

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC DÂN LẬP HẢI PHÒNG**

LÃ PHÚC NGUYỄN

**NGHIÊN CỨU ỔN ĐỊNH ĐÀN HỒI CỦA THANH CỐ
XÉT ĐẾN BIẾN DẠNG TRƯỢT NGANG**

Chuyên ngành: **Kỹ thuật Xây dựng Công trình Dân dụng & Công nghiệp**

Mã số: **60.58.02.08**

**LUẬN VĂN THẠC SỸ KỸ THUẬT
NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC**

TS. ĐOÀN VĂN DUẤN

Hải Phòng, 2015

MỞ ĐẦU

1. Sự cần thiết của vấn đề nghiên cứu

Hiện nay, yêu cầu phát triển kinh tế đòi hỏi phải xây dựng các công trình lớn và nhẹ, trong đó thường dùng các thanh chịu nén chiều dài lớn dễ bị mất ổn định. Mặt khác khi thiết kế công trình, nếu chỉ kiểm tra điều kiện bền và điều kiện cứng không thôi thì chưa đủ để phán đoán khả năng làm việc của công trình. Trong nhiều trường hợp, đặc biệt là các kết cấu chịu nén hoặc nén cùng với uốn, tải trọng chưa đạt đến giá trị phá hoại và có khi còn nhỏ hơn giá trị cho phép về điều kiện bền và điều kiện cứng nhưng kết cấu vẫn có thể mất khả năng bảo toàn dạng cân bằng ban đầu. Do đó, việc nghiên cứu ổn định công trình là cần thiết và có ý nghĩa thực tiễn.

Bài toán ổn định của kết cấu đã được giải quyết theo nhiều hướng khác nhau, phần lớn xuất phát từ nguyên lý năng lượng mà theo đó kết quả phụ thuộc rất nhiều vào cách chọn dạng của hệ ở trạng thái lệch khỏi dạng cân bằng ban đầu. Cho đến nay, các đường lối xây dựng bài toán ổn định của kết cấu chịu uốn thường không kể đến ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang hoặc có kể đến nhưng do cách đặt vấn đề và cách chọn ẩn chưa thật chính xác nên đã gặp rất nhiều khó khăn mà không tìm được kết quả của bài toán một cách chính xác và đầy đủ.

2. Đối tượng, phương pháp và phạm vi nghiên cứu

Trong đề tài này, tác giả áp dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss và phương pháp chuyển vị cưỡng bức để giải bài toán ổn định đàn hồi của thanh có xét đến biến dạng trượt ngang, chịu tác dụng của tải trọng tĩnh.

3. Mục đích nghiên cứu

Nghiên cứu ổn định đàn hồi của thanh có xét đến biến dạng trượt ngang

4. Nội dung nghiên cứu

- Trình bày lý thuyết xét biến dạng trượt đối với bài toán ổn định đàn hồi của thanh với việc dùng hai hàm chưa biết là hàm độ võng y và hàm lực cắt Q .

- Trình bày phương pháp chuyển vị cưỡng bức để giải bài toán ổn định của thanh thẳng chịu uốn dọc có xét đến biến dạng trượt ngang.

- Áp dụng phương pháp nguyên lý cực trị gauss và phương pháp chuyển vị cưỡng bức để xây dựng giải bài toán ổn định đàn hồi của thanh chịu uốn dọc có xét đến biến dạng trượt ngang, chịu tác dụng của tải trọng tĩnh.

CHƯƠNG 1

TỔNG QUAN VỀ LÝ THUYẾT ỔN ĐỊNH CÔNG TRÌNH

1.1. Khái niệm về ổn định và ổn định công trình

* *Khái niệm về ổn định và mất ổn định*

a. Định nghĩa về ổn định

- Theo Euler - Lagrange:

Ổn định là khả năng của công trình bảo toàn được vị trí ban đầu của nó cũng như dạng cân bằng ban đầu tương ứng với tải trọng trong trạng thái biến dạng, luôn luôn giữ, khi có các nhiễu loạn tùy ý từ bên ngoài gần với trạng thái không biến dạng ban đầu và hoàn toàn trở về trạng thái đó trong giai đoạn đàn hồi, còn trong giai đoạn đàn dẻo thì theo thường lệ, sẽ trở về trạng thái đó một cách từng phần, nếu như các nguyên nhân ngẫu nhiên gây ra nhiễu loạn công trình bị triệt tiêu [10].

Nói cách khác, ổn định là tính chất của công trình chống lại các tác nhân ngẫu nhiên từ bên ngoài và tự nó khôi phục hoàn toàn hoặc một phần vị trí ban đầu và dạng cân bằng của nó trong trạng thái biến dạng, khi các tác nhân ngẫu nhiên bị mất đi [10].

- Theo Liapunov [54]

“Trạng thái cân bằng của một hệ là ổn định nếu khi và chỉ khi hệ trở lại hình dạng này sau một nhiễu loạn nhỏ tạm thời nào đó. Nhiễu loạn như thế có thể sinh ra bởi một lực nhỏ tác động lên hệ trong một thời gian rất ngắn và bỏ ra sau đó”.

Định nghĩa này được hiểu trong ý nghĩa động lực : Điều này ám chỉ là dao động của hệ tắt dần do động năng đưa vào nhờ nhiễu loạn tiêu tán nhanh. Bởi vậy sau một thời gian ngắn chuyển động dừng lại và sự cân bằng tĩnh ban đầu được phục hồi.

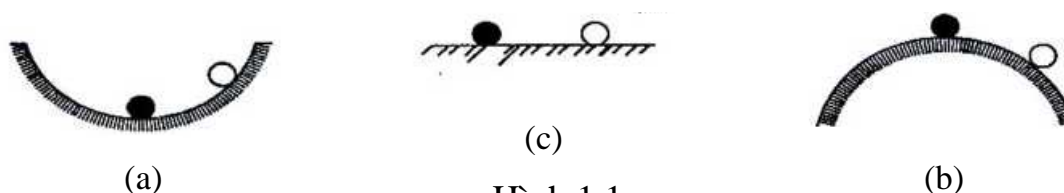
Như vậy theo hai định nghĩa trên ta đi đến kết luận: Vị trí của công trình hay dạng cân bằng ban đầu trong trạng thái biến dạng của công trình được gọi là ổn định hay không ổn định dưới tác dụng của tải trọng nếu như sau khi gây cho công trình một độ lệch rất nhỏ khỏi vị trí ban đầu hoặc dạng cân bằng ban đầu bằng một nguyên nhân bất kỳ nào đó ngoài tải trọng đã có (còn gọi là nhiễu) rồi bỏ nguyên-nhân đó đi thì công trình sẽ có hay không có khuynh hướng quay trở về trạng thái ban đầu.

Bước quá độ của công trình từ trạng thái ổn định sang trạng thái không ổn định gọi là mất ổn định. Giới hạn đầu của bước quá độ đó gọi là trạng thái tới hạn của công trình. Tải trọng tương ứng với trạng thái tới hạn gọi là tải trọng tới hạn.

b. Các trường hợp hợp mất ổn định

Trường hợp 1: Mất ổn định về vị trí [31]

Hiện tượng mất ổn định về vị trí xảy ra khi toàn bộ công trình được xem là tuyệt đối cứng, không giữ nguyên được vị trí ban đầu mà buộc phải chuyển sang vị trí cân bằng mới khác vị trí ban đầu.



Hình 1.1.

Xét một viên bi cứng trên một bề mặt cứng, Hình 1.1.

Rõ ràng là trong trường hợp (a) sự cân bằng của viên bi là ổn định. Sau một nhiễu loạn nhỏ cuối cùng nó sẽ trở về đáy cốc, tuy vậy sự suy giảm nhỏ có thể xảy ra.

Trong trường hợp (b) sự cân bằng là không ổn định, bởi vì sau một nhiễu loạn nhỏ viên bi sẽ không bao giờ có thể phục hồi vị trí ban đầu của nó.

Trong trường hợp (c), kích viên bị ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu thì nó lăn trên mặt phẳng ngang đến khi ngừng chuyển động, nó có vị trí cân bằng mới khác với trạng thái cân bằng ban đầu. Trong trường hợp này ta nói rằng trạng thái cân bằng ban đầu là phiếm định (không phân biệt).

Trường hợp 2: Mất ổn định về dạng cân bằng [1 1]

Hiện tượng mất ổn định về dạng cân bằng ở trạng thái biến dạng xảy ra khi dạng biến dạng ban đầu của vật thể biến dạng tương ứng với tải trọng còn nhỏ, buộc phải chuyển sang dạng biến dạng mới khác trước về tính chất nếu tải trọng đạt đến một giá trị nào đó hoặc xảy ra khi biến dạng của vật thể phát triển nhanh mà không xuất hiện dạng biến dạng mới khác trước về tính chất nếu tải trọng đạt đến một giá trị nào đó. Trong những trường hợp này, sự cân bằng giữa các ngoại lực và nội lực không thể thực hiện được tương ứng với dạng biến dạng ban đầu mà chỉ có thể thực hiện được tương ứng với dạng biến dạng mới khác dạng ban đầu về tính chất hoặc chỉ có thể thực hiện được khi giảm tải trọng. Hiện tượng này khác với hiện tượng mất ổn định về vị trí ở các điểm sau: Đối tượng nghiên cứu là vật thể biến dạng chứ không phải tuyệt đối cứng, sự cân bằng cần được xét với cả ngoại lực và nội lực.

Mất ổn định về dạng cân bằng gồm hai loại:

Mất ổn định loại một (mất ổn định Euler), có các đặc trưng sau:

Dạng cân bằng có khả năng phân nhánh, phát sinh dạng cân bằng mới khác dạng cân bằng ban đầu về tính chất Trước trạng thái tới hạn dạng cân bằng ban đầu là duy nhất và ổn định; sau trạng thái tới hạn dạng cân bằng là không ổn định.

Như hình 1.1, để biết được trạng thái cân bằng của cơ hệ có ổn định hay không thì ta phải kích nó ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu. Phương pháp chung để đánh giá sự mất ổn định của cơ hệ là: Đưa hệ ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu của nó và kiểm tra xem nó có tồn tại trạng thái cân bằng mới không.

Nếu như tìm được trạng thái cân bằng mới khác với trạng thái cân bằng ban đầu thì hệ là mất ổn định và lực giữ cho hệ ở trạng thái cân bằng mới này gọi là lực tới hạn, trường hợp ngược lại hệ là ổn định.

1.2. Lịch sử phát triển của lý thuyết ổn định công trình

Thực tế cho thấy nhiều công trình bị sập đổ do mất ổn định, chiếc cầu đường sắt đầu tiên ở Kevda - Nga là cầu dàn hỏ đã bị phá hủy năm 1875 do hệ thanh biên trên bị mất ổn định, cầu Menkhenstein ở Thụy sĩ bị phá hủy năm 1891 do mất ổn định, Cầu dàn Québec qua sông St. Laurent ở Canada, bị phá hủy vì mất ổn định của thanh chịu nén trong khi xây dựng vào năm 1907 [10, trg 5], bể chứa khí ở Hamburg bị phá hủy năm 1907 do thanh ghép chịu nén bị mất ổn định, cầu dàn Mojur ở Nga bị phá hủy năm 1925 do thanh ghép chịu nén bị mất ổn định, riêng ở Pháp theo số liệu của kỹ sư Girard trong khoảng thời gian từ 1955-1965 đã có 24 cầu bị phá hủy, phần lớn là do nguyên nhân mất ổn định, Cầu Tacoma ở Mỹ xây dựng hoàn thành ngày 1/7/1940 và bị phá hủy 7/11/1940 do bị mất ổn định vì tác dụng của gió [32, trg 277] v.v...

Vấn đề ổn định kết cấu được bắt đầu từ công trình nghiên cứu bằng thực nghiệm do Piter Musschenbroek công bố năm 1729, đã đi đến kết luận rằng lực tới hạn tỷ lệ nghịch với bình phương chiều dài thanh. Ba mươi năm sau bằng phân tích toán học Leonhard Euler cũng nhận được kết quả như vậy. Đầu tiên các kỹ sư không chấp nhận kết quả thí nghiệm của Piter Musschenbroek và kết quả của lý thuyết Euler ngay cả Culông [31, trg 185] cũng tiếp tục cho rằng độ cứng của cột tỷ lệ thuận với diện tích mặt cắt ngang và không phụ thuộc vào chiều dài thanh. Những quan điểm đó dựa trên các kết quả thí nghiệm của cột gỗ và cột sắt lắp ghép có chiều dài tương đối ngắn, những thanh loại này thường bị phá hoại với tải trọng nhỏ thua tải trọng Euler do vật liệu bị phá hoại mà không phải do mất ổn định ngang gây ra. E.Lamac là người đầu tiên giải thích một cách thỏa đáng sự không phù hợp giữa kết quả lý thuyết và kết quả thực nghiệm, ông ấy chỉ ra rằng lý thuyết Euler là hoàn toàn phù hợp với thực nghiệm khi bảo đảm rằng những giả thiết cơ bản

của Euler về xem vật liệu là đàn hồi và điều kiện lý tưởng của các đầu cuối cần phải được bảo đảm. Những thí nghiệm sau này khi người ta rất chú ý bảo đảm của đầu cuối của thanh và bảo đảm cho lực đặt đúng tâm của thanh đã khẳng định tính đúng đắn của công thức Euler.

1.3. Các phương pháp xây dựng bài toán ổn định công trình

1.3.1. Phương pháp tĩnh

Theo phương pháp này tải trọng tới hạn sẽ là tải trọng nhỏ nhất để xảy ra phân nhánh dạng cân bằng, tức là bên cạnh dạng cân bằng ban đầu tồn tại dạng cân bằng lân cận. Để xác định tải trọng này chỉ cần nghiên cứu sự cân bằng của hệ ở trạng thái lân cận khi cho hệ chuyển vị bé và đi tìm tải trọng bé nhất tương ứng với dạng cân bằng lân cận đó.

Khảo sát cân bằng của một hệ ở trạng thái lệch khỏi dạng cân bằng ban đầu. Tính giá trị của lực ở trạng thái lệch để đối chiếu với giá trị của lực đã cho ở trạng thái cân bằng ban đầu.

Giả sử: P là lực đã cho ở trạng thái cân bằng ban đầu

P^* là lực ứng với trạng thái lệch khỏi dạng cân bằng ban đầu (lực cần có để giữ hệ ở trạng thái lệch).

- Nếu $P < P^*$ thì hệ cân bằng ổn định
- Nếu $P = P^*$ thì hệ cân bằng phiếm định
- Nếu $P > P^*$ thì hệ cân bằng không ổn định

Xét hệ một bậc tự do, một đầu ngàm đàn hồi, một đầu tự do

Sau khi khảo sát cân bằng của hệ ở trạng thái cân lệch ta có:

$$P = \frac{k}{l} \text{ do đó:}$$

- Với $P < \frac{k}{l}$ thì hệ cân bằng ổn định

- Với $P = \frac{k}{l}$ thì hệ cân bằng bằng phiếm định

- Với $P = \frac{k}{l}$ hệ cân bằng không ổn định

1.3.2. Phương pháp năng lượng

Phương pháp này dựa trên việc nghiên cứu năng lượng toàn phần của hệ. Khi nó đạt cực tiểu thì hệ ở trạng thái cân bằng ổn định. Sự lệch khỏi trạng thái cân bằng ổn định sẽ làm tăng năng lượng. Tải trọng tới hạn ứng với năng lượng cực tiểu.

Nguyên lý Lagrange - Dirichlet:

“ Nếu hệ ở trạng thái cân bằng ổn định thì thế năng toàn phần đạt cực tiểu so với tất cả các vị trí lân cận vô cùng bé kể từ trạng thái cân bằng đó.

Nếu hệ ở trạng thái cân bằng không ổn định thì thế năng toàn phần đạt cực đại so với tất cả các vị trí lân cận vô cùng bé kể từ trạng thái cân bằng đó.

Nếu hệ ở trạng thái cân bằng phiếm định thì thế năng toàn phần không đổi”.

Thế năng toàn phần U^* của hệ ở trạng thái biến dạng gồm:

- Thế năng biến dạng của nội lực U
- Thế năng của ngoại lực $U_p = -T$ (trái dấu với công của ngoại lực T)

$$U^* = U + U_p = U - T$$

Độ biến thiên δU^* của thế năng toàn phần của hệ khi chuyển từ trạng thái đang xét sang trạng thái lân cận sẽ là

$$\delta U^* = \delta U - \delta T$$

Trong đó: δU - biến thiên của thế năng biến dạng δT - độ biến thiên của công

các ngoại lực Như vậy, theo nguyên lý Lagrange - Dirichlet:

Nếu $\delta U > \delta T$ thì hệ ở trạng thái cân bằng ổn định Nếu $\delta U < \delta T$ thì hệ ở trạng thái cân bằng không ổn định Nếu $\delta U = \delta T$ thì hệ ở trạng thái cân bằng

phiếm định

1.3.3. Phương pháp động lực học

Đây là phương pháp chung nhất, dựa trên việc nghiên cứu chuyển động của hệ sau khi có kích động ban đầu. Nếu chuyển động là dao động có biên độ tăng không ngừng theo thời gian thì dạng cân bằng ban đầu là không ổn định. Ngược lại, nếu hệ luôn dao động bé quanh trạng thái cân bằng ban đầu hoặc tắt dần thì đó là dạng cân bằng ổn định.

1.4. Bài toán ổn định uốn dọc của thanh và phương pháp giải

Phương trình cân bằng của thanh thẳng có tiết diện không đổi chịu tác dụng của lực P đặt ở đầu thanh có thể được viết như sau:

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} + P \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (1.1)$$

Phương trình trên là phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất (không có vế phải). Phương trình dao động tự do của thanh được trình bày ở chương 3 cũng thuộc loại phương trình này. Vì vậy, để tổng quát ở đây trình bày phương pháp chung tìm nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính bậc n thuần nhất có các hệ số là hằng số [29]:

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n y = 0 \quad (a_0 \neq 0) \quad (1.2)$$

Để giải phương trình vi phân trên thì giải phương trình đặc tính của nó là:

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0 \quad (1.3)$$

a) Trường hợp phương trình đặc tính có n nghiệm phân biệt thì nghiệm của phương trình vi phân (a) viết dưới dạng sau:

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x} \quad (1.4)$$

Các hệ số c_i được xác định từ điều kiện biên của bài toán

b) Nếu như một nghiệm r_k nào đó có nghiệm lặp lại m_k lần thì thành phần tương ứng trong nghiệm trên được thay bằng

$$(c_k + c_{k1}x + c_{k2}x^2 + \dots + c_{k(m_k-1)}x^{m_k-1})e^{r_k x} \quad (1.5)$$

Trong trường hợp có hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\varphi_{j1}\left(\frac{d}{dx}\right)y_1 + \varphi_{j2}\left(\frac{d}{dx}\right)y_2 + \dots + \varphi_{jn}\left(\frac{d}{dx}\right)y_n = 0 \quad (j=1, 2, 3, \dots, n) \quad (1.6)$$

Ở đây $\varphi_{jk}\left(\frac{d}{dx}\right)$ là đa thức của $\left(\frac{d}{dx}\right)$. Mỗi hàm $y_k = y_k(x)$ ($k=1 \dots n$) đều có dạng (1.46) và (1.47), còn các số mũ r_1 sẽ là nghiệm của hệ các phương trình đặc tính

$$D(r) \equiv \det[\varphi_{jk}(r)] = 0 \quad (1.7)$$

Đây là hệ phương trình đặc trưng của hệ phương trình vi phân. Từ phương trình (1.7) tìm được r_{jk} , đưa các nghiệm y dạng (1.4) và (1.5) vào hệ phương trình (1.6) sẽ xác định được các tương quan của các hệ số, các hệ số tự do được xác định từ các điều kiện biên. Đó là phương pháp chung để giải phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất có hệ số là hằng số.

Trở lại phương trình uốn dọc của thanh. Phương trình (1.1) hoàn toàn giải được bằng cách giải phương trình đặc tính (1.3), tìm nghiệm theo (1.4) và (1.5), các hệ số của (1.4) và (1.5) xác định từ các điều kiện biên của thanh. Tuy nhiên, một cách giải ngắn gọn hơn khi viết hàm độ võng y của thanh dưới dạng sau

$$y = a \sin(kx) + b \cos(kx) + cx + d \quad (1.8)$$

$$k = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$$

Thật vậy, đưa hàm (1.8) vào phương trình (1.1) ta thấy phương trình (1.1) được thỏa mãn. Vấn đề còn lại là xác định các hệ số a, b, c, d . Bốn hệ số a, b, c, d của hàm y được xác định tùy theo 4 điều kiện biên y, y', y'', y''' tại hai

đầu cuối thanh. Dưới đây trình bày các lời giải thanh có các điều kiện biên khác nhau.

Ví dụ: Xác định lực tới hạn của thanh hai đầu khớp

Các điều kiện biên tại liên kết khớp là chuyển vị và momen uốn bằng không. Ta có :

$$y(x = 0) = 0; \frac{d^2 y}{dx^2}(x = 0) = 0 ; y(x = l) = 0; \frac{d^2 y}{dx^2}(x = l) = 0$$

Đưa 4 điều kiện trên vào (1.8), nhận được 4 phương trình sau

$$b + d = 0; b = 0; a \sin(kl) + cl = 0; ak^2 \sin(kl) = 0$$

Ta có $b = c = d = 0, a \sin(kl) = 0$

Nếu $a = 0$ thì $y = 0$, đó là nghiệm tầm thường của (1.1). Để có được nghiệm không tầm thường ($y \neq 0$), ta cho

$$\sin(kl) = 0 \text{ hay } kl = n\pi, \dots (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Thay k vào phương trình (1.8) ta có

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{l^2} \tag{1.9}$$

Với các giá trị P xác định trên, thanh có trạng thái cân bằng mới, trạng

thái uốn dọc với $y = a \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$ (1.10)

khác với trạng thái ban đầu là trạng thái nén, thanh thẳng. Ta nói thanh mất ổn định và lực P là lực tới hạn Euler. Chú ý rằng với P tới hạn xác định theo (1.9), độ võng (1.10) của thanh vẫn hữu hạn. Tuy nhiên, theo lí thuyết dầm-cột trình bày ở trên, độ võng của thanh với lực P xác định theo (1.9) sẽ tăng lên vô cùng, nên (1.10) là biểu thức xác định lực tới hạn của thanh. Kixelov cho rằng lực P tới hạn (1.10) vẫn nằm trong miền ổn định.

Để thỏa mãn 4 điều kiện biên y, y', y'', y''' của phương trình (1.1) ta có thể dùng 4 thông số chuyển vị, góc xoay, momen uốn và lực cắt chưa biết tại hai đầu thanh làm ẩn thay cho các hệ số a, b, c, d của phương trình (1.8). Ta có phương pháp thông số ban đầu được giáo sư Kixelov sử dụng trong giáo trình động lực học và ổn định công trình của mình.

1.5. Nhận xét chương 1:

Ở trên đã trình bày các phương pháp chung để xây dựng bài toán ổn định công trình. Các phương pháp đó là: Phương tĩnh, phương pháp năng lượng và phương động lực học. Các phương pháp nói trên hoàn toàn tương đương nhau. Đã giới thiệu các định nghĩa, các khái niệm và các định lý về ổn định nhằm mục đích hiểu rõ bản chất của bài toán ổn định công trình. Đã trình bày phương pháp chung để giải các phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất và áp dụng để nghiên cứu ổn định của thanh thẳng chịu lực nén P tác dụng ở đầu thanh. Có thể nói đây là phương pháp toán duy nhất và do đó phổ biến nhất trong nghiên cứu ổn định công trình hiện nay.

CHƯƠNG 2

PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN LÝ CỰC TRỊ GAUSS

Trong chương 1 đã trình bày bốn đường lối xây dựng bài toán cơ học và các phương pháp giải hiện nay thường dùng trong các giáo trình, tài liệu trong và ngoài nước. Khác với chương I, chương này trình bày nguyên lý Gauss, sau đó trình bày phương pháp mới dựa trên nguyên lý cực trị Gauss để xây dựng và giải các bài toán cơ học dưới dạng tổng quát, chủ yếu là của cơ hệ vật rắn biến dạng. Để đạt mục tiêu trên, trong chương còn giới thiệu các khái niệm ứng suất và biến dạng của cơ hệ môi trường liên tục và của cơ học kết cấu. Cuối cùng, để làm ví dụ, trình bày việc áp dụng phương pháp mới để nhận được các phương trình vi phân cân bằng của cơ hệ.

2.1. Nguyên lý cực trị Gauss

Năm 1829 nhà toán học người Đức K.F. Gauss đã đưa ra nguyên lý sau đây đối với cơ hệ chất điểm [1, tr. 171]:

“Chuyển động thực của hệ chất điểm có liên kết tùy ý chịu tác động bất kì ở mỗi thời điểm xảy ra một cách phù hợp nhất có thể với chuyển động của hệ đó khi hoàn toàn tự do, nghĩa là chuyển động thực xảy ra với lượng cưỡng bức tối thiểu nếu như số đo lượng cưỡng bức lấy bằng tổng các tích khối lượng chất điểm với bình phương độ lệch vị trí chất điểm so với vị trí khi chúng hoàn toàn tự do”.

Gọi m_i là khối lượng chất điểm, A_i là vị trí của nó, B_i là vị trí sau thời đoạn vô cùng bé do tác động lực ngoài và do vận tốc ở đầu thời đoạn gây ra, C_i là vị trí có thể (bị ràng buộc bởi liên kết) thì lượng cưỡng bức được viết như sau:

$$Z = \sum_i m_i (\overline{B_i C_i})^2 \rightarrow Min \quad (2.1)$$

Dấu tổng trong (2.1) lấy theo số chất điểm.

Sử dụng nguyên lý vận tốc ảo và nguyên lý D 'Alembert, xét hệ ở trạng thái cân bằng và cho rằng có lực với độ lớn tỉ lệ với độ dài $\overline{B_i C_i}$ tác dụng theo chiều từ C_i đến B_i , Gauss đã chứng minh nguyên lý của mình [1, tr. 172].

Để có thể sử dụng nguyên lý Gauss cần biết đại lượng biến phân của nó. Theo [1, tr. 889], Gibbs (năm 1879) và Appell (năm 1899) đi từ các lập luận khác nhau đều nhận được nguyên lý Gauss và chỉ ra rằng đại lượng biến phân của nguyên lý này là gia tốc. Điều này có nghĩa là:

$$\delta r_i = 0; \quad \delta \dot{r}_i = 0; \quad \delta \ddot{r}_i \neq 0 \quad (2.2)$$

ở đây δ là kí hiệu biến phân (lấy vi phân khi cố định thời gian), r_i , \dot{r}_i và \ddot{r}_i lần lượt là vector toạ độ, vector vận tốc và vector gia tốc của điểm i . Chuyển dịch của chất điểm của hệ có liên kết dưới tác dụng của lực F_i sau thời đoạn dt tính theo công thức sau đây:

$$r_i + \dot{r}_i dt + \frac{1}{2} \ddot{r}_i dt^2 \quad (2.3)$$

Vì $\delta r_i = 0$ và $\delta \dot{r}_i = 0$ nên chuyển dịch của chất điểm hoàn toàn tự do (có thể hình dung ở đầu thời đoạn dt liên kết được giải phóng nhưng vẫn giữ lực tác dụng) sau thời đoạn dt là :

$$r_i + \dot{r}_i dt + \frac{1}{2} \frac{F_i}{m_i} dt^2 \quad (2.4)$$

Hiệu của (2.4) và (2.3) cho ta độ lệch vị trí của chất điểm có liên kết so với vị trí của nó khi hoàn toàn tự do.

Có thể xem dt là hằng thì lượng cưỡng bức Z theo (2.1) được viết dưới dạng lực như sau (với độ chính xác bằng thừa số $dt^4/4$) :

$$Z = \sum_i m_i \left(\frac{F_i}{m_i} - \ddot{r}_i \right)^2 \rightarrow Min \quad (2.5)$$

hoặc

$$Z = \sum_i \frac{1}{m_i} (F_i - m_i \ddot{r}_i)^2 \rightarrow Min \quad (2.5a)$$

Khi tính lượng cưỡng bức theo (2.5) cần xem gia tốc là đại lượng biến phân (biến phân kiểu Gauss theo cách nói của Boltzmann). Như vậy, phương pháp tìm cực tiểu của các bài toán cơ học được xây dựng theo nguyên lý (2.5) không thể là bất kỳ mà phải là (khi không có ràng buộc nào khác):

$$\frac{\partial Z}{\partial \ddot{r}_i} = 0 \quad (2.6)$$

Điều kiện (2.6) sẽ cho ta phương trình cân bằng. Thật vậy, áp dụng (2.6) vào (2.5) ta nhận được phương trình cân bằng của hệ (ở đây lực tác dụng bằng lực quán tính). Appell và Boltzmann (năm 1897) còn cho biết nguyên lý Gauss đúng cho hệ liên kết holonom và cả hệ liên kết không holonom [1, tr. 890].

Nguyên lý Gauss (2.1) hoặc (2.5) có dạng của phương pháp bình phương tối thiểu là phương pháp cũng do Gauss đưa ra và được dùng rộng rãi trong toán học hiện đại, trong giải tích cũng như trong lời giải số. Có lẽ vì vậy nguyên lý Gauss thu hút sự chú ý của nhiều nhà khoa học, thí dụ, Hertz (năm 1894) dựa trên ý tưởng lượng cưỡng bức đưa ra nguyên lý đường thẳng nhất (đường có độ cong nhỏ nhất) hoặc Prigogine (năm 1954) và Gyarmati (năm 1965) đã xây dựng được lượng cưỡng bức của các quá trình không hồi phục trong nhiệt động lực học [2].

Các tài liệu giáo khoa về cơ học thường giới thiệu nguyên lý Gauss dưới dạng (2.5) là dạng dùng được để tính toán. Nhưng nguyên lý (2.5) với đại lượng biến phân là gia tốc chỉ là một biểu thị của nguyên lý Gauss (2.1) bởi vì đại lượng biến phân trong cơ học còn có thể là chuyển vị và vận tốc như trình bày sau đây.

2.2. Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss

Trong bài viết của mình Gauss nêu nhận xét rằng *nguyên lý vận tốc ảo biến vấn đề tĩnh học thành vấn đề toán học thuần túy, còn nguyên lý D'Alembert đưa bài toán động lực học về bài toán tĩnh học và mọi nguyên lý của cơ học hoặc nhiều hoặc ít đều có thể trực tiếp rút ra từ hai nguyên lý trên*. Dưới đây trình bày phương pháp dựa trên nguyên lý chuyển vị ảo để nhận được biểu thức (2.1) của nguyên lý Gauss.

Xét hệ chất điểm có liên kết tùy ý ở một thời điểm bất kì nào đó có nghĩa là phải đưa lực quán tính f_i của hệ tại thời điểm đó tác dụng lên hệ. Đối với hệ hoàn toàn tự do lực quán tính f_{0i} của nó bằng với ngoại lực (chỉ số '0' ở chân kí tự chỉ rằng kí tự đó thuộc hệ so sánh, trường hợp này là hệ hoàn toàn tự do có cùng khối lượng và cùng chịu tác dụng lực ngoài giống như hệ có liên kết). Như vậy, các lực tác dụng lên hệ có liên kết gồm các lực $f_i = m_i \ddot{r}_i$ và các lực $f_{0i} = m_i \ddot{r}_{0i}$ (thay cho ngoại lực). Theo nguyên lý chuyển vị ảo đối với liên kết giữ (liên kết dưới dạng đẳng thức) và không giữ (liên kết dưới dạng bất đẳng thức) điều kiện cần và đủ để hệ ở trạng thái cân bằng là [1, tr. 887] :

$$\sum_i (f_i - f_{0i}) \delta r_i \leq 0 \quad (2.7)$$

Biểu thức (2.7) cũng được Fourier (năm 1798) và Ostrogradsky (năm 1838) độc lập đưa ra.

Có thể nhận xét ngay rằng phần trong ngoặc đơn của (2.7) biểu thị lực tác dụng lên hệ nên phải bằng không để hệ ở trạng thái cân bằng.

Trong biểu thức (2.7) cần xem các chuyển vị r_i độc lập đối với lực tác dụng. Cho nên từ (2.7) có thể viết:

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) r_i \rightarrow Min \quad (2.8)$$

Trong (2.8) r_i là các biến độc lập cần tìm để bảo đảm cho Z cực tiểu. Vì chuyển vị r_{0i} của hệ hoàn toàn tự do đã biết nên biểu thức (2.8) tương đương với các biểu thức dưới đây:

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i})(r_i - r_{0i}) \rightarrow \text{Min} \quad (2.8a)$$

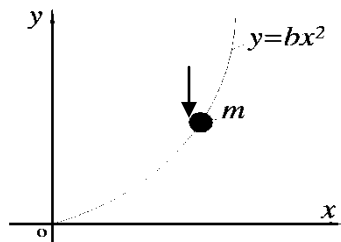
$$\text{hoặc} \quad Z = \sum_i m_i \left[\frac{f_i}{m_i} - \ddot{r}_{0i} \right] (r_i - r_{0i}) \rightarrow \text{Min} \quad (2.8b)$$

Đễ dàng nhận thấy (2.8b) là tích của khối lượng m_i với bình phương độ lệch vị trí chất điểm và do đó Z xác định theo (2.8) là lượng cường bức của nguyên lý Gauss (với độ chính xác bằng thừa số $dt^2/2$). So với (2.5), lượng cường bức Z xác định theo (2.8) biểu thị đầy đủ và rõ ràng tư tưởng của nguyên lý Gauss thể hiện ở chỗ, thứ nhất, nó cho phép so sánh hệ có liên kết với hệ hoàn toàn tự do, thứ hai, đại lượng không biết (đại lượng biến phân) trong (2.8) là chuyển vị giống như trong (2.1). Cực tiểu của (2.8) cần và phải được tìm từ điều kiện (khi không có các ràng buộc nào khác):

$$\frac{\partial Z}{\partial r_i} = 0 \quad (2.9)$$

Điều kiện (2.9) áp dụng vào (2.8) cho ta phương trình cân bằng của cơ hệ.

Ví dụ 1 Ví dụ này lấy từ [3, tr. 64]. Viết phương trình chuyển động của khối lượng m chạy trên đường cong $y = bx^2$ trong mặt phẳng (xy) , không có lực ma sát, dưới tác dụng của trường gia tốc g (Hình 1.1).



Hình 1.1

Các lực tác dụng lên khối lượng m bao gồm: lực quán tính theo chiều y , lực trọng trường theo chiều âm của y , lực quán tính theo x . Chọn hệ so sánh là hệ có cùng khối lượng m nằm trong trường gia tốc g nhưng hoàn toàn tự do. Lượng cường bức được viết theo (2.8) như sau:

$$Z = (m\ddot{y} + mg)y + (m\ddot{x})x \rightarrow \text{Min} \quad (a)$$

Thế $y = bx^2$ vào (a) ta có

$$Z = (m\ddot{y} + mg)bx^2 + (m\ddot{x})x \rightarrow \text{Min} \quad (\text{b})$$

Xem chuyển vị x là biến độc lập và từ điều kiện $\frac{\partial Z}{\partial x} = 0$ nhận được:

$$2bx\ddot{y} + 2bgx + \ddot{x} = 0 \quad (\text{c})$$

Thay $\ddot{y} = 2bx\ddot{x} + 2bx^2$ vào (c) nhận được phương trình chuyển động của khối lượng m

$$(4b^2x^2 + 1)\ddot{x} + 4b^2x\dot{x}^2 + 2bgx = 0 \quad (\text{d})$$

Phương trình (d) là kết quả cần tìm.

Như nhận xét của Gauss nêu trên, có thể nói biểu thức (2.7) đã biến vấn đề tĩnh học (cân bằng lực) thành vấn đề toán học thuần túy. Thật vậy, nếu ta dùng gia tốc là đại lượng biến phân thì tương tự như (2.7) có thể viết

$$\sum_i (f_i - f_{0i}) \delta \ddot{r}_i \leq 0 \quad (2.10)$$

với điều kiện gia tốc \ddot{r}_i là đại lượng độc lập đối với lực tác dụng.

Từ (1.10) có thể viết

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) \ddot{r}_i \rightarrow \text{Min} \quad (2.11)$$

Trong (2.11) cần xem gia tốc \ddot{r}_i là đại lượng biến phân để bảo đảm cho Z cực tiểu. Vì gia tốc \ddot{r}_{0i} của hệ hoàn toàn tự do đã biết nên biểu thức (2.11) tương đương với các biểu thức dưới đây:

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i})(\ddot{r}_i - \ddot{r}_{0i}) \rightarrow \text{Min} \quad (2.11a)$$

hoặc
$$Z = \sum_i m_i \left(\frac{f_i}{m_i} - \ddot{r}_{0i} \right) (\ddot{r}_i - \ddot{r}_{0i}) \rightarrow \text{Min}$$

$$Z = \sum_i m_i (\ddot{r}_i - \ddot{r}_{0i})^2 \rightarrow \text{Min} \quad (2.11b)$$

Ta thấy (2.11b) trùng với (2.5). Các gia tốc \ddot{r}_i phải thỏa mãn các liên kết nếu có và điều kiện cực tiểu của (2.11) là biểu thức (2.6).

Ví dụ 2 . Làm lại ví dụ 1 (Hình 1) theo nguyên lí (2.5) hoặc biểu thức (2.11)

Khối lượng m vừa chuyển động theo x , vừa chuyển động theo y , nhưng do có liên kết $y = bx^2$ nên chỉ có một bậc tự do, thí dụ là x . Các lực tác dụng lên m bao gồm: Lực quán tính theo chiều y , lực trọng trường theo chiều âm của y , lực quán tính theo x . Lượng cưỡng bức Z viết theo (2.5) là:

$$Z = m\left(\frac{mg}{m} + \ddot{y}\right)^2 + m\ddot{x}^2 \rightarrow \text{Min (a)}$$

Lấy đạo hàm ràng buộc $y = bx^2$ theo thời gian hai lần ta có :

$$\ddot{y} = 2bx\ddot{x} + 2b\dot{x}^2 \quad \text{(b)}$$

Thay \ddot{y} trong (a) bằng (b), nhận được

$$Z = (g + 2bx\ddot{x} + 2b\dot{x}^2)^2 + \ddot{x}^2 \rightarrow \text{Min (c)}$$

Xem gia tốc \ddot{x} là biến độc lập và từ điều kiện $\partial Z / \partial \ddot{x} = 0$ ta có phương trình chuyển động của khối lượng m như sau :

$$(4b^2x^2 + 1)\ddot{x} + 4b^2x\dot{x}^2 + 2bgx = 0 \text{ (d)}$$

Phương trình (d) là kết quả cần tìm.

Tương tự, cũng có thể dùng vận tốc \dot{r}_i là đại lượng biến phân, khi đó lượng cưỡng bức Z được viết :

$$Z = \sum_i (f_i - f_{oi}) \dot{r}_i \rightarrow \text{Min (2.12)}$$

với điều kiện vận tốc \dot{r}_i là biến độc lập và thỏa mãn các liên kết nếu có. Trong trường hợp này điều kiện cực tiểu của nguyên lí(2.12) sẽ là (khi không có ràng buộc nào khác) :

$$\frac{\partial Z}{\partial \dot{r}_i} = 0 \quad \text{(2.13)}$$

Làm lại bài toán của ví dụ 1 với đại lượng biến phân là vận tốc (biểu thức 2.12) cũng cho ta kết quả đúng đắn.

Tóm lại, các nguyên lý (2.5) hoặc (2.11) với đại lượng biến phân là gia tốc độc lập đối với lực tác dụng, nguyên lý (2.8) với đại lượng biến phân là chuyển vị độc lập đối với lực tác dụng và nguyên lý (2.12) với đại lượng biến phân là vận tốc độc lập đối với lực tác dụng đã biến phương trình cân bằng lực (vấn đề cơ học) thành các bài toán toán học thuần túy và có thể được phát biểu như sau: *Chuyển động thực của cơ hệ xảy ra khi lượng cưỡng bức Z*

- xác định theo (2.5) thì được tìm theo gia tốc, điều kiện (2.6)
- xác định theo (2.8) thì được tìm theo chuyển vị, điều kiện (2.9)
- xác định theo (2.12) thì được tìm theo vận tốc, điều kiện (2.13)

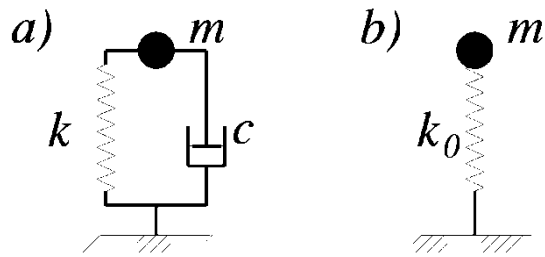
là cực tiểu.

Đương nhiên, các đại lượng biến phân gia tốc, chuyển vị và vận tốc phải thỏa mãn các điều kiện liên kết của hệ.

Để có thể áp dụng cho cả các bài toán tĩnh của môi trường liên tục ta sẽ dùng nguyên lý (2.8) với đại lượng biến phân là chuyển vị và điều kiện cực tiểu là (2.9). Nguyên lý (2.5) không cho phép giải các bài toán tĩnh. Do đó, cách trình bày nguyên lý Gauss dưới dạng này đã hạn chế việc sử dụng nguyên lý trong cơ học.

Có thể mở rộng nguyên lý Gauss bằng cách so sánh hệ cần tính với hệ có liên kết tùy ý chịu tác dụng của lực giống như hệ cần tính mà lời giải của nó đã biết. Khi đó thay cho lực ngoài ta dùng lực liên kết và lực quán tính của hệ so sánh với dấu ngược lại để tác động lên hệ cần tính. Điều này là hiển nhiên bởi vì ngoại lực luôn cân bằng với nội lực. Xét ví dụ minh họa sau

Ví dụ 3 Hệ cần tính là khối lượng m có liên kết lò xo độ cứng k và liên kết nhớt với hệ số nhớt c chịu tác dụng lực $p(t)$ (Hình 2.2). Xét dao động thẳng đứng $u(t)$ của m so với vị trí cân bằng tĩnh của nó. Bài toán có một bậc dao động tự do. Ta chọn hệ so sánh có khối lượng m_0 và liên kết lò xo độ cứng k_0 cùng chịu lực $p(t)$ (Hình 2.2.b).



Hình 2.2 a) Hệ cần tính; b) Hệ so sánh.

Dao động $u_0(t)$ của hệ so sánh (so với vị trí cân bằng tĩnh của nó) xác định từ phương trình cân bằng sau :

$$m_0\ddot{u}_0 + k_0u_0 = p(t) \quad (a)$$

Lực tác dụng lên khối lượng m gồm có: lực quán tính $m\ddot{u}$, lực cản lò xo ku , lực cản nhớt $c\dot{u}$ và lực $p(t)$ được thay bằng nội lực của hệ so sánh. Lượng cưỡng bức theo (2.8) viết được:

$$Z = (m\ddot{u} + c\dot{u} + ku - m_0\ddot{u}_0 - k_0u_0)u \rightarrow \text{Min} \quad (b)$$

Phần trong dấu ngoặc đơn của (b) biểu thị lực tác dụng và theo nguyên lý chuyển vị (2.8) cần xem chuyển vị u là biến độc lập đối với lực tác dụng thì từ điều kiện $\partial Z/\partial u = 0$ nhận được phương trình cân bằng của hệ cần tính

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = m_0\ddot{u}_0 + k_0u_0 \quad (c)$$

hay chú ý tới (a) ta có

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad (d)$$

Nhìn vào (c) và (d) thấy rằng thay cho việc giải phương trình vi phân cân bằng (d) của hệ cần tính ta có thể giải phương trình (c) ứng với từng thời điểm. Vế phải của (c) có thể là nghiệm riêng hoặc nghiệm cơ bản (trường hợp $p(t)$ là xung đơn vị) của (d) hoặc, một cách tổng quát, là thể hiện của $p(t)$ trên hệ bất kì nào khác (lời giải của hệ bất kì khi chịu tác động của $p(t)$). Nhận xét này rất hữu ích bởi vì nó cho ta một phương pháp nữa để giải các phương

trình vi phân phức tạp, đặc biệt là đối với các bài toán có điều kiện biên ở vô hạn hoặc là khi giải bằng số.

Lượng cưỡng bức Z theo (b) có thể viết dưới dạng sau:

$$Z = Z1 + Z2 + Z3 \rightarrow Min \quad (e)$$

$$Z1 = \frac{1}{k}(ku - k_0u_0)^2, \quad Z2 = 2c\dot{u}u, \quad Z3 = 2m(\ddot{u} - \ddot{u}_0)u \quad (f)$$

Ở đây $Z1$ viết dưới dạng bình phương tối thiểu. Vì $Z1$ được viết dưới dạng bình phương tối thiểu nên các đại lượng $Z2$ và $Z3$ phải nhân với hệ số 2. Các biểu thức lượng cưỡng bức (b) và (e), (f) là tương đương.

Những nhận xét rút ra từ ví dụ minh họa nêu trên áp dụng đúng cho bất kì hệ nào khác.

Trình bày trên cho thấy có thể dùng hệ có liên kết bất kì để làm hệ so sánh cho nên có thể mở rộng biểu thức (2.8) như sau :

$$Z = \sum_i (f_i - f_{0i}) r_i \rightarrow Min \quad (2.14)$$

với f_i là nội lực bao gồm lực quán tính và lực liên kết nếu có của hệ cần tính, f_{0i} là nội lực và lực liên kết đã biết của hệ so sánh bất kỳ chịu tác dụng lực ngoài giống như hệ cần tính.

Chú ý rằng khi sử dụng biểu thức (2.14) cần xem chuyên vị r_i là đại lượng độc lập đối với lực và phải thỏa mãn các điều kiện liên kết nếu có. Bởi vì cực tiểu của lượng cưỡng bức Z phải được tìm theo (2.9) (khi không có các ràng buộc nào khác) nghĩa là phải giải phương trình cân bằng của cơ hệ nên bài toán luôn có nghiệm và nghiệm là duy nhất

Phương pháp của nguyên lý (2.14) cho phép dùng hệ so sánh bất kì. Đại lượng biến phân của (2.14) là chuyên vị, điều kiện cực tiểu của nó là biểu thức (2.9). Phương pháp này do GS. TSKH Hà Huy Cương đề xuất và được gọi là phương pháp nguyên lý cực trị Gauss.

Biểu thức (2.7) trong các giáo trình cơ học thường mang dấu bằng, nghĩa là chỉ xét trường hợp liên kết giữ và khi đó từ (2.7) sẽ nhận được nguyên lý công ảo. Có thể nói biểu thức (2.7) với dấu nhỏ thua hoặc bằng là sự khác biệt cơ bản giữa nguyên lý cơ học của Gauss với cơ học dựa trên nguyên lý công ảo hiện dùng.

2.3. Cơ hệ môi trường liên tục: ứng suất và biến dạng

Trong mục này trình bày phương pháp nguyên lý Gauss đối với cơ hệ môi trường liên tục. Muốn vậy cần biết khái niệm ứng suất và biến dạng của môi trường liên tục. Để trình bày gọn dưới đây dùng các đại lượng tenxơ với cách hiểu như sau [4 ,tr.196]:

$$a_i a_i = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$a_{kk} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

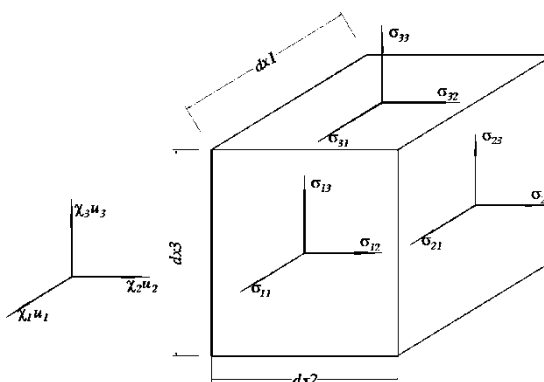
và hệ số Kronecker

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{khi } i = j$$

$$\delta_{ij} = 0 \quad \text{khi } i \neq j$$

với $i = 1,2,3$; $j = 1,2,3$; $k = 1,2,3$ đối với không gian 3 chiều.

Có thể nói đối tượng nghiên cứu của cơ hệ môi trường liên tục trong tọa độ vuông góc là phân tố khối chữ nhật (ba chiều, kích thước vô cùng bé) hoặc phân tố chữ nhật (hai chiều, kích thước vô cùng bé) được tách ra từ môi trường (hình 2.3).



Hình 2.3. Trạng thái ứng suất phân tố

Khi đó lí thuyết ứng suất cho thấy ngoài các lực thông thường (lực gây các chuyển vị tịnh tiến trong cơ hệ chất điểm) trên bề mặt phân tố còn có các ứng suất tác dụng. Có 9 ứng suất σ_{ij} tác dụng lên bề mặt phân tố. Thứ nguyên của ứng suất bằng lực chia cho đơn vị diện tích.

Từ điều kiện cân bằng lực và momen sẽ nhận được phương trình cân bằng tĩnh của phân tố

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (2.15)$$

Trong (2.15) σ_{ij} là ứng suất, $\sigma_{ij,j}$ biểu thị đạo hàm của ứng suất theo tọa độ không gian, $\partial\sigma_{ij}/\partial x_j = \sigma_{ij,j}$, b_i là lực khối (lực khối xem như là lực cản).

Nếu không có lực momen khối thì từ phương trình cân bằng sẽ có:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.16)$$

Số ứng suất độc lập tác dụng lên bề mặt phân tố chỉ còn 6. Lí thuyết ứng suất cho thấy khi biết trạng thái ứng suất phân tố thì sẽ xác định được trạng thái lực tại điểm đó của môi trường và ngược lại.

Khi chịu tác dụng ngoại lực, phân tố chuyển động và biến hình. Lý thuyết biến dạng cho thấy ngoài các chuyển vị u_i phân tố còn chịu các biến dạng ε_{ij} . Nếu xem biến dạng là bé (bình phương hoặc tích hai biến dạng là nhỏ so với chính nó) thì các biến dạng được xác định theo các phương trình sau:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.17)$$

Các ε_{ij} là các đại lượng không thứ nguyên. Tương tự như tenxơ σ_{ij} , tenxơ ε_{ij} đối xứng và có 6 biến dạng độc lập tương ứng với 6 ứng suất.

Từ (2.17) thấy rằng trạng thái chuyển vị xác định duy nhất trạng thái biến dạng, nhưng ngược lại không đúng bởi vì có những chuyển vị không gây biến dạng (chuyển vị của vật rắn tuyệt đối). Ngoài các phương trình nêu trên, để bảo đảm tính liên tục của môi trường còn có các phương trình về điều kiện không bị gián đoạn.

Tùy theo tính chất cơ học của vật liệu môi trường mà có các liên hệ khác nhau giữa ứng suất và biến dạng. Do có 6 ứng suất và 6 biến dạng nên một cách tổng quát cần biết 36 thông số tính chất vật liệu. Tuy nhiên từ điều kiện biểu thị năng lượng biến dạng phải giống nhau còn số 36 rút xuống còn 21. Đối với vật liệu đẳng hướng chỉ còn 2 thông số tính chất vật liệu độc lập được chọn trong số các thông số sau: hai hằng số Lamé μ và λ , môđun Young E , môđun trượt G và hệ số Poisson ν , giữa chúng có các liên hệ sau đây :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.18)$$

Đối với vật liệu đồng nhất, đẳng hướng, tuân theo định luật Húc (Hooke) thì liên hệ giữa ứng suất và biến dạng sẽ là :

$$\sigma_{ij} = 2G \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (2.19)$$

Từ công thức (2.19) thấy rằng ứng suất σ_{ij} không những phụ thuộc vào biến dạng ε_{ij} theo phương của nó mà còn phụ thuộc vào các biến dạng theo các phương khác thông qua hệ số Poisson ν . Hệ số $2G$ để tiện trình bày sau này sẽ được gọi là *độ cứng của biến dạng*.

Những trình bày trên cho thấy đối với cơ hệ môi trường liên tục cần xem các biến dạng ε_{ij} là độc lập đối với nhau và được xác định theo phương trình (2.17), cần xét các phương trình về điều kiện không bị gián đoạn của môi trường và liên hệ giữa ứng suất và biến dạng. Đối với môi trường đàn hồi, đồng nhất, đẳng hướng liên hệ ứng suất - biến dạng lấy theo (2.19) và điều kiện không bị gián đoạn của môi trường tự động thoả mãn khi biểu thị ứng suất qua chuyển vị.

Tóm lại, khác với cơ hệ chất điểm, trong môi trường liên tục ngoài lực khối và lực quán tính là các lực tác dụng gây chuyển vị, còn phải xét thêm các ứng suất σ_{ij} gây ra các biến dạng ε_{ij} .

Từ nhận xét vừa nêu, có thể sẽ có ích đối với nhận thức khi đưa ra các nhận định tổng quát về mối tương quan giữa cơ học chất điểm và cơ hệ môi trường liên tục như sau:

Khái niệm cơ bản của cơ học chất điểm là chất điểm, các lực tác dụng lên chất điểm gây ra các chuyển vị, đặc trưng của chất điểm là khối lượng;

Khái niệm cơ bản của cơ hệ môi trường liên tục là mặt cắt phân tố, các ứng suất gây ra các biến dạng, các đặc trưng của mặt cắt phân tố là các độ cứng biến dạng tương ứng với các ứng suất. Các độ cứng này xác định tùy theo tính chất vật liệu môi trường. Trong cơ hệ môi trường liên tục còn có lực khối và lực quán tính gây chuyển vị giống như trong cơ học chất điểm. Do đó, có thể tóm tắt mối tương quan vừa nêu dưới dạng:

<i>Chất điểm</i>	⇔	<i>Mặt cắt phân tố</i>	
<i>Lực</i>	⇔	<i>Lực</i>	
			<i>Các ứng suất</i>
		<i>Chuyển vị</i>	⇔ <i>Chuyển vị</i>
			<i>Biến dạng</i>
		<i>Khối lượng</i>	⇔ <i>Khối lượng</i>
			<i>Các độ cứng biến dạng</i>

Kí hiệu ⇔ chỉ sự tương đương giữa các khái niệm. Với cách hiểu này cũng dễ dàng xây dựng phiếm hàm lượng cưỡng bức tương tự như (2.14) đối với cơ hệ môi trường liên tục bất kỳ được trình bày sau đây.

Trước tiên, ta dùng hệ so sánh là hệ chất điểm có cùng khối lượng, cùng chịu tác dụng lực ngoài và hoàn toàn tự do. Đối với môi trường liên tục cần xét thêm ứng suất và biến dạng nên lượng cưỡng bức Z của hệ viết tương tự (2.14) như sau:

$$\begin{aligned}
 Z_{\dots} &= Z_1 + Z_2 \rightarrow \text{Min} \\
 Z_1 &= \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad , \quad Z_2 = \int_V (\rho \ddot{u}_i u_i + b_i u_i - \rho \ddot{u}_{0i} u_i) dF
 \end{aligned}
 \tag{2.20}$$

Trong (2.20) V là thể tích vật thể, ρ là khối lượng đơn vị. Lực quán tính là lực cản nên trong (2.20) mang dấu cộng. Lượng cưỡng bức $Z1$ xét ứng suất của môi trường liên tục cần tính, hệ chất điểm so sánh không có ứng suất. Lượng cưỡng bức $Z2$ xét lực khối và lực quán tính của môi trường liên tục, lực quán tính của hệ chất điểm so sánh. Các lực này đều gây chuyển vị u .

Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, trong (2.20) cần xem các biến dạng ε_{ij} là độc lập đối với các ứng suất σ_{ij} và các chuyển vị u_i là độc lập đối với lực tác dụng (ở đây là lực khối và lực quán tính) và độc lập đối với nhau. Điều kiện cực tiểu của (2.20) là

$$\frac{\partial Z1}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial Z2}{\partial u_i} = 0 \quad (2.21.a)$$

Nếu biến dạng ε_{ij} biểu thị qua chuyển vị (công thức (2.17)) thì điều kiện cực tiểu của (2.20) được viết như sau:

$$\frac{\partial Z1}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial u_i} + \frac{\partial Z2}{\partial u_i} = 0 \quad (2.21.b)$$

Từ điều kiện (2.21.a) nhận được

$$\sigma_{ij,j} + b_i + \rho \ddot{u}_i - \rho \ddot{u}_{0i} = 0 \quad (2.22)$$

Phương trình (2.22) là phương trình vi phân cân bằng của cơ hệ môi trường liên tục dưới dạng ứng suất.

Nếu tại điểm đang xét không có lực ngoài tác dụng thì $\rho \ddot{u}_{0y}$ bị triệt tiêu, phương trình (2.22) là phương trình cân bằng động lực học thường gặp của cơ hệ môi trường liên tục. Trường hợp bài toán tĩnh, $\rho \ddot{u}_i$ cũng bằng không, phương trình (2.22) khi đó trùng với (2.15).

Dễ dàng nhận được phương trình vi phân cân bằng dưới dạng chuyển vị bằng cách đưa liên hệ ứng suất - biến dạng vào phương trình (2.22) hoặc vào phiếm hàm (2.20). Trong mục (2.5) dưới đây sẽ trở lại vấn đề này.

Cần nêu nhận xét rằng biểu thức (2.20) cho phép so sánh cơ hệ môi trường liên tục với cơ hệ chất điểm hoàn toàn tự do khi hai hệ cùng chịu lực

ngoài như nhau. Trong (2.20) không chứa các thông số tính chất vật liệu của môi trường nên nó đúng với môi trường bất kỳ.

Xét các trường hợp khác của phiếm hàm lượng cưỡng bức (2.20):

- Trường hợp không dùng hệ so sánh thì phải đưa lực ngoài p_i vào (2.20). Lực p_i thường tác dụng lên bề mặt Ω của vật nên ta viết

$$Z = \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + \rho \ddot{u}_i u_i - b_i u_i) dv - \int_{\Omega} p_i u_i d\Omega \rightarrow Min \quad (2.23)$$

- Có thể dùng hệ so sánh cũng là cơ hệ môi trường liên tục có liên kết bất kỳ với điều kiện hai hệ cùng chịu lực ngoài giống nhau:

$$Z = \int_V [(\sigma_{ij} - \sigma_{0ij}) \varepsilon_{ij} + (\rho \ddot{u}_i - \rho_0 \ddot{u}_{0i}) u_i - (b_i - b_{0i}) u_i] dv \rightarrow Min \quad (2.24)$$

Giống như đã trình bày ở ví dụ 3, thực chất của phương pháp nguyên lý cực trị Gauss là dùng nội lực của hệ so sánh tác dụng lên hệ cần tìm.

- Đối với bài toán tĩnh, lực quán tính triệt tiêu, khi không xét lực khối, biểu thức (2.24) có dạng:

$$Z = \int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{0ij}) \varepsilon_{ij} dv \rightarrow Min \quad (2.25)$$

- Đối với bài toán tĩnh, không xét lực khối, không dùng hệ so sánh, từ (2.23) ta có:

$$Z = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv - \int_{\Omega} p_i u_i d\Omega \rightarrow Min \quad (2.26)$$

Các chuyển vị u_i và biến dạng ε_{ij} (xác định theo (2.17)) trong các phiếm hàm (2.20, 2.23, 2.24, 2.25) và (2.26) là những đại lượng độc lập đối với lực tác dụng và ứng suất và phải thoả mãn các điều kiện liên kết nếu có. Chuyển động thực của cơ hệ môi trường liên tục xảy ra khi cực tiểu các phiếm hàm lượng cưỡng bức vừa nêu theo điều kiện (2.21) nếu không có các điều kiện liên kết nào khác.

Đối với môi trường đàn hồi, quan hệ ứng suất - biến dạng xác định theo (2.19), ta có thể viết lượng cưỡng bức dưới dạng bình phương tối thiểu như nhận xét đã nêu ở ví dụ 3:

$$Z = \int_V \frac{1}{2G} (\sigma_{ij} - \sigma_{0ij})^2 dv + 2 \int_V (f_{mi} - f_{0mi}) u_i dv \rightarrow Min \quad (2.27a)$$

$$\text{hoặc} \quad Z = \int_V 2G(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{0ij})^2 dv + 2 \int_V m_i (\ddot{u}_i - \ddot{u}_{0i}) u_i dv \rightarrow Min$$

Tương tự, khi không dùng hệ so sánh thì phải xét lực ngoài, có thể viết lại (2.26) như dưới đây

$$Z = \int_V \frac{1}{2G} (\sigma_{ij})^2 dv + 2 \int_V f_{mi} u_i dv - 2 \int_{\Omega} p_i u_i d\Omega \rightarrow Min \quad (2.27b)$$

$$\text{hoặc} \quad Z = \int_V 2G(\varepsilon_{ij})^2 dv + 2 \int_V (m_i \ddot{u}_i) u_i dv - 2 \int_{\Omega} p_i u_i d\Omega \rightarrow Min$$

Trong (2.27) $f_{mi} = m_i \ddot{u}_i$ và $f_{0mi} = m_{0i} \ddot{u}_{0i}$ là lực quán tính của hệ cần tính và hệ so sánh, liên hệ giữa ứng suất và biến dạng xác định theo biểu thức (2.19). Trong (2.27), cần xem các biến dạng ε_{ij} là các đại lượng biến phân độc lập đối với các ứng suất σ_{ij} , các chuyển vị u_i là độc lập đối với lực tác dụng p và lực quán tính.

Tích phân thứ nhất trong (2.27) liên quan đến ứng suất đàn hồi có trọng số là $2G$, Trở lên trình bày các phiếm hàm lượng cưỡng bức, đối với cơ hệ chất điểm là các biểu thức (2.14), đối với môi trường liên tục là biểu thức (2.20) và các trường hợp khác của nó là các biểu thức (2.23), (2.24), (2.25), (2.26) và (2.27). Trong các phiếm hàm này cần xem các biến dạng ε_{ij} xác định theo (2.17) và các chuyển vị u_i là các đại lượng không biết độc lập đối với ứng suất và lực tác dụng, thỏa mãn các điều kiện liên kết nếu có và các điều kiện không bị gián đoạn (riêng đối với môi trường liên tục). Cực tiểu các phiếm hàm này theo điều kiện (2.21) cho ta chuyển vị thực của cơ hệ cần tính.

Phương pháp nguyên lí cực trị Gauss là phương pháp mới trong cơ học môi trường liên tục.

2.4. Cơ học kết cấu

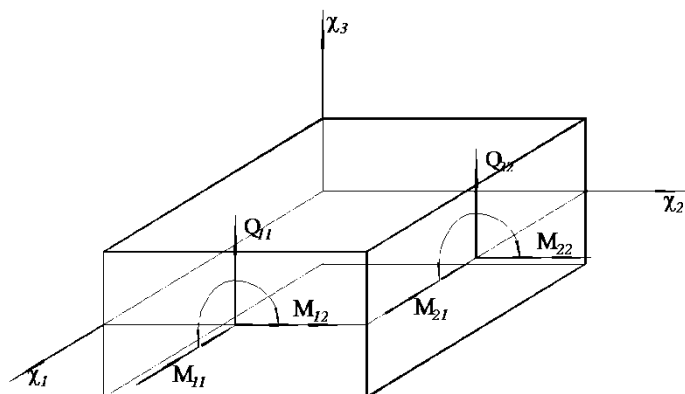
Môn sức bền vật liệu và cơ học kết cấu nghiên cứu trạng thái ứng suất biến dạng của dầm, thanh, tấm, khung, dàn v.v... là những kết cấu có một hoặc hai kích thước nhỏ thua nhiều lần so với các kích thước còn lại. Trong trường hợp này để đơn giản nhưng kết quả tính vẫn bảo đảm độ chính xác đủ dùng trong thực tế (kiểm tra bằng thí nghiệm), có thể dùng mặt cắt kết cấu thay cho mặt cắt phân tố và các ứng suất tác dụng lên mặt cắt được quy về thành các nội lực tác dụng lên mặt trung bình (đường trung bình đối với dầm) như lực dọc N , momen uốn M , lực cắt Q v.v... Muốn vậy cần đưa vào các giả thiết sau đây:

- Khi chịu lực dọc trục, ứng suất pháp được xem là phân bố đều trên tiết diện.
- Khi chịu lực ngang (tác dụng thẳng góc với mặt trung bình) có các giả thiết sau đây:

Mặt trung bình của tấm và trục trung bình của dầm không có nội lực và do đó không bị biến dạng.

Giả thiết tiết diện phẳng: tiết diện sau khi biến dạng vẫn phẳng.

Không xét ứng suất nén giữa các lớp theo chiều cao tiết diện, nghĩa là xem các lớp song song với mặt trung bình (tấm) làm việc ở trạng thái ứng suất phẳng.



Hình 2.4. Nội lực của phân tố tấm

Sử dụng các giả thiết trên, các momen uốn và xoắn và lực cắt tác dụng lên mặt cắt kết cấu xác định theo các biểu thức dưới đây (hình 2.4):

$$M_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} x_3 dx_3, \quad M_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} x_3 dx_3, \quad M_{12} = M_{21} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} x_3 dx_3$$

$$Q_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} dx_3, \quad Q_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23} dx_3 \quad (2.28)$$

ở đây h là chiều cao tiết diện.

Để có thể áp dụng phương pháp nguyên lý cực trị Gauss cần biết các ‘biến dạng’ của tiết diện do momen uốn gây ra. Với các giả thiết nêu trên chỉ cần biết chuyển vị thẳng đứng w của trục hoặc mặt trung bình của kết cấu (còn gọi là đường độ võng, đường đàn hồi) thì trong trường hợp uốn thuần túy có thể tính được các chuyển vị theo các phương còn lại và dùng các phương trình (2.17) để xác định các biến dạng. Kết quả cho thấy các biến dạng trong mặt phẳng tấm (hoặc thớ dầm) phân bố tuyến tính theo chiều cao và tỉ lệ với độ cong χ_{ij} của mặt võng ($i=1,2; j=1,2$):

$$\varepsilon_{ij} = x_3 \chi_{ij} ;$$

$$\chi_{11} = -w_{,11}, \quad \chi_{22} = -w_{,22}, \quad \chi_{12} = -w_{,12}. \quad (2.29)$$

Dấu trừ trong công thức xác định độ cong (2.29) là do xem chuyển vị w có chiều dương hướng xuống dưới và dấu nội lực như trên hình 2.4. Như vậy, độ cong χ_{ij} của các lớp song song với mặt trung bình là giống nhau và đó là ‘biến dạng’ do momen M_{ij} gây ra. Biết được biến dạng ε_{ij} xác định theo (2.29) sẽ tính được momen M_{ij} theo (2.28). Liên hệ giữa momen uốn và ‘biến dạng uốn’ của tiết diện như sau:

$$M_{11} = D(\chi_{11} + \nu\chi_{22}), \quad M_{22} = D(\chi_{22} + \nu\chi_{11}), \quad M_{12} = D(1-\nu)\chi_{12} \quad (2.30)$$

ở đây D là độ cứng uốn

$$\text{đối với dầm } D = EJ = \frac{Eh^3}{12}, \quad \text{đối với tấm } D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

và $D(1 - \nu)$ được gọi là độ cứng xoắn (độ cứng của biến dạng xoắn).

(ở đây cần chú ý rằng do có liên kết gối tựa nên mặt trung bình có thể bị biến dạng trong mặt phẳng của nó, giả thiết mặt trung bình là mặt trung hoà nêu trên không được thoả mãn. Trong trường hợp này độ võng phải là bé so với chiều cao dầm hoặc chiều dày tấm để có thể bỏ qua ứng suất tác dụng trong mặt trung bình).

Trong trường hợp có lực cắt Q_{ii} thì chúng được xác định từ điều kiện cân bằng phân tố, ta có:

$$Q_{11} = \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2}, \quad Q_{22} = \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_1}$$

$$\text{hay } Q_{11} = D [(\chi_{11})_{,1} + (\chi_{12})_{,2}], \quad Q_{22} = D [(\chi_{12})_{,1} + (\chi_{22})_{,2}] \quad (2.31)$$

Từ công thức (2.28) có thể thấy độ cứng chịu cắt của tiết diện là Gh và biến dạng trượt γ_{11} và γ_{22} tương ứng với lực cắt sẽ bằng góc xoay của đường đàn hồi:

$$\gamma_{11} = w_{,1} = \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad \gamma_{22} = w_{,2} = \frac{\partial w}{\partial x_2} \quad (2.32)$$

Trong lý thuyết kết cấu chịu uốn nêu trên, độ võng của kết cấu chỉ do mo-men uốn gây ra, không xét biến dạng trượt do lực cắt gây ra.

Đối với các lực N_{ij} tác dụng lên mặt trung bình của tiết diện thì các biến dạng ϵ_{ij} ($i=1,2; j=1,2$) vẫn xác định theo (2.17). Độ cứng của tiết diện chịu nén kéo sẽ là Eh .

Trong các công thức vừa nêu lấy $i=1, j=1$ đối với bài toán một chiều (thanh, dầm), chiều rộng dầm bằng đơn vị.

Do sử dụng momen uốn của tiết diện nên phải đưa thêm các liên kết về xoay để mô tả các điều kiện biên của nó: liên kết khớp cho phép tiết diện xoay tự do, momen bằng không; liên kết ngàm không cho tiết diện xoay, momen khác không.

Sau khi đã biết ‘các biến dạng’ tương ứng với các nội lực của tiết diện (momen uốn, lực cắt, lực dọc trục v.v..) và độ cứng của chúng thì dễ dàng xây dựng các bài toán cơ học kết cấu theo phương pháp nguyên lí cực trị Gauss.

Ta có thể viết một cách tổng quát lượng cường bức Z của bài toán cơ học kết cấu dưới dạng tương tự như (2.25) (bài toán tĩnh):

$$Z = \int_V [(M_{ij} - M_{0ij})\chi_{ij} + (Q_{ii} - Q_{0ii})\gamma_{ii} + (N_{ij} - N_{0ij})\varepsilon_{ij}] dv \rightarrow Min \quad (2.33a)$$

hoặc dưới dạng bình phương tối thiểu

$$Z = \int_V \frac{1}{Docung} (\text{Nội lực hệ cần tính} - \text{Nội lực hệ so sánh})^2 dv \rightarrow Min \quad (2.33b)$$

và trong trường hợp không dùng hệ so sánh ta có

$$Z = \int_V \frac{1}{Docung} (\text{Nội lực hệ cần tính})^2 dv - 2 \int_{\Omega} p_i w_i d\Omega \rightarrow Min \quad (2.33c)$$

ở đây V là chiều dài dầm hoặc diện tích tấm, Ω là chiều dài hoặc diện tích phạm vi đặt lực. Trong (2.33) cần xem các độ cong χ_{ij} là các đại lượng độc lập đối với nội lực momen uốn M_{ij} , các biến dạng trượt γ_{11} và γ_{22} là các đại lượng độc lập đối với lực cắt Q_{11} và Q_{22} , các biến dạng trong mặt trung bình ε_{ij} là các đại lượng độc lập đối với N_{ij} và đều là các đại lượng biến phân của bài toán. Điều đó chỉ ra rằng cực tiểu của lượng cường bức Z , biểu thức (2.33), chỉ có thể tìm từ điều kiện:

$$\frac{\partial Z}{\partial \chi_{ij}} \frac{\partial \chi_{ij}}{\partial W} + \frac{\partial Z}{\partial \gamma_{ii}} \frac{\partial \gamma_{ii}}{\partial W} + \frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial W} + \frac{\partial Z}{\partial W} = 0 \quad (2.34)$$

Bởi vì các biến dạng uốn, biến dạng cắt v.v... là hàm của độ võng và độ võng là hàm của tọa độ nên điều kiện (2.34) được tính bằng phép tính biến phân và sẽ cho ta phương trình cân bằng tĩnh của kết cấu (xem mục 2.5 dưới đây).

Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss với biểu thức lượng cường bức Z viết theo (2.33) và điều kiện cực tiểu (2.34) là phương pháp mới, tổng quát trong cơ học kết cấu.

2.5 Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss và các phương trình cân bằng của cơ hệ

Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, nếu như biết được các lực và nội lực của cơ hệ và các chuyển vị và biến dạng do chúng gây ra thì có thể viết được lượng cường bức Z của hệ. Dùng phép tính biến phân với đại lượng biến phân là các chuyển vị độc lập đối với lực tác dụng và biến dạng độc lập với ứng suất sẽ nhận được phương trình vi phân cân bằng của hệ (phương trình Ô-le (Euler) của phiếm hàm Z). Sau đây trình bày các ví dụ sử dụng phương pháp vừa nêu để tìm phương trình cân bằng.

2.5.1. Phương trình cân bằng tĩnh đối với môi trường đàn hồi, đồng nhất, đẳng hướng

Ba phương trình vi phân cân bằng của cơ hệ dưới dạng ứng suất là phương trình (2.22). Thế các ứng suất σ_{ij} xác định theo (2.19) vào (2.22) sẽ có các phương trình vi phân cân bằng của cơ hệ đàn hồi đồng nhất đẳng hướng dưới dạng chuyển vị. Ở đây trình bày cách tính trực tiếp để nhận được các phương trình đó (trường hợp bài toán tĩnh).

Liên hệ biến dạng - chuyển vị (2.17) và ứng suất - biến dạng (2.19) được viết lại trong hệ tọa độ (x,y,z) dưới dạng thường dùng với u, v và w là các chuyển vị tương ứng theo các chiều (x,y,z) như sau:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\sigma_x = 2G\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right), \quad \sigma_y = 2G\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right), \quad \sigma_z = 2G\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}, \quad \tau_{xz} = G \gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz} \quad (2.34)$$

ở đây $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ - biến dạng thể tích của phân tử.

Ta viết lượng cường bức Z theo (2.25) cho mỗi ứng suất và lực khối b :

$$Z1 = \int_V 2G\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right)\frac{\partial u}{\partial x} dV, \quad Z2 = \int_V 2G\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right)\frac{\partial v}{\partial y} dV$$

,

$$Z3 = \int_V 2G\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu}\theta\right)\frac{\partial w}{\partial z} dV, \quad Z4 = \int_V G \gamma_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dV,$$

$$Z5 = \int_V G \gamma_{xz} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) dV, \quad Z6 = \int_V G \gamma_{yz} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) dV$$

$$Z7 = \int_V b_x u dV, \quad Z8 = \int_V b_y v dV, \quad Z9 = \int_V b_z w dV \quad (2.35)$$

Lượng cường bức Z bằng tổng các lượng cường bức thành phần :

$$Z = Z1+Z2+Z3+Z4+Z5+Z6+Z7+Z8+Z9 \quad \rightarrow Min$$

Từ điều kiện cực tiểu (1.21) của phiếm hàm Z viết lại dưới dạng

$$\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial u} + \frac{\partial Z}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial w} + \frac{\partial Z}{\partial w} = 0 \quad (2.36)$$

sẽ nhận được ba phương trình vi phân cân bằng tĩnh. Bởi vì u , v và w là các hàm của tọa độ (x,y,z) , không phải là biến độc lập, nên phép tính (2.36) là phép tính biến phân. Phương trình cân bằng thứ nhất với u là hàm chưa biết nhận được với chú ý rằng

- đại lượng biến phân của Z1 (ứng với σ_x) là ε_x hay $\frac{\partial u}{\partial x}$, như vậy

$$\frac{\partial Z1}{\partial \varepsilon_x} = - \frac{\partial}{\partial x} 2G \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu} \theta \right) = - 2G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \theta \right)$$

- đại lượng biến phân của Z4 (ứng với τ_{xy}) là γ_{xy} có thành phần $\frac{\partial u}{\partial y}$, nên

$$\frac{\partial Z4}{\partial \gamma_{xy}} = - G \frac{\partial}{\partial y} \gamma_{xy} = -G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)$$

- đại lượng biến phân của Z5 (ứng với τ_{xz}) là γ_{xz} có thành phần $\frac{\partial u}{\partial z}$, nên

$$\frac{\partial Z5}{\partial \gamma_{xz}} = -G \frac{\partial}{\partial z} \gamma_{xz} = -G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} \right)$$

- đại lượng biến phân của Z7 là u, nên

$$\frac{\partial Z7}{\partial u} = b_x$$

Tổng cộng

$$\frac{\partial Z1}{\partial u} + \frac{\partial Z4}{\partial u} + \frac{\partial Z5}{\partial u} + \frac{\partial Z7}{\partial u} = 0$$

sau khi rút gọn sẽ là :

$$G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{G}{1-2\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x} \theta \right) + b_x = 0 \quad (2.37)$$

Phương trình cân bằng thứ hai nhận được với v là hàm chưa biết. Trong (2.35) các đại lượng biến phân của v có ở Z2, Z4, Z6 và Z8. Phương trình cân bằng thứ ba nhận được với w là hàm chưa biết. Trong (2.35) các đại lượng biến phân của w có ở Z3, Z5, Z6 và Z9. Bằng cách tính biến phân tương tự sẽ có thêm hai phương trình cân bằng sau:

$$G\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \frac{G}{1-2\nu} \left(\frac{\partial}{\partial y} \theta\right) + b_y = 0 \quad (2.38)$$

$$G\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \frac{G}{1-2\nu} \left(\frac{\partial}{\partial z} \theta\right) + b_z = 0 \quad (2.39)$$

Ba phương trình (2.37), (2.38) và (2.39) là các phương trình vi phân cân bằng của cơ hệ đàn hồi, đồng nhất và đẳng hướng và được gọi là phương trình Navier [4] Dưới dạng tenxơ các phương trình này được viết gọn như sau:

$$G u_{j,kk} + \frac{G}{1-2\nu} u_{k,kj} + b_j = 0 \quad (2.40)$$

2.5.2 Phương trình vi phân của mặt võng của tấm chịu uốn

Xét tấm có chiều dày không đổi. Viết lại các biểu thức (2.30) đối với các nội lực momen uốn và xoắn và (2.31) đối với lực cắt tác dụng lên phân tố tấm trong hệ tọa độ (x,y) ta có :

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$Q_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right), Q_y = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \quad (2.41)$$

Biết được các lực tác dụng lên phân tố thì dễ dàng viết được lượng cường bức Z, thí dụ, dưới dạng bình phương tối thiểu theo (2.33.b) (khi không có ngoại lực):

$$Z1 = \int_{\Omega} D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 d\Omega, \quad Z2 = \int_{\Omega} D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 d\Omega,$$

$$Z3 = 2 \int_{\Omega} D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 d\Omega \quad (2.42)$$

ở đây Ω là diện tích tấm. Lượng cường bức Z bằng tổng các lượng cường bức do mỗi thành phần nội lực momen uốn và xoắn gây ra :

$$Z = Z1 + Z2 + Z3 \rightarrow Min \quad (2.43)$$

Chú ý rằng trong (2.43) ta chỉ xét nội lực momen, chưa xét tới lực cắt, phân tử không có lực ngoài tác dụng. Hệ số 2 trong Z3 để xét momen xoắn tác dụng bằng nhau lên hai chiều x,y. Các ‘biến dạng’ tương ứng với các nội lực momen xác định theo (2.29) :

$$\chi_{xx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \chi_{yy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \chi_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.44)$$

Các ‘biến dạng’ này cần được xem là độc lập đối với các nội lực momen uốn và xoắn và là các đại lượng biến phân của bài toán. Do đó từ điều kiện cực tiểu (2.36) ta có :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z1}{\partial \chi_{xx}} \frac{\partial \chi_{xx}}{\partial w} &= 2D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 2D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right), \\ \frac{\partial Z2}{\partial \chi_{yy}} \frac{\partial \chi_{yy}}{\partial w} &= 2D \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 2D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right), \\ \frac{\partial Z3}{\partial \chi_{xy}} \frac{\partial \chi_{xy}}{\partial w} &= 4D(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 4D(1-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \quad (2.45) \end{aligned}$$

Tổng cộng các thành phần của (1.45) nhận được phương trình vi phân độ võng của tấm chịu uốn :

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \quad (2.46)$$

Phương trình (2.46) thường được gọi là phương trình Sophie Germain (năm 1811).

Khi xây dựng lượng cường bức Z (biểu thức 2.43) không xét tới lực cắt bởi vì lý thuyết kết cấu chịu uốn trình bày trên không xét biến dạng của lực cắt. Tuy nhiên, trong phạm vi của lý thuyết này, nếu dùng lực cắt xác định theo (2.31) và biến dạng trượt theo (2.32) thì lượng cường bức Z được viết như sau

$$Z = \int_{\Omega} Q_{xx} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) d\Omega + \int_{\Omega} Q_{yy} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) d\Omega \rightarrow Min \quad (2.47)$$

Xem các góc xoay $\frac{\partial w}{\partial x}$ và $\frac{\partial w}{\partial y}$ là các đại lượng biến phân độc lập đối với lực cắt Q_x và Q_y và bằng phép tính biến phân lại nhận được phương trình vi phân (2.46).

Đối với dầm, lượng cường bức viết theo (2.33.a) sẽ là :

$$Z = - \int_l EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (\chi_{xx}) dl - \int_{l_q} qw dl_q \quad (2.48)$$

Trong (2.48) l là chiều dài dầm, $\chi_{xx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ là biến dạng uốn (độ cong) của dầm, l_q là chiều dài đoạn dầm có lực q tác dụng. Phương trình vi phân đường độ võng của dầm:

$$\frac{\partial Z}{\partial \chi_{xx}} \frac{d\chi_{xx}}{dw} + \frac{\partial Z}{\partial w} = EJ \frac{d^4 w}{dx^4} - q = 0 \quad (2.49)$$

CHƯƠNG 3

ỔN ĐỊNH ĐÀN HỒI CỦA THANH CHỊU UỐN DỌC CÓ XÉT ĐẾN BIẾN DẠNG TRƯỢT NGANG

3.1. Lý thuyết dầm có xét biến dạng trượt ngang

Lý thuyết xét biến dạng trượt trong dầm do Timoshenko đưa ra và thường được gọi là lý thuyết dầm Timoshenko. Khi xây dựng lý thuyết này vẫn sử dụng giả thiết tiết diện phẳng của lý thuyết dầm thông thường, tuy nhiên do có biến dạng trượt, trục dầm sẽ xoay đi một góc ν không còn thẳng góc với tiết diện dầm nữa.

Lý thuyết xét biến dạng trượt được dùng phổ biến trong phương pháp phần tử hữu hạn hiện nay là dùng hàm độ võng y và hàm góc xoay θ do momen uốn gây ra là hai hàm chưa biết. Trong trường hợp này biến dạng trượt tại trục trung hòa được xác định như sau, ví dụ như [36].

$$\gamma = \frac{dy}{dx} - \theta \quad (3.1)$$

Từ đó ta có các công thức xác định M và Q

$$\begin{aligned} M &= -EJ \left(\frac{d\theta}{dx} \right) \\ Q &= \frac{GF}{\alpha} \left[-\frac{dy}{dx} + \theta \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

Trong các công thức trên EJ là độ cứng uốn, GF là độ cứng cắt của tiết diện, G là môđun trượt của vật liệu, F là diện tích tiết diện, α là hệ số xét sự phân bố không đều của ứng suất tiếp trên chiều cao tiết diện.

Các tác giả [36] cho rằng khi môđun trượt $G \rightarrow \infty$ thì từ (3.2) suy ra

$$\theta = \frac{dy}{dx} \quad (3.3)$$

nghĩa là trở về lý thuyết dầm không xét biến dạng trượt: Góc xoay của đường độ võng là do mômen gây ra. Theo nghiên cứu sinh lập luận trên không đúng

bởi vì khi thỏa mãn phương trình (3.3) thì từ phương trình (3.2) suy ra lực cắt $Q=0$, dẫn về trường hợp uốn thuần túy của dầm. Vì lý do đó nên lý thuyết xét biến dạng trượt dùng y và θ làm ẩn không hội tụ về lý thuyết dầm thông thường và khi áp dụng vào bài toán tấm, nó cũng không hội tụ về lý thuyết tấm thông thường (lý thuyết tấm Kierchhoff, [33, 36]. Phương hướng chung để khắc phục thiếu sót vừa nêu là bổ sung thêm các nút xét lực cắt Q trong các phần tử dầm hoặc phần tử tấm [33,34, 36] hoặc dùng phần tử có hàm dạng là đa thức bậc thấp (bậc nhất) [39]. Vấn đề tồn tại hiện tượng biến dạng trượt bị khóa, shear locking, vấn đề đang tiếp tục nghiên cứu [40]. Hình ảnh minh họa chung hiện nay về lý thuyết xét biến dạng trượt trong dầm và tấm là như trên.

Khác với các tác giả khác, trong [27, 28] lý thuyết xét biến dạng trượt được xây dựng trên cơ sở hai hàm chưa biết là hàm độ võng y và hàm lực cắt Q . Trong trường hợp này biến dạng trượt xác định theo

$$\gamma = \frac{\alpha Q}{GF} \quad (3.4)$$

α là hệ số xét sự phân bố không đều của ứng suất cắt tại trục dầm.

Góc xoay do momen uốn sinh ra bằng hiệu giữa góc xoay đường độ võng với góc xoay do lực cắt gây ra.

$$\theta = \frac{dy}{dx} - \gamma = \frac{dy}{dx} - \frac{\alpha Q}{GF} \quad (3.5)$$

Momen uốn sẽ bằng

$$M = -EJ \frac{d\theta}{dx} = EJ \left(-\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right) \quad (3.6)$$

Biến dạng uốn χ

$$\chi = -\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \quad (3.7)$$

Dựa trên lý thuyết này ta sẽ xây dựng phương trình cân bằng và các điều kiện biên của dầm như sau. Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss ta viết phiếm hàm lượng cưỡng bức (chuyển động) như sau: (giả sử dầm có lực phân bố đều q).

$$Z = \int_0^l M\chi dx + \int_0^l Q\gamma dx - \int_0^l qy dx \rightarrow \min \quad (3.8)$$

Các hàm độ võng y , hàm biến dạng trượt γ và hàm biến dạng uốn χ là các đại lượng biến phân, nghĩa là điều kiện cần và đủ để hệ ở trạng thái cân bằng là

$$\delta Z = \int_0^l M\delta\chi dx + \int_0^l Q\delta\gamma dx - \int_0^l q\delta y dx = 0$$

Hay

$$\begin{aligned} \delta Z &= \int_0^l M\delta \left[-\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right] dx + \int_0^l Q\delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] dx - \int_0^l q\delta[y] dx \\ &= 0 \quad (3.9) \end{aligned}$$

Trong phương trình tích phân (3.9) hai đại lượng cần tìm là $y(x)$ và $Q(x)$ do đó có thể tách ra thành hai phương trình sau:

$$\int_0^l M\delta \left[-\frac{d^2 y}{dx^2} \right] dx - \int_0^l q\delta[y] dx = 0 \quad (3.10)$$

$$\int_0^l M\delta \left[\frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right] dx + \int_0^l Q\delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] dx = 0 \quad (3.11)$$

Lấy tích phân từng phần phương trình (3.10)

$$\begin{aligned}\int_0^l M \delta \left[-\frac{d^2 y}{dx^2} \right] dx &= - \int_0^l M d \left(\delta \left[\frac{dy}{dx} \right] \right) dx \\ &= -M \delta \left[\frac{dy}{dx} \right] \Big|_0^l + \int_0^l \frac{dM}{dx} \delta \left[\frac{dy}{dx} \right] dx\end{aligned}$$

Tích phân từng phần thành phần cuối của biểu thức trên ta có

$$\int_0^l M \delta \left[-\frac{d^2 y}{dx^2} \right] dx = -M \delta \left[\frac{dy}{dx} \right] \Big|_0^l + \frac{dM}{dx} \delta [y] \Big|_0^l - \int_0^l \frac{d^2 M}{dx^2} \delta [y] dx$$

Phương trình (3.10) sau khi lấy tích phân từng phần có dạng

$$\begin{aligned}-M \delta \left[\frac{dy}{dx} \right] \Big|_0^l + \frac{dM}{dx} \delta [y] \Big|_0^l \\ - \int_0^l \left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q \right) \delta [y] dx = 0\end{aligned}\tag{3.12}$$

Bởi vì các đại lượng $\delta [y]$ và $\delta \left[\frac{dy}{dx} \right]$ là nhỏ và bất kỳ nên từ (3.12) ta có

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + q = 0\tag{3.12a}$$

$$-M \delta \left[\frac{dy}{dx} \right] \Big|_0^l = 0\tag{3.12b}$$

$$\frac{dM}{dx} \delta [y] \Big|_0^l = 0\tag{3.12c}$$

Tích phân từng phần phương trình (3.11):

$$\begin{aligned}\int_0^l M \delta \left[\frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right] dx &= \int_0^l M d \left(\delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] \right) dx \\ &= M \left(\delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] \right) \Big|_0^l - \int_0^l \frac{dM}{dx} \delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] dx\end{aligned}$$

Sau khi lấy tích phân từng phần

$$M \left(\delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] \right) \Big|_0^l + \int_0^l \left(-\frac{dM}{dx} + Q \right) \delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] dx = 0 \quad (3.13)$$

Bởi vì biến phân $\delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right]$ là nhỏ và bất kỳ nên từ (2.13) ta có

$$-\frac{dM}{dx} + Q = 0 \quad (3.13a)$$

$$M \delta \left[\frac{\alpha Q}{GF} \right] \Big|_0^l = 0 \quad (3.13b)$$

Sử dụng công thức (3.6), hai phương trình vi phân cân bằng của dầm (2.12a) và (3.13a) có dạng.

$$EJ \left[\frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{\alpha}{GF} \frac{d^3 Q}{dx^3} \right] = q \quad (3.14a)$$

$$EJ \left[\frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{\alpha}{GF} \frac{d^2 Q}{dx^2} \right] = Q \quad (3.15a)$$

Phương trình (3.14a) và (3.15a) có thể viết lại dưới dạng

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{\alpha h^2}{6} \frac{d^3 Q}{dx^3} = q \quad (3.14b)$$

$$EJ \frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{\alpha h^2}{6} \frac{d^2 Q}{dx^2} = Q \quad (3.15b)$$

Để nhận được các điều kiện biên của dầm thì kết hợp (3.12b) và (3.13b) ta có

$$M \delta \left[-\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha Q}{GF} \right] \Big|_0^l = 0 \quad (3.16)$$

Chú ý tới phương trình (3.13a), phương trình (3.12c) viết lại như sau

$$Q \delta[y] \Big|_0^l = 0 \quad (3.17)$$

Tóm lại, lý thuyết xét biến dạng trượt cho ta hai phương trình vi phân (3.14) và (3.15) đối với hai hàm y và Q : phương trình (3.14) là phương trình vi phân cân bằng giữa nội lực và ngoại lực, phương trình (3.15) là phương

trình liên hệ giữa mômen uốn và lực cắt. Các phương trình (3.16) và (3.17) là các điều kiện biên ở hai đầu thanh.

Ta xét điều kiện biên (3.16)

Nếu như tại $x=0$ hoặc $x=l$, góc xoay θ do mômen uốn gây ra có biến phân

$$\delta\theta = \delta \left[-\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha Q}{GF} \right] \Big|_0^l \neq 0 \text{ thì } M|_0^l = 0$$

\rightarrow liên kết khớp (3.18a)

Nếu như góc xoay θ không có biến phân

$$\delta\theta = \delta \left[-\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha Q}{GF} \right] \Big|_0^l = 0 \text{ thì } M|_0^l \text{ bất kỳ} \rightarrow \text{liên kết ngàm (3.18b)}$$

Đối với điều kiện (3.17), nếu như chuyển vị y tại $x=0$ hoặc $x=l$ có biến phân.

$$\delta[y]|_0^l \neq 0 \text{ thì } Q|_0^l = 0,$$

\rightarrow không có gối tựa (3.18c)

Nếu như $\delta[y]|_0^l = 0$ thì $Q|_0^l$ bất kỳ, \rightarrow liên kết gối tựa (3.18d)

Khi không xét biến dạng trượt, $G \rightarrow \infty$ hoặc $h \rightarrow 0$ thì các phương trình (3.14) và (3.15) cũng như các phương trình về điều kiện biên (3.16) và (3.17) hoặc (3.18) đều dẫn về lý thuyết dầm Euler-Bernoulli. Cho nên có thể nói lý thuyết xét biến dạng trượt nêu trên (xem hàm y và hàm Q tại hai hàm ch-a biÕt) là lý thuyết đầy đủ về dầm.

Cuối cùng cần lưu ý rằng khi xét tính liên tục về góc xoay giữa hai đoạn dầm là nói đến tính liên tục của góc xoay do mômen gây ra xác định theo công thức (3.5), không phải liên tục của góc xoay $\frac{dy}{dx}$.

HỖ sè α

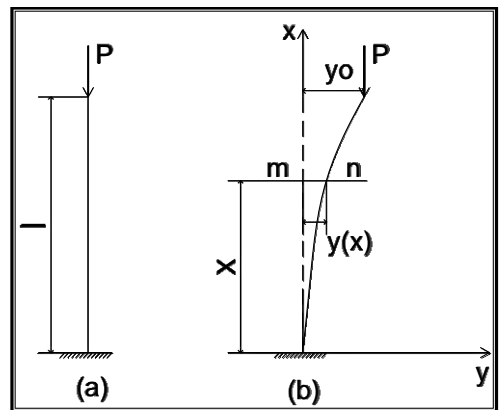
HỖ sè α lự hỖ sè tĕp trung ụng suĕt c³t t¹i trĕc dĕm.

Sèi vĕi tiĕt diĕn ch[÷] nhĕt $\alpha=1.5$,   i vĕi tiĕt diĕn tr n $\alpha=4/3$. Tuy nhiên khi xĕt biĕn d¹ng tr-ĭt c, c tr  tr^an thay đổi t--ng ụng bằng 1.2 v  1.11 [31, 60]. Trong t nh to, n sau này t, c gi  d ng hỖ sè $\alpha=1.2$   i vĕi tiĕt diĕn ch[÷] nhĕt. Ph--ng ph, p chung    x, c   nh hỖ sè α lự c n bằng t ng theo chiều cao dĕm c ng c n ụng suĕt c³t th c hiĕn tr^an biĕn d¹ng tr-ĭt t--ng ụng vĕi c ng l c c³t th c hiĕn tr^an biĕn d¹ng tr-ĭt t¹i trĕc dĕm, vĕn    n y      ic nhi u t, c gi  nghiên cứu [31, 33].

3.2. B i to, n  n   nh c n thanh ch u n n c  xĕt biĕn d¹ng tr-ĭt [15, 18]

Ph--ng ph, p chung      nh gi, s  mĕt  n   nh c n c- hỖ lự   -a hỖ ra kh i v  tr y c n bằng ban đầu c n n  v  kiểm tra xem nó c  t n t¹i tr¹ng th, i c n bằng m i không. N u nh- t m   ic tr¹ng th, i c n bằng m i kh, c vĕi tr¹ng th, i c n bằng ban đầu th  c  th  xem hỖ lự mĕt  n   nh v  l c gi  cho hỖ   tr¹ng th, i c n bằng m i n y g i lự l c t i h¹n, tr- ng h p ng- c l¹i hỖ lự  n   nh.

Số trục giằng trục nháy búp mụ
kháng mét Òi tÝnh tăng qu,t
cĩa ph--ng ph,p, ta xĐt thanh
chĐu nĐn mét ÒÇu ngum mét ÒÇu
tù do, chĐu lúc nh- (h×nh
3.1a). Thanh cũ trÝng th,i
cÇn b»ng ban ÒÇu lụ trÝng
th,i chĐu nĐn th½ng
Òng.étrÝng th,i cÇn b»ng nuy
thanh bĐ co ng³n l'i mét Ò¹n
lụ $\Delta = Pl/EF$, EF lụ Òé cøng kĐo
nĐn cũa thanh, E lụ m« Òun
Òm hải cũa vÈt liÖu, l lụ
chiÖu dui ban ÒÇu cũa thanh, P
lụ lúc t,c dõng.



H×nh 3.1. Thanh ngum
- Tú do

Số xĐt trÝng th,i cÇn b»ng nuy cũa thanh cũ æn
ÒĐnh hay kháng ta cho mét Òióm bÈt kú trªn thanh
lÖch ra khái vĐ trÝ cÇn b»ng ban ÒÇu mét Ò¹n y_0 nuy
Òã. Khi Òã thanh sĩ bĐ chuyón vĐ theo Ò-êng Òm hải
 $y(x)$ vụ lúc P ngoi t,c dõng nĐn cũn gÇy ra m«men
uèn $M_p = P(y-y_0)$. BÇy giê trong thanh cũ nái lúc
m«men uèn M vụ lúc cũt Q kh,c víi trÝng th,i ban ÒÇu
chØ chĐu nĐn (h×nh 3.1b) vụ momen ngo'i lúc M_p . Sé
co ng³n Δ cũa thanh th-êng lụ nhá so víi chiÖu dui
thanh cho nªn ÒÓ Ò-ên giġn ta xem chiÖu dui thanh sau
biÖn d'ng vÈn b»ng l .

Biến dạng uốn của thanh χ xác định theo (3.7), biến dạng trượt γ xác định theo (3.4). Lượng biến dạng theo phương pháp nguyên lý cực tiểu Gauss của bài toán này viết như sau:

$$Z = \int_l (M - M_p) \chi dx + \int_l Q \gamma dx \rightarrow \min \quad (3.19)$$

Chú ý momen nội lực và momen ngoại lực luôn khác dấu nhau. Trong (3.19), χ và γ là hai biến độc lập, do đó điều kiện cần và đủ để thành Z trở thành cực tiểu còn bằng lấy

$$\delta Z = \int_l (M - M_p) \delta \chi dx + \int_l Q \delta \gamma dx = 0 \quad (3.20)$$

$$\text{Hay} \quad \delta Z = \int_l (M - M_p) \delta \left(-\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right) dx + \int_l Q \delta \left(\frac{\alpha Q}{GF} \right) dx = 0$$

(3.20a)

Sử dụng phương pháp tính biến phân để với phương trình (3.20a) nhận được hai phương trình còn bằng sau

$$-\frac{d^2(M - M_p)}{dx^2} = 0 \quad (3.21a)$$

$$\left(-\frac{d(M - M_p)}{dx} + Q \right) \frac{\alpha}{GF} = 0 \quad (3.21b)$$

Thay M xác định theo (3.6) vào hai phương trình (3.21) ta có

$$EJ \left(\frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{\alpha}{GF} \frac{d^3 Q}{dx^3} \right) + P \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (3.22a)$$

$$EJ \left(\frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{\alpha}{GF} \frac{d^2 Q}{dx^2} \right) + P \frac{dy}{dx} + Q = 0 \quad (3.22b)$$

Hai phương trình (3.22) là hai phương trình vi phân có biên dạng của thanh chịu uốn đặc biệt lúc P và E là các thanh có biến dạng tr-ít. Sẽ là hai phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất (không có vế phải) mà phương pháp giải cũng với các điều kiện biên là hai các phương trình biên dạng ch-ng 1.

D-ới các phương trình biên dạng phương pháp chuyển vế c-ìng bậc theo [18] giải hệ phương trình (3.22).

3.3. Phương pháp chuyển vế c-ìng bậc [18]

Phương pháp chuyển vế c-ìng bậc nhằm phân phương trình (3.22a) là phương trình phân có biên dạng giải nếu lúc vụ ngo-ii lúc v-ò phương trình phân dạng v-ò phải bằng các ch cho mét điểm nào đó trong thanh, ví dụ điểm $x=x_1$, mét chuyển vế y_0 :

$$g = y_{x=x_1} - y_0 = 0 \quad (3.23)$$

S-a bài toán tìm cực trị của (3.19) với điều kiện ràng buộc (3.23) v-ò bài toán cực trị không ràng buộc bằng các ch x và y dùng phi-õm hàm mẽ r-éng Lagrange F nh-sau:

$$F = Z + \lambda g \rightarrow \min$$

$$F = \int_l (M - M_p) \chi dx + \int_l Q \gamma dx + \lambda (y_{x=x_1} - y_0) \rightarrow \min \quad (3.24)$$

Trong đó λ là thừa số Lagrange vụ cùng là biến của bài toán. Để điều kiện

$$\delta F = \int_l (M - M_p) \delta \chi dx + \int_l Q \delta \gamma dx + \delta(\lambda g) = 0$$

nh-ên các phương trình sau:

$$EJ \left(\frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{\alpha}{GF} \frac{d^3 Q}{dx^3} \right) + P \frac{d^2 y}{dx^2} = \begin{cases} -\lambda & \text{khi } x = x_1 \\ 0 & \text{khi } x \neq x_1 \end{cases} \quad (3.25a)$$

$$EJ \left(\frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{\alpha}{GF} \frac{d^2 Q}{dx^2} \right) + P \frac{dy}{dx} + Q = 0 \quad (3.25b)$$

cũng với phương trình (3.23).

Phương trình (3.25a) là phương trình cả vế phải. Số nã trẻ thuận phương trình uên đặc (3.22a) của thanh

$$\lambda = 0 \quad (3.26)$$

Vô met to, n hác, phương trình (3.26) là phương trình đặc thực x, c phân c, c riêng của hồ (3.22) bởi v× nghiệm của nã cùng nghiệm của (3.22). Vô c- hác, λ cả thø nguy^an lự lúc. Sã lự lúc gi÷ ®Ó cho thanh cả chuyển vP y₀ t¹i ®iôm x=x₁. Lúc gi÷ phải b»ng kh«ng, suy ra phương trình (3.26). Riêng của (3.22) phô thúc vmo th«ng sè P, suy ra λ cùng lự hụm của P. Cho n^an gi¶i phương trình (3.26) theo P, sẽ nhÿn ®-íc c, c lúc tii h¹n của thanh bP uên đặc.

3.4. X, c phân lúc tii h¹n của thanh chĐu nĐn cả c, c ®iÔu kiÔn bi^an kh, c nhau.

Nh- ®· phương trình buy ã tr^an, bụi to, n æn phân của thanh chĐu nĐn bởi lúc đặc trôc P met ã ®Çu thanh đến vô t×m cùc trP của (3.19), viôt l¹i d-íi ®Çy.

$$Z = \int_l (M - M_p) \chi dx + \int_l Q \gamma dx \rightarrow \min \quad (3.27)$$

$$M_p = P(y - y_0) \quad (3.28)$$

y_0 lự chuyển vP cña \mathbb{R} thành cã lúc P. NÕu \mathbb{R} thành cã li^an kÕt cè \mathbb{R} nh th \times y_0 b»ng kh«ng. C,c \mathbb{R} i l-ìng M, χ vµ γ vµ γ vµ \mathbb{R} nh theo c,c biÓu thøc (3.5), (3.6) vµ (3.7). Cã hai ph--ng ph,p chung gi¶i bµi to,n (3.27): gi¶i c,c ph--ng tr×nh vi ph©n c©n b»ng (c,c ph--ng tr×nh Euler) cña phiÕm hµm hoÆc gi¶i trùc tiÕp tr^an phiÕm hµm (3.27). Ph--ng ph,p gi¶i trùc tiÕp cã -u ®iÓm ẽ chç s¸ d¸ng ®-íc c,c ph--ng ph,p cña quy ho¹ch to,n. Khi gi¶i trùc tiÕp th \times cÇn xÊp x¸ hai hµm y vµ Q theo d'ng hµm l-ìng gi,c hoÆc d'ng hµm \mathbb{R} a thøc. Bµi to,n (3.27) kh«ng cßn lự bµi to,n biÕn ph©n n÷a mµ trë thµnh bµi to,n tòi -u th«ng sè.

S¸ gi¶i bµi to,n æn \mathbb{R} nh uèn d¸c cña thanh ta s¸ d¸ng ph--ng ph,p chuyển vP c-ìng b¸c b»ng c,ch \mathbb{R} -a th^am rµng buéc (3.23), viÕt l'i d-íi \mathbb{R} y

$$g = y_{x=x_1} - y_0 = 0 \quad (3.29)$$

T¸m l'i, bµi to,n æn \mathbb{R} nh cña thanh d¸n v¸ t×m cùc trP cña (3.27) víi c,c \mathbb{R} i l-ìng biÕn ph©n lự y , χ vµ γ vµ rµng buéc (3.29). C,c hµm xÊp x¸ cña y vµ Q ph¶i th¸a m·n c,c ®iÒu kiÕn bi^an ẽ hai \mathbb{R} thành (c,c ®iÒu kiÕn (3.18)). Tr-êng hîp c,c hµm y vµ Q ch-a th¸a m·n mét trong c,c ®iÒu kiÕn (3.18) th \times cã th¸ \mathbb{R} -a th^am ®iÒu kiÕn ®¸ vµo rµng buéc. Nh÷ng kÕt qu¶ nghi^an c¸u ®èi víi c,c thanh cã li^an kÕt kh,c nhau ®-íc tr×nh bµy sau \mathbb{R} y.

3.5.C,c vÝ d¸ p d¸ng

VÝ d¸ 1: Thanh \mathbb{R} thành \mathbb{R} ngµm \mathbb{R} thành tù do

Hàm Q là văng y và hàm lúc c³at Q viết theo d¹ng (a) thøc b⁶c 6 sau

$$\left. \begin{aligned} y &= a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 \\ Q &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + b_5x^5 + b_6x^6 \end{aligned} \right\} \text{(a) } c, c \text{ h\ddot{o} s\grave{e}}$$

$a_i, (i=1:6)$ và $b_i, (i=0:6)$ là c, c ãn c³a b⁶i to³n. Theo c, c bi⁶u thøc (3.4)-(3.7) t³nh bi⁶õn d¹ng tr-⁶it γ , g³ac xoay do momen θ , n\^e\^i lúc M và bi⁶õn d¹ng u\^e\^n χ . Momen do lúc d³ac tr⁶oc P g³oy ra t³nh theo (3.28) v⁶i y_0 là văng ã c³u tù do c³a thanh. y_0 t³nh ã-⁶ic b⁶ng c, ch thay $x=1$ vào (a), theo ng³n ng⁶ l\^e\^p tr³xnh MATLAB viết nh- sau

$$y_0 = \text{subs}(y, x, l) \text{ (b)}$$

Bi⁶u thøc $\text{subs}(y, x, l)$ n³ãi r⁶ng: thay trong hàm $y(x)$ t³a ã x b⁶ng l .

Hàm y th³a m³n ãi⁶u ki⁶õn chuy⁶õn v⁶ t³i ng⁶m ($x=0$) b⁶ng kh³ng, ta c³õn ph³õi th³a m ba ãi⁶u ki⁶õn bi³n là g³ac xoay θ x, c ã⁶nh theo (3.5) t³i ng⁶m ($x=0$) b⁶ng kh³ng, momen và lúc c³at t³i ã⁶u tù do c³a thanh ($x=1$) b⁶ng kh³ng. Ngo³i ra, t³i ã⁶u tù do c³a thanh ($x=1$) ta ã⁶t chuy⁶õn v⁶ c-⁶ing b⁶c y_0 . Viết c, c ãi⁶u ki⁶õn tr³an nh- sau

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= \text{subs}(\theta, x, 0) = 0 \\ g_2 &= \text{subs}(\chi, x, l) = 0 \\ g_3 &= \text{subs}(Q, x, l) = 0 \\ g_4 &= \text{subs}(y, x, l) - y_0 = 0 \end{aligned} \right\} \text{(c)}$$

Các điều kiện (d1) cũng với 4 thỏa sẽ Lagrange $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ của chúng ta viết gần lại như sau

$$Z_1 = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 + \lambda_4 g_4 \quad (d)$$

Chúng ta viết điều kiện cực tiểu của phiếm hàm Lagrange của bài toán như sau

$$\delta F = \int_l (M - M_p) \delta \chi dx + \int_l Q \delta(\gamma) dx + \delta(Z_1) = 0 \quad (e)$$

Đến đây bài toán lựa chọn hệ số a_i, b_i với 4 thỏa sẽ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ (tương ứng 17 điều kiện) ta viết véc-tơ $v(i), i=1, 2, \dots, 17$. Do đây bài toán biến phân (e) trở thành bài toán tối ưu. Ta viết lại điều kiện (e)

$$h_i = \int_l (M - M_p) \frac{\partial \chi}{\partial v(i)} dx + \int_l Q \frac{\partial \gamma}{\partial v(i)} dx + \frac{\partial Z_1}{\partial v(i)} = 0, \dots, (i=1, 2, \dots, 17) \quad (f)$$

Ta nhận được 23 phương trình bậc nhất có 23 ẩn cần giải. Thỏa sẽ λ_4 tương ứng với chuyển vận cùng bậc ta có từ do của thanh lựa chọn với P. Giải phương trình:

$$\lambda_4(P) = 0 \quad (g)$$

sẽ nhận được các lực tại h¹n P của thanh.

Chương trình máy tính ta viết theo ngôn ngữ lập trình Symbolic của Matlab. Một số kết quả trình bày dưới đây.

Trong bài toán này λ_4 đã dùng lựa chọn một tương sẽ, có thể nhận (h1) là chúng ta cần giải điều kiện tối ưu, như sau (lưu ý 5 sẽ là điều kiện). Khi đó sẽ

$h/l=1/1000$ (øng víi khi kh«ng xĐt Òn biÕn d'ng tr-ít), ta cã:

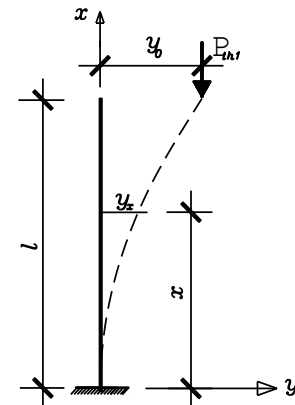
$$\lambda_4(P) = 42614. / l^3 y_0 (.18090 \times 10^{26} e_j^8 - .83246 \times 10^{16} e_j^2 p^6 l^{12} - .63112 \times 10^{18} e_j^3 p^5 l^{10} + .14009 \times 10^{21} e_j^4 p^4 l^8 - .14184 l^6 + .60996 \times 10^{24} e_j^6 p^2 l^4 - .87521 \times 10^{25} e_j^7 p l^2) = 0 \quad (h)$$

Hµm λ_4 lµ Òa thøc bËc 6 Òi víi P. Gi¶i ph-¶ng tr×nh (h) theo P nhËn Ò-íc 6 nghiÖm, trong Òã cã mét nghiÖm ÒÇu tiªn lµ chÝnh x, c nh- sau:

$$P_1 = 2.4674 EJ / l^2$$

Òã lµ c, c trÐ riªng cõa bµi to, n æn Ò¶nh vµ còng lµ lúc tii h'n cõa thanh. C, c Ò-êng Òé vâng cõa thanh (vĐc t- riªng) t-¶ng øng víi lúc tii h'n ÒÇu tiªn (trÐ riªng P_1).

C, c hõ sè a_i phô thuéc vµo P. Do vËy, khi Òã cã c, c trÐ riªng P (c, c lúc tii h'n) ta thay gi, trÐ cõa nã vµo trong c, c th«ng sè $a_i(P)$ ta sÏ nhËn Ò-íc c, c trÐ sè thËt cõa nã vµ Ò-êng Òé vâng cõa thanh Ò-íc x, c Ò¶nh theo y. D'ng cõa tróc vâng (vĐc t- riªng) t-¶ng øng víi lúc tii h'n chÝnh x, c (trÐ riªng chÝnh x, c) ÒÇu tiªn nh-, h×nh 3.2.



H×nh 3.2. §-êng Òé

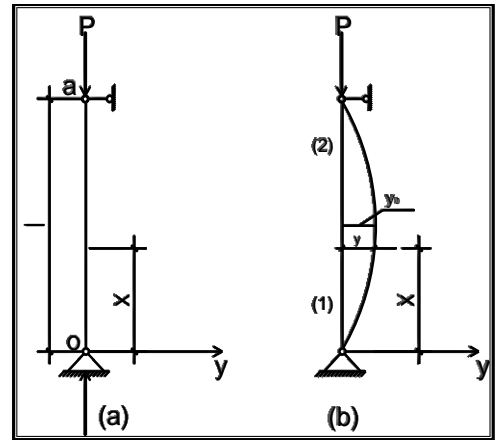
NhËn xĐt: KÕt qu¶ tÝnh to, n lúc tii h'n lu«n phô thuéc vµo tØ sè gi÷a chiều cao tiÕt diÕn vµ chiều

dục thành h/l . Tuy nhiên, với trêng híp nuy bụi to, n thanh mét Ớu ngum- mét Ớu tù do lụ bụi to, n tŭnh Ớnh n^an Ớnh h-êng cĩa biŏn d¹ng tr-ít Ớn lúc tii h¹n lụ kh«ng Ớ,ng kÓ.VŌ mÆt sè hăc th^x khi tØ sè h/l cụng nhá ($h/l \leq 1/10$) trè Ới th^x cã thŌ bá qua Ớnh h-êng cĩa biŏn d¹ng tr-ít nh-ng Ớ Ớy dđng lý thuyŏt Ớy Ớñ vŌ dÇm ỚÓ tÝnh to, n mét c, ch dđ dụng do Ớã n^an xĐt biŏn d¹ng tr-ít trong mãi trêng híp.

VÍ DŨ 2: Thanh hai đầu khớp,

Xét thanh lúc tời hìn cho thanh chĐu lúc nh- h×nh 3.3a.

Lêi gi¶i: Chia thanh thnh 2 o¹n (1vµ 2) nh- (h×nh 3.3b). So¹n 1 ($0 \leq x \leq l_1$), o¹n 2 ($0 \leq x \leq l_2$). Nũu nh- t¹i ióm ($x=l_1$)



cho lõch mét o¹n y_0 nưo ã th× H×nh 3.3. Thanh hai Ớu thanh sĩ bĐ cong i theo Ớ-êng khíp Ớun hải $y_1(x)$ vµ $y_2(x)$ nh-h×nh 3.3b do t,c đõng cĩa lúc m«men uèn Py_1 vµ Py_2 .

Gãi M_{1x}, M_{2x} lµ m«men uèn lÇn l-ít trong thanh 1 vµ 2 lúc nuy tr¹ng th,i c©n b»ng cĩa thanh lµ tr¹ng th,i c©n b»ng nĐn uèn, h×nh 3.3b.

Viõt bióu thøc Ớ-êng Ớé vâng cho c,c o¹n thanh d-ii d¹ng Ớa thøc nh- sau:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \sum_{i=1}^9 a_i x^i = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 \\ Q_1 &= \sum_{i=0}^9 b_i x^i = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + b_5 x^5 + b_6 x^6 \\ y_2 &= \sum_{i=0}^9 c_i x^i = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + c_6 x^6 \\ Q_2 &= \sum_{i=0}^9 d_i x^i = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 + d_4 x^4 + d_5 x^5 + d_6 x^6 \end{aligned} \right\} (a)$$

trong ã a_i, b_i, c_i, d_i lµ c,c hõ sè cÇn x,c Ớnh. Gãi γ lµ biõn d¹ng tr-ít trong thanh

$$\gamma_1 = \frac{\alpha Q_1}{GF}; \quad \gamma_2 = \frac{\alpha Q_2}{GF}$$

Gãi χ lụ biõn d'ng uèn trong thanh

$$\chi_1 = -\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_1}{dx}; \quad \chi_2 = -\frac{d^2 y_2}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_2}{dx}$$

Nh- vÿy trong thanh sĩ cũ néi lúc m«men uèn M_x b»ng

$$M_{x1} = EJ\chi_1; \quad M_{x2} = EJ\chi_2$$

vụ lúc P sĩ g©y ra m«men uèn trong thanh b»ng

$$M_{p1} = Py_1; \quad M_{p2} = Py_2$$

vụ gãc xoay do momen uốn sinh ra

$$\theta_1 = \frac{dy_1}{dx} - \gamma_1 = \frac{dy_1}{dx} - \frac{\alpha Q_1}{GF}; \quad \theta_2 = \frac{dy_2}{dx} - \gamma_2 = \frac{dy_2}{dx} - \frac{\alpha Q_2}{GF}$$

L-ìng c-ìng bc theo (3.19) ®-ìc vit nh- sau:

$$Z = \int_0^{l_1} [M_{x1} - M_{p1}](\chi_1) dx + \int_0^{l_1} Q_1(\gamma_1) dx + \int_0^{l_2} [M_{x2} - M_{p2}](\chi_2) dx + \int_0^{l_2} Q_2(\gamma_2) dx \rightarrow \min$$

(b2)

víi 6 c, c ®iu kin rụng buéc:

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= EJ \left[-\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_1}{dx} \right]_{x=0} = 0; & g_2 &= \left(\frac{dy_1}{dx} - \frac{\alpha Q_1}{GF} \right)_{x=l_1} - \left(\frac{dy_2}{dx} - \frac{\alpha Q_2}{GF} \right)_{x=0} = 0 \\ g_3 &= y_1|_{x=l_1} - y_2|_{x=0} = 0; & g_4 &= EJ \left[-\frac{d^2 y_2}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_2}{dx} \right]_{x=l_2} = 0; & g_5 &= y_2|_{x=l_2} = 0 \\ g_6 &= y_1|_{x=l_1} - y_0 = 0 \end{aligned} \right\} (c)$$

Ta ®-a bụi to, n tm cùc tr ca (b2) cũ 6 ®iu kin rụng buéc (c2) v bụi to, n cùc tr kh«ng cũ rụng buéc b»ng c, ch ®-a tha s Lagrange vụ phim hụm m réng nh- sau:

$$\left. \begin{aligned}
 & F = Z + \sum_{k=1}^6 g_k \lambda_k \rightarrow \min \\
 \text{Hay: } & \int_0^{l_1} [M_{x1} - M_{p1}] (\chi_1) dx + \int_0^{l_1} Q_1 (\gamma_1) dx + \int_0^{l_2} [M_{x2} - M_{p2}] (\chi_2) dx + \int_0^{l_2} Q_2 (\gamma_2) dx + \\
 & + g_1 \lambda_1 + g_2 \lambda_2 + g_3 \lambda_3 + g_4 \lambda_4 + g_5 \lambda_5 + g_6 \lambda_6 \rightarrow \min
 \end{aligned} \right\} \text{(d)}$$

Trong bài: λ_6 là thỏa hệ Lagrange và cùng là hệ của bài toán và bài là lúc đó giv cho hệ trình thức löch. Bài toán của hệ là $a_1, a_2, a_3, \dots, a_6, b_0, b_1, b_2, \dots, b_6, c_0, c_1, c_2, c_3, \dots, c_6, d_0, d_1, d_2, \dots, d_6$ và $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$. Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss xem các biến dạng trên là các lập với các biến động cho các điều kiện cực trị của phiếm hàm mở rộng F là:

$$\left. \begin{aligned}
 h_i &= \int_0^{l_1} [M_{x1} - M_{p1}] \frac{\partial}{\partial a_i} (\chi_1) dx + \frac{\partial}{\partial a_i} \sum_{k=1}^6 (g_k \lambda_k) = 0; a_i (i=1, 2, 3, \dots, 6) \\
 f_i &= \int_0^{l_1} [M_{x1} - M_{p1}] \frac{\partial}{\partial b_i} (\chi_1) dx + \frac{\partial}{\partial b_i} \sum_{k=1}^6 (g_k \lambda_k) + \int_0^{l_1} [Q_1] \frac{\partial}{\partial b_i} (\gamma_1) dx = 0; b_i (i=0, 1, 2, 3, \dots, 6) \\
 k_i &= \int_0^{l_1} [M_{x2} - M_{p2}] \frac{\partial}{\partial c_i} (\chi_2) dx + \frac{\partial}{\partial c_i} (g_k \lambda_k) = 0; c_i (i=0, 1, 2, \dots, 6) \\
 t_i &= \int_0^{l_2} [M_{x2} - M_{p2}] \frac{\partial}{\partial d_i} (\chi_2) dx + \frac{\partial}{\partial d_i} (g_k \lambda_k) + \int_0^{l_2} [Q_2] \frac{\partial}{\partial d_i} (\gamma_2) dx = 0; d_i (i=0, 1, 2, \dots, 6) \\
 u_i &= \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \sum_{k=1}^6 (g_k \lambda_k) = 0; \quad k=1, 2, 3, 4, 5, 6
 \end{aligned} \right\} \text{(e)}$$

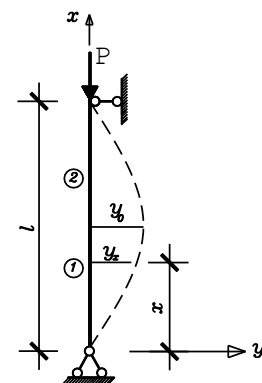
Như vậy, các điều kiện cực trị của phiếm hàm mở rộng F ta sẽ nhận được các phương trình vi phân tuyến tính các hệ là. Các số giv bài toán trên bằng các số động phần mềm Symbolic của Matlab.

Khi gi¶i ph---ng tr×nh xong thÊy r»ng c,c th«ng sè $a_1, a_2, a_3, \dots, a_6, b_0, b_1, b_2, \dots, b_6, c_0, c_1, c_2, c_3, \dots, c_6, d_0, d_1, d_2, \dots, d_6$ vµ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$ ®Òu lµ hµm cña lúc P. ë ®©y chØ ®-a ra gi, trÞ cña thõa sè Lagrange λ_6 . Khi tØ sè $h/l=1/1000$ (øng víi khi kh«ng xÐt ®Õn biÕn d¹ng tr-ít), ta cã:

$$\lambda_6 = .27778 \times 10^9 e_j y_0 (.2502910^{73} e_j^{16} + .72390 \times 10^{16} p^{16} l^{32} - .44612 \times 10^{44} e_j^5 p^{11} l^{22} + .20784 \times 10^{67} e_j^{12} p^4 l^8 + .60434 \times 10^{48} e_j^6 p^{10} l^{20} - .41454 \times 10^{52} e_j^7 p^9 l^{18} + .15560 \times 10^{71} e_j^{14} p^2 l^4 + .14130 \times 10^{56} e_j^8 p^8 l^{16} - .8765 \times 10^{64} e_j^{11} p^5 l^{10} - .23564 \times 10^{59} e_j^9 p^7 l^{14} + .19792 \times 10^{62} e_j^{10} p^6 l^{12} - .38395 \times 10^{72} e_j^{15} p l^2 - .69992 - .16447 \times 10^{40} e_j^4 p^{12} l^{24} - .25802 \times 10^{69} e_j^{13} p^3 l^6) = 0 \quad (f)$$

Ta thÊy r»ng trong tr-êng hîp nµy, λ_6 lµ ®a thøc bËc 12 cña P. Gi¶i (f) theo P ta sÿ nhËn ®-íc 12 nghiÖm. C, ch gi¶i ph---ng tr×nh (f) nh- ®· tr×nh bµy ë ch---ng 1, ta cã thÓ dïng ph---ng ph, p lÆp Newton hoÆc ph---ng ph, p C,t tuyÕn ®Ó gi¶i. ë ®©y ta dïng ch---ng tr×nh s¸n cã cña Matlab ®Ó gi¶i.

Gi¶i ph---ng tr×nh ($\lambda_6=0$) theo P ta nhËn ®-íc 12 nghiÖm lµ 12 lúc tíi h¹n P_{th} cña hÖ, ë ®©y chØ ®-a ra mét nghiÖm ®Çu tiªn lÇn l-ít lµ: $P_{1th} = 9.8696 \frac{EJ}{l^2}$;



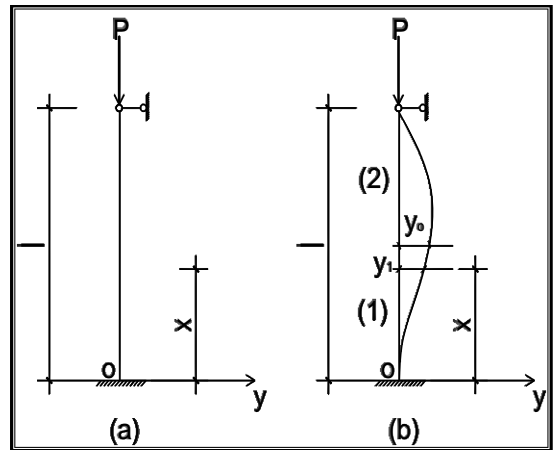
H×nh 3.4§-êng ®é vµng

Dạng của trục văng (vĐc trục riêng) tương ứng với trục tải chính xác (trục riêng chính xác) được thể hiện như hình 3.4.

VÍ DỤ 3: Thanh chịu tải - chịu khớp:

Trục tải chính xác cho thanh chịu tải như (hình 3.5a).

Lưu ý: Chia thanh thành 2 phần 1 và 2 như hình 3.5. Phần 1 ($0 \leq x \leq l_1$), phần 2 ($0 \leq x \leq l_2$). Nếu như tại điểm



($x=l_1$) cho lệch một phần y_0 Hình 3.5. Thanh chịu tải đã chia thành hai phần khớp nối theo trục tải chính xác $y_1(x)$ và $y_2(x)$ như hình 3.5b do tác động của tải trọng P và P .

Giải M_{1x} , M_{2x} là tải trọng nội lực trong thanh 1 và 2 lúc này trục tải chính xác của thanh là trục tải chính xác nên (hình 3.5b).

Viết biểu thức trục tải chính xác cho các phần thanh dưới dạng các thức như sau:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \sum_{i=1}^9 a_i x^i = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 \\ Q_1 &= \sum_{i=0}^9 b_i x^i = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + b_5 x^5 + b_6 x^6 \\ y_2 &= \sum_{i=1}^9 c_i x^i = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + c_6 x^6 \\ Q_2 &= \sum_{i=0}^9 d_i x^i = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 + d_4 x^4 + d_5 x^5 + d_6 x^6 \end{aligned} \right\} \text{(a3)}$$

trong đó a_i, b_i, c_i, d_i là các hằng số cho trước.

Biến dạng trục γ trong các điều kiện

$$\gamma_1 = \frac{\alpha Q_1}{GF}; \quad \gamma_2 = \frac{\alpha Q_2}{GF}$$

Biến dạng uốn χ trong các điều kiện

$$\chi_1 = -\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_1}{dx}; \quad \chi_2 = -\frac{d^2 y_2}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_2}{dx}$$

Như vậy trong thanh sẽ có nội lực moment uốn M_x bằng

$$M_{x1} = EJ\chi_1; \quad M_{x2} = EJ\chi_2$$

và lực P sẽ gây ra moment trong thanh bằng

$$M_{p1} = Py_1; \quad M_{p2} = Py_2$$

và góc xoay do moment uốn sinh ra

$$\theta_1 = \frac{dy_1}{dx} - \gamma_1 = \frac{dy_1}{dx} - \frac{\alpha Q_1}{GF}; \quad \theta_2 = \frac{dy_2}{dx} - \gamma_2 = \frac{dy_2}{dx} - \frac{\alpha Q_2}{GF}$$

Lên đây cũng có thể theo (3.19) viết như sau:

$$Z = \int_0^{l_1} [M_{x1} - M_{p1}](\chi_1) dx + \int_0^{l_1} Q_1(\gamma_1) dx + \int_0^{l_2} [M_{x2} - M_{p2}](\chi_2) dx + \int_0^{l_2} Q_2(\gamma_2) dx \rightarrow \min$$

(b)

với 6 điều kiện ràng buộc:

$$\left. \begin{aligned}
g_1 = \left(\frac{dy_1}{dx} - \frac{\alpha Q_1}{GF} \right) \Big|_{x=0} = 0; g_2 = \left(\frac{dy_1}{dx} - \frac{\alpha Q_1}{GF} \right) \Big|_{x=1} - \left(\frac{dy_2}{dx} - \frac{\alpha Q_2}{GF} \right) \Big|_{x=0} = 0; g_3 = y_1 \Big|_{x=1} - y_2 \Big|_{x=0} = 0; \\
g_4 = EJ \left[-\frac{d^2 y_2}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ_2}{dx} \right] \Big|_{x=l_2} = 0; g_5 = y_2 \Big|_{x=l_2} = 0; g_6 = y_1 \Big|_{x=l_1} - y_0 = 0
\end{aligned} \right\}$$

(c)

Ta ®-a bµi to,n t×m c¼c trÞ ca (b3) c 6 ®iu kin r¼ng buéc (c3) v bµi to,n c¼c trÞ kh«ng c r¼ng buéc b»ng c, ch ®-a tha s Lagrange vµo phim h¼m m rng nh- sau:

$$\left. \begin{aligned}
F = Z + \sum_{k=1}^6 g_k \lambda_k \rightarrow \min \\
\text{Hay: } \int_0^{l_1} [M_{x_1} - M_{p_1}](\chi_1) dx + \int_0^{l_1} Q_1(\gamma_1) dx + \int_0^{l_2} [M_{x_2} - M_{p_2}](\chi_2) dx + \int_0^{l_2} Q_2(\gamma_2) dx + \\
+ g_1 \lambda_1 + g_2 \lambda_2 + g_3 \lambda_3 + g_4 \lambda_4 + g_5 \lambda_5 + g_6 \lambda_6 \rightarrow \min
\end{aligned} \right\}$$

(d)

Trong ®: λ_6 l¼ tha s Lagrange vµ cng l¼ Èn ca bµi to,n vµ ® l¼ l¼c ® gi÷ cho h ã tr¼ng th,i lch. Bµi to,n c 33 Èn s l¼ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9, b_0, b_1, b_2, \dots, b_9, c_0, c_1, c_2, c_3, \dots, c_6, d_0, d_1, d_2, \dots, d_6$ vµ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$. Ph-ng ph, p nguyn lý c¼c trÞ Gauss xem c, c bin d¼ng un l¼ ®c lp vi m«men t, c dng cho nn ®iu kin c¼c trÞ ca phim h¼m m rng F l¼:

$$\left. \begin{aligned}
h_i &= \int_0^l [M_{x1} - M_{p1}] \frac{\partial}{\partial a_i} (\chi_1) dx + \frac{\partial}{\partial a_i} \sum_{k=1}^6 (g_k \lambda_k) = 0; a_i (i = 1, 2, 3, \dots, 6) \\
f_i &= \int_0^l [M_{x1} - M_{p1}] \frac{\partial}{\partial b_i} (\chi_1) dx + \frac{\partial}{\partial b_i} \sum_{k=1}^6 (g_k \lambda_k) + \int_0^l [Q_1] \frac{\partial}{\partial b_i} (\gamma_1) dx = 0; b_i (i = 0, 1, 2, 3, \dots, 6) \\
k_i &= \int_0^l [M_{x2} - M_{p2}] \frac{\partial}{\partial c_i} (\chi_2) dx + \frac{\partial}{\partial c_i} (g_k \lambda_k) = 0; c_i (i = 0, 1, 2, \dots, 6) \\
t_i &= \int_0^l [M_{x2} - M_{p2}] \frac{\partial}{\partial d_i} (\chi_2) dx + \frac{\partial}{\partial d_i} (g_k \lambda_k) + \int_0^l [Q_2] \frac{\partial}{\partial d_i} (\gamma_2) dx = 0; d_i (i = 0, 1, 2, \dots, 6) \\
u_i &= \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \sum_{k=1}^6 (g_k \lambda_k) = 0; \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6.
\end{aligned} \right\}$$

(e)

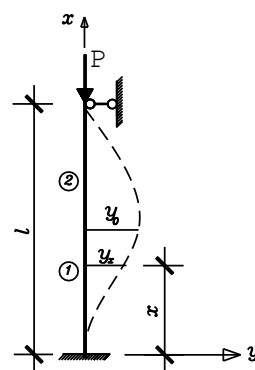
Nh- vËy, tã ÒiÒu kiÒn cùc trË cña phiÕm hÛm mÛ rÉng F ta sÏ nhËn Ò-íc 33 ph--ng tr×nh Ò¹i sÈ tuyÕn tÝnh ÒÓ x, c ÒËnh c, c Ën sÈ. Cã thÓ giÏi bÛi to,n tr^an b»ng c, ch sã dõng phÇn mÒm Symbolic cña Matlab. Khi giÏi ph--ng tr×nh xong thËy r»ng c, c th«ng sÈ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_6, b_0, b_1, b_2, \dots, b_6, c_0, c_1, c_2, c_3, \dots, c_6, d_0, d_1, d_2, \dots, d_6$ vµ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$ Òu lÛ hÛm cña lÛc P. Ë ÒÛy chØ Ò-a ra gi, trË cña thõa sÈ Lagrange λ_6 . Khi tØ sÈ $h/l=1/1000$ (øng víi khi kh«ng xÐt ÒÕn biÕn d¹ng tr-ít), ta cã:

$$\begin{aligned}
\lambda_6 &= 2777.8 (.11596 \times 10^{45} e^{j^4} p^{13} l^{26} - \\
&.91910 \times 10^{49} e^{j^5} p^{12} l^{24} + .33502 \times 10^{54} e^{j^6} p^{11} l^{22} - \\
&.61348 \times 10^{58} e^{j^7} p^{10} l^{20} + .57778 \times 10^{62} e^{j^8} p^9 l^{18} - \\
&.27586 \times 10^{66} e^{j^9} p^8 l^{16} + .64944 \times \\
&10^{69} e^{j^{10}} p^7 l^{14} - .75431 \times 10^{72} e^{j^{11}} p^6 l^{12} + .45183 \times 10^{75} e^{j^{12}} p^5 l^{10} - .14389 \\
&\times 10^{78} e^{j^{13}} p^4 l^8 + \\
&.24221 \times 10^{80} e^{j^{14}} p^3 l^6 - .2045 \times 10^{82} e^{j^{15}} p^2 l^4 + .7581 \times 10^{83} e^{j^{16}} p l^2 - \\
&.8740 \times 10^{84} e^{j^{17}}) = 0 \quad (f)
\end{aligned}$$

Ta thấy rằng trong trường hợp này, λ_6 phụ thuộc vào các đặc tính của P. Giá trị (f3) theo P ta sẽ nhận được các nghiệm. Sẽ lấy các lực tới hạn P_{th} của trục và của ổ, để suy ra các nghiệm cụ thể như:

$$P_{1th} = 20.1907 \frac{EJ}{l^2} D^3 \text{ của}$$

trục và ổ (với trục và ổ) trục và ổ với lực tới hạn chính xác (trục và ổ chính xác) cụ thể như hình 3.6.



Hình 3.6. Trường hợp trục và ổ

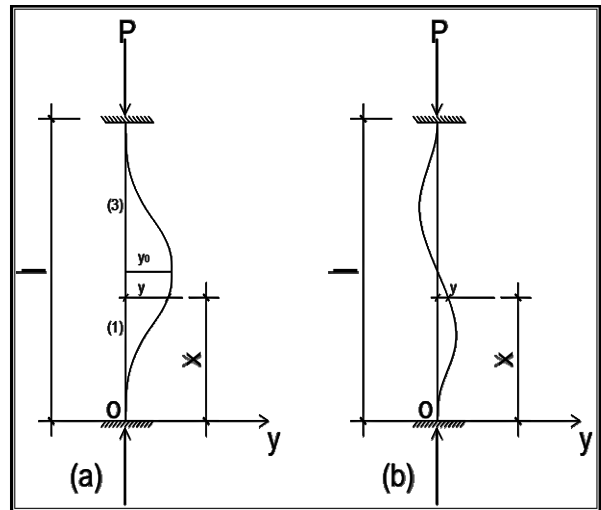
Bảng 3.1. So sánh kết quả tính lực tới hạn trong hai trường hợp cả xđt và không xđt biến dạng trục của thanh cụ thể - cụ thể

Tỷ lệ h/l	Phần lệch (%) trường hợp tính lực tới hạn cả xđt so với không xđt biến dạng trục				
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1/10	0,33	0,37	0,35	0,31	5,49
1/5	1,48	1,46	1,43	1,59	7,86
1/3	4,05	4,08	4,01	4,16	10,74

VÍ DŨ 4: Thanh hai Ớu ngũm

X, c Ớnh lúc tii h^n cho thanh chĐu nĐn Ớng tCm hai Ớu li^n kỐt ngũm vũ chĐu lúc P, h×nh 3.7a.

T--ng tũ nh-c, c vÝ dũ tr^n, ta viỐt Ớ-íc biỚu thøc Ớ-êng Ớ-ẽ vâng cho c, c Ớn thanh d-ii d'ng Ớa thøc nh-sau:



H×nh 3.7. Thanh hai Ớu ngũm

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \sum_{i=1}^9 a_i x^i = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 \\ Q_1 &= \sum_{i=0}^9 b_i x^i = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + b_5 x^5 + b_6 x^6 \\ y_2 &= \sum_{i=0}^9 c_i x^i = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + c_6 x^6 \\ Q_2 &= \sum_{i=0}^9 d_i x^i = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 + d_4 x^4 + d_5 x^5 + d_6 x^6 \end{aligned} \right\} (a)$$

trong Ớã a_i, b_j, c_i, d_i lũ c, c hũ s- cĐn x, c Ớnh.

L-ĩng c-ĩng bøc theo (3.19) Ớ-íc viỐt nh- sau:

$$Z = \int_0^{l_1} [M_{x_1} - M_{P_1}] (\chi_1) dx + \int_0^{l_1} Q_1 (\gamma_1) dx + \int_0^{l_2} [M_{x_2} - M_{P_2}] (\chi_2) dx + \int_0^{l_2} Q_2 (\gamma_2) dx \rightarrow \min$$

(b)

vii 6 c, c Ớiũu kiũn rũng bu-ec:

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= \left(\frac{dy_1}{dx} - \frac{\alpha Q_1}{GF} \right) \Big|_{x=0} = 0; & g_2 &= \left(\frac{dy_1}{dx} - \frac{\alpha Q_1}{GF} \right) \Big|_{x=l_1} - \left(\frac{dy_2}{dx} - \frac{\alpha Q_2}{GF} \right) \Big|_{x=0} = 0 \\ g_3 &= y_1 \Big|_{x=l_1} - y_2 \Big|_{x=0} = 0; & g_4 &= \left(\frac{dy_2}{dx} - \frac{\alpha Q_2}{GF} \right) \Big|_{x=l_2} = 0; & g_5 &= y_2 \Big|_{x=l_2} = 0 \\ g_6 &= y_1 \Big|_{x=l_1} - y_0 = 0 \end{aligned} \right\} (c)$$

Ta ®-a bµi to,n t×m cùc trÞ cña (b4) cã 6 ®iÒu kiÖn rýng buéc (c) vÒ bµi to,n cùc trÞ kh«ng cã rýng buéc b»ng c, ch ®-a thõa sè Lagrange vµ phiÖm hµm mē réng nh- sau:

$$\left. \begin{aligned} F &= Z + \sum_{k=1}^6 g_k \lambda_k \rightarrow \min \\ \text{Hay: } & \int_0^{l_1} [M_{x_1} - M_{p_1}](\chi_1) dx + \int_0^{l_1} Q_1(\gamma_1) dx + \int_0^{l_2} [M_{x_2} - M_{p_2}](\chi_2) dx + \int_0^{l_2} Q_2(\gamma_2) dx + \\ & + g_1 \lambda_1 + g_2 \lambda_2 + g_3 \lambda_3 + g_4 \lambda_4 + g_5 \lambda_5 + g_6 \lambda_6 \rightarrow \min \end{aligned} \right\} (d)$$

Trong ®ã: λ_6 lµ thõa sè Lagrange vµ còng lµ Èn cña bµi to,n vµ ®ã lµ lúc ®Ó gi÷ cho hÖ ã tr¹ng th,i lÖch. Bµi to,n cã 45 Èn sè lµ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_6, b_0, b_1, b_2, \dots, b_6, c_0, c_1, c_2, c_3, \dots, c_6, d_0, d_1, d_2, \dots, d_6$ vµ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$. Ph-ång ph, p nguyªn lý cùc trÞ Gauss xem c, c biÖn d¹ng uèn lµ ®éc lËp víi m«men t, c dông cho nªn ®iÒu kiÖn cùc trÞ cña phiÖm hµm mē réng F lµ:

$$\left. \begin{aligned}
h_i &= \int_0^{l_1} [M_{x1} - M_{p1}] \frac{\partial}{\partial a_i} (\chi_1) dx + \frac{\partial}{\partial a_i} \sum_{k=1}^6 (g_k \lambda_k) = 0; a_i (i=1, 2, 3, \dots, 6) \\
f_i &= \int_0^{l_1} [M_{x1} - M_{p1}] \frac{\partial}{\partial b_i} (\chi_1) dx + \frac{\partial}{\partial b_i} \sum_{k=1}^6 (g_k \lambda_k) + \int_0^{l_1} [Q_1] \frac{\partial}{\partial b_i} (\gamma_1) dx = 0; b_i (i=0, 1, 2, 3, \dots, 6) \\
k_i &= \int_0^{l_1} [M_{x2} - M_{p2}] \frac{\partial}{\partial c_i} (\chi_2) dx + \frac{\partial}{\partial c_i} (g_k \lambda_k) = 0; c_i (i=0, 1, 2, \dots, 6) \\
t_i &= \int_0^{l_2} [M_{x2} - M_{p2}] \frac{\partial}{\partial d_i} (\chi_2) dx + \frac{\partial}{\partial d_i} (g_k \lambda_k) + \int_0^{l_2} [Q_2] \frac{\partial}{\partial d_i} (\gamma_2) dx = 0; d_i (i=0, 1, 2, \dots, 6) \\
u_i &= \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \sum_{k=1}^6 (g_k \lambda_k) = 0; \quad k=1, 2, 3, 4, 5, 6
\end{aligned} \right\} (e)$$

Nh- vËy, tÕ ÒiÒu kiÒn cùc trË cña phiÕm hÛm mÛ rÉng F ta sÏ nhËn Ò-íc 33 ph--ng tr×nh Ò¹i sÈ tuyÕn tÝnh ÒÓ x,c ÒËnh c,c Ën sÈ. Cã thÓ giËi bÛi to,n trªn b»ng c, ch sÖ dÕng phÇn mÒm Symbolic cña Matlab. Khi giËi ph--ng tr×nh xong thËy r»ng c,c th«ng sÈ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_6, b_0, b_1, b_2, \dots, b_6, c_0, c_1, c_2, c_3, \dots, c_6, d_0, d_1, d_2, \dots, d_6$ vµ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$ Òu lÛ hÛm cña lÛc P. Ë ÒÛy chØ Ò-a ra gi, trË cña thõa sÈ Lagrange λ_6 . Khi tÕ sÈ $h/l=1/1000$ (øng víi khi kh«ng xĐt ÒÕn biÕn d¹ng tr-ít), ta cã:

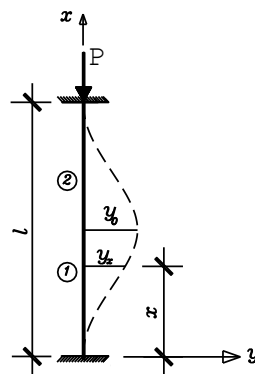
$$\begin{aligned}
\lambda_6 &= -.27778 \times 10^9 (.97663 e^{39} x^{26} p^{13} e^{j^3} + .78445 \quad x^{10^{44}} x^{24} p^{12} e^{j^4} - \\
&.29005 \quad x^{10^{49}} x^{22} p^{11} e^{j^5} + .54209 \quad x^{10^{53}} x^{20} p^{10} e^{j^6} - .52785 \\
&x^{10^{57}} x^{18} p^9 e^{j^7} + .26715 \quad x^{10^{61}} x^{16} p^8 e^{j^8} - .69703 \\
&x^{10^{64}} x^{14} p^7 e^{j^9} + .95246 x \quad 10^{67} x^{12} p^6 e^{j^{10}} - \\
&.70260 x^{10^{70}} x^{10} p^5 e^{j^{11}} + .28323 x^{10^{73}} x^8 e^{j^{12}} p^4 - \\
&.61903 x^{10^{75}} x^6 e^{j^{13}} p^3 + \\
&.70298 x^{10^{77}} x^4 e^{j^{14}} p^2 - .37198 x^{10^{79}} x^2 e^{j^{15}} p + .69135 x^{10^{80}} e^{j^{16}}) = 0
\end{aligned}$$

(f)

Ta thấy rằng trong trường hợp này, λ_6 phụ thuộc bậc 13 của P. Giá trị (f) theo P ta sẽ nhận được 13 nghiệm. Sẽ lấy các lực tới hạn P_{th} của trục của nó, để suy ra các giá trị nghiệm cụ thể là:

$$P_{1th} = 39.4784 \frac{EJ}{l^2} \text{ Định của}$$

trục văng (vật thể rời rạc) tương ứng với lực tới hạn chính xác (trên trục chính xác) cụ thể như hình 3.8.



Hình 3.8. Trường hợp văng

3.6. Nhận xét chung 3:

Từ các giá trị P_{th} được tính bằng lý thuyết biến dạng trục ngang để tìm ra các giá trị P_{th} của trục của nó. Các giá trị này phụ thuộc vào các đặc tính của thanh. Các giá trị này phụ thuộc vào các đặc tính của thanh. Nhưng nghiệm của nó về các giá trị của trục của nó, cần biết thêm các giá trị cho thấy: Lực tới hạn Euler của thanh khi biến dạng trục ngang nhỏ hơn so với trường hợp không biến dạng trục ngang.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Qua kết quả nghiên cứu tác giả rút ra kết luận sau:

1. Tác giả đã áp dụng thành công phương pháp nguyên lý cực trị Gauss và lý thuyết dầm có xét biến dạng trượt ngang đối với các bài toán ổn định của thanh, đã tìm được kết quả quan trọng của bài toán ổn định là lực tới hạn.

2. Tác giả đã áp dụng được phương pháp chuyển vị cưỡng bức cho bài toán ổn định đàn hồi của thanh chịu uốn dọc có xét đến biến dạng trượt. Bằng phép tính biến phân đưa phương trình vi phân không có vế phải về phương trình vi phân có vế phải bằng cách cho một điểm tựa trong thanh, ví dụ điểm $x=x_1$, một chuyển vị y_0 : từ đó chứng minh được rằng phương trình $\lambda=0$ (phương trình vế phải) là phương trình xác định trị riêng. Đối với bài toán ổn định tĩnh thì các trị riêng tìm được là các lực tới hạn P_{th} . Dùng phương pháp chuyển vị cưỡng bức có giá trị bị toán học để phân tích thanh cho ta ngay phương trình của thức xác định lực tới hạn, trên sẽ dao động và trên sẽ tới hạn của thanh mà không phải thông qua các phép biến đổi phức tạp của ma trận và ma trận riêng chẵn.

- Đã xác định được lực tới hạn cho các thanh có các điều kiện biên khác nhau có kể đến biến dạng trượt ngang. Kết quả tính toán lực tới hạn của thanh khi không xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt (trường hợp tỉ số $h/l=1/1000$) đều trùng khớp với kết quả nhận được khi giải bằng các phương pháp hiện có.

- Lực tới hạn khi xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt đều nhỏ thua lực tới hạn khi không xét biến dạng trượt. Lực tới hạn nhận được của thanh trong hai trường hợp có xét và không xét biến dạng trượt sai khác nhau đáng kể.

kiỐn nghĐ vÒ nh÷ng nghi^an cøu tiỐp theo

Dùng các kết quả tính toán lực tới hạn, của kết cấu thanh có xét biến dạng trượt để đưa vào thiết kế các công trình. Qua kết quả nghiên cứu thấy rằng, với việc sử dụng lý thuyết đầy đủ về dầm và dùng phương pháp Nguyên lý cực trị Gauss có thể xây dựng bài toán ổn định tĩnh, một cách dễ dàng. Vì vậy, nên xét biến dạng trượt trong mọi trường hợp.

Danh mục tài liệu tham khảo

I. TIÕNG VIÖT

[1] Hù Huy C--ng (2005), *Ph--ng ph.p nguy^an lý cùc trĐ Gauss*, T¹p chÝ Khoa hãc vù kü thuËt, IV/ Tr. 112 ÷118.

[2] NguyÔn V`n Li^an, NguyÔn Ph--ng Thùnh, Sinh Trãng B»ng (2003), *Gi.o tr×nh Sòc bòn vËt liÖu*, Nhù xuËt b¶n x©y dùng, t,i b¶n lçn thø 3, 330 trang.

[3] NguyÔn Ph--ng Thùnh(2002), *Nghi^an cøu tr¹ng th,i øng suËt - biÕn d¹ng tÊm nhiÒu líp chĐu t¶i trãng ®éng cũ xĐt lúc ma s,t ë c,c mËt tiÕp xóc*, LuËn ,n tiÕn sù kü thuËt.

[4] V--ng Ngãc L-u(2002), *Nghi^an cøu tr¹ng th,i øng suËt - biÕn d¹ng cũa tÊm sụn Sandwich chĐu t¶i trãng tÛnh vù ®éng*, LuËn ,n tiÕn sù kü thuËt.

[5] TrÇn H÷u Hù (2006), *Nghi^an cøu búi to,n t--ng t,c gi÷a các vù nòn d-íi t,c dõng cũa t¶i trãng*, LuËn ,n tiÕn sù kü thuËt.

[6] Ph¹m V`n Trung (2006), *Ph--ng ph.p míi TÝnh to,n hõ d©y vù m,i treo*, LuËn ,n TiÕn sù kü thuËt.

[7] Vò Høng HiÖp (2007), *Nghi^an cøu tr¹ng th,i øng suËt - biÕn d¹ng cũa dçm nhiÒu líp chĐu t¶i tÛnh vù ®éng*, LuËn ,n tiÕn sù kü thuËt, Hù néi.

[8] NguyÔn V`n S¹o (2001), *C- hãc gi¶i tÝch*, Nhù xuËt b¶n S¹i hãc Quèc gia Hù néi, 337 trang.

[9] NguyÔn V`n S¹o, TrÇn Kim Chi, NguyÔn Dòng (2005), *NhËp m«n Ség lúc hãc phi tuyõn vù chuyón ®éng hçn ®én*. Nhù xuËt b¶n S¹i hãc Quèc gia Hù néi.

- [10] Lòu Thă Tr×nh, Sç V"n B×nh(2006), *Gi, o tr×nh æn ®Ēnh c«ng tr×nh*, Nhự xuĒt b¶n Khoa hăc kü thuĒt.
- [11] Vò Houng HiÖp (2008), *TÝnh kÕt cĒu cũ xĐt biÕn d'ng tr-ít*, T'p chÝ x©y dùng sè 7.
- [12] Sọn V"n DuÈn, NguyÔn Ph--ng Thụnh (2007), *Ph--ng ph,p mii tÝnh to,n æn ®Ēnh cũa thanh*, T'p chÝ X©y dùng sè 12 (Tr41-Tr44).
- [13] Sọn V"n DuÈn (2007), *Ph--ng ph,p nguy^an lý Cùc trĐ Gauss ®èi víi c,c bụi to,n æn ®Ēnh c«ng tr×nh*, LuĒn v"n th¹c sũ kü thuĒt.
- [14] Sọn V"n DuÈn (2008), *Ph--ng ph,p mii tÝnh to,n æn ®Ēnh cũa khung*, T'p chÝ X©y dùng sè 01 (Tr35-Tr37).
- [15] Sọn V"n DuÈn (2008), *Nghi^an cøu æn ®Ēnh uèn dăc cũa thanh cũ xĐt biÕn d'ng tr-ít*, T'p chÝ X©y dùng sè 12 (Tr33-Tr37).
- [16] Sọn V"n DuÈn (2009), *Ph--ng ph,p nghi^an cøu æn ®Ēnh tæng thÓ cũa dụn*, T'p chÝ X©y dùng sè 03 (Tr86-Tr89).
- [17] Sọn V"n DuÈn (2010), *Ph--ng ph,p phÇn tũ h÷u h¹n nghi^an cøu æn ®Ēnh uèn dăc cũa thanh*, T'p chÝ kÕt cĒu vụ C«ng nghö x©y dùng, sè 05, Quý IV(Tr30-Tr36).
- [18] Sọn V"n DuÈn (2011), *Nghi^an cøu æn ®Ēnh ®ụn hải cũa kÕt cĒu hũ thanh cũ xĐt ®Õn biÕn d'ng tr-ít*, LuĒn ,n TiÕn sũ kü thuĒt.

- [19] Sọpn V"n DuÈn (2012), *Ph--ng ph,p míi tÝnh to,n d©y mòm, T¹p chÝ kt cÊu vµ c«ng ngh X©y dùng sè 09, Quý II (Tr56-Tr61).*
- [20] Sọpn V"n DuÈn (2014), *Ph--ng ph,p chuyn vĐ c-ìng bc gi¶i búi to,n trĐ riªng vµ vĐc t-riªng, T¹p chÝ X©y dùng sè 11 (Tr82-Tr84).*
- [21] Sọpn V"n DuÈn (2015), *Ph--ng ph,p míi nghiªn cu æn ®¶nh ®éng lúc hãc cªa thanh, T¹p chÝ X©y dùng sè 01 (Tr86-Tr88).*
- [22] Sọpn V"n DuÈn (2015), *Búi to,n c- hãc kt cÊu d-ii d'ng tæng qu,t, T¹p chÝ X©y dùng sè 02 (Tr59-Tr61).*
- [23] Sọpn V"n DuÈn (2015), *Ph--ng ph,p so s,nh nghiªn cu néi lúc vµ chuyn vĐ cªa h dÇm, T¹p chÝ X©y dùng sè 11 (Tr56-Tr58).*
- [24] Sọpn V"n DuÈn (2015), *TÝnh to,n kt cÊu khung chĐu uèn b»ng ph--ng ph,p so s,nh, T¹p chÝ X©y dùng sè 12 (Tr62-Tr64).*
- [25] TrÇn ThĐ Kim Hu (2005), *Ph--ng ph,p nguyªn lý Cùc trĐ Gauss ®èi víi c,c búi to,n c- hãc kt cÊu, LuÈn v"n th¹c sù kü thuÈt.*
- [26] Nguyn ThĐ Liªn (2006), *Ph--ng ph,p nguyªn lý Cùc trĐ Gauss ®èi víi c,c búi to,n ®éng lúc hãc c«ng trình, LuÈn v"n th¹c sù kü thuÈt.*
- [27] V Thanh Thy (2009), *X©y dùng búi to,n dÇm khi xĐt ©Çy ®ñ hai thụng phÇn néi lúc momen vµ lúc ct. T¹p chÝ X©y dùng sè 4.*

[28] Võ Thanh Thủy (2009), *Dao động từ do của dầm khi xét ảnh hưởng của lực cắt*. Tập chí XÂY DỰNG, số 7.

[29] Timoshenko C.P, Voinăpki- Krige X, (1971), *TỔM VỤ VÁ*. Ng-êi dPch, Phím Hằng Giang, Võ Thụnh HŨi, Sọn H÷u Quang, Nxb Khoa hăc vụ kü thuËt, Hụ Néi.

II. TIÕNG PH.P

[30] Robert L'Hermite (1974), *Flambage et StabilitĐ - Le flambage Đlastique des piËces droites*, Đdition Eyrolles, Paris.

III. TIÕNG ANH

[31] Stephen P.Timoshenko-Jame M.Gere (1961), *Theory of elastic stability*, McGraw-Hill Book Company, Inc, New york - Toronto - London, 541 Tr.

[32] William T.Thomson (1998), *Theory of Vibration with Applications* (T,i bŨn lÇn thø 5). Stanley Thornes (Publishers) Ltd, 546 trang.

[33] Klaus - Jurgen Bathe (1996), *Finite Element procedures*. Part one, Prentice - Hall International, Inc, 484 trang.

[34] Klaus - Jurgen Bathe (1996), *Finite Element procedures*. Part two, Prentice - Hall International, Inc, 553 trang.

- [35] Ray W.Clough, Joseph Penzien(1993), *Dynamics of Structures* (T,i b¶n l¶n thø 2), McGraw-Hill Book Company, Inc, 738 trang.
- [36] O.C. Zienkiewicz-R.L. Taylor (1991), *The finite element method* (four edition) Volume 2, McGraw-Hill Book Company, Inc, 807 trang.
- [37] G.Korn-T.Korn (1961), *Mathematical Handbook for sientists and Engineers*, McGraw-Hill, New york (B¶n d¶ch tiÕng Nga, I.Bramovich chñ bi^an, Nhự xuÊt b¶n Nauka-Moscow, 1964).
- [38] Stephen P.Timoshenko-J. Goodier (1970), *Theory of elasticity*, McGraw-Hill, New york (B¶n d¶ch tiÕng Nga, G. Shapiro chñ bi^an, Nhự xuÊt b¶n Nauka-Moscow, 1979), 560 trang.
- [39] D.R.J. Owen, E.Hinton (1986), *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*,Pineridge Press Lt.
- [40] Lars Olovsson, Kjell Simonsson, Mattias Unosson (2006), *Shear locking reduction in eight-node tri-linear solid finite elements*,J. 'Computers @ Structures',84,trg 476-484.
- [41] C.A.Brebbia, J.C.F.Telles, L.C.Wrobel(1984), *Boundary Element Techniques. Theory and Applications in Engineering*. Nxb Springer - Verlag.(B¶n d¶ch tiÕng Nga, 1987).
- [42] Chopra Anil K (1995). *Dynamics of structures*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New - Jersey 07632.

- [43] Wilson Edward L. Professor Emeritus of structural Engineering University of California at Berkeley (2002). *Three - Dimensional Static and Dynamic Analysis of structures*, Inc. Berkeley, California, USA. Third edition, Reprint January.
- [44] Wilson, E. L., R. L. Taylor, W. P. Doherty and J. Ghaboussi (1971). "*Incompatible Displacement Models*", Proceedings, ORN Symposium on "Numerical and Computer Method in Structural Mechanics". University of Illinois, Urbana. September. Academic Press.
- [45] Strang, G (1972). "*Variational Crimes in the Finite Element Method*" in "The Mathematical Foundations of the Finite Element Method". P.689 - 710 (ed. A.K. Aziz). Academic Press.
- [46] Irons, B. M. and O. C. Zienkiewicz (1968). "*The isoparametric Finite Element System - A New Concept in Finite Element Analysis*", Proc. Conf. "Recent Advances in Stress Analysis". Royal Aeronautical Society. London.
- [47] Kolousek Vladimir, DSC Professor, Technical University, Pargue (1973). *Dynamics in engineering structures*. Butter worths London.
- [48] Felippa Carlos A (2004). *Introduction of finite element methods*. Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures

University of Colorado Boulder, Colorado 80309-0429, USA, Last updated Fall.

[49] Wang C.M, Reddy J.N, Lee K.H.(2000), *Shear deformable beams and plates - Relationships with Classical Solutions*. ELSEVIER, Amsterdam - Lausanne-New York - Oxford - Shannon - Singapore - Tokyo.

[50] Barbero Ever J, Department of Mechanics & Aerospace Engineering, West Virginia University, USA (1999), *Introduction to Composite Materials Design*. Taylor and Francis.

[51] Decolon C (2002). *Analysis of Composite Structures*. Hermes Penton, Ltd, UK.

[52] Fu-le Li, ZHI-zhong Sun, Corresponding author, Department of Mathematics, Shoutheast University, Nanjing 210096, PR China (2007). *A finite difference scheme for solving the Timoshenko beam equations with boundary feedback*. Journal of Computational and applied Mathematics 200, 606 - 627, Elsevier press. Available online at www.sciencedirect.com.

[53] Khaji N., Corresponding author, Shafiei M., Civil Engineering Department Tarbiat Modares University, P. O. Box 14155-4838, Tehran, Iran ((2009)). *Closed - form solutions for crack detection problem of Timoshenko beams with various boundary conditions*. International Journal of Mechanical Sciences 51, 667-681. Contents lists

available at Science Direct journal homepage:
www.elsevier.com/locate/ijmecsci.

[54] Antes H. Institute of Applied Mechanics, University Carolo Wilhelmina, D-38023Braunschweig, Germany (2003). *Fundamental solution and integralequations for Timoshenko beams*. Computers and Structures 81, 383-396. Pergamon press. Available online at www.sciencedirect.com.

[55] Nguyen Dinh Kien (2007). *Free Vibration of prestress Timoshenko beams resting on elastic foundation*. Viet nam Journal of Mechanics, VAST, Vol.29, No. 1, pp. 1-12.

[56] Grawford F (1974). *Waves*, Berkeley physics course, volume 3. McGraw - hill Book Company.

Iv. TIÕNG nga

[57] М. А. Айзерман (1980), *КлассиЧескаямеханика, Москва*.

[58] КиселевВ. А (1969).*Строительнаямеханика - Специальныйкурс. Стройздат, Москва*.

[59] П. С. Полак (1959),*Вариационные принципымеханики, Москва*.

[60] КиселевВ. А (1980).*Строительнаямеханика - Специальныйкурс. Стройздат, Москва*.

[61] А. А. Чирас (1989), *Строительнаямеханика, Стройздат, Москва*.

[62] Г. КАУДЕРЕР (1961), *НЕЛИНЕЙНАЯ МЕХАНИКА, МОСКВА*.