Txym + 7Txm^2 - 22Ty)}{420m}$$

$$Ks12\_8 := \frac{hTxya^2m}{72}$$

$$K_{s12\_9} := \frac{ha^2(7Txm^2 - 3Ty)}{315m}$$

$$K_{s12\_10} := \frac{ha(7Txm^2 + 11Ty)}{210m}$$

$$K_{s12\_11} := -\frac{hTxya^2m}{72}$$

$$K_{s12\_} := \frac{ha^2(14Txm^2 + 3Ty)}{315m}$$

### 3.1.2.2. Thiết lập ma trận độ cứng cho cả hệ kết cấu.

Sau khi đã có các ma trận độ cứng  $[K_0]_e$ , này ma trận hình học  $[K_\delta]_e$  của các phần tử trong hệ tọa độ địa phương, chuyển các ma trận sang hệ tọa độ tổng thể.

$$[K_0]_g = [T]^T [K_0]_e [T]$$

$$[K_\delta]_g = [T]^T [K_\delta]_e [T]$$

Trong đó:

$[T]$  là ma trận biến đổi tọa độ từ hệ trục địa phương phần tử với hệ trục tổng thể. Ma trận  $[T]$  có tính chất trực giao nên  $[T]^T = [T]^{-1}$ .

Khi đó ma trận độ cứng ban đầu, ma trận độ cứng hình học và ma trận độ cứng tiếp tuyến của cả hệ kết cấu được ghép từ các phần tử như sau:

$$[K_0]_s = \sum_{n=1}^{ne} [H]^T [K_0]_g [H] \quad (3-19)$$

$$[K_\sigma]_s = \sum_{n=1}^{ne} [H]^T [K_\sigma]_g [H] \quad (3-20)$$

> Giải bài toán ổn định của bản đàn hồi theo phương pháp trị riêng.

Trong bài toán này, ma trận độ cứng hình học sẽ là trị riêng của bài toán biến dạng uốn:

$$([K_0]_s + \lambda [K_\sigma]_s) \{\delta^u\} = 0 \quad (3.21)$$

Trong đó  $\lambda$  là hệ số tăng ứng suất trong mặt phẳng cần thiết để đạt tới trạng thái tới hạn hay còn gọi là thông số ổn định của kết cấu.

Khi đó nếu tiếp tục tăng tải trọng, hiện tượng võng và biến dạng ngang xuất

hiện mặc dù không có tải trọng ngang.

$$[K_0]_s \{X\} = -\lambda [K_\sigma]_s \{X\} \quad (3-22)$$

Đây chính là bài toán trị riêng tổng quát. Để giải phương trình này ta đưa về dạng phương trình trị riêng chính tắc.

$$[A] \{X\} = -\beta \{X\} \quad (3.23)$$

trong đó:

$$[A] = [K_0]_s^{-1} [K_\sigma]_s \quad (3-24)$$

$$\lambda = \frac{1}{\beta}$$

Với ma trận A cấp nxn, các trị riêng và vec tơ riêng tương ứng thỏa mãn hệ thuần nhất.

$$\{[A] + \beta[I]\} \{X\} = 0 \quad (3.25)$$

Khi đó các trị riêng  $\beta$  là nghiệm của đa thức đặc trưng.

$$\text{Det}\{[A] + \beta[I]\} = 0 \quad (3.26)$$

### 3.1.3.1. Phương pháp Faddeev-Leverrier lập đa thức đặc trưng.

Phương pháp này giải trực tiếp phương trình đặc trưng, đây chính là đa thức bậc n. Nếu ma trận A đối xứng thì phương trình này luôn có n nghiệm thực và ta luôn tìm được n vec tơ riêng là cơ sở của không gian E. Có thể sử dụng phương pháp bình phương nghiệm khi A là ma trận đối xứng, hay các phương pháp gần đúng để tìm nghiệm của đa thức đặc trưng.

Khai triển định thức trên ta thu được đa thức cấp n:

$$P_n(\beta) = \beta^n - p_1\beta^{n-1} - p_2\beta^{n-2} - \dots - p_{n-1}\beta - p_n$$

Để xây dựng thuật toán tính các tham số  $p_1, p_2, \dots, p_n$  ta xét ma trận A đối xứng hoặc không đối xứng:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Gọi  $\text{Vet}(A)$  là một số được định nghĩa như sau:

$$\text{Vet}(A) = a_{1,1} + a_{2,1} + \dots + a_{n,n}$$

Khi đó các tham số  $p_1, p_2, \dots, p_n$  được xác định như sau:

$$p_1 = \text{Vet}(B_1) \text{ trong đó } B_1 = A$$

$$p_2 = 1/2 \text{Vet}(B_2) \text{ trong đó } B_2 = A(B_1 - p_1 I)$$

$$p_3 = 1/2 \text{Vet}(B_3) \text{ trong đó } B_3 = A(B_2 - p_2 I)$$

.....

$$p_n = 1/2 \text{Vet}(B_n) \text{ trong đó } B_n = A(B_{n-1} - p_{n-1} I)$$

Vì  $p_n I = B_n$  nên trường hợp  $p_n \neq 0$ , ta có :

$$I = A A^{-1} = (1/p_n) B_n = 1/p_n A(B_{n-1} - p_{n-1} I)$$

$$\text{Suy ra : } A^{-1} = (1/p_n)(B_{n-1} - p_{n-1} I)$$

### 3.1.3.2. Phương pháp lặp Power tìm trị riêng lớn nhất và nhỏ nhất.

Phương pháp này rất hiệu quả khi giải bài toán ổn định, vì trong bài toán này thì trị riêng nhỏ nhất ( $> 0$ ) ứng với dạng mất ổn định đầu tiên của bản. Phương pháp có thể áp dụng cho cả ma trận đối xứng và không đối xứng cấp  $n$ .

Với véc tơ ban đầu  $\{X^0\}$  khác rỗng, đặt:

$$Y^1 = A X^0 = \beta_1^{(1)} X^1$$

Trong đó  $\beta_1^{(1)}$  là tọa độ có trị tuyệt đối lớn nhất của véc tơ  $Y^1 = A X^0$ , và  $X^1$  nhận được từ  $Y^1$  bằng cách đưa tọa độ có trị tuyệt đối lớn nhất  $\beta_1^{(1)}$  làm thừa số chung của  $Y^{k+1}$

Lặp lại bước thứ  $k$  ta có:

$$Y^{k+1} = A X^k = \beta_1^{(k+1)} X^{k+1}$$

Trong đó  $\beta_1^{(k+1)}$  là tọa độ có trị tuyệt đối lớn nhất của véc tơ  $Y^{k+1}$ , và  $X^{k+1}$  nhận được từ  $Y^{k+1}$  bằng cách đưa tọa độ có trị tuyệt đối lớn nhất  $\beta_1^{(k+1)}$  làm thừa số chung của  $Y^{k+1}$ .

Người ta chứng minh được  $\beta_1^{(k+1)}$  hội tụ về trị riêng có trị tuyệt đối lớn nhất  $\beta_1$  và  $X^k$  sẽ hội tụ về véc tơ riêng  $e^1$  tương ứng.

Phép lặp dừng lại nếu  $|\beta_1^{(k+1)} - \beta_1^k| < \varepsilon$  chọn trước nhỏ tùy ý.

### 3.1.3.3. Phương pháp lặp Jacobi tìm các trị riêng.

Ưu điểm của phương pháp này là tính đơn giản và ổn định. Sử dụng phương

pháp này có thể xác định được các giá trị riêng âm, dương và cả bằng không. Nếu  $A$  là ma trận vuông đối xứng cấp  $n$ ,  $T$  là ma trận trực giao thì phép biến đổi trực giao:  $D = T^T A T$  không làm thay đổi trị riêng của  $A$ .

Giả sử  $A$  là các trị riêng  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  và  $q_1, q_2, \dots, q_n$ ,  $q_n$  là các véc tơ riêng tương ứng. Gọi:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \dots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Và  $Q = [q_1, q_2, \dots, q_n] = \begin{bmatrix} q_{1,1} q_{1,2} \dots q_{1,n} \\ q_{2,1} q_{2,2} \dots q_{2,n} \\ \dots \\ q_{n,1} q_{n,2} \dots q_{n,n} \end{bmatrix}$  là ma trận của hệ  $[q_1, q_2, \dots, q_n]$  trên cơ sở hệ

chuẩn trực. Khi đó ta có:

$$AQ = QA. \text{ Xét biểu thức } D T^T Q = T^T A T T^T Q$$

Chúng tỏ rằng các véc tơ riêng tương ứng của  $D$  là  $Q^* = T^T Q$ .

Phép biến đổi  $D = T^T A T$  là phép quay trong  $R^n$ . nếu liên tiếp thực hiện phép quay đến khi nhận được ma trận đường chéo  $A T_2^T T_1^T A T_1 T_2 \dots T_m$  thì các trị riêng của  $A$  chính là các phân tử tương ứng trên đường chéo của ma trận kết quả  $A$ .

Phép quay trong quá trình tính toán được xem như một phép khử. Do các tính toán là gần đúng nên kết quả cuối cùng thu được chỉ là ma trận gần đường chéo, tức là các phân tử ngoài đường chéo của ma trận kết quả gần bằng 0.

Dùng chương trình viết bằng ngôn ngữ Maple để thiết lập được các hệ thức trên và ngôn ngữ lập trình Delphi [3] tìm được giá trị  $\beta_{\max}$  của phương trình (3.26), từ đó xác định được  $\lambda_{\min}$  và tải trọng tới hạn.

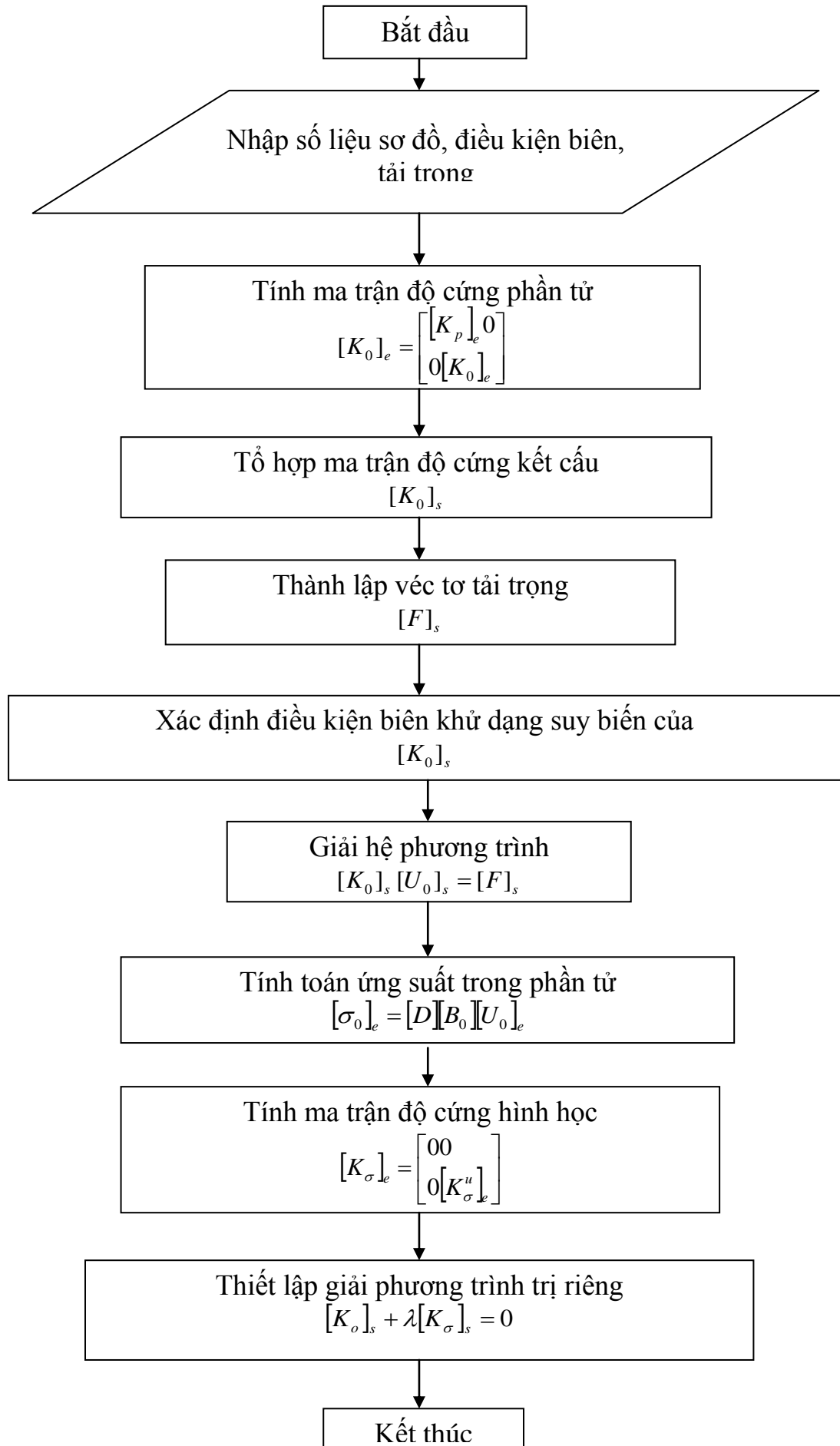
### 3.2. Cách dùng nghiệm của bài toán đàn hồi để giải bài toán ổn định của bản ngoài giới hạn đàn hồi.

Timoshenko [1] đã giải gần đúng bài toán ổn định thanh ngoài giới hạn đàn hồi theo quan điểm của Euler dựa theo sự điều chỉnh các hằng số đàn hồi phù hợp với khi xuất hiện biến dạng dẻo. Timoshenko cũng đã gợi ý giải cho bài

toán tẩm bằng cách tương tự bài toán đàn hồi theo giải tích (như được trình bày trong mục 2.4).

Ở đây dùng phương pháp Phần tử hữu hạn như được trình bày ở trên để giải trọn vẹn bài toán này, chỉ việc điều chỉnh các hằng số đàn hồi  $(E_i, \nu)$  phù hợp với khi xuất hiện biến dạng dẻo, nhằm phục vụ tính toán thiết kế trong thực tế.

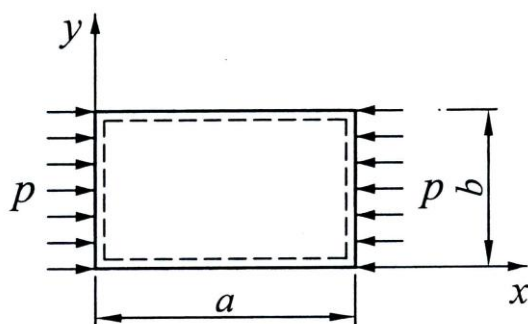
### 3.3. Thuật toán chương trình.





### 3.4. Một số ví dụ tính toán.

#### 3.4.1. Bản chữ nhật tựa đơn bị nén đều theo một phương (hình 3.2).



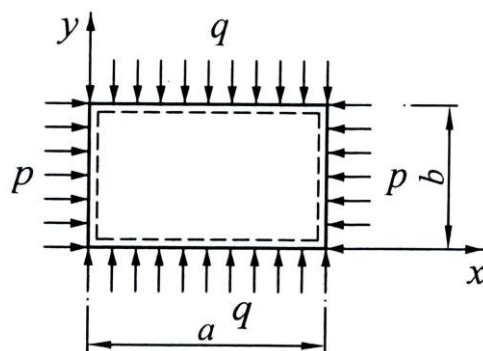
Hình 3.2

Bảng 3.1

a (m)	b (m)	h (m)	i= b/h	$\mu$	E (MN/m <sup>2</sup> )	E <sub>t</sub> (MN/m <sup>2</sup> )	p <sub>th</sub> (MN/m <sup>2</sup> )	
							pp giải tích theo E <sub>t</sub>	pp PTHH theo E <sub>t</sub>
2.40	2.40	0.04	60	0.5	2.0E+05	1.80E+05	219.10	210.55
6.00	3.00	0.04	75	0.5	2.0E+05	1.80E+05	220.04	212.50

#### 3.4.2. Bản chữ nhật tựa đơn bị nén đều theo 2 phương (hình 3.3).

Giả sử p = q, ta có:

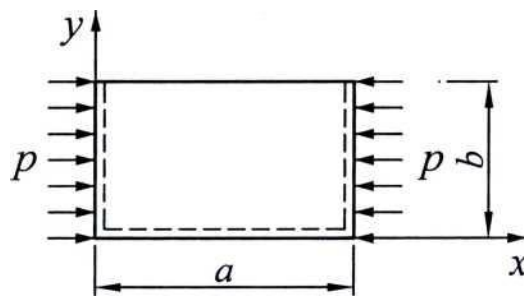


Hình 3.3

a (m)	b (m)	h (m)	i= b/h	$\mu$	E (MN/m <sup>2</sup> )	E <sub>t</sub> (MN/m <sup>2</sup> )	p <sub>th</sub> (MN/m <sup>2</sup> )	
							PP giải tích theo E <sub>t</sub>	pp PTHH theo E <sub>t</sub>
1.76	1.76	0.04	44	0.5	2.0E+05	1.80E+05	101.86	100.12
5.60	2.80	0.04	70	0.5	2.0E+05	1.87E+05	104.52	100.50

**3.4.3. Bản chữ nhật hai cạnh tựa đơn bị nén vuông góc, hai cạnh kia có điều kiện biên bất kỳ.**

1) Cạnh  $y = 0$  liên kết khớp,  $y - b$  tự do (hình 3.4).

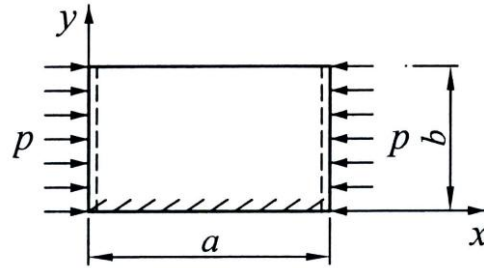


Hình 3.4

Bảng 3.3

a (m)	b(m)	h (m)	l= b/h	$\mu$	E (MN/m <sup>2</sup> )	E <sub>t</sub> (MN/m <sup>2</sup> )	p <sub>th</sub> (MN/m <sup>2</sup> )	
							pp giải tích theo E <sub>t</sub>	pp PTHH theo E <sub>t</sub>
1.44	1.44	0.04	36	0.5	2.0E+05	1.80E+05	219.10	215.19
2.00	1.00	0.04	25	0.5	2.0E+05	1.80E+05	220.22	215.40

2) Cạnh  $y = 0$  ngàm,  $y = b$  tự do (hình 3.5).

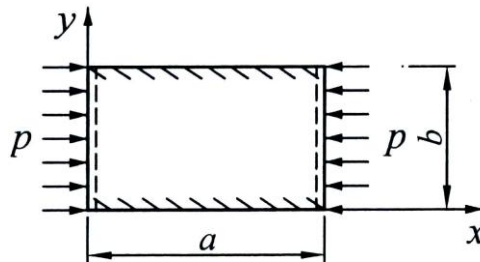


Hình 3.5

Bảng 3.4

a (m)	b (m)	h (m)	i= b/h	$\mu$	E (MN/m <sup>2</sup> )	E <sub>t</sub> (MN/m <sup>2</sup> )	p <sub>th</sub> (MN/m <sup>2</sup> )	
							pp giải tích theo E <sub>t</sub>	pp PTHH theo E <sub>t</sub>
1.56	1.56	0.04	39	0.5	2.0E+05	1.80E+05	220.40	216.34
2.80	1.40	0.04	35	0.5	2.0E+05	1.80E+05	220.91	215.49

3) Cạnh  $y = 0$  và  $y = b$  đều ngàm (hình 3.6).

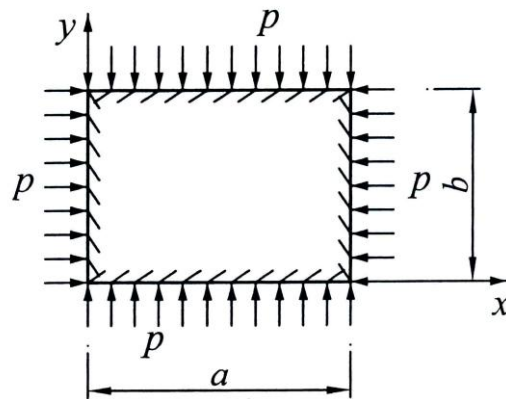


Hình 3.6

Bảng 3.5

a (m)	b (m)	h (m)	i= b/h	$\mu$	E (MN/m <sup>2</sup> )	E <sub>t</sub> (MN/m <sup>2</sup> )	p <sub>th</sub> (MN/m <sup>2</sup> )	
							pp giải tích theo E <sub>t</sub>	pp PTHH theo E <sub>t</sub>
3.32	3.32	0.04	83	0.5	2.0E+05	1.80E+05	220.12	217.44

**3.4.4. Bản chữ nhật bốn cạnh ngàm bị nén đều hai phương (hình 3.7).**

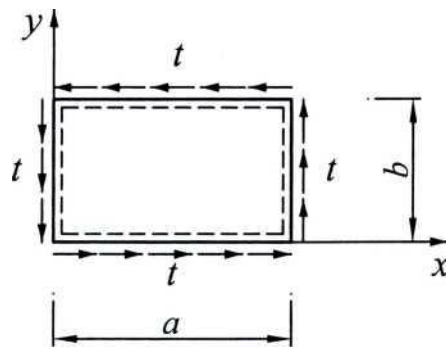


Hình 3.7

Bảng 3.6

a (m)	b (m)	h (m)	i= b/h	$\mu$	E (MN/m <sup>2</sup> )	E <sub>t</sub> (MN/m <sup>2</sup> )	p <sub>th</sub> (MN/m <sup>2</sup> )	
							pp giải tích theo E <sub>t</sub>	pp PTHH theo E <sub>t</sub>
3.80	3.80	0.02	95	0.5	2.0E+05	1.80E+05	116.46	109.94

**3.4.5. Bản chữ nhật tựa đơn dưới tác dụng của ứng suất trượt (hình 3.8).**



Hình 3.8

Bảng 3.7

a (m)	b (m)	h (m)	i= b/h	$\mu$	E (MN/m <sup>2</sup> )	E <sub>t</sub> (MN/m <sup>2</sup> )	p <sub>th</sub> (MN/m <sup>2</sup> )	
							pp giải tích theo E <sub>t</sub>	pp PTHH theo E <sub>t</sub>
4.80	4.80	0.04	120	0.5	2.0E+05	1.80E+05	128.61	121.62

### KẾT LUẬN CHƯƠNG III

Với việc dùng phương pháp phần tử hữu hạn để giải bài toán ổn định của tấm ngoài giới hạn đàn hồi theo cách tương tự đàn hồi khi dùng mô đun tiếp tuyến cho phép ta giải được nhiều bài toán về ổn định của tấm ngoài giới hạn đàn hồi với kết quả đáng tin cậy và có thể dùng để ứng dụng trong tính toán kết cấu công trình (nhiều trường hợp chỉ tính giá trị lực tới hạn mà không xét đến hạ tải). Trong chương này cũng đã giải một số bài toán ví dụ số mà nếu dùng lời giải giải tích không thực hiện được.

## KẾT LUẬN CHUNG

Trong luận văn đã giải được một số bài toán về ổn định của bản ngoài giới hạn đàn hồi theo phương pháp giải tích và phương pháp số (phương pháp PTHH) dựa theo cách giải như bài toán đàn hồi với sự điều chỉnh của các mô đun tiếp tuyến thông qua việc tính lặp.

Nhờ có máy tính mà cách tính nêu trên không quá phức tạp mà chừng mực nào đó vẫn có thể ứng dụng được trong tính toán kết cấu công trình. Cách giải này mang tính lôgic rõ ràng về lý thuyết, mặt khác còn cho phép làm cơ sở dùng để đối chứng cho những nghiên cứu và tính toán phức tạp hơn.

Trong luận văn cũng đã giải được một số bài toán tấm với biên đa dạng mà thông thường không thể dùng được nghiệm giải tích. Tuy nhiên, đây cũng chỉ là những ví dụ đơn giản của bài toán dẻo (đặt tải đơn giản, biến dạng nhỏ...) - Song cũng là tiền đề để phục vụ cho những bước nghiên cứu tiếp theo.

## CÁC TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Stiphen Timoshenko - Người dịch: Phạm Hồng Giang, Vũ Thanh Hải, Nguyễn Khải, Đoàn Hữu Quang: ổn định đàn hồi. Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội 1976.
- [2] Đào Huy Bích: Lý thuyết dẻo và các ứng dụng. Nhà xuất bản Xây dựng, Hà Nội 2004.
- [3] Trần Việt Tâm: Nghiên cứu ổn định của tấm theo phương pháp Phần tử hữu hạn. Luận văn Thạc sĩ kỹ thuật, Hà Nội 2003.
- [4] Trần Thanh Tuấn: Nghiên cứu ổn định bản mỏng đàn dẻo bằng phương pháp năng lượng có xét đến vùng cắt tải. Tuyển tập công trình khoa học hội nghị cơ học toàn quốc - lần thứ bảy - (trang 674 - 682, tập III - Cơ học vật rắn biến dạng), Hà Nội 2002.
- [5] Phạm Huy Điển (chủ biên): Tính toán, lập trình và giảng dạy toán học trên MAPLE. Nhà xuất bản Khoa học và kỹ thuật, Hà Nội 2002.
- [6] Nguyễn Tất Tiến: Lý thuyết biến dạng dẻo kim loại. Nhà xuất bản giáo dục, Hà nội 2004.
- [7] o.c. Zienkiewicz and R.L.Taylor : The Finite Element Method - Volume 2. McGravv - Hill International (UK), 1991.
- [8] D.R.J. Owen and E. Hinton: Finite Elements in Plasticity. Pineridge Press Limited, Swansea - U.K.